AS
222
R63
SER.6
v.7
1928
PER

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXV

1928 (VI)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1928

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell' 8 gennaio 1928 (Anno VI)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. E. PATERNÒ.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sugl'integrali algebrici semplici e doppi* Nota I[1] del Socio F. SEVERI.

L'interpretazione della condizione d'integrabilità dei differenziali totali di 1ª specie appartenenti ad una superficie irriducibile, è essenziale per gettar luce su vitali problemi di geometria algebrica, tuttora oscuri. Venti anni fa credetti di aver trovato quest'interpretazione, ed enunciai, al Congresso matematico del 1908, che, sopra una superficie algebrica f, il numero delle curve $C + C'$ indipendenti, passanti pei punti base e pei punti doppi delle curve di un fascio lineare $|C|$, ove C' sono curve aggiunte a C, è uguale all'irregolarità q di f, cioè al numero degl'integrali semplici di 1ª specie, indipendenti. Il che equivaleva ad assegnare la costruzione razionale di quegl'integrali, cioè ad interpretare in modo completo la condizione di integrabilità. Taluni dubbi sopravvenuti mi consigliarono a differire al 1911 la pubblicazione del risultato. E vi ritornai nel 1918 e nel 1923. Collegata alla questione stessa è l'altra concernente l'esistenza d'integrali doppi di 1ª specie senza periodi, della quale mi occupai nel 1922. Ma le dimostrazioni date erano fallaci!

Ho creduto pertanto doveroso e necessario di riprendere la questione (alla quale in venti anni son tornato col pensiero tante e tante volte) e l'ho sottoposta ad un esame metodico ed approfondito, ponendomi da un

(1) Presentata nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

punto di vista completamente agnostico, circa la verità del teorema enunciato nel 1908. In questa e nelle successive Note espongo i risultati della mia indagine.

In primo luogo dimostro che il numero q' delle curve $C + C'$ indipendenti, che passano pel gruppo base e pel *gruppo jacobiano* del fascio $|C|$ (gruppo dei punti doppi staccati di curve C), è un carattere della superficie, invariante assoluto per trasformazioni birazionali.

La dimostrazione è geometrica. In essa giuoca, in modo essenziale, un teorema, che ho stabilito nel 1908, il quale dovrà di certo essere spesso invocato negli sviluppi ulteriori della geometria sopra una superficie. Il carattere q' è schiettamente funzionale, e non numerativo; nel che sopratutto risiede la difficoltà di porvi le mani.

Poichè ogni integrale semplice di 1ª specie dà luogo ad una di quelle curve $C + C'$, ne deriva che $q' \geqq q$. Se fosse vero quel che io credevo, dovrebbe esser per *ogni* superficie $q' = q$. E dico per ogni superficie, perchè le classi di superficie che io conosco hanno effettivamente $q' = q$; ma non è escluso ve ne sian di quelle per cui $q' > q$. Ebbene, io ho cercato di vedere a quali conseguenze traesse l'esistenza di questo nuovo carattere q', senza preoccuparmi della sua eventuale coincidenza coll'irregolarità. Ed ecco il risultato fondamentale. Lo riferisco ad un fascio $|C|$ segato dai piani $x = \text{cost.}$ sopra una superficie f, d'ordine m, di equazione $f(x, y, z) = 0$, dotata di singolarità ordinarie (linea doppia, ecc.) e situata genericamente rispetto agli assi: il che non è restrittivo, trattandosi di proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. Dimostro che ad *ogni* superficie $A = 0$, d'ordine $m - 2$, aggiunta (cioè passante per la linea doppia di f), che contenga il gruppo jacobiano del fascio $|C|$, e che, *per questo solo fatto*, si trova a dover passare in conseguenza pei punti base del fascio stesso (cosicchè essa sega su f, fuori della linea doppia, una curva $C + C'$ passante pel gruppo jacobiano e pel gruppo base del fascio $|C|$), restano *associate* altre due aggiunte d'ordine $m - 2$, $B = 0$, $C = 0$, contenenti rispettivamente i gruppi jacobiani dei fasci $y = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$, per guisa che la terna dei polinomi A, B, C, provenienti da queste aggiunte associate (ma *qualunque* delle quali individua le altre due), soddisfano ad un'identità del tipo:

$$(1) \qquad Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = Nf,$$

ove N è un polinomio il cui ordine ($m - 3$, al più) è determinato dalla identità stessa. Dalla (1) si trae poi la conseguenza che, nel fatto, N ha l'ordine $m - 4$ (s'intende sempre, al più) e che la differenza

$$(2) \qquad Q = A'_x + B'_y + C'_z - N$$

è un polinomio aggiunto d'ordine $m - 4$.

La (1) è un'identità rispetto alle x, y, z considerate come variabili indipendenti. Ma *sopra* f valgono inoltre le identità:

$$(3)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f'_z}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f'_z}\right)=\frac{Q}{f'_z}\,,\quad \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f'_x}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{C}{f'_x}\right)=\frac{Q}{f'_x}\,,$$
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{C}{f'_y}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f'_y}\right)=\frac{Q}{f'_y}\,,$$

dove le *derivazioni* sono *totali*, cioè fatte tenendo conto che una delle tre variabili (z per la prima relazione, x per la seconda, y per la terza) è funzione implicita delle altre due, definita da $f=0$.

Consideriamo ora un'espressione differenziale $Pdx+Qdy$, con P, Q funzioni razionali del punto di f. È ovvio che, legando ancora le x, y, z, col porre la condizione che il punto scorra sopra una curva algebrica *qualunque* (irriducibile) D di f, poichè $\frac{dy}{dx}$ è funzione razionale del punto di D, quell'espressione differenziale « staccherà » su D un differenziale abeliano. Cosicchè $\int_\sigma Pdx+Qdy$, ove σ sia un ciclo lineare della « superficie di Riemann » D, non varia, finchè σ deformasi con continuità *sopra* D. Diverso è il caso, quando σ deformasi comunque con continuità sulla riemanniana a quattro dimensioni V, imagine reale di f. Allora $\int_\sigma Pdx+Qdy$ varia in generale al mutar continuo di σ, e la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa variazione non ci sia, è appunto, come ben si sa, che $Pdx+Qdy$ sia un differenziale esatto. Se, in particolare, $Pdx+Qdy$ è un differenziale esatto di 1ª specie, l'integrale abeliano staccato su D da $\int Pdx+Qdy$, è di 1ª specie, *qualunque* sia D su f. Esistono, oltre a quelle fornite dai differenziali esatti di 1ª specie, altre espressioni differenziali $Pdx+Qdy$, che godano della proprietà di staccare, sopra ogni curva della superficie, differenziali abeliani di 1ª specie? A questa domanda si risponde che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un'espressione differenziale $\frac{Ady-Bdx}{f'_z}$ goda della proprietà indicata, è che A, B sieno polinomi d'ordine $m-2$ aggiunti ad f, facenti parte di una terna A, B, C di polinomi aggiunti associati, che soddisfano alla (1).

In tal caso gl'integrali

$$(4)\quad \int\frac{Ady-Bdx}{f'_z}\,,\quad \int\frac{Bdz-Cdy}{f'_x}\,,\quad \int\frac{Cdx-Adz}{f'_y}\,,$$

costruiti con questa terna di aggiunte associate, sono su tutta la f identici, nel senso che danno valori uguali lungo i medesimi cammini. Ora non

può di certo affermarsi *a priori* che gl'integrali (4) siano in generale integrali di differenziali esatti; perchè si riducano a tali occorre e basta che il polinomio Q svanisca identicamente. La condizione d'integrabilità, come aveva già mostrato il Picard, equivale cioè alle relazioni:

$$(5) \qquad Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = Nf \quad , \quad N = A'_x + B'_y + C'_z .$$

Se vi sono integrali (4), che soddisfano ad una di queste due relazioni, e precisamente alla più espressiva, la prima; e non all'altra; cioè pei quali sia $Q \neq 0$, li chiameremo *integrali di differenziali semiesatti di 1ª specie* (o brevemente integrali semiesatti, omettendo l'indicazione della specie, finchè non siavi ambiguità). Essi, per $Q = 0$, *comprendono gl'integrali di differenziali esatti di 1ª specie*, introdotti nella scienza dal Picard.

Aggiungasi che, se esistono integrali siffatti, l'effettivo integrale doppio di 1ª specie

$$(6) \qquad \iint \frac{Q}{f'_z}\, dx\, dy = \iint \frac{Q}{f'_x}\, dy\, dz = \iint \frac{Q}{f'_y}\, dz\, dx \ ,$$

non ha periodi. Esso rimane coordinato ad un integrale semiesatto: il suo valore sopra una superficie Δ, di contorno σ, dipende soltanto dal contorno, e, legittimando opportunamente l'uso della formula di Green, anche quando Δ contiene punti dove la funzione integranda sia infinita, si trova che il valore di (6), sopra Δ, è sempre uguale al valore di uno qualunque degl'integrali (4), lungo σ. Viceversa, l'integrale (6) individua un sistema lineare ∞^q d'integrali semiesatti, fra i quali però ve n'è *uno solo*, che determina, sopra ogni curva algebrica D di f, un gruppo canonico sezione di D con una delle proprie curve aggiunte D′.

E come gl'integrali semiesatti sono *caratterizzati* dalla condizione di staccare sopra ogni curva algebrica di f un'integrale abeliano di 1ª specie, gl'integrali doppi di 1ª specie ad essi associati, sono *caratterizzati* dalla proprietà di non avere periodi; sicchè gli uni e gli altri sono invarianti per trasformazioni birazionali di f.

Di più segue che l'esistenza di una terna di aggiunte associate, con $N \neq A'_x + B'_y + C'_z$, è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di integrali doppi di 1ª specie senza periodi; la qual condizione era stata già riconosciuta necessaria dal Lefschetz.

Facile è ormai lo stabilire un legame col carattere q'. La differenza $q' - q$ (q irregolarità di f) risulta uguale, sia al numero degl'integrali indipendenti semiesatti, ognun dei quali determina, sopra una curva D qualunque di f, un gruppo canonico segabile altresì su D con un'aggiunta D′, sia al numero degl'integrali doppi indipendenti di 1ª specie, senza periodi.

Ho cercato di costruire un esempio di superficie con integrali semiesatti. La cosa è molto difficile e non vi sono per ora riuscito; cosicchè

resta dubbia l'esistenza d'integrali semiesatti di 1ª *specie*, o, ciò che è equivalente, d'integrali doppi di 1ª *specie*, senza periodi; ossia di superficie per cui $q' > q$.

Ho però potuto interpretare geometricamente, in modo completo, *sopra la superficie*, la condizione d'integrabilità (5). La prima delle (5) s'interpreta nel modo qui esposto (è la condizione perchè *esista* un'aggiunta d'ordine $m-2$, $A=0$, passante pel gruppo jacobiano del fascio $x = \text{cost.}$). La seconda delle (5) interpretasi pure come un legame fra curve tracciate sulla superficie, per quanto *a priori* apparisca come un legame fra superficie dello spazio; e questo perchè i polinomi che in essa figurano sono d'ordine $< m$, onde basta che la relazione sia soddisfatta su f, perchè lo sia identicamente nello spazio. Ma ciò formerà oggetto di una mia comunicazione al Congresso matematico di Bologna.

I legami che interpretano la seconda delle (5) sono piuttosto complessi (bisogna e basta che la curva dei contatti del fascio $\frac{A}{f'_z} = \text{cost.}$ col fascio $y = \text{cost.}$ passi pel gruppo jacobiano del fascio $\frac{B}{f'_z} = \text{cost.}$ e la curva dei contatti di questo fascio con $x = \text{cost.}$ passi pel gruppo jacobiano di $\frac{A}{f'_z} = \text{cost.}$); e non parrebbe ch'essi dovessero conseguire dal legame geometrico che traduce la prima relazione. Ma non oso di azzardare nuove previsioni, che non siano sicurissime, sopra un argomento così delicato.

Dirò soltanto che, allo stato delle nostre conoscenze, nulla si oppone a che *integrali semiesatti di 1ª specie possano esistere anche sopra una superficie regolare*. Rappresentata la superficie f sopra un piano m-plo (p. es., mediante proiezione dal punto all'infinito dell'asse z), vi è ivi una curva di diramazione *effettiva* K (proiezione della curva Γ_z staccata su $f=0$ da $f'_z = 0$, fuori della linea doppia) e una curva di diramazione *apparente* H (proiezione della linea doppia di f), la quale tocca K in un gruppo di punti, che sono punti di diramazione tripli apparenti (i punti di diramazione tripli effettivi sono le cuspidi di K; altri punti di diramazione apparenti tripli sono i punti tripli di H). Ulteriormente H incontra (non tocca) K in un gruppo P di punti (proiezioni dei punti cuspidali di f). Dicasi S il gruppo segato su K da una retta generica del piano. Allora *la dimensione della serie lineare completa* $|P-S|$ *uguaglia il carattere* q' *di* f.

Pertanto, se è possibile costruire una superficie regolare per cui la serie $|P|$ contenga la serie $|S|$ (e ciò non sembra inverosimile!), questa superficie conterrà integrali semiesatti di 1ª specie. Nei riguardi del modello proiettivo f, *ciò si traduce nel fatto che, sulla curva* Γ_z, *segata su* f *da una prima polare (fuori della linea doppia), la serie individuata dal gruppo dei punti cuspidali, contenga la serie delle sezioni piane di* Γ_z.

Ne segue che, quando la prima serie non contenga la seconda (per es., quando non vi siano punti cuspidali), la superficie è regolare e priva d'integrali semiesatti di 1ª specie.

Qualora non fosse possibile costruire una superficie regolare per cui la prima serie contenga la seconda, l'esistenza della serie differenza sarebbe *condizione necessaria e sufficiente per l'irregolarità delle superficie.*

Ma se non posso affermare l'esistenza d'integrali semiesatti di 1ª specie, posso invece affermare che *integrali semiesatti di specie superiore, esistono sopra ogni superficie algebrica.*

Data un'espressione differenziale $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$, ove A, B siano polinomi aggiunti ad f (di grado l qualunque), la corrispondente condizione d'integrabilità *equivale* alle relazioni:

$$A f'_x + B f'_y + C f'_z = N f \quad , \quad N = A'_x + B'_y + C'_z - M f$$

ove M è un conveniente polinomio (identicamente nullo, se $l \leqq m$). Si dirà che l'espressione $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$ è un differenziale semiesatto, quando è soddisfatta la prima (e non necessariamente la seconda) delle precedenti relazioni. In tale ipotesi, l'espressione medesima può indifferentemente scriversi:

$$\frac{A dy - B dx}{f'_z} \quad , \quad \frac{B dz - C dy}{f'_x} \quad , \quad \frac{C dx - A dz}{f'_y} \quad ,$$

e può altresì intendersi subordinata su f dallo pfaffiano $R dx + S dy + T dz$, nelle variabili *indipendenti* x, y, z, ove

$$R = \frac{1}{3}\left(\frac{C}{f'_y} - \frac{B}{f'_z}\right) \quad , \quad S = \frac{1}{3}\left(\frac{A}{f'_z} - \frac{C}{f'_x}\right) \quad , \quad T = \frac{1}{3}\left(\frac{B}{f'_x} - \frac{A}{f'_y}\right).$$

I differenziali semiesatti sono (in un senso conveniente) invarianti di fronte alle trasformazioni bifrazionali di f. S'intravvedono qui stretti legami col problema di Pfaff relativo ad $R dx + S dy + T dz$ e colle proprietà dell'equazione differenziale

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 ,$$

della quale $f =$ cost. è un'integrale; nonchè del sistema differenziale associato $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$, la famiglia delle cui curve integrali contiene le curve di livello del considerato integrale semiesatto. Varrà la pena di esaminare questi legami.

Matematica. — *Sugl' integrali algebrici semplici e doppi.* Nota II[1] del Socio F. Severi.

1. Consideriamo sulla superficie (irriducibile) f due fasci generici Σ, Σ_1 di curve irriducibili C, D e indichiamo con G, G_1 i loro gruppi base (formati da punti semplici e distinti); J, J_1 i loro gruppi jacobiani; T la curva dei contatti (delle curve) dei due fasci. Indicate infine con C', D' curve aggiunte a C, D risulta (vedi la mia Nota negli « Atti dell' Istituto Veneto », 1906, p. 629):

$$T \equiv C + C' + 2D \equiv D + D' + 2C. \tag{7}$$

La T passa semplicemente pei gruppi G, G_1, J, J_1. Denotati con H, H_1 i gruppi staccati su T, fuori di G, G_1 rispettivamente, da due curve C, D di Σ, Σ_1, si hanno *su* T le equivalenze[2]:

$$H \equiv (T, C) - G \quad , \quad H_1 \equiv (T, D) - G_1. \tag{8}$$

Il gruppo jacobiano della serie $|H|$, segata su T da Σ, è dato da $G_1 + J + O$, ove O è il gruppo dei punti di T in ciascuno dei quali si osculano una C ed una D (Segre, « Atti di Torino », 1896). Pertanto (vedi il mio *Trattato di geometria algebrica*, p. 122):

$G_1 + J + O \equiv 2H + (T, T')$, e similmente: $G + J_1 + O \equiv 2H_1 + (T, T')$,

T' essendo un'aggiunta a T. Ne segue:

$$2H - J + G \equiv 2H_1 - J_1 + G_1. \tag{9}$$

Poichè una curva $C + C'$, del sistema lineare completo $|C + C'|$, sega su T un gruppo $(T, T) - 2(T, D)$, una $C + C'$ pel gruppo $G + J$, se esiste, stacca ulteriormente su T un gruppo $(T, T) - 2(T, D) - J - G$. Similmente, una $D + D'$ pel gruppo $G_1 + J_1$ sega altrove su T un gruppo $(T, T) - 2(T, C) - J_1 - G_1$. Usufruendo delle (8), (9), si trova subito:

$$(T, T) - 2(T, D) - J - G \equiv (T, T) - 2(T, C) - J_1 - G_1 \equiv L,$$

ove L è un conveniente gruppo di punti di T (effettivo, se esistono $C + C'$ soddisfacenti alle dette condizioni; virtuale, come risulterà dal seguito, se tali

(1) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(2) La numerazione delle formule continua quella della Nota I. Con (A, B) indico, al solito, il gruppo dei punti comuni alle curve A, B.

curve non esistono). In conclusione *le curve* $C + C', D + D'$ *passanti rispettivamente pei gruppi* $G + J, G_1 + J_1$ *segano altrove su* T *gruppi della medesima serie lineare completa* $|L|$.

2. Ricordiamo ora il teorema da me dimostrato in una Nota lincea del 1908 (2° sem., p. 466): « Se C, sulla superficie f, è una curva irri- « ducibile, atta a definire un sistema continuo di grado > 0, ed $|E|$ un « sistema lineare irriducibile, completo, che contenga parzialmente C, il « sistema lineare $|E - C|$ sega sulla generica E una serie lineare com- « pleta ».

In verità, questo teorema l'ho dedotto dalla completezza della serie caratteristica del sistema continuo completo $\{E\}$, completezza che non si può affermare incondizionatamente, perchè la dimostrazione del teorema di Enriques, che « è completa la serie caratteristica di ogni sistema continuo completo di curve di f », come ho altra volta osservato (« Rend. Lincei », 1° sem., 1921, p. 297), cade sotto una grave obiezione, che lascia dubitare della validità del teorema stesso per ogni sistema continuo. Ma io ho provato (ibidem, p. 297) che, in ogni caso, esistono su f sistemi continui completi, aventi la serie caratteristica completa, e che la completezza di tal serie può affermarsi ogni volta non sia negativa la dimensione virtuale del sistema lineare $|E|$; ipotesi che è da considerarsi generalmente soddisfatta. Comunque, ciò si verifica certo quando $|E|$ sia l'aggiunto di una curva atta a definire un sistema continuo di grado > 0 (vedi la mia Nota lincea del 1908, p. 468); ed è questo che a noi interessa.

3. Applichiamo il teorema ricordato, alla serie segata su T dal sistema lineare completo $|C + C'|$. Il sistema $|T|$ fa ora le veci di quello E sopra considerato. Esso contiene parzialmente il sistema $|2D|$, che ha la curva generica irriducibile di grado > 0, epperò il sistema completo $|T - 2D| = |C + C'|$ sega su T una serie lineare completa. Pertanto *le curve* $C + C'$ *pel gruppo* $G + J$ *segano altrove su* T *la serie lineare completa* $|L|$. E poichè questa *medesima* serie è segata su T dalle $D + D'$ per $G_1 + J_1$, le infinità delle curve $C + C'$ passanti per $G + J$ e delle curve $D + D'$ per $G_1 + J_1$, sono uguali alla dimensione di $|L|$. In conclusione:

Dato sopra una superficie f un fascio lineare Σ *di curve irriducibili* C, *il numero delle curve indipendenti* $C + C'$, *che passano pel gruppo base e pel gruppo jacobiano di* Σ, *non dipende dal fascio considerato. È un carattere della superficie. Lo indicheremo con* q'.

Questo carattere *è un invariante assoluto per trasformazioni birazionali di f*. La cosa è evidente per una trasformazione priva di punti fondamentali su f. Se la trasformazione possiede uno o più punti fondamentali, basterà considerare il trasformato di un fascio, che abbia tra i punti base quei punti fondamentali.

Osservazione. - Si noterà che la serie $|2L|$ è speciale, perchè è segata su T dalle $T' \equiv C + C' + D + D'$ per $G + J + G_1 + J_1$. Ne deriva

(vedi la mia Nota nei « Rendiconti di Palermo », 1922) che la curva T è certo a moduli particolari!

4. Fissiamo l'attenzione su quelle curve $C + C'$ passanti per J, che passano pure per un punto P di G. Esse staccano su T, fuori di $J + P$, la serie completa $|(G - P) + L|$, che è speciale, perchè le $C + C'$ sono parti di curve T'. Considerato un gruppo L, che non abbia punti comuni con G, ed una curva $\Delta \equiv D + D'$ passante per L, essa, insieme ad una curva $\Gamma \equiv C + C'$, che passi per $n - 2$ qualunque degli $n - 1$ punti di $G - P$, senza contenere il punto restante, costituisce una curva $\Delta + \Gamma \equiv T'$, che contiene L ed $n - 2$ punti di $G - P$, senza contenere il rimanente. Dunque i punti di $G - P$ presentano alle T', che passano per L, condizioni indipendenti, e quindi, pel teorema di riduzione, la serie $|(G - P) + L|$ ha il gruppo fisso $G - P$.

Che poi esista una curva Γ soddisfacente alla predetta condizione, segue da ciò che gli n punti di G impongono alle $C + C'$ (le quali segano su C una serie lineare completa non speciale) $n - 1$ condizioni indipendenti, talchè le $C + C'$ passanti per $n - 2$ *qualunque* punti di G, non passano tutte per uno medesimo dei punti rimanenti, perchè se no esse segherebbero ulteriormente sulla C, di genere p, una g^1_{2p-1}.

In conclusione *le* $C + C'$ *per* J *e per un punto qualunque di* G *contengono in conseguenza l'intero gruppo* G.

In particolare, se Σ è un fascio generico tolto da un sistema lineare $|C|$ semplice, almeno ∞^3, esisterà qualche curva C passante per un punto P di G e non passante per alcun altro punto di G. Questa, insieme ad una C', eventualmente esistente, che contenga il gruppo J, dà luogo ad una $C + C'$ nelle condizioni dell'enunciato precedente, epperò C' dovrà contenere il gruppo $G - P$. Ma poichè questo vale comunque siasi scelto P in G, si conclude che *se esiste un'aggiunta* C' *passante pel gruppo jacobiano del fascio* Σ, *essa contiene in conseguenza il gruppo base del fascio.*

5. Possiamo ora verificare che, per lo meno *quando il fascio* Σ *appartenga ad un multiplo* $|lE|$ *abbastanza elevato di un sistema lineare* $|E|$ *infinito, irriducibile (di grado e genere virtuali* ν, π*), non esiste alcuna* C' *passante pel gruppo jacobiano di* Σ.

All'uopo si calcolino l'ordine λ della serie $|L|$ e il numero ε dei punti di H. Si trova:

$$\lambda = \omega + 4(p + p' + m) - 2(n + n') - I - 13 \quad , \quad \varepsilon = 2m + 2p - 2,$$

ove ω, I sono i soliti invarianti di f; n, n'; p, p' sono i gradi e i generi di Σ, Σ_1; m è il numero dei punti (C, D). Se ne deduce:

$$\lambda - \varepsilon = \omega + 4p' + 2m + 2p - 2n' - 2n - I - 11.$$

Designato infine con μ il numero dei punti comuni ad E, D, risulta:

$$n = l^2 \nu \quad , \quad p = l(\pi - 1) + \binom{l}{2}\nu + 1 \quad , \quad m = l\mu ;$$

onde $\lambda - \varepsilon$ risulta una funzione quadratica intera di l, nella quale il coefficiente di l^2 è negativo ($= -\nu$). Pertanto, da un certo l in poi, $\lambda - \varepsilon$ è negativo, e quindi $|L|$ non può contenere la serie $|H|$, cioè non può esistere una C′ passante pel gruppo jacobiano di Σ.

6. Conservando l'ipotesi fatta alla fine del n. 4, che Σ sia generico entro un generico sistema lineare semplice $|C|$, almeno ∞^3, consideriamo in $|C|$ una rete, priva di punti base, che contenga Σ; e Γ sia la curva jacobiana della rete. Su Γ, il fascio Σ sega una serie lineare, il cui gruppo jacobiano equivale a $2(C, \Gamma) + (\Gamma, \Gamma')$, Γ' essendo una curva aggiunta a Γ. Tale gruppo jacobiano è formato dal gruppo jacobiano J di Σ e dal gruppo X dei punti di Γ, in ciascuno dei quali si osculano le curve di un fascio della rete. Dunque:

$$J + X \equiv 2(C, \Gamma) + (\Gamma, \Gamma').$$

E poichè $\Gamma \equiv C' + 2C$, $\Gamma' \equiv \Gamma + C' - C \equiv 2\Gamma - 3C$, viene:

$$J + X \equiv 2(\Gamma, \Gamma) - (C, \Gamma).$$

Ora il gruppo J fa parte di un gruppo (Γ, Γ), perchè è comune a Γ e alla jacobiana di un'altra rete generica di $|C|$, che abbia comune colla precedente il fascio Σ; sicchè si può porre $(\Gamma, \Gamma) \equiv J + R$, ove R è un conveniente gruppo di punti di Γ. Ne deriva:

$$X + (C, \Gamma) \equiv 2R + J.$$

Poichè la differenza $|\Gamma - (C + C')| = |C|$ consta di curve irriducibili, variabili in un sistema infinito di grado > 0, pel teorema ricordato nel n. 2, *le curve* $C + C'$ *segano sulla jacobiana della rete la serie lineare completa* $|(\Gamma, \Gamma) - (C, \Gamma)| = |J + R - (C, \Gamma)| = |X - R|$.

Pertanto, se vi sono curve $C + C'$ che passano per J, esse segnano altrove su Γ la serie $|X - R - J| = |R - (C, T)|$. Onde:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè, dato un fascio Σ, *entro una rete* $|C|$, *vi sieno curve* $C + C'$ *passanti pel gruppo jacobiano del fascio, è che la serie lineare completa determinata sulla jacobiana* Γ *della rete dal gruppo* X *dei punti in ognuno dei quali si osculano le curve di un fascio della rete, contenga la serie caratteristica di* Γ.

E siccome infine (n. 8) le $C + C'$ pel gruppo jacobiano di Σ contengono in conseguenza il gruppo base del fascio, in forza del n. 2 si conclude che:

La dimensione della serie lineare, differenza fra $|X|$ *e la serie caratteristica di* Γ, *uguaglia* $q' - 1$, *ove* q' *è il nuovo carattere della superficie.*

Riferendoci ad una rete di sezioni piane di una superficie, tenuto conto che $|X - (\Gamma, \Gamma)| = |R - (C, T)|$ e che R è in tal caso il gruppo dei punti cuspidali della superficie, si può dire che:

Considerata la curva Γ_z *sezione della superficie, fuori della linea doppia, colla prima polare di un punto dello spazio, il carattere* q' *uguaglia il numero dei gruppi indipendenti della differenza fra la serie individuata su* Γ_z *dai punti cuspidali e quella delle sezioni piane di* Γ_z.

7. Termino questa Nota con un notevole lemma comunicatomi dal collega Castelnuovo.

Se $f(x, y, z) = 0$ *è una curva algebrica piana irriducibile d'ordine* m, *dotata di soli nodi* (x, y, z *coordinate omogenee*), *un'identità del tipo*

$$Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = 0, \tag{10}$$

ove A, B, C *sieno forme dello stesso ordine* l *nelle* x, y, z, *non può sussistere, quando* $l < m - 1$, *se non essendo le forme stesse identicamente nulle.*

Ecco la dimostrazione. Si osservi anzitutto che un'aggiunta generica d'ordine $m - 1$ ad f non può spezzarsi; altrimenti, poichè tutte quelle aggiunte non hanno una parte fissa (che sarebbe multipla per f), dovrebbero decomporsi in curve di un fascio, e la serie da esse segnata su f sarebbe composta, mentre ciò non può darsi, trattandosi di una serie d'ordine $2p - 2 + 2m > 2p$ (p genere di f). Sia D un'aggiunta irriducibile d'ordine $m - 1$; K il gruppo staccato su D, fuori dei nodi di f, costituenti il gruppo H, dalle aggiunte d'ordine $m - 3$ ad f. La serie $|K|$ di D è non speciale, perchè è ottenuta da una serie non speciale, imponendo i punti fissi del gruppo H, che presentano condizioni indipendenti alle curve d'ordine $m - 3$. Suppongasi, se è possibile, che il gruppo G segato su D, fuori di H, da un'altra qualunque aggiunta d'ordine $m - 1$, appartenga ad una curva φ d'ordine $m - 2$; e sia S l'ulteriore sezione di φ con D, fuori di G. Siccome i punti del gruppo S sono in numero di $\frac{(m-1)(m-4)}{2} - p$, per essi passerà almeno una curva ψ di ordine $m - 4$.

Sia T l'ulteriore intersezione di ψ con D. Indicata infine con R una sezione rettilinea di D, si hanno su D le relazioni:

$$H + K \equiv (m - 3)R, \; G + H \equiv (m - 1)R, \; G + S \equiv (m - 2)R,$$
$$S + T \equiv (m - 4)R,$$

dalle quali segue subito $K \equiv T$. Questa conclusione è assurda, perchè il gruppo T, situato sopra una curva ψ, d'ordine $m - 4$, è speciale su D, mentre la serie $|K|$ s'è già osservato che è ivi non speciale.

Dunque, sopra una curva D d'ordine $m-1$, irriducibile, aggiunta ad f, *nessun* gruppo caratteristico G può esser contenuto in una φ d'ordine $m-2$.

Il risultato s'estende ai gruppi caratteristici contenuti nelle D dotate di punti multipli (in particolare riducibili), mediante le serie lineari sulle D stesse considerate virtualmente prive di punti multipli, per le quali, come si sa, valgono i teoremi stessi sopra applicati.

Conseguenza immediata del risultato ottenuto è il lemma enunciato. Invero, se sussistesse un'identità del tipo (10), colle A, B, C d'ordine $l = m-2$ (o minore), e, p. es., fosse A non identicamente nulla, la curva $A = 0$ dovrebbe passare pel gruppo G sezione di $f'_y = 0$ con $f'_z = 0$, fuori dei nodi di f; e ciò perchè nessun punto di G può stare su $f'_x = 0$ (chè altrimenti sarebbe doppio per f). E allora si giungerebbe alla conclusione, che si è dimostrata assurda.

Matematica. — *Su gl'integrali algebrici semplici e doppi.* Due Note del Socio F. Severi.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Una nuova generazione delle quadriche di Darboux.* Nota [1] del Corrisp. G. Fubini.

Sia O un punto generico di una superficie S non rigata; le u, v siano i parametri delle asintotiche che potremo supporre nulli in O. Le coordinate normali x di un punto della superficie soddisfano alle:

$$(1)\quad x_{uu} = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + p_{11} x \qquad x_{vv} = \gamma x_u + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} x_v + p_{22} x$$

Essendo $(\beta du^3 + \gamma dv^3)$: $du\,dv$ l'elemento lineare proiettivo, *entrambe le frazioni* $\frac{\beta du^2}{dv}$, $\frac{\gamma dv^2}{du}$ *hanno carattere intrinseco, cioè sono indipendenti dal particolar modo con cui sono stati scelti i parametri* u, v *delle asintotiche.* Una linea posta su S, uscente da O ed ivi tangente all'asintotica $u = 0$, avrà un'equazione:

$$(2)\qquad u = -\frac{b}{2}\gamma_0 v^2 + \cdots,$$

(1) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.

dove sono trascurati i termini del terzo ordine almeno e dove γ_0 è il valore di γ in O, ed h è un *parametro di significato intrinseco* [1], che dipende dalla linea data. Scriveremo sovente γ in luogo di γ_0, β per β_0, ecc.

Per $h = 0$, ∞ *si hanno* (ponendo uguali a zero i termini trascurati) *le asintotiche* $u = 0$, $v = 0$ *uscenti da* O; *per* $h = 1$ *si ha una linea che in* O *ha un flesso*. Infatti dalle (1), ricordando che in O è $\frac{du}{dv} = 0$, $\frac{d^2u}{dv^2} = -h\gamma_0$, si trae che i punti

$$x\,,\ \frac{dx}{dv} = \frac{\partial x}{\partial v} = x_v \qquad , \qquad \frac{d^2x}{dv^2} = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\,x_v - \gamma(1-h)\,x_u - \gamma_{22}\,x$$

sono in linea retta soltanto se $h = 1$.

Le considerazioni delle linee che in O *hanno un flesso è dovuta al Bompiani.* (Questi « Rendiconti », vol. VI, p. 187). *Più avanti caratterizzeremo anche il caso* $h = \frac{1}{3}$.

Cosicchè il valore di h corrispondente a una qualsiasi curva (1) si può definire geometricamente come il birapporto formato da esso e dai valori $h = 0$, 1, ∞ testè interpretati geometricamente. Troviamo ora *l'equazione della quadrica che contiene le tangenti alle asintotiche* $v =$ cost. *uscenti da* O *e da due punti della linea* (2) *infinitamente vicini ad* O. Consideriamo a tal fine la rigata luogo delle tangenti alle asintotiche $v =$ cost. tirate dai punti della linea (1), cioè luogo dei punti $x = \frac{\partial x}{\partial u} - wx$, ove w è un nuovo parametro ed alla u si è dato il valore (2). Le sue asintotiche sono, oltre alle precedenti tangenti, le linee la cui equazione si ottiene uguagliando a zero il determinante

$$0 = (\bar{x}\,\bar{x}_v\,\bar{x}_w\,\bar{x}_{vv}\,dv + 2\,\bar{x}_{uv}\,dv^2)$$

ove $\bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}$, $\bar{x}_w = \frac{\partial \bar{x}}{\partial w} = x$, ecc. Nei punti della generatrice uscente da O è $u = v = 0$, $\frac{du}{dv} = 0$, $\frac{d^2u}{dv^2} = -h\gamma_0$; in tali punti tale equazione divisa per $(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})$ diventa (in virtù della (1)):

$$2\frac{dw}{dv} + \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\,\partial v} + \beta\gamma - h\beta\gamma = 0\,. \tag{3}$$

Il punto

$$\bar{x} + \lambda\left(\frac{d\bar{x}}{dv}\right) \qquad , \qquad (\text{per } u = v = 0) \tag{4}$$

(1) Posto, in un intorno di O, $\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\,u = HL^2$, $\sqrt[3]{\gamma^2\beta}\,v = H^2L$, le H, K hanno carattere intrinseco, e alle (2) potremo sostituire le linee H = cost.

ove λ è un nuovo parametro variabile, e

$$\left(\frac{d\bar{x}}{dv}\right) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{du}{dv} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial w}\frac{dw}{dv},$$

ove $\frac{du}{dv}$ si deduce da (2) ed è quindi nullo in O (per $v = 0$) e $\frac{dw}{dv}$ si deduce da (3), descrive dunque la quadrica osculatrice alla nostra rigata lungo la generatrice uscente da O, cioè descrive appunto la quadrica che volevamo determinare. Ora (4) vale

$$x\left[\rho - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v} + \beta\gamma - h\beta\gamma\right)\right] + x_u + \lambda\rho x_v + \lambda x_{uv}.$$

Sia $x_1 x + x_2 x_u + x_3 x_v + x_4 x_{uv}$ un punto generico dello spazio; le x_i si potranno pensare come sue coordinate. Con queste coordinate x_i la quadrica descritta dal punto precedente ha evidentemente per equazione

$$2(x_1 x_4 - x_2 x_3) + x_4^2\left(\frac{\partial_2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v} + \beta\gamma - h\beta\gamma\right) = 0.$$

Le quadriche da noi trovate sono dunque le quadriche di Darboux; ognuna di esse (come la quadrica di Lie corrispondente ad $h = 0$*) ammette col metodo attuale due generazioni distinte: quella qui data e l'altra che se ne deduce scambiando i due sistemi di asintotiche* (cioè u con v, e β con γ), *ma conservando lo stesso valore di* h. *Per* $h = 1$ *si ha la notevole quadrica scoperta* (loc. cit.) *dal Bompiani. Un'altra quadrica notevole,* che pare finora inosservata, *si ottiene ponendo* $h = \frac{1}{3}$; *essa corrisponde a quelle linee* (2), *per cui il piano tangente in* O *alla superficie è piano osculatore stazionario.*

Infatti solo per $h = \frac{1}{3}$ le x, $\frac{dx}{dv} = x_v + x_u\frac{du}{dv}$, $\frac{d^2x}{dv^2}$, $\frac{d^3x}{dv^3}$ sono (per $u = v = 0$) combinazioni lineari di x, x_u, x_v e sono perciò complanari. *I valori* $h = 0, 1, \frac{1}{3}, \infty$ *corrispondono dunque alla quadrica di Lie, a quella di Bompiani, a quella ora trovata e al piano tangente, contato due volte.*

Idromeccanica. — *Ancora su di una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* Nota[1] del Corrisp. U. Cisotti.

La Nota del prof. Pistolesi, presentata in questa stessa seduta e cortesemente comunicatami dall'A., mi porge occasione di rendere note alcune riflessioni sul modo di valutare la risultante delle azioni dinamiche subìte da una lastra indefinita da parte di una corrente traslo-circolatoria che la investe e la circonda[2].

Una estensione delle formule di Blasius.

Sieno u e v le componenti cartesiane della velocità; com'è noto, nei moti irrotazionali, risulta $w = u - iv$ funzione di $z = x + iy$. Se il liquido ha densità unitaria le formule di Blasius definiscono le componenti R_x, R_y della risultante delle pressioni subìte da una linea di flusso[3], nel modo seguente:

$$(1) \qquad R_y + iR_x = -\frac{1}{2}\int_\gamma w^2\,dz,$$

e il momento, normale al piano, rispetto al punto $z = 0$,

$$(2) \qquad M = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{R}\int_\gamma w^2 z\,dz,$$

$\mathfrak{R}$ significa «parte reale».

Se γ non è linea di flusso le formule (1) e (2) vanno modificate come segue:

$$(1') \qquad R_y + iR_x = -\frac{1}{2}\int_\gamma w^2\,dz - i\int_\gamma w v_n\,d\gamma,$$

$$(2') \qquad M = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{R}\int_\gamma w^2 z\,dz - \mathfrak{R}\,i\int_\gamma w v_n z\,d\gamma,$$

(1) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(2) Cfr. la mia Nota, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, questi «Rend.», vol. V, 1° sem., 1927, p. 16-21.

(3) Le azioni si riferiscono a quel bordo della linea che è opposto al senso della normale a γ supposto che tangente (nel senso di integrazione) e normale sieno congruenti alla coppia di assi cartesiani di riferimento.

designando v_n la componente, secondo la normale a γ, della velocità lungo γ; naturalmente $v_n = 0$ quando γ è linea di flusso e allora (1′) e (2′) coincidono colle formule di Blasius (1) e (2)[1]. Si noti che v_n non è funzione di $x + iy$ per cui le funzioni integrande degli ultimi integrali dei secondi membri non sono funzioni di z, come quelli che li precedono e che sono i soli che compaiono nelle formule di Blasius.

Applicazione al caso di un profilo laminare rettilineo.

In questo caso, per il calcolo delle componenti della risultante delle azioni dinamiche sulla lamina, viene subito in mente di applicare la (1) al contorno γ costituito dai due bordi della lamina; l'applicazione appare *a priori* legittima perchè *trattasi di linea di flusso*, se non che la funzione w diviene infinita agli estremi della lamina, nel modo indicato nella mia Nota citata, per cui il calcolo dell'integrale non si può più fare direttamente. Bisogna, al solito, ricorrere a passaggi al limite.

Le vie sono due:

o sostituire al profilo γ, costituito dei due bordi della lamina, una linea di flusso chiusa γ', che poco differisce da γ ma che eviti le singolarità - e questa è la via consueta - applicando a γ' la formula (1) e poi passando al limite quando γ' tende a γ,

o applicare la stessa formula (1) a una porzione di lamina (o per meglio dire a due tratti affacciati: uno appartenente a un bordo e l'altro all'altro) che escluda gli estremi e poi passare al limite quando la porzione di lamina sulla quale si è valutato (1) tende a tutta la lamina.

(1) Per giustificare la (1′) si osservi che, essendo:

$$R_y + iR_x = -\frac{1}{2}\int_\gamma (u^2 + v^2)(dx - idy),$$

togliendo e aggiungendo

$$i\int_\gamma (u - iv)(udy - vdx) = -i\int_\gamma w v_n \, d\gamma,$$

si ottiene:

$$R_y + iR_x = -\frac{1}{2}\int_\gamma (u^2 - v^2 - 2iuv)(dx + idy) - i\int_\gamma w v_n \, d\gamma,$$

da cui la (1′). Per la (2′), in modo analogo basta osservare che M è la parte reale di

$$-\frac{1}{2}\int_\gamma (u^2 + v^2)(x + iy)(dx - idy)$$

e togliendo e aggiungendo a questo integrale, l'integrale

$$i\int_\gamma (u - iv)(x + iy)(udy - vdx) = -i\int_\gamma w v_n z \, d\gamma.$$

Poichè quando

$$-1 \leq \frac{C}{2\pi l c} \leq 1$$

(C = circolazione, c = velocità assintotica della corrente, l = lunghezza della lamina) *non esiste nessuna linea chiusa*, circondante la lamina, *che sia linea di flusso* [1] non la (1) - come si fa ordinariamente - ma la (1′) si dovrebbe applicare a γ', e poi passare al limite per γ' tendente a γ, quando si voglia seguire il primo criterio.

La seconda via consente invece la diretta applicazione della formula (1), *perchè trattasi di* segmenti appartenenti a *linee di flusso*: il calcolo dell'integrale e il passaggio al limite porta appunto al risultato da me conseguito nella Nota citata.

Ciò premesso, osservo come il Pistolesi nella sua Nota, in sostanza, non tiene conto, in modo ortodosso, delle singolarità agli estremi della lamina e *vuole a priori* che tutto vada come se tali singolarità non esistessero.

Chimica. — *Ricerche sopra i solfuri di molibdeno.* - I. *Le tensioni di zolfo del trisolfuro di molibdeno.* Nota [2] del Socio N. Parravano e di G. Malquori [3].

I solfuri di molibdeno meglio conosciuti sono: il bisolfuro, MoS_2, che costituisce la molibdenite naturale, e il trisolfuro MoS_3, che può ottenersi facilmente scomponendo con acido solforico una soluzione di solfomolibdato ammonico, oppure precipitando con idrogeno solforato una soluzione acida per acido solforico di un molibdato.

Sopra altri solfuri si trovano nella letteratura notizie scarse ed incerte. Krüss [4] ha descritto un tetrasolfuro MoS_4, l'esistenza del quale però non è stata confermata; Guichard [5] ha ottenuto un sesquisolfuro Mo_2S_3, desolforando il bisolfuro di molibdeno per riscaldamento in crogiuolo di carbone nel forno Moissan con un arco di 900 amp. e 50 Volt; Mawrow e Nikolow [6] hanno preparato un solfuro Mo_2S_5 per azione dell'acido solfidrico sopra una soluzione di molibdato ammonico previamente ridotta con zinco.

(1) In tale circostanza, come scende dalla formula (7) della mia Nota citata, vi sono due punti della lamina (prora e poppa) in cui la velocità si annulla: in tal caso nessuna linea di flusso, all'infuori del contorno della lamina (costituito dai due bordi) è linea di flusso.

(2) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(4) « Liebig's Ann. », *225*, 40 (1884).

(5) « Ann. Chim. Phys. », [7] *23*, 550 (1901).

(6) « Zeit. anorg. Ch. », *95*, 188 (1916).

Su questi prodotti abbiamo intrapreso ricerche di varia indole, e in questa Nota diamo conto di quanto si riferisce alla tensione di scomposizione di MoS_3.

Misure dirette della tensione di zolfo dei solfuri metallici sono state eseguite solo per la covellite e la pirite. Della prima si sono occupati Wasjuchnowa [1], Preuner e Brockmöller [2], Allen e Lombard [3], della seconda gli stessi P. e B., e A. e L.

Wasjuchnowa faceva passare azoto a pressione costante sopra il solfuro scaldato alla temperatura voluta, e dosava la quantità di zolfo asportata da un volume noto di gas. Conoscendo a quella temperatura l'equilibrio fra le varie forme di zolfo (molecole otto-, esa-, bi-atomiche) con semplici calcoli risaliva alla tensione del solfuro.

Preuner e Brockmöller si sono serviti del manometro di Heraeus a spirale di quarzo.

Allen e Lombard hanno invece fatto equilibrio alla tensione del solfuro con vapore di zolfo, e dalla osservazione della temperatura alla quale il solfuro cominciava a perdere di peso sono risaliti alla tensione di esso.

I valori di Allen e Lombard sono molto più bassi di quelli di Preuner e Brockmöller, e gli autori americani ritengono che gli alti valori di questi ultimi sieno dovuti ad umidità o a gas non completamente eliminati prima dell'esperienza.

I dati di Wasjuchnowa si avvicinano a quelli di Allen e Lombard.

Per dare una idea dell'ordine di grandezza delle divergenze fra i vari sperimentatori riportiamo alcuni valori ottenuti per la covellite con i tre metodi indicati.

t°	Pressione in millimetri		
	P. B.	W.	A. L.
450°	80	34	31
475°	250	195	170
480°	313	255	—
500°	980	560	—

*
* *

Per le nostre misure ci siamo serviti di un metodo il quale consente di osservare a che temperatura la tensione del vapore emesso da un solfuro fa equilibrio a quella dello zolfo tenuto a una temperatura fissa: esso pre-

(1) « Diss. Berlin » (1909).
(2) « Zeit. Phys. Chem. », *81*, 151 (1913).
(3) « Am. Journ. Science », [4] *43*, 175 (1917).

senta, rispetto al metodo di Allen e Lombard, il vantaggio di permettere misure dirette e continue.

Il solfuro viene messo in un tubo di vetro Pyrex, o di quarzo trasparente, di piccolo diametro, chiuso ad una estremità: si fa il vuoto nel tubo e lo si chiude alla lampada. Si adatta al tubo una pinza termoelettrica in modo che la saldatura venga a trovarsi all'altezza del solfuro, e si introduce il tutto in un forno orizzontale in maniera che l'estremità col solfuro venga a trovarsi al centro e l'altro estremo sporga per una diecina di centimetri al di fuori del forno (fig. 1). Il tratto sporgente viene adattato entro un pallone contenente una sostanza pura in ebollizione. Un termometro col

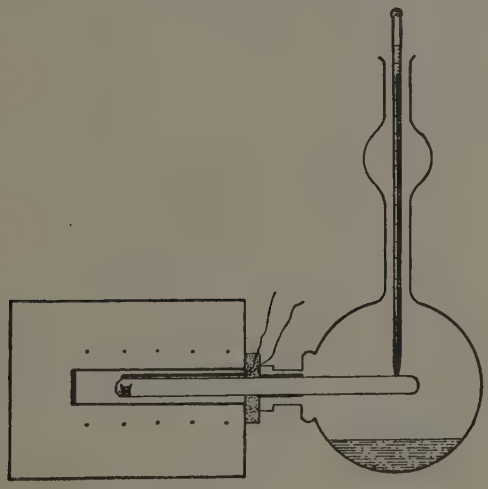


Fig. 1.

bulbo sull'estremità del tubo permette di leggere la temperatura esatta alla quale questo viene portato.

Se ora si fa bollire la sostanza contenuta nel pallone e si riscalda gradatamente il forno, a un certo momento si vedrà comparire una rugiada di goccioline di zolfo nella parte più fredda del tubo: il solfuro, alla temperatura segnata dalla pinza, avrà allora la tensione che lo zolfo liquido possiede alla temperatura indicata dal termometro.

Abbassando la temperatura del forno anche di pochi gradi – possono bastare anche solo 5° – il vapore di zolfo viene riassorbito e le goccioline della rugiada scompaiono, se la emissione di vapore da parte del solfuro è reversibile.

Determinando le due temperature di comparsa e di scomparsa della rugiada di zolfo si può arrivare a stabilire la temperatura corrispondente a una determinata tensione con un errore massimo di $\pm$ 2°, 5.

Per controllare il metodo abbiamo misurato le tensioni del solfuro

rameico alle temperature di ebollizione: della naftalina (217°), della chinolina (237°) e dell'acido benzoico (249°).

A queste temperature, le tensioni dello zolfo liquido quali si deducono per interpolazione dai valori sperimentali di Ruff e Graf [1] e di Matthies [2] sono rispettivamente mm. 4; 7.5; 11.8.

Per avere formazione di rugiada di zolfo dal solfuro rameico, noi abbiamo trovato che occorreva scaldare questo alle temperature di 423°.5; 431°.5; 439°.5.

Le stesse pressioni sono state trovate da Allen e Lombard alle temperature di 417°; 427°.5; 437°.5.

Considerando che si tratta di due metodi approssimati la concordanza fra i valori nostri e quelli di Allen e Lombard deve ritenersi buona.

*
* *

Il solfuro MoS_3 è stato preparato per scomposizione con acido solforico di una soluzione di solfomolibdato ammonico. Il precipitato, lavato con alcool, è stato lungamente estratto con solfuro di carbonio e conservato in essiccatore nel vuoto.

Come sostanze a punto di ebollizione fisso sono state impiegate: naftalina, α-naftilammina, antracene, che bollono rispettivamente a 217°; 301°; 351°.

Le temperature alle quali è comparsa la rugiada di zolfo sono: 355° con la naftalina, 390° con l'α-naftilammina, 418° con l'antracene.

Se ne ricavano quindi per le tensioni di zolfo di MoS_3 i valori:

t°	p (mm Hg)	Log P
355°	4.0	0.61
390°	28.8	1.46
418°	178.6	2.25

La curva dei logaritmi delle tensioni in funzione della temperatura è una retta.

In tutti i casi bastava abbassare anche solo di 7-8° la temperatura del forno, per vedere la rugiada di zolfo scomparire completamente.

Questo dimostra che la emissione di vapore di zolfo da parte di MoS_3 si compie in maniera reversibile.

Sulla natura dei prodotti della successiva desolforazione speriamo tornare fra breve.

(1) « Berichte », *40*, 4199 (1907).
(2) « Phys. Zeit. », 7, 395 (1906).

Chimica. — *Ricerche sopra i solfuri di molibdeno.* II. *Equilibrio di riduzione del bisolfuro di molibdeno a mezzo dell'idrogeno.* Nota del Socio N. PARRAVANO e G. MALQUORI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geochimica. — *L'inerzia geochimica degli elementi delle triadi.* Nota [1] del Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

Riprendo l'argomento relativo alla inerzia, nel campo terrestre, dei componenti le triadi; inerzia relativa per la prima triade, che dà composti naturali solo nella porzione superficiale della Terra; assoluta per le due restanti, che non presentano se non le due rarissime specie: Sperrilite e Laurite.

Dimostrai già [2] come, pei tre termini finali di ciascuna triade Ni, Pd e Pt, se ne potesse cercare una ragione nella struttura atomica di tali corpi, i quali corrispondono ad un equilibrio terminale senario 4·6. Equilibrio il quale, benchè non possa considerarsi così stabile chimicamente come quello ditetragonale dei gaz nobili, è pur sempre equilibrio di una certa importanza.

Vediamo adesso i secondi termini: Co, Rh e Ir. I numeri atomici di tali termini corrispondono ad un aggruppamento asimmetrico. Infatti Co va inteso come (18·4)·5; Rh come (36·4)·5 e Ir come (68·4)·5.

Ora, da quanto ho esposto nella mia Nota precedente [3] e nella più ampia Nota che sta pubblicandosi nel « Nuovo Cimento », la molecola di tali corpi non può essere, in condizioni normali, monoatomica. Essa sarà pertanto per lo meno biatomica.

In tal caso i numeri molecolari, che sono altresì numeri elettronici, di questi elementi sarebbero: $Co_2 = 54$, $Rh_2 = 90$ e $Ir_2 = 154$.

Ora è ben noto che il 54, numero molecolare del Co_2, è uno stadio perfetto di equilibrio corrispondente al gaz nobile X.

Vediamo adesso per gli altri due. Dallo studio dei periodi costituiti da dieci elementi risulta che negli ultimi di essi esiste un secondo stadio di equilibrio, secondario, che prelude l'equilibrio finale, il quale, come si sa, è 4·6. E che (se si indica con E lo stadio di equilibrio principale) può scriversi in modo generale: (E)·4·6.

(1) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(2) *Il numero elettronico ed i costituenti terrestri*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 6ª, vol. V, fasc. 12, giugno 1927, p. 940.

(3) *Elettronili e simmetria.* Ibidem, serie 6ª, vol. VI, fasc. 11, p. 454.

In questi periodi di dieci termini, come ho detto altrove più ampiamente, si hanno due tipi di disposizione degli elettroni. Cioè in alcuni corpi (e prendiamo ad esempio il periodo 18–28) restano libere le ultime due orbite di M e cioè M_{IV} ed M_V; mentre gli elettroni esterni si dispongono già in N. Così nel K che è: 2·8·8 — — 1, nel Ca che è: 2·8·8·— — 2. Mentre in altri, a cominciare da Fe^{IV}, si formano delle coppie e dei quartetti disposti in M_{IV}; coppie e quartetti che stabiliscono un equilibrio secondario. Si ha perciò una disposizione che può ammettersi così:

		K	L	M_I–M_{III}	M_{IV}	M_V
22	Fe^{IV}	2	2·2·4	2·2·4	2	2
23	Fe^{III}	2	8	8	2	3
24	Fe^{II}	2	8	8	2	4
	Co^{III}	2	8	8	4	2
25	Co^{II} Ni^{III}	2	8	8	4	3
26	Fe	2	8	8	2	6
	Ni^{II}	2	8	8	4	4
27	Co	2	8	8	4	5!
28	Ni	2	8	8	4	6

E quanto è indicato nella precedente tabella può ripetersi, *mutatis mutandis*, anche per gli altri due periodi di dieci termini. Quindi uno stadio (E·4) si può considerare, in questi periodi maggiori, come equilibrio importante, per quanto secondario. Ora il periodo che si inizia coll'86 deve appunto essere un periodo di dieci termini. Pertanto il numero 90, corrispondente a Rh_2, è esso pure uno stadio di equilibrio che si può segnare come (86·4).

Finalmente se supponiamo, come appare logico e naturale, che gli stadî possibili di equilibrio si svolgano secondo la regola: 10, 8, 10, 8, 14, 10, 8, ripetendosi cioè lo stesso ritmo dei periodi a cominciare dal quarto, noi otteniamo gli stadî ipotetici: 96, 104, 114, 122, 136, 146 e 154. E questo ultimo stato di inerzia 154 corrisponde appunto a Ir_2.

Questa considerazione circa lo stadio 154 non vuole affatto dire che sino a quel numero giungano i corpi indecomposti. La dimostrazione del Sommerfeld, ripetuta, sotto altra forma, dal Siracusano in questi « Rendiconti » [1], circa il numero massimo possibile di 138, non viene infirmata.

(1) Questi «Rendiconti», vol. V, adunanza 16 gennaio 1627, p. 114.

Altro è difatti un equilibrio dovuto alla biatomicità di un elemento, altro è la possibilità che possano sussistere sino a quel limite corpi indecomposti.

*
* *

Ci resta adesso da spiegare l'inerzia dei primi tre termini delle triadi: Fe, Ru ed Os.

Anche questi, poichè appartengono ai periodi di dieci termini, possono considerarsi formati da un equilibrio 2·6 analogo all'equilibrio finale 4·6. Dalla tabella precedente questo risulta in modo chiaro. Che esista un gruppo 2 di equilibrio secondario è dimostrato da varî fatti che ho svolto più ampiamente altrove. Qui ricorderò solo un fatto di valenza. Si trova cioè un Fe^{III}, che può sussistere solo se si considera come (18·2)·3, mentre se fosse un 18·5 sarebbe asimmetrico. E non sussiste un Fe^{I}, il quale appunto corrisponde ad un asimmetrico (18·2)·5. Ora questa è una sicura conferma della esistenza nei primi tre elementi delle triadi di un gruppo (E·2), mentre negli altri esiste invece il gruppo (E·4). E con ciò si spiega anche il salto di valenza da 8 a 4 nelle triadi. Possiamo dunque ammettere, pei primi tre termini delle triadi, un equilibrio così: Fe (18·2)·6; Ru (36·2)·6 e Os (68·2)·6 [1]. Cioè a dire tutti e tre questi corpi si trovano in un equilibrio finale senario e pertanto, in determinate condizioni e nel campo termodinamico terrestre [2], inerti.

Risulta adunque da quanto ho esposto che una spiegazione della inerzia dei corpi delle triadi può ricercarsi nel loro stadio di equilibrio stabile. Risulta altresì, e questo potrebbe essere di un certo interesse anche chimico, che mentre i primi e gli ultimi termini di ciascuna triade debbono essere, come tutti i corpi corrispondenti ad un equilibrio, a molecola monoatomica, gli intermedî debbono avere molecola per lo meno biatomica.

*
* *

Quanto ho esposto nelle mie precedenti Note relative a questi fatti geochimici può riassumersi nel modo seguente:

1. *I corpi, semplici o composti, naturali o artificiali, organici o inorganici hanno, di regola, numero molecolare pari.*

2. *La quasi totalità della massa terrestre è costituita da corpi compresi entro il numero atomico 28, cioè entro i limiti della prima triade.*

3. *La inerzia geochimica degli elementi delle triadi deve riportarsi al numero ed alla disposizione degli elettroni, corrispondenti ad uno stadio di equilibrio.*

(1) Questo equilibrio appare stabile nel Fe, mentre nel Ru e nell' Os può scindersi anche in (E)·1·1.

(2) Sempre ferme restando le considerazioni sulla relativa attività dei costituenti la prima triade, già svolte nella mia citata Nota a p. 942.

Geologia. — *La serie dei terreni dal Priaboniano al Norico nei dintorni di Albenga.* Nota [1] del Corrisp. S. Franchi.

Il supposto Carbonifero di Villanova di Albenga. — Di passaggio ad Albenga, lo scorso maggio, dedicai qualche giorno a riesaminare alcuni punti di particolare interesse che, con mio grande rincrescimento, non avevo più potuto rivedere da quando, parecchi lustri or sono, io avevo incominciato il rilevamento geologico della regione.

Il contrafforte del Monte Pisciavino, separante la marina di Alassio dalla valle Arroscia, è costituito da pieghe serrate delle arenarie, degli scisti, con calcari alberesi, della *Zona ad Helminthoida labyrinthica*, e, verso levante, a partire dal Monte Bignone, dagli scisti, calcari e arenarie del Priaboniano, con lenti di brecciole minute con piccolissime nummuliti, le quali permettono di stabilire la cronologia della formazione.

È appunto in un grosso banco di calcare scistoso marnoso nero, sottostante, in concordanza e nel modo più chiaro, ad un grosso banco di arenaria, costituente il fondo di una sinclinale coricata verso ponente, che, a nord del Poggio Barbera, poco a levante di Villanova di Albenga, è stata fatta, durante la guerra, per iniziativa di un valoroso membro del foro genovese, una dispendiosissima ricerca per carbone, credendo si trattasse di Carbonifero.

Che si trattasse invece di depositi eocenici, e precisamente priaboniani, non poteva sussistere il minimo dubbio per un geologo che conosceva a fondo la regione, e il cui parere è stato, ad un certo momento, richiesto; ed egli non mancò di consigliare l'abbandono immediato della ricerca; ma c'era chi aveva invece interesse a proseguirla, per quanto i risultati riuscissero, come era ovvio, completamente negativi ed economicamente disastrosi; e la ricerca fu proseguita, giustificando prolungate dispense dal servizio militare.

Giace ancora abbandonato alla bocca del pozzo un argano, poco sopra la strada Albenga-Villanova, a testimoniare il grave errore minerario, e vi è forse ancora chi sogna una ripresa della ricerca.

Radiolariti priaboniane tra Monte Castellermo e Salea. — Di interesse scientifico assai maggiore era per me una visita al versante meridionale del Monte Castellermo, il quale ha una enorme importanza per la geologia di tutta la regione.

(1) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1927.

(2) D. Zaccagna, *Conformazione stratigrafica fra il Torrente Neva ed il Pennavaira in territorio di Albenga (Liguria occidentale).* « Boll. R. Comitato geol. », anno 1909.

Di questa bella cima, la quale, coi suoi strati pseudo-orizzontali, torreggia su tutte le regioni circostanti delle valli Arroscia e Pennavaira, è già stata fatta una discreta illustrazione: dopo le indicazioni datene nella Carta geologica delle Alpi Occidentali al 400.000 dell'Ufficio geologico (1908), l'ing. D. Zaccagna ha pubblicato nel 1909 [2] una carta geologica al 100.000, con numerosi profili alla scala di 3 : 20000, di cui uno passa precisamente attraverso a quella cima. Essa sarebbe, secondo questo geologo, costituita da dolomie del Trias medio e superiore, soprastanti, per rovesciamento, al Retico.

Vedute completamente opposte a queste dello Zaccagna, sì per la stratigrafia che per la tettonica, sono state espresse dal prof. G. Rovereto in un profilo di quel monte, pubblicato nel suo recente *Trattato di geologia morfologica* [1], vedute che conviene discutere brevemente, per ristabilire la verità dei fatti, molto chiari e indiscutibili.

Per quello che concerne l'età della formazione della bella cima, io non posso che associarmi alle idee dello Zaccagna, dopo l'adesione parziale ad esse data con la pubblicazione di disegni tratti da fotografie di essa in una Nota di questi « Rendiconti » [2]: le rocce del Monte Castellermo sono, pure per me, dolomie triasiche tipiche, riconoscibili anche a distanza per i loro caratteri morfologici, e non calcari giuresi, come è indicato nel succitato profilo.

Presso la Colla di Onzo (839), ad occidente del M. Castellermo, dove, al contatto fra l'Eocene e le dolomie onde è costituita la cima, si inizia un rapidissimo vallone, è visibile un profilo ricordante quello del prof. Rovereto, senonchè anzichè mettersi sotto, la linea di contatto va sopra alle dolomie, con un angolo di circa 60°.

Per ciò che riguarda la tettonica dell'Eocene rispetto ai terreni secondari, la disposizione molto regolare e sopra una estensione di oltre 12 km., dai dintorni di Alto, dove essa ricopre il Luteziano fossilifero, al versante meridionale del contrafforte in serie rovesciata: Monte Castellermo-Monte Nero-Croce d'Arnasco-Monte Livernà, di cui essa ricopre in trasgressione i vari terreni dal Norico al Giurese, e ai dintorni di Salea, di una formazione priaboniana, con caratteri litologici molto costanti e singolarissimi, mi sembra permetta di escludere il carreggiamento supposto col suo profilo dal prof. Rovereto.

D'altra parte, la stessa perfetta concordanza degli strati dell'Eocene fra loro e colla linea di contatto, come è indicata nel detto spaccato, mi sembra poco conciliabile coll'ipotesi che si tratti di un contatto per carreggiamento.

(1) G. Rovereto, *Trattato di geologia morfologica*. Milano, 1925, p. 290, fig. 94.

(2) S. Franchi, *La serie secondaria capovolta e i grandi carreggiamenti dei monti di Albenga nelle Alpi Liguri*, « Rend. Acc. Lincei », vol. I, Serie, VI, 1° sem., fasc. 5°, Roma, febbraio 1925.

Questo priaboniano è costituito nella sua parte inferiore da pochi scisti lucenti, argentei, quindi da una zona di radiolariti rosee, paonazze, verdastre, ecc., con qualche banco di arenaria intercalato qua e là; il tutto con una potenza da 4 a 10 m. Nelle radiolariti abbondano radiolarie e spicule di spugne, particolarmente a nord del rudero del castello di Arnasco, e, a Levante della Neva e di Salea, a nord delle Cà di Campo. Ivi esse, anzichè adagiarsi con non forte pendenza, come fra Castellermo e Arnasco, sui terreni secondari, sono raddrizzate e arricciate e un po' rovesciate sugli scisti eocenici. Ad esse seguono, presso Case Morteo, calcari e brecciole con piccole nummuliti, da me scopertevi fin dal 1890.

Sulle radiolariti si appoggia regolarmente una potente formazione di calcari scistosi, giallognoli, lustri, minutamente ondulati, potente alcune

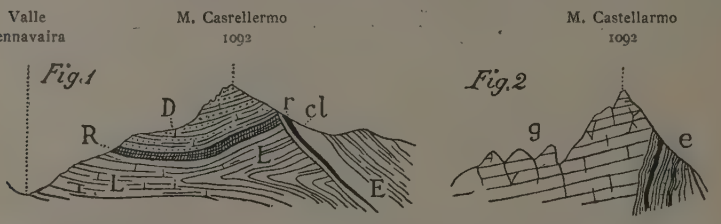


Fig. 1. — Profilo geologico secondo Zaccagna (rivoltato e un po' ingrandito (l. c. 1909).

L'Eocene (E) si suppone deposto in trasgressione sulle dolomie del Trias medio e supetiore (D), sul Retico (R) e sul Lias (L) fossiliferi.

Nel profilo dello Zaccagna però alla base dell'Eocene io ho aggiunte le indicazioni schematiche di due zone di terreni estese vari chilometri, poggiantisi sui terreni secondari, con pendenze da 40° a 30° da me osservati lo scorso maggio: una di radiolariti (r) potente da 4 a 10 m., l'altra di calcari lucenti cipollinici lamellari (cl) avente 200-300 m. di potenza.

Fig. 2. — Spaccato geologico naturale, offerto da G. Rovereto (*Trattato di geologia morfologica*, 1925) come esempio di contatto anormale per carreggiamento, tra Eocene (e) ed un supposto Giurassico (g).

centinaia di metri, a cominciare dal contrafforte settentrionale del Monte Castellermo fino a raggiungere i dintorni di Bezzo, dove ad essi viene a sovrapporsi il Pliocene.

L'orizzonte di radiolariti che, come dissi, ad occidente del Monte Castellermo va, cogli scisti eocenici, a sovrapporsi al Luteziano (con masse di calcari a *Nummulites perforatus*) viene ad assumere una grande importanza pel fatto che in rapporto con esso non figura finora alcuna massa di rocce ofiolitiche, dalle quali sono invece constantemente accompagnate, come è ben noto, le radiolariti nella Riviera orientale e nell'Appennino emiliano e toscano.

La conoscenza di questo orizzonte di radiolariti stratigraficamente ben determinato, indipendentemente dalla coesistenza di masse di rocce ofiolitiche non è certo senza importanza; la ricerca di eventuali masse di queste rocce, che esistessero nei dintorni di Albenga e lo studio comparativo di

queste radiolariti con quelle della Riviera orientale costituiscono ora dei quesiti molto interessanti, da tenersi d'occhio dai geologi che si sono assunto il delicato incarico di riferire sulla questione dell'età degli argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino Ligure orientale ed emiliano.

Il Socio prof. Parona, colla consueta sua amichevole cortesia, ha accettato di esaminare le lamine sottili delle radiolariti di Arnasco e di Cà di Campo, sì che si può essere sicuri che da esse sarà tratto tutto il possibile a vantaggio della stratigrafia dell'Eocene della Liguria.

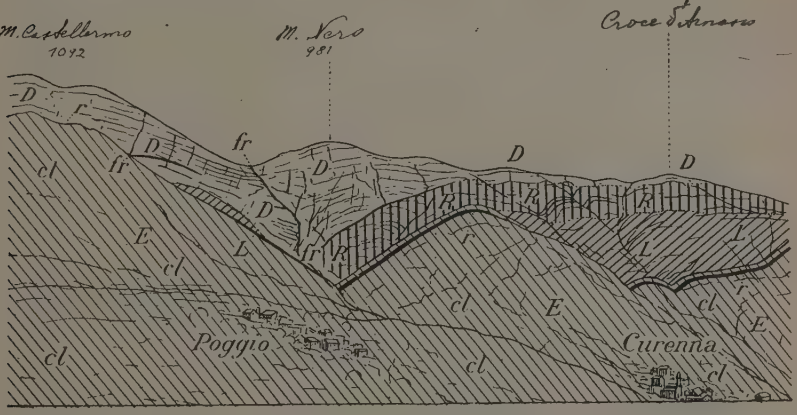


Fig. 3. — Il contrafforte M. Castellermo, M. Nero, Croce d'Arnasco, di terreni secondari in serie rovesciata e quelli priaboniani di Poggio e di Curenna, che scendono dal suo versante meridionale.

(Schizzo preso dalla Cappella di S. Rocco, sopra Onzo).

D - Dolomie del Norico; *R* - Retico; *L* - Lias; *E* - Eocene; *r* - radiolariti della zona estesa oltre 12 chilometri; *cl* - potente zona ad essa sovrapposta di calcari lamellari cipollinici, lucenti, pieghettati, giallognoli e a luoghi verdicci e rossi.

Le « breccie poligeniche » a sud di Monte Livernà, presso Salea ed a Ceriale. — Il Lias calcareo del Monte Livernà, notevole pel grande sviluppo di straterelli, noduli e lenti di selce bianca, e, nella sua parte meridionale, tra Arnasco e Cenesi, per i frequenti e potenti banchi di brecce ad elementi dolomitici, ricordanti le « brecce poligeniche » dei Calcescisti e le famose *brèches du télégraph* di Kilian, ha il suo proseguimento a levante della Neva, dove, a nord di Cà di Campo, situate a levante dell'abitato di Salea, è seguito da una formazione prettamente brecciosa, che io credo dovere assimilare alle brecce poligeniche della valle Pennavaira, descritte in una Nota precedentemente citata.

In posizione analoga, alla sommità della formazione giurese e liasica quasi completa, affiorante lungo la Riviera, fra Ceriale e Borghetto Santo Spirito, e proprio dirimpetto alla stazione di quel primo villaggio, affiora la stessa formazione di brecce poligeniche, con qualche carattere litologico

particolarmente interessante, dovuto alla presenza di grossi blocchi rotolati (70–80 cm.) di granito più o meno laminato. Questi si aggiungono ai grandi blocchi di gneis e di porfido descritti nelle analoghe brecce dei dintorni di Nasino (loc. cit.) per rendere ancora più enigmatica la genesi di questa estesissima formazione brecciosa, che vediamo affiorare, sopra enormi estensioni, fra il mare e la valle del Tanaro.

Affioramenti di gneis e di granito, dai quali quegli elementi di rocce cristalline hanno potuto provenire, esistono nel piccolo massiccio cristallino del Monte Spinarda (granito presso Bardineto e presso Case le Volte, nell'alta valle della Neva, a 14 km. dal mare) e, a distanze di gran lunga maggiori (65 km.), nel notissimo Massiccio Cristallino Savonese.

Ma pel momento, ogni congettura sull'ubicazione e sui limiti dei bacini nei quali quelle singolarissime brecce abbiano potuto deporsi sarebbe arrischiatissima.

Il Retico ed il Norico a Borghetto Santo Spirito. — La strada della Cornice, tra Borghetto Santo Spirito e Ceriale, è tagliata in trincea nei calcari della serie giurese–liasica, i quali, a causa dei numerosi ripiegamenti, si presentano con uno spessore non inferiore a 600 metri. Tracce di fossili si trovarono in molti punti, ma solo sotto il ponte S. Pietro, in Val Pennavaira, si sono trovate, dallo Zaccagna e da me, degli esemplari di *Arietites* paragonabili con l'*A. spiratissimus,* Q.; frequenti fragmoconi di *Belemnites* ed abbondanti crinoidi indeterminabili si trovarono in moltissimi punti dei contrafforti dei Monti Livernà, Arena, Ceresa, Acuto, Croce, ecc.

La cava per pietra da costruzione, ora abbandonata, esistente in corrispondenza della estremità occidentale dell'abitato di Santo Spirito, è precisamente aperta nel Retico, non presentante ivi fossili determinabili, ma mostrante tuttavia i caratteri litologici più spiccati di quel terreno, nei suoi noti ed estesissimi affioramenti della valle Pennavaira, dove io ne trovai fossili caratteristici nel 1890, nella valle dell'Iso, dove primo lo riconobbi e delimitai fra Isoverde e Monte Torbi, sopra Bardonecchia, dove io lo riconobbi nel 1910[1], e nell'alta Valtellina, dove è stato riconosciuto da vari decenni dai geologi svizzeri e da me studiato negli anni 1909 e 1910.

Cito queste località perchè a me particolarmente molto note per i rilevamenti che vi ho eseguiti, ma i caratteri sono anche analoghi a quelli del Retico della Spezia, delle Apuane e della Lombardia.

Sono banchi calcari e calcareo–dolomitici, piuttosto grossi, con patine giallastre, giallo–verdognole, olivastre e ocracee molto caratteristiche e subito

(1) Nel suo ottimo lavoro, di grandissima importanza per la stratigrafia e la tettonica delle Alpi Occidentali: *Contribution à une synthèse des Alpes Occidentales* (Bull. Soc. géol. de France, 1925), il compianto amico E. Haug. attribuisce allo Zaccagna la scoperta del Retico del Melezet, mentre io ne annunciai la esistenza nel 1910, portandolo appunto come argomento decisivo contro le idee del mio collega sull'età arcaica dei Calcescisti.

riconoscibili, associati a calcari fogliettati, giallognoli e nerastri, talora un po' lucenti nella scissosità, con sottili banchi di calcare compatto nero; rocce tutte che si osservano in ripetute alternanze, sulla potenza di una quarantina di metri. Qualche traccia di lumachella non manca qua e là, ricordante quelle tanto comuni nel Retico.

Uscendo dall'abitato, verso la strada di Toirano, alla falda occidentale del Monte Piccaro, si osserva tosto il grande sviluppo delle dolomie chiare del Norico le quali, in alcune cave, si mostrano profondamente fratturate e localmente milonitizzate.

Il limite fra dolomie noriche e Retico ivi indicato, tanto nella Carta geologica dello Zaccagna, che in quella al 400.000, deve quindi essere corretto; ed io mi affretto a dichiararlo, al momento stesso in cui desidero stabilire la verità dei fatti, così gravemente lesa, col profilo del Monte Castellermo, pubblicato nel pregevole trattato del prof. Rovereto, in così forte contrasto con quello a colori pubblicato, tanti anni prima, nel grande lavoro dello Zaccagna, lavoro importantissimo, malgrado le mende che io già ebbi a notarvi nella stratigrafia, nel corso della mia Nota, precedentemente citata, del 1925.

Da quanto è stato sopra esposto risulta la esistenza di una grande lacuna stratigrafica nella serie dei terreni costituenti i versanti montuosi che guardano il mare, tra M. Castellermo e Ceriale. Questa lacuna comprenderebbe probabilmente tutto il Luteziano, tutto il Cretaceo e una parte, per ora non delimitabile, del Giurese.

Chimica. — *Cellule albuminiche artificiali.* [1] Nota [2] del Socio Straniero L. A. Herrera.

È stato spesso rimproverato alla plasmogenia l'impiego di sostanze morfogenetiche che non sono sostanze proteiche, substratto più importante delle cellule naturali: fortunatamente ho ottenuto diverse imitazioni cellulari coll'ovalbumina.

Fig. 1.

Avendo osservato la formazione di cordoni granulari nei Colpoidi [3] preparati colla soda in soluzione addizionata con ovalbumina, cordoni che dopo 24 ore mostravano una certa analogia con quelli del protoplasma, io ho avuto l'idea di sottomettere questa proteina all'azione di diversi reat-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto degli Alti Studi Biologici di Messico D. F.
(2) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.
(3) Questi «Rendiconti» 1926, 7 novembre, vol. IV, fasc. 9, p. 343.
(4) Lambling, *Precis de Biochemie.* Masson e C.ie, Paris 1921, p. 498.

tivi. Dopo alcuni tentativi sono arrivato alla tecnica seguente basata sulla formazione di un acido ossiproteico $C_{43}H_{82}N_{140}O_{31}S$?) p. m. 1322 [4] per idrolisi della proteina cogli acidi minerali. Debbo far notare a questo proposito che io non mi sono occupato di questa idrolisi nè dei prodotti che ne derivano, ma semplicemente mi sono limitato a cercare una tecnica conveniente per ottenere le imitazioni cellulari.

1° – Bisogna mettere a contatto un'albumina o una soluzione di albumina con un acido minerale evitando una diluizione eccessiva di quest'ultimo. A questo scopo si lasciano cadere dei grani di ovoalbumina Merk

Fig. 2.

sull'acido nitrico fumante, disteso su una lamina, o sull'acido solforico a 66°, oppure infine sull'acido cloridrico. Fig. 2: piccoli grani sull'acido solforico 66°. Struttura reticolare. Montato in balsamo di Canadà. (Contemporaneamente invio all'Accademia questo preparato e quelli altri che corrispondono a questa Nota). Si direbbe che queste notevoli strutture reticolari sieno dovute a un'emulsione dell'acido coll'albumina.

Attorno ad ogni grano si osserva una struttura microscopica finamente reticolare. I nuclei son reticolati o perfettamente uniformi, circolari od ovali. Vengono lavati, colorati con un'anilina o l'ematossilina e montati in balsamo come le cellule naturali.

2° - Albumina solida Merk . . . . . gr. 0.100
Acqua . . . . . ccm³ 10

Si discioglie in un mortaio agitando e triturando. Si fanno cadere delle goccie su

Acido solforico a 66° . . . . . parti 5
Acqua . . . . . » 5

disteso su una laminetta. L'altezza della caduta dovrà essere grande p. es. m. 3.80. Un setaccio fino dovrà essere interposto fra le goccie che

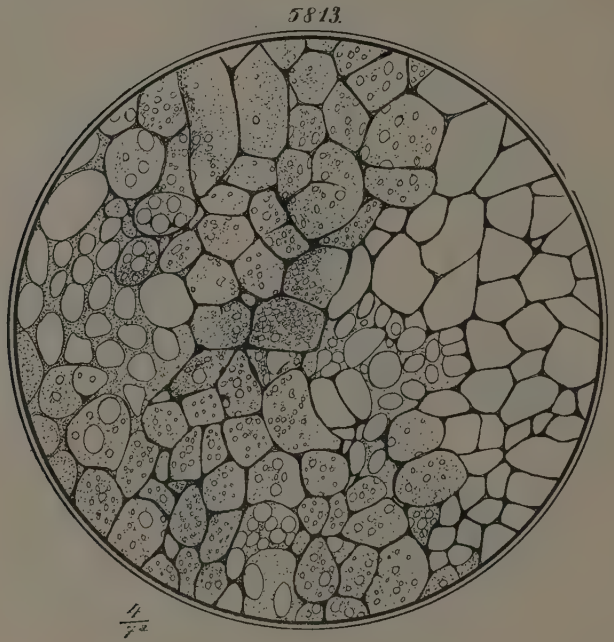


Fig. 3.

cadono e la lamina per rendere più fine ed uniformi le goccioline albuminiche. Si lascia a sè cinque minuti, si lava, si colora e si monta in balsamo di Canadà. Si ottengono amebe microscopiche vacuolizzate con pseudopodi finissimi e granulari. Aspetto di cellule nucleate in divisione diretta. Tutte microscopiche e senza movimenti. È la prima volta che vengono ottenute questi modelli di amebe microscopiche albuminiche. Senza alcun dubbio esse son passate per uno stato alveolare semiliquido indurendosi poi successivamente coll'eccesso dell'acido. Alcune sono sferiche, formate da alveoli irregolari come grandi e piccoli alveoli uniti. Esse son leggere e strisciano

facilmente per differenza di livello. Può darsi che questa tecnica perfezionata darà amebe più perfette in movimento. (Fig. 1).

3° – Albume d'uovo tale quale. Una goccia vien messa tra il copri-oggetto e la laminetta, compressa da un peso da 500 gr. Si depositano sull'orlo del copri-oggetto alcune goccie d'acido solforico al 50 %. Si lasciaa sè per alcune ore. Si lava, si colora, si passa allo xilolo e si monta in balsamo.

Magnifico tessuto microscopico esagonale, copiato esattamente dal disegnatore. (Fig. 3). Membrane cellulari, contenuto granulare e vacuolizzato. Sorprendente imitazione del tessuto vegetale. Alcune cellule sono vuote. Non si osservano nuclei. Tale preparato presenta la massima analogia, p. es. col tessuto di una foglia di « Pelargonium inquinans », secondo Duchartre. (Fig. 4).

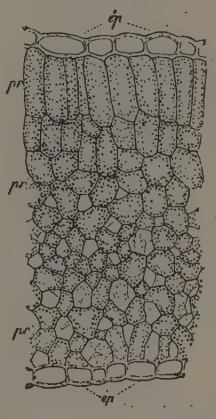


Fig. 4. – Sezione traversale di una foglia di Pelargonium inquinans, secondo Duchartre.

4° – Si può eseguire la tecnica di Leduc. L'albumina viene colorata col nero animale fino, lavato e setacciato. Alcune goccie sono deposte su una lamina di vetro livellato, la superficie della quale sia stata coperta con uno strato di acido solforico al 50 %.

Le goccie si comprimono, diffondono e prendono aspetto esagonale. Si producono al centro figure di cromosomi, sopra tutto impiegando due goccie di albumina successive. Qui vien dimostrata l'influenza importante della diffusione per la formazione delle cellule.

Una volta io vidi le traccie di un centrosoma.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Ancora sulle condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere e di un certo ordine anche in senso precisato.* Nota II di S. MINETTI, presentata [1] dal Corrisp. G. GIORGI.

§ 1. - Con la presente Nota faccio seguito ad un mio precedente lavoro pubblicato in questi « Rendiconti » [2]. In esso introdussi la nozione di « ordine precisato », $[\rho, \rho_1, \rho_2, \cdots \rho_p]$ col dire che una funzione intera $f(x)$ di genere finito è di tale ordine quando, r_n designando il modulo della sua radice n^{ma} supposto ordinate per modulo crescente, è

$$(1) \qquad \sum_n \frac{1}{r_n^{\rho}(\log r_n)^{\rho_1} \cdots (\log^p r_n)^{\rho_p + \varepsilon}}$$

convergente o divergente secondochè, essendo $|\varepsilon|$ qualunque, è rispettivamente $\varepsilon > 0$ od $\varepsilon < 0$.

Affermai poi, senza dimostrarlo, che gli ordini a suo tempo introdotti dal Lindelöf per l'$M(r)$ relativo alla $f(x)$ [3] erano casi particolari dei miei ordini $[\rho, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_p]$.

Ed invero, limitandoci per amore di brevità al caso $p = 1$ rilevo che se $M(r)$ è di ordine (ρ, ρ_1) nel senso di Lindelöf e se la $f(x)$ corrispondente è a crescenza regolare (sempre nel relativo senso di Lindelöf) si ha, a partire da un certo valore di n,

$$(2) \qquad n(\log n)^{\alpha - \varepsilon} < r_n^{\rho} < n(\log n)^{\alpha + \varepsilon}$$

ε essendo positivo qualunque ed $\alpha = -\rho_1$.

(1) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(2) Vedi S. MINETTI, *Le condizioni necessarie e sufficienti, ecc.* « Rend. R. Accad. dei Lincei », vol. VI, serie 6ª, II sem., fasc. 9 novembre 1927. In questa Nota sono incorsi alcuni errori che vanno così corretti: p. 271, riga 3ª e riga 4ª: al posto di K maiuscolo va k minuscolo; p. 271, riga 11ª: sotto al secondo segno $\sum$ va scritto $\omega \leq t$ e non $\omega \leq r$; p. 272, riga 16ª: va chiusa la parentesi tonda; p. 273, riga 8ª: al posto di $[\rho, 1 - \rho_1]$ va $[\rho, 1 + \rho_1]$; p. 273, riga 14ª: al posto di K maiuscolo va k minuscolo; p. 273, riga 20ª: al posto di $(\rho, \rho_1]$ va $[\rho, \rho_1]$; p. 273, righe 28ª e 29ª: l'ultimo integrale della riga 28ª e quello della riga 29ª vanno chiusi in parentesi quadra e in essi gli esponenti di $\log r$ debbono essere $\rho_1 + \varepsilon + 1$ anzichè $2(\rho_1 + \varepsilon)$; p. 274, riga 4ª: correzione analoga alla precedente per gli esponenti di $\log r$ ed inoltre al secondo integrale di quella riga va preposto il segno $\sum_{\omega \leq t}$.

(3) Vedi E. LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini*, « Acta Societatis Scientiarum Fennicae », tomus XXXI, n. 1, 1903.

Si ha dunque

$$r_n^{\rho} = n\,(\log n)^{\alpha - \varepsilon}\,[1 + \theta\,\varepsilon(n)]$$

con $0 < \theta < 1$, e $\varepsilon(n)$ avendo la stessa crescenza di $(\log n)^{2\varepsilon}$.

Se ne conchiude

$$\log r_n = \frac{1}{\rho}\log n\,[1 + \sigma(n)]$$

con $\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = 0$.

Dico allora che la $f(x)$ è di « ordine precisato » $[\rho\,,(1 + \rho_1)]$.

Ed infatti a parte di quantità che si possono evidentemente trascurare per quello che si ha in vista di stabilire, la serie

$$\sum_n \frac{1}{r_n^{\rho}(\log r_n)^{1-\alpha+\sigma}}$$

assume sostanzialmente la forma

$$\sum_n \frac{1}{n\,(\log n)^{1+\sigma-\varepsilon}\,[1 + \theta\,(\log n)^{2\varepsilon}]}$$

e, scelto che sia σ positivo qualunque siccome la (1) è verificata pure per ε qualunque resta dimostrato che:

Se una $f(x)$ è tale che il suo $M(r)$ è di ordine $(\rho\,,\rho_1)$ e a crescenza regolare, essa è di « ordine precisato » $[\rho\,,(1 + \rho_1)]$.

Ma faremo ora vedere come la condizione di definizione imposta ad una $f(x)$ per essere di « ordine precisato » $[\rho\,,\rho_1]$ contempla viceversa non solo il caso della crescenza regolare ma anche quello della crescenza irregolare.

Si osservi infatti che, supposto come si è detto, $p = 1$ (tanto per fissare le idee), essendo i termini della serie (1) positivi e decrescenti si avrà in virtù di un noto teorema [1], se $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r_n^{\rho}(\log r_n)^{\rho_1+\varepsilon}} = 0$$

e quindi « a partire da un certo valore di n »

$$r_n^{\rho}\,(\log r_n)^{\rho_1+\varepsilon} > n$$

e quindi anche

$$\log r_n > \frac{1}{\rho + \sigma}\log n$$

con σ positivo piccolissimo.

(1) Vedi ad es. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, IIme édition 1921, p. 16, penultima riga.

Si può dunque conchiudere che la disuguaglianza

$$r_n^{\rho} > n\,(\log n)^{-\rho_1-\varepsilon}$$

varrà « a partire da un certo valore di n, dato che sia ε positivo qualunque ».

Dal fatto poi che la serie stessa con ε negativo è divergente potremo conchiudere che non è possibile che sia soddisfatta per tutti i valori di n, la disuguaglianza

$$\frac{1}{r_n^{\rho}\,(\log r_n)^{\rho_1-\varepsilon}} < \frac{1}{n\,(\log n)^{1+\varepsilon'}}$$

dove è ε' positivo qualunque.

Dunque « almeno per una infinità di valori dell'indice n » si dovrà avere

$$r_n^{\rho}\,(\log r_n)^{\rho_1-\varepsilon} < n\,(\log n)^{1+\varepsilon'}$$

e quindi anche

$$\log r_n < \frac{1}{\rho+\sigma}\log n \quad , \quad (\sigma \text{ piccolissimo})$$

Si può dunque solo conchiudere « che per una infinità di valori dell'indice n » sarà soddisfatta la

$$r_n^{\rho} < n\,(\log n)^{-\rho_1+\varepsilon+1}$$

dove ε, come al solito, è positivo qualunque.

Se ora si pensa di porre

$$r_n = n^{\lambda(n)}\,(\log n)^{\mu(n)}$$

e si imaginano riportati su di una retta l'insieme dei valori di cui l'ascissa è $\mu(n)$, questo insieme ammetterà, in generale, un insieme derivato, che essendo perfetto, conterrà un elemento μ_{max} più grande di tutti gli altri, ed un altro elemento μ_{min} minore di tutti gli altri.

I due elementi μ_{max} e μ_{min} sono quelli, com'è ben noto, che Cauchy chiamava rispettivamente « la plus grande » e « la plus petite des limites » della successione $\mu(n)$ e che corrispondono all' « Obere » e all' « Untere Unbestimmtheitsgrenze » del Du Bois-Reymond, ed ai « limite supérieure et inférieure de $\mu(n)$ pour n infini » dell'Hadamard.

Supposto che μ_{min} sia diverso da zero (ciò che equivale ad ammettere che i numeri $\mu(n)$ siano, in valore assoluto, sempre superiori ad un numero positivo fisso), si avrà che, considerando, per fissare le idee, i $\mu(n)$ positivi, e σ essendo positivo qualunque, a partire da un certo valore di n

$$\mu_{min} - \sigma < \mu(n) < \mu_{max} + \sigma\,.$$

Se μ_{max} è differente da μ_{min}, diremo col Borel che l'ordine di infinito di r_n rispetto a $\log n$, non è determinato, e che μ_{min} e μ_{max} sono i suoi due limiti di indeterminazione.

Se invece μ_{min} e μ_{max} coincidono allora diremo che l'ordine di infinito di r_n rispetto a $\log n$ è determinato ed eguale al comune valore di μ_{min} e μ_{max}; si dirà inoltre, in questo caso, che la $f(x)$ è a crescenza regolare rispetto a $\log n$.

Nel primo caso invece, e cioè quando μ_{min} e μ_{max} esistono entrambi finiti e diversi fra loro diremo che la $f(x)$ è a « crescenza limitatamente irregolare » rispetto a $\log n$ e che $(\mu_{max} - \mu_{min})$ è la sua « latitudine di irregolarità »; che se infine fosse μ_{max} eguale ad ∞, la $f(x)$ si direbbe « a crescenza irregolare » sempre rispetto a $\log n$.

Tali definizioni si estendono ovviamente alla crescenza regolare, limitatamente irregolare, e irregolare rispetto a $\log^2 n$, $\log^3 n$, ecc.

Tornando ora alla mia definizione di « ordine precisato » emerge, da quanto si è detto, che una $f(x)$ di ordine precisato $[\rho, \rho_1]$ è in generale « a crescenza irregolare » rispetto a $\log n$. Se poi la (4) è verificata nelle stesse condizioni della (3), e cioè a partire da un certo valore di n, allora la $f(x)$ è a « crescenza limitatamente irregolare » rispetto a $\log n$, e la sua « latitudine di irregolarità » è « uno », essendo i limiti di indeterminazione dell'ordine di infinito di r_n, rispetto a $\log n$, rispettivamente $-\frac{\rho_1}{\rho}$ e $\left(-\frac{\rho_1}{\rho} + 1\right)$.

Gli ordini (ρ, ρ_1) di Lindelöf corrispondono invece al caso particolare in cui, se trattasi di crescenza regolare, nel senso di quell'Autore, i limiti di indeterminazione di $\mu(n)$ coincidono in un unico valore μ, caso che io continuo a chiamare di crescenza regolare; se trattasi invece di crescenza irregolare, sempre nel senso di quell'Autore corrispondono o ad un caso di quella che io chiamo, crescenza limitatamente irregolare o ad un caso di quella che io chiamo crescenza irregolare (non limitatamente).

Generalizzando si può poi conchiudere che una $f(x)$ di « ordine precisato » $[\rho, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_p]$ è a crescenza regolare rispetto ad n, $\log n$, $\log^2 n$, $\cdots$, $\log^{p-1} n$ e rispetto a $\log^p n$ può essere a crescenza regolare, limitatamente irregolare o irregolare (non limitatamente), secondochè sia soddisfatta per il primo caso, la condizione di regolarità del Lindelöf e che io ho conservato nelle mie nuove definizioni; per il secondo caso se una condizione analoga alla (4), e relativa ad una « latitudine di irregolarità » finita, è soddisfatta anch'essa a partire da un certo valore di n; per il terzo caso infine quando non sono soddisfatte nè l'una nè l'altra delle due condizioni testè enunciate per i due precedenti casi.

L'introduzione, nella teoria delle funzioni intere degli « ordini precisati » si rendeva, tra l'altro indispensabile per poter estendere le mie gene-

ralizzazioni del risultato del Landau [1] (di cui alla mia precedente Nota) ad ordini « per la $f(x)$ » più precisi di quelli a suo tempo introdotti dal Borel [2] e che contemplassero in particolare quelli che il Lindelöf aveva già introdotto per l'$M(r)$, ordini che allo stato attuale, così progredito, della teoria in questione è del tutto indispensabile dover considerare.

§ 2. – Venendo ora alle condizioni necessarie e sufficienti perchè una $f(x)$ sia di un certo genere, e di un certo ordine nel senso di Borel rileverò innanzi tutto come è bene sin d'ora cominciare a rettificare le condizioni date dal Landau [1] (nel carteggio intervenuto fra quell'Autore e l'Hadamard e pubblicato in questi « Rendiconti »), perchè una $f(x)$ sia di genere $\leq K$.

Egli invero le compendia nelle due formule

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M_r}{r^{K+1}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{K+2}} dr \text{ convergente}$$

Ora basta pensare ad una $f(x) = \text{cost}$ che è ben di genere zero, per convincersi che la seconda delle due condizioni testè scritte non è verificata.

A detta condizione va sostituita l'altra

$$\int_w^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{K+2}} dr \text{ convergente}$$

dove w designa il modulo della radice di $f(x)$ più prossimo all'origine (di minimo modulo). E di qui appare anche, come per rendere se non altro più espressive le ipotesi da cui parte il Landau è desiderabile sostituire altresì all'ipotesi posta da quell'Autore $f(0) = 1$ (inconclusiva e affatto necessaria ai fini che egli voleva raggiungere) l'altra che è bene invece mettere in evidenza $f(0) \neq 0$.

Ciò premesso noto che, tornando alla mia precedente Nota [1], anche alla 2ª condizione del gruppo I [3]

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{\omega^{\rho - \varepsilon}} \text{ divergente}$$

(1) Vedi J. Hadamard e E. Landau, *Sulle funzioni intere di genere finito.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », Classe di Scienze, ecc., vol. VI, serie 6ª, II° sem., fasc. 1, 2, luglio 1927.

(2) Vedi E. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* « Acta Mathematica », t. XX, 1897, pp. 357, 396.

(3) Vedi Minetti, loc. cit., p. 269; ω qui designa, come nella precedente mia Nota una radice generica qualunque della $f(x)$; prima si era indicato ω con r_n mettendo cioè in evidenza il posto d'ordine della ω stessa.

può sostituirsi un'altra che non contenga le ω, e precisamente la

$$(3) \qquad \int_{w}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1+\varepsilon}} dr \text{ divergente}$$

perchè infatti ripetendo i ragionamenti riportati nella mia Nota testè citata, p. 271, secondo capoverso, ma assumendo questa volta al posto di $+\varepsilon$, $-\varepsilon$ potrebbe analogamente concludersi che la serie (2) e l'integrale (3) sono contemporaneamente convergenti o divergenti.

Riassumo pertanto qui in forma conclusiva e definitiva le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera di genere finito abbia un certo genere ed un certo ordine reale nel senso di Borel.

Teorema. – La funzione intera $f(x)$, $f(0) \neq 0$, ha l'ordine reale ρ ed il genere non superiore all'ordine se, e soltanto se, sono verificate le condizioni

$$(\alpha) \qquad \int_{w}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1+\varepsilon}} dr$$

convergente o divergente secondochè $|\varepsilon|$ essendo qualunque è rispettivamente $\varepsilon > 0$ ed $\varepsilon < 0$;

$$(\beta) \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{M_r}{r^{\rho+\sigma}} = 0$$

con $\sigma > 0$ qualunque.

Se poi l'integrale (α) è convergente per $\varepsilon = 0$ e la (β) è pure soddisfatta per $\sigma = 0$ allora la $f(x)$ è di ordine ρ per eccesso, altrimenti per difetto, e viceversa.

Ove poi il genere p superasse l'ordine ρ alla (β) va sostituita l'altra

$$(\beta') \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{M_r}{r^{p+\sigma}} = 0$$

e la $f(x)$ sarà di ordine ρ per eccesso o per difetto secondochè la sola condizione (α) sia o non sia verificata per $\varepsilon = 0$.

Per l'ultima parte del Teorema che si riferisce cioè al caso di un genere superiore all'ordine, rileverò infatti come le due dimostrazioni che conducono alle due condizioni (α) e (β') sono e si stabiliscono in modo perfettamente indipendente, e che si abbassa, naturalmente, in tal caso, l'esponente del denominatore della (β') rispetto a quello che, per la corrispondente condizione, assumeva il Landau appunto perchè qui si considerano simultaneamente il genere e l'ordine, e quest'ultimo inferiore al primo, mentre che il Landau limitava le sue considerazioni esclusivamente al genere.

§ 3. – Mi si consenta ora di mettere in rilievo tutta l'importanza di questi risultati, con i quali si consegue la generalizzazione del risultato del Landau, pur limitandoci per ora a quanto ho sin qui esposto (relativamente dunque alla sola considerazione, assieme al genere, dell'ordine reale nel senso di Borel).

Ed invero il fatto nuovo e fondamentale dei ragionamenti del Landau, com'è ben stato messo in evidenza dall'Hadamard [1], si è quello che la considerazione del valore medio $\mathfrak{M}_r$ accanto all'M_r unico di fatto sin qui considerato, prima dello stesso Landau, conduceva alle condizioni necessarie e sufficienti (indipendentemente dalla considerazione delle radici della $f(x)$) perchè una funzione intera di genere finito fosse di genere zero; di quel genere dunque per il quale meglio si sono studiate e si conoscono le proprietà, perchè si presenta naturalmente come il caso più abordabile alle ricerche in questo difficile ramo dell'Analisi.

Ora le mie estensioni, conducono alla conclusione che i ragionamenti del Landau permettono di determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una $f(x)$ abbia un determinato genere (e non solamente un genere $\leq$ di un dato K intero e positivo) ed altresì un determinato ordine e per eccesso o per difetto che si voglia.

Quel fatto dunque che l'Hadamard classifica come « uno dei più notevoli risultati di cui egli abbia inteso parlare in Analisi » viene esteso così non soltanto al caso di un genere eguale a zero, ma altresì ad un genere ed anche ad un ordine qualunque.

§ 4. – Nella prossima Nota III sullo stesso soggetto e che avrà lo stesso titolo, stabilirò invece con tutto rigore le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera $f(x)$ abbia un certo dato genere ed un certo dato « ordine precisato », condizioni necessarie e sufficienti che ho già enunciato nella mia precedente prima Nota, ma per le dimostrazioni delle quali non detti, nella Nota stessa, che indicazioni molto sommarie e frammentarie, imposto in ciò da inevitabili restrizioni tipografiche.

Si vedrà così che per stabilire dette condizioni i ragionamenti del Landau vanno completati in modo essenziale.

In altre due Note successive a detta Nota III metterò poi in rilievo come i risultati a cui son giunto e che già di per se stessi hanno una importanza del tutto fondamentale nella teoria delle Funzioni Intere, ne acquistino ancor più in quanto con essi possono stabilirsi varii fatti analitici che si riconnettono con varii fra i più importanti teoremi di quella teoria.

Ma si conseguono altresì nuovi importanti risultati che nel loro complesso formeranno oggetto di una Memoria che intendo dar presto alle stampe.

(1) Vedi J. Hadamard ed E. Landau, loc. cit.

Matematica. — *Sur les valeurs de l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ *d'une fonction* $f(x)$ *à point de non-intégrabilité, par rapport à* $g(x)$, *unique.* Nota della sig.na ROSALIND CECILY YOUNG, presentata [1] dal Socio S. PINCHERLE.

1. Comme cas particulier d'un résultat obtenu dans une Note *Sur les ensembles d'intervalles linéaires généraux*, j'ai l'énoncé suivant, qui va servir de base au présent travail:

Les points d'un intervalle fermé (a, b) *où le dérivé inférieur d'une fonction* $g(x)$ *monotone ascendante bornée dépasse un nombre donné*

$$\lambda > \{g(b+0) - g(a-0)\}/(b-a)$$

peuvent être enfermés en une somme d'intervalles fermés (a_n, b_n) *distincts, pour chacun desquels*

$$(1) \qquad \int_{a_n-0}^{b_n+0} dg(x) = g(b_n+0) - g(a_n-0) = \lambda(b_n - a_n) = \lambda \int_{a_n}^{b_n} dx.$$

Sur tout ensemble E étranger à $\Sigma(a_n, b_n)$, on a alors, pour une fonction $f(x)$ intégrable par rapport à $g(x)$ sur E:

$$(2) \qquad \int_E f(x)\,dg(x) = \int_E f(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx,$$

où $\varphi_\lambda(x)$ est égale dans E au dérivé $\leqq \lambda$ de $g(x)$.

Sur tout intervalle (a_n, b_n) où $f(x)$ a ses bornes A_n et B_n finies, on a

$$\lambda A_n \int_{a_n}^{b_n} dx = A_n \int_{a_n-0}^{b_n+0} dg(x) \leqq \int_{a_n-0}^{b_n+0} f(x)\,dg(x) \leqq B_n \int_{a_n-0}^{b_n+0} dg(x) = \lambda B_n \int_{a_n}^{b_n} dx;$$

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(2) D'après la définition de W. H. Young, qui, pour $g(x) = x$, deviente équivalente à celle de Lebesgue Voir: L. C. YOUNG, *Theory of Integration*, Cambridge Tracts in «Mathematics and Mathematical Physics», n. 21 (1927).

c'est-à-dire, puisque l'intégrale de $f(x)$ par rapport à x sur (a_n, b_n) est compris entre les mêmes limites,

$$(3)\qquad \int_{a_n-0}^{b_n+0} f(x)\,dg(x) = \lambda \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dg(x) + \lambda\theta_n (B_n - A_n)(b_n - a_n) \quad , \quad |\theta_n| \leqq 1.$$

Enfin, si e_n désigne un sous-ensemble de l'intervalle fermé (a_n, b_n), et C_n le plus grand des deux nombres $|A_n|$ et $|B_n|$,

$$(4)\qquad \left| \int_{e_n} f(x)\,dg(x) \right| \leqq C_n \int_{e_n} dg(x) \leqq \lambda C_n \int_{a_n}^{b_n} dx.$$

2. Les intervalles (a_n, b_n) dépendent de la fonction $g(x)$ et du nombre arbitraire λ. La mesure de leur ensemble somme est $< \{g(b+0) - g(a-0)\}/\lambda$, peut donc être rendue aussi petite que l'on veut en augmentant λ.

Soit $f(x)$ une fonction possédant dans (a, b) un seul point t de non-intégrabilité par rapport à $g(x)$ (1).

Supposons que l'on puisse disposer λ de façon que, pour les intervalles (a_n, b_n) correspondants, $f(x)$ ait ses bornes A_n et B_n finies (2), *et satisfasse aux deux conditions :*

$$(a)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (B_n - A_n)(b_n - a_n) \qquad \textit{finie},$$

$$(b)\qquad \lim_{n\to\infty} A_n (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} B_n (b_n - a_n) = 0.$$

Dans ces conditions, on aura :

$$(5)\qquad \overline{\lim}\left\{ \int_{a-0}^{t-\varepsilon} f(x)\,dg(x) + \int_{t+\varepsilon'}^{b+0} f(x)\,dg(x) \right\} = \overline{\lim}\left\{ \int_{a}^{t-\varepsilon} f(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx + \int_{t+\varepsilon'}^{b} f(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx \right\} +$$

$$+ \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n (B_n - A_n)(b_n - a_n)$$

pour tout mode d'approche de $(\varepsilon, \varepsilon')$ à $(0, 0)$ par valeurs $(+, +)$ où $\varphi_\lambda(x)$ est une fonction bornée et $|\theta_n| \leqq 1$. Précisément, $\varphi_\lambda(x)$ est égale au dérivé $\leqq \lambda$ de $g(x)$ dans le complémentaire de $\Sigma(a_n, b_n)$ et égale λ dans $\Sigma(a_n, b_n)$; et θ_n est défini par (3).

(1) Point tel que $f(x)$ ne soit intégrable (par rapport à $g(x)$) sur aucun intervalle contenant t comme point intérieur ou extrême.

En particulier, $f(x)$ n'est alors bornée sur aucun intervalle comprenant t comme point intérieur ou extrême.

(2) Le point de non-intégrabilité t est alors certainement extérieur à chacun des intervalles fermés (a_n, b_n).

Pour le voir, on divise le champ $(a - 0, t - \varepsilon) + (t + \varepsilon', b + 0)$ en trois parties, celle $E_{\varepsilon,\varepsilon'}$ qui appartient au complémentaire de $\Sigma(a_n, b_n)$, celle $\Sigma_{\varepsilon,\varepsilon'}(a_n, b_n)$ constituée par des intervalles fermés (a_n, b_n) entiers, et celle $e_{\varepsilon,\varepsilon'}$ constituée par la ou les deux fractions d'intervalles appartenant encore au champ, $e_{\varepsilon,\varepsilon'} = (a_{m(\varepsilon)}, t - \varepsilon) + (t + \varepsilon', b_{n(\varepsilon')})$, partie qui peut être inexistante. Les intégrales relatives à cette dernière partie tendent vers zéro grâce à la condition (b), car $m(\varepsilon), n(\varepsilon')$ tendent vers zéro ou deviennent inexistants. De même, à cause de la convergence (absolue) de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n (B_n - A_n)(b_n - a_n)$$

assurée par (a), les termes manquants dans

$$\sum_{\varepsilon,\varepsilon'} \theta_n (B_n - A_n)(b_n - a_n)$$

tendent également vers zéro. Les relations (1) à (4) donnent alors la relation voulue (5).

3. Appliquons ce qui précède à la fonction

$$f_t(x) = \frac{1}{x - t}.$$

Les conditions du n. 2 sont satisfaites pour presque toutes les valeurs de t dans (a, b).

En effet, choisissons une suite de valeurs λ_k de λ tendant vers $+\infty$ et soit Σ_k l'ensemble $\Sigma(a_n, b_n)$ correspondant à λ_k. Nous pouvons évidemment choisir les intervalles pour $\lambda = \lambda_k$ de façon que Σ_k comprenne Σ_{k+1}, pour chaque k.

1° Soit E_0 l'ensemble des points communs à tous les Σ_k. Comme $m(\Sigma_k) \to 0$, on a $m(E_0) = 0$. Un point t étranger à E_0 sera étranger à tous les Σ_k à partir d'un certain indice k_0. Pour cette valeur de t, $f_t(x)$ sera bornée dans chacun des intervalles (a_n, b_n) correspondants à $\lambda = \lambda_k$, $k \geq k_0$.

2° Soit Σ'_k l'ensemble déduit de Σ_k en accroissant chacun de ses intervalles (a_n, b_n) d'une longueur ρ_n de chaque côté, en choisissant ρ_n de façon que

$$(\alpha) \qquad \sum \rho_n = \frac{1}{k} \qquad (\beta) \qquad \lim_{k \to +\infty} \frac{b_n - a_n}{\rho_n} = 0.$$

Ceci est toujours possible grâce à la convergence de $\Sigma(b_n - a_n)$.

L'ensemble Σ'_k a pour mesure $\left\{ m(\Sigma_k) + \frac{1}{k} \right\}$ et contient Σ'_{k+1}, pour chaque k. Soit E'_0 l'ensemble des points communs à tous les Σ'_k; on a

$m(E'_0) = 0$. Un point t étranger à E'_0 est étranger à tous les Σ'_k à partir d'un certain indice k'_0. Dans les intervalles (a_n, b_n) correspondant à $\lambda = \lambda_k$, $k \geqq k'_0$, $f_t(x)$ a ses bornes $\frac{1}{a_n - t}$ et $\frac{1}{b_n - t}$ inférieures en valeurs absolues à $\frac{1}{\rho_n}$, et la condition (b) se trouve satisfaite grâce à (β).

3° Quelle que soit la valeur de λ, la condition (a) se trouve vérifiée pour presque toute valeur de t dans (a, b) [1].

Nous pourrons donc affirmer, avec les notations de (5) :

Pour presque toute valeur de t dans (a, b) on a

$$(6)\quad \overline{\lim}\left\{\int_{a-0}^{t-\varepsilon}\frac{dg(x)}{x-t}+\int_{t+\varepsilon'}^{b+0}\frac{dg(x)}{x-t}\right\}=\overline{\lim}\left\{\int_{a}^{t-\varepsilon}\frac{\varphi_\lambda(x)\,dx}{x-t}+\int_{t+\varepsilon'}^{b}\frac{\varphi_\lambda(x)\,dx}{x-t}\right\}+$$

$$+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\frac{(b_n-a_n)^2}{(t-a_n)(t-b_n)}$$

pour toute valeur particulière suffisamment grande de λ.

En particulier, en prenant $\varepsilon = \varepsilon'$, les limites au second membre, $\varphi_\lambda(x)$ étant bornée, coincident, d'après un théorème classique, pour presque toute valeur de t (et donnent alors la « valeur principale » de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\varphi_\lambda(x)\,dx}{x-t}\Big),$$

et nous obtenons le résultat général:

La valeur principale

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{a-0}^{t-\varepsilon}\frac{dg(x)}{x-t}+\int_{t+\varepsilon}^{b+0}\frac{dg(x)}{x-t}\right\}$$

(1) En effet, *une série de la forme*

$$\Sigma\frac{(b_n-a_n)^2}{(a_n-t)(b_n-t)}$$

converge presque partout quelles que soient les valeurs de a_n, b_n, pourvu que

$$\Sigma|b_n-a_n|$$

converge. La démonstration, très simple, résulte du fait que la somme des intégrales des n premiers termes sur le complémentaire de

$$\Sigma(a_n-\varepsilon_n, a_n+\varepsilon_n)+\Sigma(b_n-\varepsilon_n, b_n+\varepsilon_n) \quad , \quad \varepsilon_n=\frac{|b_n-a_n|}{q}$$

est inférieure en valeur absolue (pour chaque q) à un nombre fixe indépendant de n.

de l'intégrale

$$\int_{a-0}^{b+0} \frac{dg(x)}{x-t}$$

existe pour presque toute valeur de t, quelle que soit la fonction monotone $g(x)$.

Ce corollaire particulier de notre théorème du n. 2 achève la généralisation due à S. Pollard du résultat classique mentionné ci-dessus, et déduite par lui sous une forme préliminaire [1] ($g(x)$ continue) en se servant de la démonstration donnée par A. S. Besicovitch [2] pour le cas où $g(x)$ est absolument continue.

On pourra évidemment former d'autres applications sur le même modèle.

5. Nous avons supposé $g(x)$ monotone. Les résultats s'étendent au cas où $g(x)$ est quelconque à variation bornée, puisque celle-ci se décompose alors en une différence de deux fonctions monotones.

Matematica. — *Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito.* Nota di V. Hlavatý, presentata [3] dal Socio T. Levi-Civita.

Nelle Note precedenti [4] [5] noi abbiamo studiato la riduzione di un sistema lineare differenziale d'ordine n, dotato di integrale quadratico definito, irreducibile, mostrando che si può pervenire (senza uscire dal campo reale) ad una forma canonica con $n-1$ coefficienti, calcolabili per ricorrenza a partire dai dati della questione.

Naturalmente, ove si lasci cadere la condizione di realtà, tutto va nello stesso modo, anche se si tratta di un integrale quadratico indefinito (purchè sempre irreducibile). Ma, specialmente, per le applicazioni geometriche e meccaniche, è essenziale di rendersi conto delle condizioni di realtà, sicchè bisognerebbe specificare il nostro teorema anche nel caso, in cui l'integrale quadratico conosciuto può assumersi (previa conveniente sostituzione lineare *reale*) sotto la forma canonica

$$\sum_1^n{}_i \, y_i^2 \, e_i = \text{cost},$$

(1) « Journal of the London Mathem. Soc. », vol. 2, part 1, No. 5, Jan. 1927, pp. 37-41.

(2) Ibid., vol. 1, Part 2, Apr. 1926, pp. 120-128.

(3) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(4) *Sulla riduzione dei sistemi ortogonali di equazioni differenziali lineari.* (« Rc. Ac. Lincei », nella seduta del 4 dicembre 1927).

(5) *Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali* (« Rc. Ac. Lincei », nella seduta del 4 dicembre 1927).

le e_i designando $+1$ o -1. Secondo la legge d'inerzia delle forme quadratiche il numero delle e_i positive è sempre il medesimo per una data quadrica, comunque si pervenga alla sua forma canonica. Rappresentandolo con p, abbiamo per le forme definite $p = n$, per le indefinite $p < n$. Nelle Note precedenti ci siamo riferiti esclusivamente all'ipotesi $p = n$.

Ci occuperemo in una Memoria più estesa di stabilire « il teorema di riduzione » per il caso generale $p < n$. Vogliamo intanto riferire il risultato:

Essendo dato il sistema lineare differenziale d'ordine n

$$\text{(I)} \qquad \frac{dz_i}{dt} + \sum_1^n{}_j\, p_{ji}\, z_j = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

che ammette l'integrale quadratico indefinito irreducibile

$$\sum_1^n{}_{ij}\, g_{ij}(t)\, z_i\, z_j = \text{cost}$$

si può in primo luogo (con trasformazioni lineari *reali*) passare alla forma

$$\text{(II)} \qquad y_i' + \sum_1^n{}_j\, r_{ji}\, y_j = 0 \qquad \left(i = 1, \cdots, n \;;\; y' = \frac{dy}{dt}\right)$$

coll'integrale

$$\sum_1^n{}_i\, y_j^2\, e_j = \text{cost}.$$

Eseguiamo poi una trasformazione

$$y_j = \sum_1^n{}_i\, u_{ij}\, \eta_i \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

quasi-ortogonale, tale cioè da ammettere la forma $\sum_1^n{}_j\, y_j^2\, e_j$ come invariante, nel senso che, quale necessaria conseguenza della trasformazione, risulta

$$\sum_1^n{}_j\, y_j^2\, e_j = \sum_1^n{}_j\, \eta_j^2\, \varepsilon_j$$

le ε_j essendo, al pari delle e_j, ± 1, collo stesso indice di inerzia. Con una scelta conveniente delle u_{ij} è possibile attribuire al sistema (II) la forma

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \eta_1' = & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 q_1 \eta_2 \\ \eta_2' = - q_1 \eta_1 & + \varepsilon_2 \varepsilon_3 q_2 \eta_3 \\ \quad\vdots & \\ \eta_{n-1}' = & - q_{n-2} \eta_{n-2} \qquad \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n q_{n-1} \eta_n \\ \eta_n' = & - q_{n-1} \eta_{n-1} \end{cases}$$

coi coefficienti q *tutti positivi* e calcolabili per ricorrenza a partire dai dati della questione.

1. Ciò posto, vogliamo fare un'applicazione dei nostri risultati al trasporto per parallelismo secondo Levi-Civita di un vettore in una V_n riemanniana. L'enunciato precedente ci consente di abbracciare sia il caso puramente geometrico di una metrica definita, sia quello più generale (quale si presenta per esempio in relatività) di una metrica indefinita. Siano $g_{ij} = g_{ji}$ le componenti del tensore metrico della V_n (di rango n, cioè tali che $\|g_{ij}\| \neq 0$) e $\left\{ \begin{matrix} j\ k \\ i \end{matrix} \right\}$ i simboli di Christoffel di 2ª specie, calcolabili in base alle g_{ij}.

Essendo

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

le equazioni parametriche di una curva qualsiasi C della V_n, in cui il parametro s designa l'arco di C, il trasporto per parallelismo di un vettore qualsiasi $\boldsymbol{v}$ di componenti controvarianti v^i lungo C è caratterizzato dalle equazioni [1]

$$(\mathrm{I})^* \qquad (\mathrm{D}v)^i \equiv \frac{dv^i}{ds} + \sum_{jk}^{1\ n} \left\{ \begin{matrix} j\ k \\ i \end{matrix} \right\} v^j \frac{dx_k}{ds} = 0.$$

È ben noto che il sistema (I)* ammette l'integrale quadratico

$$\sum_{ij}^{1\ n} g_{ij}\, v^i\, v^j = \text{cost}$$

il quale esprime la costanza della lunghezza del vettore $\boldsymbol{v}$ che si trasporta. In base ai risultati esposti, il sistema (I)* è riducibile ad una forma più semplice con $n - 1$ coefficienti [2]. Per trovarla basta applicare il nostro procedimento. Noi lo ripeteremo, mostrando contemporaneamente il suo significato geometrico:

Sia $\lambda_1{}^i, \lambda_2{}^i, \cdots, \lambda_n{}^i$ un'ennupla qualunque di versori (cioè vettori di lunghezza 1 in una metrica definita, ± 1 in una metrica indefinita), linearmente indipendenti della V_n. Poniamo:

$$(1) \qquad (\mathrm{D}\lambda_j)^i = \sum_{e}^{1\ n} \omega_j^e\, \lambda_e{}^i \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

(1) Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana* («Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», XLII, 1917, p. 7) e *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma 1925, p. 156).

(2) La trasformibilità del sistema (I)* a forma ortogonale $\left(\text{generica, cioè con } \frac{n(n-1)}{2} \text{ coefficienti}\right)$ era già stata rilevata dal Levi-Civita nella sua Memoria *Nozioni di parallelismo....*

e designiamo con w^i le componenti di v rispetto all'ennupla λ, con che

$$v^i = \sum_1^n{}_j \, w^j \lambda_{j|}{}^i \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Ne segue in virtù delle (1) e (I)*

$$(Dv)^i = \sum_1^n{}_j \frac{dw^j}{ds} \lambda_{j|}{}^i + \sum_1^n{}_{jc} w^j \omega_j^c \lambda_{c|}{}^i = \sum_1^n{}_c \left(\dot{w}^c + w^j \omega_j^c \right) \lambda_{c|}{}^i = 0$$

$$\left(i = 1, \cdots, n \, ; \, \frac{dw}{ds} = \dot{w} \right)$$

il che esige

$$\text{(II)}^* \qquad \dot{w}^c + \sum_1^n{}_j \, w^j \omega_j^c = 0 \qquad (c = 1, \cdots, n).$$

Possiamo profittare dell'arbitrarietà dell'ennupla λ per dare alle (II)* la forma più semplice, cui alludemmo. Supponiamo in primo luogo che si tratti di metrica definita (cioè che le g_{ij} rendano ogni forma $\sum_{ij} g_{ij} v^i v^j$ definita positiva). Se la curva reale C è generale, essa ha $n - 1$ curvature $k_1, \cdots, k_{n-1}$ diverse da zero e in tal caso in ogni punto di C si può immaginare spiccata l'ennupla principale dei versori fra loro ortogonali $\mu_1{}^i, \mu_2{}^i, \cdots, \mu_n{}^i$, dove $\mu_{1|}{}^i$ è il versore tangenziale. Le formule di Frenet per C sono (1)

$$(2) \qquad (D\mu_{j|})^i = - k_{j-1} \mu_{j-1|}{}^i + k_j \mu_{j+1|}{}^i \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, \cdots, n \\ k_0 = k_n = 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, ponendo

$$\lambda_{j|}{}^i = \mu_{j|}{}^i \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

e confrontando le equazioni (1), (2) si ha

$$\omega_j^c = - k_{j-1} \delta_{j-1}^c + k_j \delta_{j+1}^c \qquad (c, j = 1, \cdots, n \, ; k_0 = k_n = 0)$$

col solito significato di δ_j^i ($= 0$ per $j \neq i$, $= 1$ per $j = i$).

Ne segue, per le formule (II)*,

$$\dot{w}^c + \sum_1^n{}_j \, w^j \left(- k_{j-1} \delta_{j-1}^c + k_j \delta_{j+1}^c \right) = 0,$$

cioè

$$\text{(III)}^* \qquad \boxed{\dot{w}^c - w^{c+1} k_c + w^{c-1} k_{c-1} = 0} \qquad \begin{pmatrix} c = 1, \cdots, n \\ k_0 = k_n = 0 \end{pmatrix}$$

(1) D. J Struik, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung* (Berlino, 1922), p. 76.

che è la forma ridotta del sistema (I)* che corrisponde alla forma (II) della Nota precedente [1].

2. Se la metrica della V_n non è definita, si arriva a conclusioni analoghe, purchè C non sia una curva di lunghezza nulla,

$$\sum_{ij}^{n} g_{ij}\, \mu'_{1}{}^{i}\, \mu_{1}{}^{j} \neq 0 \qquad \left(\mu_{1}{}^{i} = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds}\right),$$

e renda inoltre

$$\sum_{ij}^{n} g_{ij}\, (D\mu_{1})^{i}\, (D\mu_{1})^{j} \neq 0.$$

Sotto tali limitazioni qualitative, con procedimento analogo a quello usato da Struik [2], si ricavano anche qui le formule di Frenet

$$(3) \qquad (D\mu_{j})^{i} = -\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j k_{j-1}\mu_{j-1}{}^{i} + k_j \mu_{j+1}{}^{i} \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, \cdots, n \\ k_0 = k_n = 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$\sum_{ij}^{n} g_{ij}\, \mu_{k}{}^{i}\, \mu_{e}{}^{j} = \begin{cases} 0 & k \neq e \\ \varepsilon_k & \text{per } k = e, \end{cases}$$

e le ε designano qui ancora ± 1.

Ora ponendo $\lambda_{j}{}^{i} = \mu_{j}{}^{i}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$, in virtù delle (3) e (1), otteniamo

$$\omega_j^e = -\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j k_{j-1}\delta^e_{j-1} + k_j \delta^e_{j+1} \qquad (e, j = 1, \cdots, n)$$

e per conseguenza, le formule (II)* assumono la forma

$$\dot{w}^e + \sum_{j}^{n} w^j \left(-\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j k_{j-1}\delta^e_{j-1} + k_j \delta^e_{j-1} + k_j \delta^e_{j+1}\right) = 0,$$

o

$$(III)^* \qquad \boxed{\dot{w}^e - w^{e+1} k_e \varepsilon_{e+1}\varepsilon_e + w^{e-1} k_{e-1} = 0} \qquad \begin{pmatrix} e = 1, \cdots, n \\ k_0 = k_n = 0 \end{pmatrix}.$$

Come si vede, la riduzione differisce da quella valida nel caso di una metrica definita soltanto per la presenza dei fattori ε_i $(= \pm 1)$, le (III)** rientrando nelle (III)* per $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = +1$. Seguitiamo a riferirci ad una metrica qualsiasi (definita o indefinita) e quindi alle (III)**.

3. Se la curva C, pur non essendo di lunghezza nulla, non è generale, potrà annullarsi qualche curvatura. Siano le prime $m - 1$ curvature $k_1, \cdots, k_{m-1}$ $(m < n)$ diverse da zero e $k_m = 0$. Allora non esistono che m versori $\mu_{1}{}^{i}, \mu_{2}{}^{i}, \cdots, \mu_{m}{}^{i}$ legati dalle equazioni

$$(4) \qquad (D\mu_{a})^{i} = -\varepsilon_{a-1}\varepsilon_a k_{a-1}\mu_{a-1}{}^{i} + k_a \mu_{a+1}{}^{i} \qquad \begin{pmatrix} a = 1, \cdots, m; \\ i = 1, \cdots, n; \\ k_0 = k_m = 0 \end{pmatrix}.$$

(1) V. nota 4 p. 47.
(2) V. nota 1 p. 50.

Se $m < n - 1$, possiamo scegliere in ogni punto di C $n - m$ versori $\mu_{m+1}^i, \cdots, \mu_n^i$ ortogonali a $\mu_1^i, \cdots, \mu_m^i$ e fra loro, in modo che sussistono per μ_{m+1}^i « le formule di Frenet »

$$(5)\quad (D\mu_e)^i = -\varepsilon_{e-1}\varepsilon_e \varkappa_{e-1}\mu_{e-1}^i + \varkappa_e \mu_{e+1}^i \qquad \begin{pmatrix} e = m+1, \cdots, n \\ i = 1, \cdots, n \\ \varkappa_m = \varkappa_n = 0 \end{pmatrix}.$$

In base alle (4), (5), il sistema differenziale (I)* che definisce intrinsecamente il parallelismo, risulta scisso in due sistemi: un sistema d'ordine m

$$\dot{w}^a - w^{a+1} k_a \varepsilon_{a+1}\varepsilon_a + w^{a-1} k_{a-1} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a = 1, \cdots, m; \\ k_0 = k_m = 0 \end{pmatrix}$$

o un sistema d'ordine $n - m$

$$\dot{w}^e - w^{e+1}\varkappa_e \varepsilon_e \varepsilon_{e+1} + w^{e-1}\varkappa_{e-1} = 0 \qquad \begin{pmatrix} e = m+1, \cdots, n \\ \varkappa_m = \varkappa_n = 0 \end{pmatrix}.$$

Per $m = 1$, rispettivamente $m = n - 1$, rimane effettuato senz'altro l'abbassamento del sistema (I)* di una unità, mentre per $m = 2$, rispettivamente $m = n - 2$, con una sola quadratura possiamo abbassare il sistema (I)* di due unità [1].

4. Tenendo conto della formula generale (III)* vediamo subito che, se le curvature di C sono tutte costanti, l'integrale generale si ottiene mediante sole operazioni algebriche. Dunque:

Il trasporto per parallelismo di un vettore lungo una curva C, *avente curvature costanti, si effettua mediante sole operazioni algebriche.*

Analisi. — *Equazione integrale di terza specie ed applicazione alle equazioni differenziali.* Nota di P. Nalli, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve piane in un punto di plesso.* Nota di G. Palossi, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) V. nota 5 p. 47.

Meccanica. — *A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di E. Pistolesi, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Il prof. Cisotti, in una Nota di questi « Rendiconti » [2], trattando il problema della lastra piana in una corrente indefinita, con circuitazione diversa da zero, ebbe a rilevare un'eccezione notevole – com'egli la chiamò – al teorema di Kutta-Joukowski.

Egli trovò che la spinta aerodinamica sulla lastra, anzichè essere normale alla corrente, come il suddetto teorema richiederebbe, è normale alla lastra ed il suo valore, anzichè uguale a $\rho c C$ (c = velocità all'infinito, C = circuitazione), è uguale a $\rho c C \cos\beta$ (β = incidenza).

Il metodo seguito dal Cisotti consiste nel calcolare la velocità in ogni punto della lamina, e dalla velocità la pressione dinamica; la risultante delle pressioni dinamiche fornisce la spinta sulla lastra. Trattasi adunque di un metodo di calcolo diretto.

Alla stessa conclusione, anzi generalizzata a tutti i casi in cui si hanno sul contorno punti singolari (poli della velocità complessa w) giunge A. Rosenblatt [3] in una Nota, pure dell'Accademia dei Lincei, presentata dallo stesso Cisotti. Il Rosenblatt, a differenza del Cisotti, fa uso della formula del Blasius, mediante la quale la spinta può essere calcolata con una semplice integrazione conoscéndo l'espressione complessa w della velocità ($w = u - iv$).

Finalmente Bruno Finzi [4], inspirandosi ad un'osservazione di Prandtl, che se la formula di Cisotti fosse vera, si avrebbe un consumo di energia corrispondente alla componente della spinta nella direzione della velocità asintotica, ha cercato di mostrare come nella corrente traslo-circolatoria intorno alla lamina l'energia cinetica cresca nel tempo e la sua derivata rispetto al tempo sia precisamente quale è richiesta dalla formula di Cisotti, fornendo così di tale formula un'interpretazione energetica.

Abbiamo cercato di riassumere brevemente lo stato della questione. Il problema ha interessato i cultori dell'aerodinamica, sollevando interessanti discussioni.

Diciamo subito che a nostro modo di vedere l'eccezione al teorema

(1) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.
(2) Vol. V, 1927, pp. 16-21.
(3) Vol. VI, 1927, pp. 404-406.
(4) Ibidem, pp. 666-670.

di Kutta-Joukowski non esiste e che le dimostrazioni che si sono volute dare di tale eccezione sono illusorie.

Di questa asserzione possiamo dare una dimostrazione *a priori*, osservando che la dimostrazione del teorema di Kutta-Joukowski può farsi ragionando sopra un contorno abbracciante il profilo considerato, senza alcun riferimento alla forma particolare di questo profilo. Il teorema ha dunque una validità affatto generale.

Ma può essere istruttivo mettere in chiaro i punti fallaci delle dimostrazioni prodotte dagli Autori sopra citati.

Per cominciare dal Cisotti, non è da stupire che egli abbia trovato una spinta perpendicolare alla lastra, giacchè le sue formule non sono che la traduzione in simboli di questo semplice ragionamento: le pressioni sono per ogni elemento della piastra normali a questa; dunque anche la risultante è normale alla piastra. Ma egli non considera che nei due punti singolari (gli estremi della piastra) la velocità diviene infinita e che si può in tali punti avere per conseguenza una forza finita, la cosiddetta *aspirazione allo spigolo*, da aggiungere alla risultante delle pressioni normali. Ora tale aspirazione può facilmente determinarsi applicando il teorema della quantità di moto al fluido contenuto in un piccolo circuito che da una faccia della piastra vada all'altra, circondando lo spigolo e facendo restringere indefinitamente tale circuito intorno allo spigolo stesso. Orbene, la forza che in tal modo si trova è diretta secondo il piano della piastra ed è di tal valore che la somma delle aspirazioni ai due vertici e della risultante delle pressioni normali dà precisamente una spinta perpendicolare alla velocità asintotica, di grandezza pari a quella indicata dal teorema di Kutta-Joukowski. Ci dispensiamo dal fornire la dimostrazione e le formule relative, che possono del resto trovarsi in vari trattati di aerodinamica (es. Fuchs & Hopf: *Aerodynamik*).

Quanto alla dimostrazione del Rosenblatt, essa deriva da un equivoco. Egli infatti si serve della formula di Blasius, corretta per il caso in cui la funzione w^2 possiede dei poli sul contorno k (ciò che accade quando questo ha dei punti angolosi di apertura 2π). La formula di Blasius, nel caso in cui il contorno k (che può in tal caso essere un qualunque contorno *esterno* al profilo, purchè nell'area compresa fra il profilo e il contorno la funzione w sia priva di singolarità) non possegga punti singolari è la seguente:

$$P_y + iP_x = -\frac{\rho}{2}\int_k w^2\,dz.$$

Nel caso in cui sul contorno k vi sono dei poli, la formula è la seguente:

$$P_y + iP_x = -\frac{\rho}{2}\int w^2\,dz - \rho\pi i\Sigma\,\mathrm{Res}_P\,(w^2).$$

Fin qui (salvo un cambiamento di segno) siamo d'accordo col Rosenblatt. Dove invece nasce l'equivoco, si è nella valutazione di $\int_k w^2\,dz$, che il Rosenblatt ammette senz'altro uguale a $2\,w_\infty\,C$, come si ha effettivamente quando il circuito k non presenta singolarità. Nel caso della lastra, invece, si dimostra, eseguendo il calcolo in base all'espressione di w, che il valore del suddetto integrale risulta uguale a

$$2\,w_\infty\,C\cos\beta\,(\cos\beta - i\,\mathrm{sen}\,\beta).$$

D'altra parte

$$\rho\pi i\Sigma\,\mathrm{Res}_P\,(w^2) = \rho w_\infty\,C\,\mathrm{sen}\,\beta\,(\mathrm{sen}\,\beta + i\cos\beta)$$

come si rileva dalla Nota stessa del Rosenblatt; perciò:

$$P_y + iP_x = -\rho w_\infty\,C$$

secondo il teorema di Kutta-Joukowski.

Venendo infine allo studio del Finzi, che si presenta invero assai specioso, ammettiamo che esso sia sostanzialmente giusto nel suo risultato, sebbene si possano fare alcune osservazioni su certi punti dello svolgimento (ad es. l'aver trascurato nella formula (10) i termini in ε^2, che, moltiplicati per il primo termine del secondo membro della (9), forniscono termini finiti); ma esso non dimostra quello che il Finzi vorrebbe dimostrare. Ed invero, che la derivata dell'energia cinetica nello spazio τ da lui considerato sia diversa da zero non prova che tale derivata sia diversa da zero anche se allo spazio τ si aggiunga lo spazio τ' da lui escluso, cioè i circoletti di raggio ε^2 con centro nei punti singolari. Anzi, riflettendo, si comprende che il risultato del Finzi era da prevedersi. Ed infatti sul fluido contenuto nello spazio τ agisce la risultante delle pressioni *normali* alla lastra, la quale risultante ha una componente nella direzione della velocità asintotica; nello spazio τ' agisce l'aspirazione allo spigolo, che ha pure una componente nella suddetta direzione, uguale e contraria alla precedente. È logico adunque che l'energia cinetica del fluido contenuto in τ di tanto si accresca o diminuisca, di quanto diminuisce o si accresce l'energia cinetica del fluido contenuto in τ'.

Ci sembra che queste considerazioni rischiarino completamente il problema e mettano fuori di ogni dubbio la validità affatto generale del teorema di Kutta-Joukowski.

Astronomia. — *Sulla lunghezza d'onda effettiva degli astri e su di un metodo per determinarla mediante l'Interferometro.* Nota di M. Maggini, presentata [1] dal Socio Corrisp. E. Bianchi.

Le due note formole dell'interferometria:

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{1.22}{d} \cdot \lambda \qquad \rho = \frac{1}{2d} \cdot \lambda,$$

che dànno il diametro apparente ε di un piccolo astro e la distanza ρ di una stella doppia stretta, misurati con l'Interferometro, in funzione della distanza d fra le fenditure a cui ha luogo la prima scomparsa delle frange, mostrano come le misure interferometriche non diano direttamente le quantità da determinare, bensì il primo fattore di una espressione generale $k \cdot \lambda$ in cui entra la lunghezza d'onda della radiazione che giunge dall'astro. Poichè la radiazione non è mai monocromatica, si vede come il risultato di una misura interferometrica dipenda dal valore di λ che l'osservatore introduce nelle formole; quale deve essere questo valore? La scelta non è priva di difficoltà: dovrà essere, di certo, la lunghezza d'onda *effettiva* che corrisponde allo stimolo visuale, il quale, nel caso di misure in luce bianca, raggiunge la sua massima efficienza a quella *tinta sensibile* della scala di Newton che chiamasi *giallo medio* ($\lambda = 560\,\mu\mu$), ma i fattori che alterano la distribuzione dell'energia luminosa nello spettro di un astro, osservato coi nostri strumenti attraverso la nostra atmosfera, sono tanti, che questo massimo di efficienza viene alterato, e, all'atto pratico, l'osservatore si trova non poco imbarazzato; nel caso poi di misure interferometriche bisogna anche considerare l'influenza dei fattori strumentali.

Il valore della lunghezza d'onda *effettiva* « interferometrica » dipenderà dunque, per una parte da fattori intrinseci dell'astro, in particolare dalla distribuzione E_λ dell'energia nel suo spettro, per un'altra dalla correzione di acromatismo del rifrattore e dalla sensibilità V_λ dell'occhio, per un'altra ancora dall'assorbimento selettivo A_λ della nostra atmosfera.

Dato un intervallo $d\lambda$, lo stimolo visuale potrà quindi esprimersi col prodotto di tre funzioni

$$(2) \qquad \varphi(\lambda)d\lambda = E_\lambda V_\lambda A_\lambda d\lambda.$$

Ma questa, che rappresenta l'espressione più semplice della λ eff. visuale, non può usarsi direttamente quando si tratta di misure interferometriche,

(1) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

perchè, come si è detto, occorrerebbe tener conto dei fattori strumentali e delle circostanze speciali della misura. Infatti la λ eff. interferometrica è una funzione della larghezza delle fenditure, dell'angolo d'incidenza e dell'angolo di diffrazione, e varia a seconda che si osserva il primo od il secondo minimo di visibilità delle frange o secondo che trattasi di misurare il diametro di un astro o la distanza di una stella doppia; tutte condizioni che rendono assai complicato il problema. Perciò, dopo le prime applicazioni dell'Interferometro all'Astronomia, incominciò ad apparire la necessità di avere la λ eff. appropriata; essa, dopo tutto quanto abbiamo detto, può definirsi nella maniera seguente: immaginiamo di avere osservato un certo aspetto delle frange prodotte da un astro (primo o secondo minimo di visibilità, primo massimo negativo) e di lasciare invariato l'Interferometro; immaginiamo inoltre di poter sostituire all'astro in esame un altro identico, ma di cui si possa variare la lunghezza d'onda della luce, e variamo questa fino a che ritorni visibile quel medesimo aspetto delle frange: la lunghezza d'onda che vi corrisponde sarà la lunghezza d'onda *effettiva* « interferometrica » della luce dell'astro. Dunque: *la lunghezza d'onda effettiva « interferometrica » è quel particolare valore della lunghezza d'onda « monocromatica » che sostituito alla luce complessiva di un astro, per la quale l'Interferometro mostra un dato aspetto delle frange, riproduce questo medesimo aspetto quando si lasci invariato lo strumento.*

Lo sforzo degli interferometristi consiste quindi nel cercare di attuare praticamente la definizione ora data. Un primo passo è stato fatto da Anderson, che ha suggerito un metodo [1] di determinazione della λ eff. basandosi sulla λ eff. della luce solare ottenuta mediante l'Interferometro, metodo di cui Allison ha dato in seguito [2] lo sviluppo analitico ed insieme i calcoli per applicare le formole. Ma, oggi che l'Interferometro rotante sta per divenire un mezzo corrente di misura, non sarebbe consigliabile ricavare per ciascun astro misurato la λ eff. col procedimento di Anderson, piuttosto lungo e laborioso. È stato appunto nel cercare un sistema più semplice che mi liberasse da quei complicati che usavo a Catania [3], che sono stato condotto al metodo, se si vuole assai banale, che forma lo scopo di questa Nota. Il metodo è, di necessità, applicabile solo a quegli astri per i quali le frange subiscono delle variazioni col variare della distanza fra le fenditure: a quelli cioè che presentano un piccolo disco (satelliti, pianetini) ed alle stelle doppie strette.

Misuriamo il diametro di un disco o la distanza di una stella doppia in diverse radiazioni, mediante opportuni filtri dinanzi all'Interferometro:

(1) « Astrophysical Journal », vol. LV, pp. 48-70, 1922.

(2) « Astrophysical Journal », vol. LIX, 1924.

(3) Vedi M. Maggini, *L'Interferometro stellare del R. Osservatorio di Catania.* Catania, Scuola Tip. Salesiana, 1922; Id., *Misure interferometriche di stelle doppie.* Catania, Scuola Tip. Salesiana, 1925.

la scomparsa delle frange avverrà per valori della distanza *d* fra le fenditure diversi per ciascuna radiazione; tracciamo allora un grafico prendendo per ascisse le λ di ciascun filtro e per ordinate le corrispondenti distanze fra le fenditure: risulterà una retta più o meno inclinata sull'asse delle ascisse a seconda del diametro angolare del disco o della distanza della doppia. Misurando il medesimo astro senza filtri si otterrà una nuova distanza fra le fenditure alla quale corrisponderà, sul grafico (λ, *d*) una certa lunghezza d'onda, che sarà la lunghezza d'onda *effettiva* dell'astro.

Prima di riportare le misure di λ eff. effettuate a Collurania, è bene premettere alcune considerazioni: bisogna distinguere cioè per quale scopo la λ eff. viene determinata. Se io voglio il valore di λ da introdurre in una delle due formole fondamentali (1) per calcolare le misure interferometriche eseguite su di un astro ad una data distanza zenitale, è più conveniente che adoperi il valore della λ eff. che mi risulta dall'applicazione del metodo ora esposto, senza correggerlo per la distanza zenitale. Se invece voglio ottenere dei valori della λ eff. comparabili fra loro e con quelli di altri osservatori, bisogna che riduca allo zenit i valori osservati. Questa riduzione allo zenit si presenta nel nostro caso abbastanza semplice; intanto, quando si tratta della misura di un disco, sarà sempre possibile disporre le fenditure interferometriche secondo il verticale, in modo da eliminare l'effetto della dispersione atmosferica, e se trattasi di una stella doppia, si potrà regolare la distanza fra le fenditure in modo che almeno due scomparse delle frange, simmetriche di 180°, avvengano in vicinanza del verticale. L'azione dell'atmosfera è quindi ridotta quasi del tutto all'assorbimento selettivo, per effetto del quale le λ eff. zenitali vengono tutte spostate, verso le radiazioni meno rifrangibili, di quantità Δλ variabili col loro valore. Si può fare per un istante la supposizione che l'assorbimento selettivo agisca anche sulle radiazioni lasciate passare dai filtri; l'effetto della nostra atmosfera si ridurrà allora a sostituire alla retta perequata del grafico (λ, *d*) un'altra curva, che potrà avvicinarsi più o meno ad una retta a seconda della distanza zenitale dell'astro, spostata verso le λ meno rifrangibili di quantità proporzionali al valore dei Δλ proprî dei filtri: è su questa nuova curva che dovrà leggersi il valore della λ eff. dell'astro osservato, λ eff. che risulterà ridotta allo zenit.

Ciò premesso, ecco la lunghezza d'onda effettiva visuale dei quattro principali satelliti di Giove e di alcune stelle doppie, che ho scelte fra le più lucenti in modo da poterne osservare le frange anche attraverso i filtri. L'Interferometro usato (1) è del tipo rotante, munito di apparecchio per la registrazione delle letture del cerchio di posizione, ed è applicato al rifrattore Cooke di m. 0.394 d'apertura; i filtri sono tre e lasciano passare tre

(1) Di questo strumento, opera egregia dell'Officina Mioni di Padova, venuto ad accrescere il corredo strumentale della Specola di Collurania, darò altrove una descrizione particolareggiata.

porzioni ristrette di spettro, nel rosso, nel verde e nell'azzurro, le cui lunghezze d'onda media [1] λ' vennero misurate con uno spettroscopio e risultarono

Filtro rosso	$\lambda' = 645\ \mu\mu$
» verde	558
» azzurro	412

Le misure così eseguite sui satelliti di Giove hanno fornito i seguenti valori della lunghezza d'onda effettiva visuale ridotta allo zenit:

	λ vis	λ fot
I	553.7	436.4
II	548.3	421.7
III	548.0	422.8
IV	552.2	424.1

a fianco dei valori visuali da me determinati ho posto quelli fotografici, determinati da Hertzsprung [2] con un reticolo di diffrazione; a parte le differenze esistenti fra i valori delle due colonne, dovute principalmente alla differenza fra le due funzioni V_λ della retina e della lastra fotografica, si vede come esistano delle differenze fra satellite e satellite, la cui superficie riflette in maniera diversa la luce solare.

Come esempio di osservazioni sulle stelle doppie riporto qui sotto quelle relative a venti sistemi del Catalogo Generale di Burnham; fra essi

(1) Rigorosamente parlando, si tratta, anche in questo caso, di lunghezze d'onda *effettiva*, perchè il flusso luminoso attraverso il filtro potrà ancora porsi sotto la forma $\varphi = \int_0^\infty E_\lambda V_\lambda A_\lambda t_\lambda$ in cui le E_λ, V_λ, A_λ, sono le stesse quantità della (2), ma valevoli per quel ristretto intervallo spettrale lasciato passare dal filtro, e t_λ è la *trasmissione* della sostanza costituente il filtro.

Alla lunghezza d'onda media determinata spettroscopicamente si può, ove la precisione delle misure lo richieda, portare una correzione dipendente dal tipo spettrale, ossia dalla temperatura effettiva dell'astro in esame, precisamente come si usa in laboratorio nelle determinazioni di temperatura. Tale correzione si può ottenere ricordando che, per un determinato intervallo $T_2 - T_1$ della temperatura, il rapporto delle intensità di radiazione nella lunghezza d'onda λ' deve essere eguale al rapporto delle intensità integrali attraverso il filtro; detti allora φ_1 φ_2 i flussi corrispondenti alle due temperature T_1 T_2, la lunghezza d'onda che compete alla luce lasciata passare dal filtro è data da

$$\lambda' = \frac{C \log (e)}{\log (\varphi_2 / \varphi_1)} \ (1/T_1 - 1/T_2)$$

in cui la costante C ha il solito valore 14300°.

(2) *Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam*, n. 63, 1911.

ve ne sono alcuni osservati sotto una forte distanza zenitale per i quali la correzione alla λ oss. raggiunge il massimo valore. Dopo quanto è stato detto, la tabella non ha bisogno di spiegazioni, ricorderò che i valori riportati in essa sono valori medî, risultanti da tre o più misure (tante quante sono quelle in angolo e distanza eseguite sul sistema); le osservazioni singole verranno date nelle « Memorie » della Specola di Collurania.

βGC	Sp	Z media	λ oss.	Corr.	λ eff.	misure
		°	μμ	μμ	μμ	
260	B	12	541.5	— 0.0	541.5	3
314 AB	Go	49	554.0	0.6	553.4	7
600	B8	6	548.0	0.0	548.0	3
1036 AB	A3	33	550.1	0.1	550.0	4
7649	Ao	44	549.6	0.4	549.2	3
7885	A2	63	551.3	1.2	550.1	3
8038	G5	50	555.2	0.5	554.7	4
8303	F	55	552.0	0.7	551.3	4
8578	Ao*p*	35	549.0	0.2	548.8	3
8565	A2	74	553.0	1.8	551.2	3
9643	A2	26	550.8	0.0	550.8	4
9833	A	19	549.0	0.0	549.0	6
10363 AB	F5	29	551.8	0.0	551.8	4
10372	B5	60	549.2	1.4	547.8	4
10533	B5	8	548.3	0.0	548.3	3
11222 AB	F5	18	552.1	0.0	552 1	7
11895	G4	30	555.1	0.1	555.0	3
12329	A3	60	552.9	1.2	551.7	3
12335	K	31	556.0	0.1	555.9	4
12432	K2	13	570.3	0.0	570.3	3

È evidente che la λ eff. così determinata si riferisce alle radiazioni emesse da ambedue le componenti del sistema; poichè i sistemi di cui si effettua la misura interferometrica a Collurania hanno tutti una distanza inferiore ad 1″, che è anche il limite al disotto del quale i più grandi stru-

menti non permettono di ottenere separati gli spettri di ambedue le componenti [1], non si può dir niente riguardo allo splendore intrinseco dei due astri.

Sono in corso, a Collurania, esperimenti per determinare, mediante l'Interferometro, la variazione della lunghezza d'onda effettiva visuale in funzione della distanza zenitale, come ha fatto Anderson per il Sole.

Spero infine di poter ricavare, mediante osservazioni sulla seconda scomparsa delle frange eseguite coi filtri, qualche indizio di un potere assorbente o riflettente selettivo della superficie dei satelliti di Giove, che si manifesta nella diversa distribuzione del potere radiante dal centro al bordo del disco del satellite col variare della radiazione monocromatica usata.

Si vede così come la dipendenza dalla lunghezza d'onda, che a prima vista potrebbe credersi una inferiorità del metodo interferometrico con fenditure rispetto ad altri pure interferometrici, possa invece tornare a tutto vantaggio dell'astronomo.

Astronomia fisica. — *Sull'assorbimento della luce stellare nella atmosfera di Roma* [2]. Nota del dr. G. Andrissi, presentata [3] dal Socio Corrisp. G. Armellini.

In una precedente nota [4] sulla determinazione del grado del cuneo d un fonometro a estinzione di Toepfer avevo accennato ad una nuova determinazione dell'assorbimento di luce nell'atmosfera di Roma. Portata a termine questa ricerca, ne espongo ora il risultato.

La conoscenza esatta dell'assorbimento atmosferico in un dato luogo interessa grandemente l'astronomia fisica e la fotometria stellare e per questo sono assai numerose le ricerche di questa natura. Ricordiamo che fu il Seidel [5] il primo ad occuparsene praticamente a Monaco, dando una prima tabella di assorbimento. Più tardi il Müller [6] a Potsdam, ricavò da osservazioni fatte negli anni 1879-80-81 una tabella di assorbimento che ancora oggi viene usata. Il confronto fra la tabella del Müller e del Seidel mostra che sino a una distanza zenitale di 50 gradi i valori dati dal Seidel sono minori, e dai 55 gradi ai 79 maggiori. Il Müller rifece le osservazioni sul monte Santis, ottenendo un nuovo materiale più ricco ed omogeneo.

(1) Cfr. « Lick Observatory Bulletin », n. 343.

(2) Estratto dalla Tesi di Laurea.

(3) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(4) Cfr. « Atti R. Accademia dei Lincei », 1923. G. Andrissi, *Preliminari alla determinazione della estinzione atmosferica*, ecc.

(5) L. Seidel, « Abhandl. der Münchener Akad. » II cl. 6, 541.

(6) G. Müller, *Utersuschungen uber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre*; « Publicationen des Astrophis. Observ. zu Potsdam », vol. III.

Confrontando i risultati delle osservazioni con le formole di Bouguer [1], Laplace [2] e Maurer [3], si vede che i valori ottenuti per mezzo delle formole di Bouguer e Laplace concordano con le osservazioni sino ad 80 gradi di distanza zenitale, non superando mai le differenze 0.04 nel Logaritmo, ossia 0.1 nella grandezza stellare. Mentre i valori calcolati con la formola del Maurer, non si accordano con le osservazioni, a meno di usare un valore del coefficiente p di trasmissione inferiore al valore di 0.835. Ma potendosi ritenere ormai abbastanza esatto il valore 0.835, si può concludere che le formole che meglio dànno valori concordanti con i dati di osservazione siano quelle del Laplace.

In Italia la determinazione dell'assorbimento atmosferico fu trattata per primo da A. Bemporad [4] ed in seguito da altri osservatori. In generale si preferì, anzichè eseguire una determinazione di assorbimento assoluto, di procedere a misure differenziali e cioè al confronto della luminosità di due stelle, o di una stessa stella a diverse distanze zenitali.

I varî osservatori dai valori locali ottenuti stabilirono il confronto con la tabella del Müller e ricavarono il valore di ρ, cioè del rapporto tra il valore locale e quello della tabella di Potsdam. Ecco i valori ottenuti sino ad oggi:

A. Bemporad [5] (Catania) 3.00; Guerrieri [6] (Capodimonte, Napoli) 2.38; Padova [7] (Padova) 2.34; A. Bemporad [8] (Napoli) 2.50; E. Bianchi [9] (Collegio Romano, Roma) 1.02; Paci [10] (Catania) 1.10; Armellini [11] (Campidoglio, Roma) 1.96; V. Fontana [12] (Carloforte) 1.35.

(1) Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière*. Paris, 1729.

(2) Laplace, *Mécanique Céleste*, 1805, tom. IV, p. 231 sgg.

(3) J. Maurer, *Die Extinction des Fixsterlichtes in der Atmosphäre in ihrer Beziehung*, ecc. « Diss. inaug. ». Zurich, 1882.

(4) A. Bemporad, *Ricerche sulla trasparenza atmosferica*, « Rivista di Astronomia e Scienze affini », 1912, p. 580.

(5) A. Bemporad, cfr. nota precedente.

(6) G. Guerrieri, *Saggio di determinazione dell'estinzione atmosferica a Capo di Monte*, « Pubblicaz. Osserv. Capo di Monte ».

(7) E. Padova, *Determinazione dell'estinzione atmosferica a Padova*, « Atti R. Istituto Veneto », tom. LXXIII.

(8) A. Bemporad, *L'estinzione a Capo di Monte*, « Rivista di Astronomia e Scienze affini », 1913, p. 388.

(9) E. Bianchi, *Primo saggio sulla estinzione atmosferica a Roma*, « Memorie Spettroscopisti Italiani », 1915.

(10) E. Paci, *Studio sull'estinzione atmosferica a Catania*, « Memorie Spettroscopisti Italiani », 1918.

(11) G. Armellini, *Sulla Estinzione della luce stellare nell'atmosfera di Roma*, « Atti R. Acc. Lincei », 1918, vol. XXVII, 2° semestre, p. 83.

(12) V. Fontana, *Sulla variazione dell'estinzione atmosferica a Carloforte*, « Memorie Spettroscopisti Italiani », 1919.

Si può subito rilevare come, in generale, l'assorbimento risulti maggiore in Italia, ma si può spiegare questa apparente anomalia tenendo presente che le osservazioni fatte in Italia abbracciano in genere un breve periodo di tempo e inoltre che quelle del Müller furono eseguite solamente in serate eccezionalmente serene, mentre gli altri osservatori osservarono anche in sere mediocri o umide. Quindi sono più probabili, per serate comuni, i valori nostri quasi doppi di quelli dati dalla tabella di Potsdam.

Il metodo usato dal Bemporad nel 1911–12 consiste nel confronto fra Mira Ceti ed altre due stelle a varia distanza zenitale. Metodi analoghi usarono il Guerrieri a Capodimonte ed il Padova a Padova. E. Bianchi osservò due stelle circumpolari con declinazione pressochè uguale e distanziate di circa 12 ore in ascensione, in modo che mentre l'una culminava superiormente, l'altra culminava inferiormente, osservandole anche in posizione inversa. Con lo stesso metodo osservò il Paci a Catania, mentre il prof. Armellini osservò stelle a varie distanze zenitali e cioè mentre una stella era per culminare, l'altra si trovava ad Est, e quando la prima era passata ad Ovest, la seconda culminava. Nella presente determinazione venne usato un metodo leggermente diverso. Esso consiste nell'osservare più coppie di stelle a diversa distanza zenitale e di diversa grandezza, ricavando dalla osservazione la differenza di grandezza delle componenti la coppia; confrontare poi tale differenza con la differenza data dal catalogo e quindi, ottenuto un valore della estinzione differenziale, a determinate distanze zenitali, a Roma, farne il rapporto con il valore dato per la stessa differenza di distanze zenitali dalla tabella [1] del Müller per Potsdam ottenendo così il valore di ρ per Roma.

Furono usate le seguenti 25 stelle [2], che fornirono complessivamente più di 200 coppie, dando cioè più di 200 valori di ρ compresi tra 8° di distanza zenitale ed 80° e per tutte le regioni del cielo.

(1) G. Müller, *Photometrie der Gestirne.*

(2) Le grandezze stellari sono tolte dalla *Photometrische Durchmusterung*, «Publicationen des Astroph. Obs. zu Potsdam», n. 32. Ed alcune stelle dall'*Astron. Gesch.*

Tabella I.

N.	Stelle	Mg.	Colore	N.	Stelle	Mg.	Colore
1	Cane Minore	0.72	GW	14	Pegaso	2.60	GW
2	Gemelli	1.94	GW	15	Orsa Min.	2.31	GW
3	Orione	0.30		16	Cassiopea	2.56	GW
4	Toro	1.15	G +	17	Aquila	1.12	GW
5	Gemelli	1.51	WG +	18	Cefei	2.78	GW —
6	Orione	2.06	GW —	19	Orsa Min.	3.34	GW —
7	Auriga	0.43	WG	20	Drago	3.01	WG
8	Leone	1.73	GW —	21	Cigno	4.50	GW +
9	Orione	0.90		22	Auriga	2.21	W +
10	Cassiopea	2.46	W +	23	Cigno	1.54	W
11	Orsa Magg.	2.26	WG +	24	Perseo	2.16	GW +
12	Orsa Magg.	2.04	WG +	25	Toro	2.01	W +
13	Pegaso	2.10	GW —				

Le osservazioni furono fatte all'Equatoriale Merz dell'Osservatorio del Campidoglio e fu usato un fotometro ad estinzione Toepfer, del quale era nota la costante K = 0.186, già determinata dal prof. Armellini [1] e dallo scrivente [2].

Per economia di spazio diamo solo i valori medi ottenuti sera per sera, tralasciando i vari valori singoli e le distanze zenitali di ciascuna stella che calcolammo con le semplici relazioni di trigonometria sferica, essendo le stelle osservate all'Equatoriale ed in ore diverse dalla loro culminazione. Nella prima colonna della tabella si trova la data, nella seconda il numero della stella osservata, riferita alla precedente tabella; la terza colonna dà il numero delle coppie ottenute sera per sera, numero minore delle possibili combinazioni matematiche per due ragioni: la prima, perchè alcune stelle erano quasi eguali in grandezza; la seconda, perchè osservate alla stessa distanza zenitale. La quarta colonna dà l'umidità relativa delle sere di osservazione; la quinta la tensione del vapore e la sesta i valori di ρ, cioè del rapporto tra l'estinzione di Roma e quella di Potsdam; l'ultima colonna contiene le annotazioni varie.

(1) Cfr. nota precedente.
(2) Cfr. nota precedente.

TABELLA II

Data	Stelle	Numero coppie	Umidità relativa in %	Tensione del vapore	ρ	Annotazioni
1923						
14 febbraio	1-2-4	3	75	4.7	2.85	Sereno
15 »	1-2-3-4-6-7	9	67	4.6	1.98	»
18 »	1-3-4-5-6 7-8	9	85	7.0	2.45	» L. N. il 17
21 »	4-5-7-8-9 10-11-12	26	68	5.6	1.78	»
7 marzo	1-3-7-9	5	85	7.5	1.87	» L. P. il 3
13 »	3-7-9-10	6	56	5.0	1.30	»
12 settembre	11-13-14 15-16	7	80	15.6	1.79	» L. N. il 10
13 »	11-13-14-15 16-17	10	75	14.7	1.55	»
15 »	10-13-14-17	4	81	14.1	3.46	»
16 »	10-11-13 14-17	8	71	13.7	1.38	» L.P.Q. il 17
19 »	11-13-14 15-10	7	77	11.9	1.77	»
22 »	10-11-13 14-15	8	82	13.1	1.29	»
23 »	10-11-15 18-19	8	81	13.8	1.67	»
25 »	11-15-18 19-20	10	67	11.5	1.68	»
26 »	11-15-21 20-19	8	80	12.3	2.16	»
28 »	11-15-19 20-21	9	63	9.7	1.91	»
1 ottobre	11-15-19 20-21	9	83	13.7	1.76	»
9 »	11-20-21-19	6	81	10.8	2.07	» L. N. Q. il 3
10 »	11-19-20-21	6	85	11.8	1.83	»
12 »	11-19-20 21-13	13	88	13.5	1.63	»
13 »	11-13-14-15 19-20-22-23	37	84	12.9	1.84	»

$\rho = 1.90$

Dalla media delle suesposte osservazioni risulta per ρ il valore di 1.90 che si accorda con il valore trovato dal prof. Armellini, e quindi quasi doppio di quello dato dal prof. Bianchi.

Fisica Matematica. — *Sopra gli integrali generali di alcune equazioni differenziali di fisica matematica.* Nota di G. Wataghin, presentata dal Socio C. Somigliana.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla teoria del sistema periodico.* Nota di E Fermi, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Velocità molecolari, stati d'eccitazione e probabilità di transizione in un gas degenere.* Nota di E. Persico, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azione dell'acido amminosolfonico sui composti non saturi.* Nota di A. Quilico, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *La plasticità nei fenomeni di orogenesi.* Nota I di M. Bossolasco, presentata [1] dal Socio F. Sacco.

1. Fra le diverse teorie escogitate per spiegare la formazione delle montagne quella della contrazione termica resta sempre la più attendibile; essa conduce, invero, all'esistenza di un magma *pseudo-rigido* [2] (*sima*), al disotto della crosta terrestre (*sial*), in modo conforme alle osservazioni sismiche ed in buon accordo colla teoria della compensazione isostatica. Dal punto di vista della meccanica dei fenomeni orogenetici, di cui qui intendo occuparmi, la teoria della contrazione fornisce poi delle forze tangenziali il cui ordine di grandezza è più che sufficiente per spiegare i corrugamenti tettonici, mentre ciò non accade, ad es., nella teoria di Wegener della deriva dei continenti che è fondata sull'ipotesi di un sima quasi fluido.

(1) Nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

(2) Intendo, con questo nome, una materia avente un comportamento elastico analogo a quello delle rocce superficiali per forze agenti per brevi periodi, mentre possiede una *plasticità assai superiore* nel senso che piccole forze producono grandi deformazioni se applicate per un tempo relativamente lungo.

Dallo sviluppo futuro della sismologia si ha ragione di sperare che si potranno dedurre elementi più precisi sulla costituzione del magma pseudo-rigido, sulla sua profondità, sulla variazione più o meno graduale delle sue proprietà da quelle del « sial » sovrastante: sarà così possibile completare le nostre cognizioni sulla formazione della corteccia terrestre. Ciò nonostante, lo studio dei fenomeni meccanico-fisici che si sono presentati o che si presentano nei primi chilometri di spessore della crosta terrestre, studio che fa quindi parte della geologia, è in massima indipendente da tali questioni e, per quanto sia stato già da lungo tempo intrapreso [1], non è affatto esaurito: questa circostanza è però giustificata dalla conoscenza poco precisa ed incompleta che si aveva e che, in parte almeno, ancora si ha sul comportamento della materia assoggettata alle condizioni fisiche che si presentano nell'interno della corteccia terrestre.

2. Per gli scopi dell'ingegneria e della fisica lo studio delle deformazioni dei solidi avvenne quasi sempre in condizioni assai diverse da quelle che corrispondono allo stato in cui si trovano le rocce degli strati profondi: queste sono invero soggette non solo a notevoli pressioni [2] e ad alte temperature, ma le pressioni agiscono per un tempo straordinariamente lungo ed, analogamente a quelle idrostatiche, non in una, ma in tutte le direzioni. Ciò nondimeno, gli esperimenti di laboratorio hanno ormai provato che la proprietà di alcuni corpi solidi (asfalto, pece, ...) di deformarsi in modo permanente è valida in generale: così si è visto che anche i metalli più duri ed i materiali a struttura cristallina possono, in opportune condizioni meccaniche, venire trasformati in uno stato – *plastico* – in cui si lasciano alterare di forma, con continuità, senza rompersi: impropriamente si dice allora che il corpo « *fluisce* » o « *cola* » [3]. Dal punto di vista che qui si considera hanno particolare importanza gli esperimenti di Adams-Nicolson e di Kármán sulle deformazioni del marmo e dell'arenaria: è noto che questi corpi sottoposti a semplice pressione si comportano come fragili nel senso che non subiscono sensibili variazioni di forma prima della rottura; ora, i suddetti Autori hanno invece provato che un cilindro degli stessi materiali, compresso non solo lungo il suo asse, ma anche su tutta la sua superficie laterale da una elevata pressione idrostatica diventa pla-

(1) Basterà ricordare A. Heim, Daubrée, Spring, Bertrand, A. Penck, De Marchi.

(2) A rigore si deve notare che le massime pressioni che si verificano nei primi 10 ÷ 15 km. della crosta terreste sono già state ottenute se non sorpassate. P. W. Bridgman ha riferito recentemente (v. *Proceedings of the second intern. Congress for applied Mechanics*, Zürich 1926, p. 53) su alcuni suoi esperimenti fatti a pressioni che superano le 20000 atmosfere. A mio avviso però essi non possono ancora venir utilizzati nelle questioni che qui si considerano.

(3) Per gli opportuni dettagli sulla plasticità cfr. A. Nàdai, *Der bildsame Zustand der Werkstoffe*, Berlin 1927.

stico. Questo risultato mi pare già sufficiente per giustificare nell'interno della crosta della terra lo stato plastico sin da piccole profondità [1].

Ciò premesso, va osservato che le circostanze aventi maggior influenza sulla grandezza delle forze atte a provocare lo stato plastico sono le seguenti: 1) la composizione, 2) la grandezza assoluta dei granuli cristallini di cui sono costituiti la maggior parte dei solidi (pietre, metalli, ...), 3) le impurità e le alterazioni sia superficiali che interne (collegamento atomico,...) dei granuli, 4) la temperatura, 5) il tempo.

Di questi fattori molte osservazioni si potrebbero fare: io mi limito agli ultimi tre. La presenza di elementi eterogenei interposti fra i granuli cristallini altera in modo vario la tendenza allo stato plastico, mentre questa viene evidentemente favorita dalle eventuali cavità. Le forze necessarie a produrre lo stato plastico diminuiscono poi al crescere della temperatura. Infine l'azione del tempo è, forse, la più importante: invero la forma di un corpo solido può sotto piccole pressioni variare notevolmente se tali pressioni sono applicate per un periodo sufficientemente lungo [2]. Anche la velocità di variazione di forma è in rapporto colla forza atta ad originare lo stato plastico e colla temperatura: precisamente tale dipendenza è tanto più manifesta quanto più piccola è la suddetta velocità ed alta è la temperatura [3].

Dal punto di vista puramente meccanico non è ancora oggi possibile stabilire le condizioni rigorose che sono necessarie per provocare lo stato plastico. Le teorie della massima deformazione (St. Venant) e della massima tensione principale non corrispondono affatto alla realtà ed hanno oggidì un puro interesse storico. Molto più conformi alla realtà sono invece le teorie della massima tensione tangenziale e quella di Otto Mohr. La prima stabilisce che la tendenza allo stato plastico è misurata dalla massima differenza fra le pressioni principali (*stress difference* degli inglesi);

(1) Veramente dalle esperienze di Kármán si deduce che per rilevanti pressioni laterali il marmo non è più propriamente plastico, ma diventa *viscoso*: considerando però un cilindro verticale immerso nell'interno della corteccia terrestre le pressioni che si verificano sulla sua superficie laterale si devono ritenere, in proporzione, non così rilevanti almeno per i primi chilometri, ove non vi è luogo a considerare le tensioni tangenziali dovute alla resistenza della crosta come « vôlta ».

(2) Winslow riferisce di una tavola di marmo delle dimensioni 180 × 90 × 5 cm., che soggetta al solo peso proprio ed appoggiata su quattro sostegni ai suoi vertici in modo da lasciar libera una distanza di 120 cm. ha subito, *dopo 25 anni*, una freccia di 37 mm. lungo i bordi, sorpassando evidentemente le condizioni di deformazione senza rottura d'ordinario richieste.

(3) Detto ε lo spostamento specifico, la velocità di variazione di forma è $\frac{d\varepsilon}{dt} = v$: quando questa è assai piccola, come nei fenomeni orogenici, la tensione σ originante lo stato plastico si suppone linearmente dipendente da v, cioè: $\sigma = kv$, dove k è molto grande e dipende notevolmente dalla temperatura.

secondo O. Mohr si ammette invece che la suddetta tendenza si deve attribuire, oltre che alla tensione tangenziale, anche a quella normale [1].

3. Le considerazioni precedenti mi sembrano già sufficienti per porre in luce l'importanza della plasticità nei fenomeni tettonici; e dico tettonici, e non orogenici soltanto, perchè anche i movimenti *continui* che si verificano nelle grandi zone epirogeniche non potrebbero avvenire senza una sufficiente plasticità degli stati profondi. Prima però di passare ai fenomeni orogenici voglio osservare che a causa del raffreddamento terrestre la plasticità dev'essere diminuita col tempo di pari passo colla temperatura, causando un progressivo aumento di spessore della crosta più rigida: segue di qui che la contrazione dev'essersi verificata a cominciare da quando la crosta aveva ancora uno spessore relativamente piccolo ed era anche più plastica di quello che è oggidì.

Nello studio dettagliato del meccanismo della formazione delle montagne l'influenza della plasticità è già stata considerata da diversi Autori: ciò avvenne però in modo assai incompleto e talvolta anche erroneo; così Alberto Heim [2], dopo di aver giustamente attribuito alle sovrapressioni la causa prima dello stato plastico giunge alla conclusione: *Ueberlastung macht deformierbar, Dislokation deformiert.* È merito di L. Milch [3] aver osservato che le sovrapressioni bastano a generare le deformazioni tettoniche, che, secondo la definizione data precedentemente, possono accompagnare lo stato plastico, senza che sia necessario far intervenire delle nuove forze (dislocazione). Io mi propongo appunto di precisare e di estendere questo fatto, cercando di far vedere come *le sovrapressioni che originano lo stato plastico possono esse stesse provocare deformazioni che conducono ai fenomeni di frattura e di piegamento.*

A tale scopo utilizzo specialmente alcuni risultati sperimentali ottenuti sulla deformazione dei metalli e di altri corpi che furono studiati con particolare riguardo dal punto di vista delle superficie di scorrimento che in essi si generano durante lo sviluppo della fase plastica [4]. Tali superficie (o linee) di scorrimento sono determinate dalle traiettorie lungo le quali si muovono, con moto reciproco ed in generale non equiverso, le particelle del corpo nello stato plastico.

4. Lo studio delle fratture dei corpi è per sua natura assai complicato; si ritiene però, generalmente, che la causa principale atta ad originarle sia

(1) Cfr. A. Nádai, op. cit., p. 39 sg.

(2) *Der Mechanismus der Gebirgsbildung*, Basel 1878.

(3) Cfr. W. Salomon, *Grundzüge der Geologie*, I, Bd., p. 304.

(4) Per ragioni di spazio mi è impossibile riportare alcune figure che renderebbero più chiare le considerazioni che seguono: esse però si trovano nel libro citato di A. Nádai ove sono anche dettagliatamente spiegate.

la *tensione* (stiramento): a comprova di ciò sta il fatto che le superficie di rottura si presentano quasi sempre normalmente alla massima *tensione* principale. Ma, come ha osservato L. Prandtl per il primo, le fratture possono anche presentarsi senza *tensioni* (stiramenti): si verifica allora che la superficie di rottura è assai prossima alle direzioni che forniscono il massimo valore per la tensione tangenziale. (I tedeschi chiamano tali fratture « Werschiebungsbrüche », mentre le prime vengono dette « Trennungsbrüche »).

Ora è logico ammettere che anche in natura si presentano fratture delle due suddette specie: io dico, di conseguenza, che *le prime, cioè le fratture « aperte », sono da attribuirsi principalmente alla contrazione* (1), *mentre quelle « di spostamento » sono dovute, in massima, alle sovrapressioni che originano lo stato plastico.* Io mi limiterò alle fratture di quest' ultima specie.

Innanzitutto è necessario osservare che nella deformazione plastica le superficie di scorrimento sopradefinite si presentano sotto forma di sottili strati che scorrono gli uni sugli altri in senso eguale od opposto in modo da adattare la materia allo stato di tensione cui è assoggettata. Siccome poi è proprio lungo tali superficie di scorrimento che si verificano le maggiori tensioni (tangenziali), le fratture dovranno avvenire secondo quelle. In generale le suddette superficie di scorrimento, e quindi anche quelle di frattura, formano, colle direzioni delle pressioni principali, un angolo prossimo ai 45°.

Riguardo alle condizioni meccaniche atte a generare le fratture del tipo in questione occorre osservare che, se si immagina un cilindro verticale immerso nella crosta terrestre, in esso, delle tre pressioni principali, accadrà quasi sempre che quella massima è quella verticale causata dal peso sovrastante, mentre quelle laterali devono, a mio avviso, riguardarsi specialmente come atte a generare lo stato plastico. In tali condizioni il fenomeno della frattura si presenta quando gli strati costituenti le superficie di scorrimento abbiano raggiunto quello che può chiamarsi il *limite di plasticità* causato unicamente dall'azione *continua* della forza di gravità.

Da quanto precede segue poi che le fratture della crosta terrestre, non dovute alla contrazione, si devono presentare inclinate, in media, di 45° coll'orizzonte. A parità di altre cause, le fratture devono infine aver avuto inizio là dove erano minori le pressioni laterali.

(1) Occorre qui osservare che, per l'equilibrio, durante la contrazione vi sono state anche zone soggette a « stiramento » e che tali zone possono esistere tuttora almeno nel senso che ivi non si sono mai verificate compressioni orizzontali. Ciò mi sembra sufficiente per togliere l'obbiezione che ancora oggi viene formulata contro la teoria della contrazione secondo la quale essa sarebbe inconciliabile colla lunga permanenza dei vulcani aperti (Cfr. SALOMON, op. cit., I, Bd., p. 162).

Le fratture ora considerate avendo avuto come loro causa prima la tensione tangenziale, si presentano sempre *con spostamento* e solo quando la superficie di rottura non è piana possono risultare aperte.

Devo, in ultimo, al prof. F. Sacco l'osservazione che da quanto precede risulta anche spiegata la formazione dei cosidetti « *cone-in-cone* » che si presentano in natura in modo affatto simile a quanto indica la fig. 94 del libro citato del prof. A. Nádai: risulta così stabilito che l'unica causa alla quale tali fenomeni geologici devono venir attribuiti è la pressione [1].

La spiegazione della formazione delle pieghe è rimandata, per ragioni di spazio, ad una Nota successiva.

Petrografia. — *Diabasi e rocce filoniane melanocrate della Sardegna.* Nota di U. Panichi [2], presentata [3] dal Socio F. Millosevich.

Nè il Lamarmora [4], nè il vom Rath [5] parlano di diabase. Più tardi il Bucca [6] definì diabase una roccia di Mortuoi (Iglesias) e un'altra di Montevecchio, e melafiro una roccia di Terras Nieddas (Flumini). Il De Castro [7] considerò come diabasiche varie rocce filoniane del Sarrabus ed il Traverso [8] invece segnalò, pure nel Sarrabus, porfiriti bruno-verdastre d'aspetto dioritico o diabasico. Il Riva [9] trovò che la roccia di Rosas, chiamata diorite dal Lamarmora e dagli Autori posteriori, era invece diabase. Lo stesso Riva più tardi [10], descrivendo le rocce lamprofiriche sarde, trova che queste sono per lo più di aspetto diabasico e spessartitico; in quelle a struttura granulare-diabasica (spessartiti diabasiche) l'augite è prevalente e il plagioclasio è acido o basico secondo che è scarsa o abbondante l'olivina; nelle tipiche spessartiti è predominante l'anfibolo.

(1) Cfr. W. H. Twenhofel, *Treatise on Sedimentation.* London. 1926, p. 515.

(2) Istituto di Mineralogia della R. Università di Cagliari.

(3) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(4) A. De La Marmora, *Voyage en Sardaigne.* Turin, Bocca 1857.

(5) G. vom Rath, *Due viaggi in Sardegna.* Trad. U. Botti. Cagliari 1886.

(6) L. Bucca, *Nella descrizione geologico-mineraria dell' Iglesiente di G. Zoppi. Mem. descritt. della Carta d' Italia.* Vol. IV, Roma 1888.

(7) C. De Castro, *Descrizione geologico mineraria della zona argentifera del Sarrabus. Mem. descritt. della Carta d' Italia.* Vol. V, 1890.

(8) S. Traverso, *Rocce granitiche e porfiriche del Sarrabus.* « Società Ligustica di Scienze Naturali ». VI, 1895.

(9) C. Riva, *Sopra la formazione diabasica etc. di Rosas nel Sulcis.* « R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », Milano, 1889, XXXII p. 344.

(10) C. Riva, *Le rocce granitoidi e filoniane della Sardegna.* « R. Accademia delle Scienze di Napoli ». Memoria postuma, XII, 9, 1904-05.

Egli fornisce molte osservazioni microscopiche di tali rocce, come ad es., di quelle diabasiche oliviniche di Tempio, di quelle senza olivina della Maddalena, di Sorgono, di Capo Bellavista, e delle spessartiti propriamente dette di Caprera, di Capo Bellavista e Capo Carbonara. Osserva che talora, o presso le salbande, o sul contatto con inclusi granitici, le rocce lamprofiriche si presentano con facies odinica. In seguito troviamo nei resoconti dell'Assoc. Mineraria Sarda varie Note [1] riguardanti i filoni diabasici dell'Iglesiente, come pure un diabase porfirico di Oschiri [2]. Nella Nurra il Viola [3] trova un diabase anfibolico di cui fornisce l'analisi chimica. Il Franchi [4] ritiene corrispondenti al diabase di Viola alcune rocce intruse o intercalate nelle filladi della Nurra, che vengono definite dioriti augitiche. Lo stesso Franchi, parlando di diabasi ed eufotidi presso il Nuraghe a tergo di M. Canaglia, accenna alla possibilità che si tratti, sia di colate contemporanee agli scisti incassanti, sia d'intrusioni posteriori, laccolitiche o filoniane. Del Tempiese è una roccia analizzata dal Serra [5] e definita come diorite orneblendica, che ricorda, pur differendone, le spessartiti diabasiche oliviniche descritte dal Riva. Alcune porfiriti basiche della Barbagia meridionale sono state esaminate dall'Artini [6]; così sul crinale di M. Perdedu si trova una porfirite pirossenico-anfibolica; una porfirite pirossenica sta al tetto del giacimento di Seui.

Che dunque ci siano in Sardegna veri e propri diabasi lo dimostra, se non altro, lo studio di Riva sul diabase di Rosas. Risulta poi, d'altra parte, che la serie d'intrusioni post-granitiche si è conclusa con numerosi filoni melanocrati, molti dei quali si presentano con aspetto diabasico. Ed inoltre talune porfiriti dioritiche sarde, hanno esse pure aspetto diabasico. Così è accaduto che, mentre prima della scoperta dei diabasi sardi, si adoprava oltre il necessario la parola « diorite », in seguito è stata talvolta chiamata « diabase » anche qualche roccia che ne aveva solo l'aspetto; naturalmente per mancanza di analisi microscopica e chimica.

La rassomiglianza di alcune rocce filoniane melanocrate con i veri diabasi è talora non solo macroscopica, ma accresciuta dal fatto che anche esse presentano spesso una più o meno evidente struttura ofitica. Ciò giustifica alcune diagnosi sommarie.

Ecco ora qualche caso osservato da me.

(1) E. Ferraris (1903), C. Folco (1904), G. Pavan (1918), L. Testa (1922), ecc.

(2) L. Testa, « Ass. Min. Sarda », 1924.

(3) C. Viola, *La diabase anfibolica della Nurra.* « Boll. R. Com. Geolog. », 1905, p. 105, XXXVI.

(4) S. Franchi, *Sui giacimenti di minerale di ferro etc. della Nurra.* « Boll. del R. Comit. Geol. », 1910, XLI, p. 125.

(5) A. Serra, *Diorite orneblendica del Tempiese.* « Atti Acc. Gioenia di Sc. Nat. », Catania, X.

(6) E. Artini, *Sopra alcune rocce porfiriche della Barbagia di Seulo.* « Boll. R. Uff. Geol. », XLIX, 1922-23, nn. 1-5.

Un campione esistente nel Museo di Mineralogia di Cagliari con la qualifica di *diabase*, porta l'indicazione (del 1912): « Filoncello di 70 cm. di potenza quasi a nord di Cala Francese ». L'ho esaminato giacchè diabasi non sono finora noti alla Maddalena; però sono note, della stessa isola (Riva), sia le porfiriti dioritiche grigio-violacee, con feldspati interclusi (andesina) e in liste più acide nella massa, associate con quarzo allotriomorfo, con interclusi di anfibolo, ma non di quarzo, con molta clorite secondaria, ecc..., sia le spessartiti diabasiche verdognole chiare, a struttura intersertale, con feldspato da oligoclasio ad andesina acida, con augite, con plaghe cloritiche e, secondari, epidoto, apatite e magnetite titanifera.

La roccia esaminata è grigio-verde scura, la struttura è alterata dall'abbondanza di prodotti secondari, ma resta ancora visibile una fondamentale struttura ofitica, con piccoli feldspati listiformi, ed augite interstiziale e con aggiunta di non rari fenocristalli ormai pseudomorfi di augite. Del resto quando si tratta di filoncelli a piccola potenza, la struttura è più o meno influenzata anche dalla vicinanza della roccia incassante. Così qui le liste feldspatiche tendono, presso il contatto, a ridursi di numero e di grandezza. I feldspati sono in parte trasformati sia in prodotti caolinici, sia in muscovite. Vi sono plagioclasi piuttosto acidi (serie oligoclasio-andesina) e vi è anche abbondante ortoclasio. Rari interclusi di quarzo. Quanto ai fenocristalli già pirossenici, sono idiomorfi e totalmente trasformati in una clorite a debolissima birifrazione (penninite) che, in sezione, suol mostrarsi disseminata di sottilissimi aciculi verdastri riferibili ad orneblenda. Molta magnetite nonchè pirite. Non osservata olivina.

La roccia può dunque definirsi una *spessartite diabasica non olivinica*.

Vediamo ora un caso in cui l'aspetto diabasico è legato ad una roccia notevolmente diversa.

Presso la Cantoniera di M. Acuto vi sono filoni che nella carta del Sarrabus di De Castro sono segnati come *diabasi*. Di questi filoni, che sono ben visibili sulla sinistra della strada da Cagliari a Muravera, io ho raccolto alcuni campioni, l'esame microscopico dei quali porta intanto a riconoscere che non sono diabasi.

La roccia è grigio–verde scura, cosparsa di minuti punti biancastri, che in gran parte sono di quarzo; qua e là punti lucenti di pirite. Diviene per solito più oscura e più omogenea presso il contatto col granito in cui è intrusa.

In sezione mostra struttura olocristallina porfirica, salvo in vicinanza del granito, dove appare quasi afanitica. Si vedono abbondanti liste ortoclasiche, con geminazione di Carlsbad; talvolta esse si alternano con sottili lamelle di Albite. Frequenti granuli di quarzo, ed anche di calcite secondaria. È poi abbondante un'angite in massecole interstiziali ed anche in cristalli idiomorfi, ma corrosi; una buona sezione quasi parallela a 010, (72° fra le tracce di sfaldatura e quelle di 001) mi ha dato $c : c = 44°$. Seguono molti prodotti di alterazione dei feldspati, del pirosseno e della pirite.

Questa roccia si può considerare come un *porfido sienitico*. In essa peraltro fa un certo contrasto il forte carattere melanocratico con la presenza del quarzo (forse, in parte, anche secondario) e con l'abbondanza dell'ortoclasio. L'ortoclasio non è certamente secondario, sia perchè esso forma come l'intelaiatura di tutta la roccia, sia perchè, ove derivasse dal contatto col granito (fenomeno ben noto in altri casi di contatto con masse granitiche) dovrebbe essere più abbondante presso il contatto, mentre invece l'osservazione porta a riconoscere che si verifica proprio il caso opposto. D'altra parte è da notare che qui la massa eruttiva termicamente attiva non è, se mai, il granito, ma la roccia intrusa. Il carattere melanocratico è legato, sia con la ricchezza in augite, sia con l'abbondanza di prodotti di alterazione essenzialmente cloritici ed ocracei. È forse, sovratutto, la pirite, che dà luogo a idrossidi di ferro.

A questo proposito è interessante una porfirite da me osservata ad un centinaio di metri prima di giungere al serbatoio dell'acquedotto presso Sinnai.

Si tratta di un filone intruso non nel granito ma negli scisti paleozoici. Anche qui la roccia è disseminata di punti lucenti di pirite; ha aspetto di freschezza ed è resistente al martello; il fondo è grigio-azzurro scuro con piccolissime chiazze bianche, dovute in parte a quarzo, in parte a feldspati; questi, in fenocristalli assai freschi e non corrosi, stanno, insieme con biotite, entro una pasta minutamente listata da microliti feldspatici e frammenti biotitici. La biotite è fortemente pleocroica: da giallo-grano a marrone-rossastro. I fenocristalli di feldspato sono in piccola parte ortoclasici; gli altri corrispondono ad una labradorite acida (estinzione massima in zona osservata 010 = 22°). I feldspati della pasta sono principalmente ortoclasici.

I cristalli di pirite in questa roccia si trovano non solo sparsi nella pasta ma anche inclusi entro cristalli non alterati di feldspato e di quarzo. Anche in sezione (a luce riflessa) si vedono frequenti inclusioni di pirite in detti cristalli. Perciò la pirite non è secondaria. Forse questa pirite di origine magmatica è in relazione col fatto che molte di tali rocce filoniane contengono talvolta particolare ricchezza di solfuri metallici.

Concludendo dunque:

1° è ovvio che, se uno dei detti filoni rappresenti una intrusione più o meno aschista di masse diabasiche sottogiacenti, o piuttosto una varietà porfirica di un magma dioritico, o corrisponda invece ad una schizolite in senso lamprofirico del magma granitico, o ad altra varietà di roccia intrusiva, dovrà dedursi da rigorose osservazioni topologiche e petrografiche. Data la molteplicità di queste rocce e la grandiosità dei fenomeni connessi alla loro genesi, avrà interesse una revisione ed una estensione delle ricerche in proposito;

2° si hanno porfiriti sarde (come quella di M. Acuto), caratterizzate da una facies melanocratica in presenza di ortoclasio e di quarzo;

3° l'espressione « filoni diabasici », mentre deve esser bandita nel caso di rocce simili ai diabasi per aspetto e struttura, ma differenti per composizione, è tuttavia da usarsi con cautela anche se alle analogie di aspetto e di struttura si aggiunga analogia di composizione; e ciò fino a che non sia definita la questione sulla loro genesi. Così, mentre essa potrebbe essere accettata ove si verificasse il concetto di Novarese [1] di intrusioni (nell'Iglesiente) di grandi masse diabasiche profonde, non potrà essere usata ove si sia portati ad ammettere, con Riva, il carattere schizolitico lamprofirico per i filoni diabasici dell'Iglesiente, o, con De Castro, una duplice differenziazione di uno stesso magma nel Sarrabus: basica quella originante i filoni diabasici, acida e coeva quella originante i filoni microgranulitici.

Mi riserbo di tornare con maggior numero e completezza di osservazioni su questo argomento.

Chimica–fisica fisiologica. — *Azione del freddo sui grassi del latte* [2]. Nota di G. Quagliariello, presentata [3] dal Socio F. Bottazzi.

È noto da tempo, per le ricerche di Burri e Nussbaumer [4], che il latte di vacca, raffreddato per mezz'ora o più a una temperatura inferiore ai 10°C e poi riportato alla temperatura dell'ambiente, presenta un abbassamento della tensione superficiale, che non ritorna al suo valore normale neppure se il latte viene riscaldato per parecchio tempo a 37-38°C.

Queste ricerche furono ripetute da me [5] su latte di altri animali e anche su latte di donna, con analogo risultato. Io potetti inoltre dimostrare che l'abbassamento della tensione non si verifica nel latte omogeneizzato.

Era molto verosimile che la causa del fenomeno dovesse ricercarsi in una modificazione chimico–fisica dei grassi; ma sulla natura di questa modificazione non si avevano sino, ad oggi, idee precise.

Burri e Nussbaumer supposero che si trattasse di una solidificazione delle goccioline di grasso per effetto del freddo. Che il freddo possa produrre una trasformazione di tal genere si può ammettere senz'altro. Secondo

(1) V. Novarese, *Contributo alla Geologia dell'Iglesiente.* « Boll. R. Uff. Geolog. », XLIX, 1922-23, n. 10.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Biologica di Napoli.

(3) Nella seduta del 4 dicembre 1927.

(4) R. Burri u. Ths. Nussbaumer, *Ueber Oberflachenspannungs- und Viscositätsbestimmungen bei Kuhmilch unter Verwendung des Traubeschen Stalagmometers*, « Bioch. Zeit. », 22, p. 90, 1909.

(5) G. Quagliariello, *Azione delle basse temperature su alcune proprietà chimico–fisiche del latte*, « La Pediatria », 1916.

Schlossmann e Sindler [1], 16°C è la temperatura limite per lo stato liquido del grasso del latte, a 10°C esso si trova in uno stato semisolido, e al disotto di 10°C è tutto solidificato.

Si può anche ammettere che le goccioline di grasso solidificate non ritornino facilmente allo stato liquido; ma quello che non si riesce a comprendere è come tale trasformazione possa produrre un abbassamento della tensione superficiale.

Nella mia precedente pubblicazione (loc. cit.), io cercai di spiegare il fenomeno nel seguente modo: « I globuli del latte non hanno una composizione chimica unica ed uniforme: essi risultano costituiti da varî grassi con prevalenza dei trigliceridi degli acidi grassi superiori insolubili in acqua; ma non mancano certo i trigliceridi degli acidi grassi inferiori, che in acqua sono più o meno solubili. Per azione delle basse temperature, i trigliceridi superiori, naturalmente, si solidificano e si coartano, mentre gli inferiori, con essi mescolati o comunque legati, e perciò inattivi sulla tensione superficiale, passano e si sciolgono nel liquido interglobulare, del quale abbassano perciò la tensione superficiale. Riscaldando di nuovo il latte, i trigliceridi superiori possono tornare a fondersi, ma gli inferiori, o meglio quella parte di essi che per effetto della solidificazione era passata nel liquido interglobulare, rimane in questa disciolta, non torna ad unirsi coi trigliceridi superiori, così che il fenomeno appare irreversibile ».

Ma anche questa spiegazione, per quanto, secondo me, accordi meglio i fatti osservati con le leggi che regolano la tensione superficiale delle soluzioni e delle sospensioni, non aveva altro valore che quello di una pura e semplice ipotesi. Era necessario, pertanto, sottoporla alla prova sperimentale.

Questa prova io ho ricercata nella determinazione dei trigliceridi inferiori nel latte naturale e nel latte raffreddato, dopo aver allontanato dall'uno e dall'altro la massima parte del grasso sospeso.

A questo scopo, del latte fresco di mucca fu diviso in due parti: una parte conservata a temperatura ambiente, l'altra raffreddata per 1-2 ore a 0°C (ghiaccio fondente), e poi riportata a temperatura ambiente. Dopo aver determinata la tensione superficiale, alla stessa temperatura, dei due campioni, li sottoposi – separatamente, ma contemporaneamente – ad una energica centrifugazione (1 ora, 8000 giri al minuto). In questo modo la massima parte, se non tutto il grasso sospeso, si separa alla superficie del liquido.

Mediante una spatola si portò via, con la massima cura, tutto lo strato di grasso superficiale, e la separazione fu completata e resa perfetta mediante filtrazione attraverso carta.

(1) A. Schlossmann u. A. Sindler in «Hoppenheimer's Handb. d. Bioch.», 2ª ed., vol. 4, p. 766, Jena, 1925.

Nei due campioni di latte sgrassato fu determinato, infine, il contenuto relativo di acidi grassi inferiori. A questo scopo saponificavo con idrato potassico a caldo, acidificavo con acido cloridico e distillavo in corrente di vapore sino a raccogliere 700 cm³ di liquido che titolavo, in ultimo, con NaOH 0.1 N in presenza di fenolftaleina.

Riferisco il risultato di tre esperimenti:

1° Esperimento.

Tensione superficiale a 22°C del latte intero (1):

a) latte non raffreddato, N° gocce 69.4
b) latte raffreddato, » » 70.9

Acidi grassi inferiori nel latte sgrassato:

a) latte non raffreddato, NaOH 0.1 N per 100 g. latte, cm³ . . . 42.94
b) latte raffreddato, » » » » . . . 46.6

2° Esperimento.

Tensione superficiale a 19°C del latte intero:

a) latte non raffreddato, N° gocce 68.8
b) latte raffreddato, » » 72.2

Acidi grassi inferiori nel latte sgrassato:

a) latte non raffreddato, NaOH 0.1 N per 100 g. latte, cm³ . . . 50.54
b) latte raffreddato, » » » » . . . 61.17

3° Esperimento.

Tensione superficiale a 16°C del latte intero:

a) latte non raffreddato. . . . . 52.3 dine/cm.
b) latte raffreddato . . . . . 49.5 »

Acidi grassi inferiori nel latte sgrassato:

a) latte non raffreddato, NaOH 0.1 N per 100 g. latte, cm³ . . . 49.61
b) latte raffreddato, » » » » . . . 58.50

(1) La tensione superficiale nelle esperienze 1 e 2 fu determinata col metodo delle gocce, usando uno stalagmometro (Traube), che dava per l'acqua 41.1 gocce a 15 °C, e mi limito a riferire il numero delle gocce ottenute. Nella esperienza 3, invece, fu misurata col tensiometro di Lecomte du Noüy.

L'ipotesi, che per azione del freddo trigliceridi inferiori passino in soluzione, mi sembra riceva da queste ricerche una salda base sperimentale. Se questi trigliceridi inferiori prima del raffreddamento non agiscono sulla tensione superficiale è perchè, evidentemente, essi non si trovano sciolti nel latte, ma fanno parte dei globuli di grasso in esso sospesi.

Il freddo, dunque, separa i trigliceridi inferiori dai superiori. Che questa azione separatrice, per così dire, si verifichi effettivamente è dimostrato schematicamente dal modo di separarsi del grasso, dal latte normale e dal latte raffreddato, per effetto della centrifugazione.

Ho detto che centrifugavo contemporaneamente i due campioni del latte: due tubi di centrifuga erano ripieni col latte normale, due altri col latte raffreddato e poi riportato a temperatura ambiente. Dopo 1 ora di centrifugazione ecco quello che si osserva:

Dal latte normale si separa uno strato di grasso solido, compatto, di aspetto omogeneo e di un colorito gialletto la cui intensità va lievemente diminuendo dalla superficie libera a quella di separazione; dal latte raffreddato lo strato di grasso, che ha complessivamente lo stesso spessore di quello del latte non raffreddato, è diviso nettamente in due strati: uno superficiale, alquanto più spesso, di grasso liquido, di colorito giallastro piuttosto intenso, in tutto simile all'olio d'uliva; e l'altro, leggermente meno spesso del precedente, di grasso solido, compatto, di aspetto omogeneo e quasi perfettamente bianco.

Questo comportamento dimostra, in modo veramente schematico, che durante il raffreddamento i varî trigliceridi che costituiscono i globuli di grasso del latte, si separano e assumono lo stato fisico che è proprio a ciascuno di essi; per cui quelli costituiti esclusivamente o prevalentemente da acidi grassi non saturi (acido oleico: circa 40 % degli acidi grassi totali) si presentano liquidi, e quelli costituiti da acidi grassi saturi (acido palmitico circa 50 %) si presentano solidi. Gli altri trigliceridi, quelli costituiti dagli acidi grassi inferiori (butirrico, capronico, ecc., circa 10 %) si ripartiscono, infine, fra grasso e soluzione salino-proteica, secondo il grado di solubilità loro in ciascuno di essi, come è dimostrato dall'aumento degli acidi grassi volatili nel latte raffreddato e sgrassato. Conseguentemente la tensione superficiale si abbassa, perchè la concentrazione delle sostanze tensioattive *disciolte* nel latte aumenta.

Le presenti ricerche permettono, dunque, di affermare con sicurezza che l'abbassamento di tensione superficiale, che presenta il latte raffreddato al disotto di 10°C, dipende da un passaggio di trigliceridi degli acidi grassi inferiori dai globuli nel liquido interglobulare dove si sciolgono.

Chimica fisiologica. — *Diverso contenuto in « fosfogeno » di muscoli striati a contrazione rapida e a contrazione torpida* [1]. Nota di G. MARTINO, presentata [2] dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È stato dato il nome di « fosfogeno » ad un fosfato organico molto labile che, secondo ricerche recenti eseguite da P. e G. P. Eggleton [3] in Inghilterra ed altre contemporaneamente da Fiske [4] in America, parrebbe esistere nei muscoli. Esso sarebbe sfuggito all'osservazione dei precedenti sperimentatori per la sua caratteristica proprietà di andar soggetto, in soluzione acida, a rapida idrolisi con produzione di fosfati inorganici, di modo che la determinazione dell'acido fosforico inorganico dei muscoli con i metodi di Embden o di Briggs, i quali appunto importano l'uso di acidi minerali, avrebbe condotto necessariamente alla completa idrolisi di esso e alla determinazione del suo radicale di acido fosforico come fosfato « inorganico ».

Proprio per questa proprietà il « fosfogeno » si differenzierebbe dal « lattacidogeno » di Embden. che è molto resistente all' idrolisi per acidi minerali.

E precisamente in base alle osservazioni eseguite col metodo colorimetrico di Briggs fu supposta e poi ammessa l'esistenza di questo fosfato organico instabile.

Quando ad una soluzione contenente fosfati si aggiungono i reagenti appropriati richiesti da tale metodo, si sviluppa gradatamente un colorito blu che raggiunge il massimo dopo 30′ minuti, ma durante questo tempo se la soluzione contiene solo fosfati inorganici, confrontandola con una soluzione « standard » di fosfato inorganico ed eseguendo numerose letture in vari tempi successivi, in qualsiasi momento si esegua la lettura, si trova che il rapporto fra l' intensità di colore di una soluzione e dell'altra si mantiene sempre costante. Di modo che in una grafica sintetica, ove si trovi sulle ordinate il rapporto suddetto e sulle ascisse il tempo in minuti, la curva che ne risulta è rappresentata da una linea orizzontale. Se invece si tratta di un estratto dealbuminizzato di muscolo, l' intensità del colore aumenta in esso molto più velocemente che nella soluzione « standard », e la curva che si ottiene è costituita da una linea prima ascendente (per i primi 15′-20′ minuti) e poi orizzontale.

Per questo rilievo venne fatta l' ipotesi di una produzione di acido fosforico nell'estratto di muscolo dopo l'aggiunta di reagenti dei Briggs, ed alla supposta sostanza dalla quale quello si originerebbe si diede il nome di « phosphagen » (fosfogeno).

(1) Dall' Istituto di Fisiologia della R. Università di Messina, diretto dal professore G. Amantea.

(2) Nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

(3) EGGLETON P. a. EGGLETON G. P., « Bioch Journ. » XXI, 1, (1927).

(4) FISKE, « Sciences », Apr. 1927.

Sembra che a questa sostanza - per quanto ancora non definita dal punto di vista chimico - spetti una parte importante nel chimismo della contrazione muscolare. P. e G. P. Eggleton (1) videro che, mentre il muscolo liscio dello stomaco di rana ne contiene tanto poco che è impossibile eseguirne il dosaggio, il muscolo cardiaco contiene piccole quantità di « fosfogeno », il muscolo striato quantità molto rilevanti.

Ma se il muscolo striato (gastrocnemio di rana) è reso ineccitabile col riscaldamento (a 35° per 20 minuti), non si riscontrano in esso neppure tracce di « fosfogeno ».

Secondo gli stessi Autori, nel gastrocnemio di rana per effetto della stimolazione prolungata con corrente faradica (fino alla fatica), scompare la massima parte del « fosfogeno » presente prima della stimolazione e contemporaneamente aumenta l'acido fosforico inorganico.

Inoltre nel muscolo tetanizzato fino alla fatica si può assistere alla reintegrazione del « fosfogeno » facendo seguire un sufficiente periodo di riposo in ossigeno, mentre invece tale reintegrazione non avviene in condizioni anaerobiche.

Per tali fatti sembra giustificato attribuire al « fosfogeno » una particolare importanza per la funzione del muscolo striato.

E sembra anche ovvio proporsi il seguente quesito: Esiste un qualche rapporto tra capacità di lavoro dei vari muscoli e contenuto in « fosfogeno » di essi?

Embden e Adler (2) notarono questo rapporto per il « lattacidogeno ».

Essi videro che un muscolo contiene tanto più « lattacidogeno » quanto più esso è capace di contrazioni rapide.

Infatti i muscoli bianchi del coniglio (bicipite femorale), che sono caratterizzati da contrazioni molto rapide, presentano un contenuto in « lattacidogeno » più elevato dei muscoli rossi (semitendinoso, soleo), che sono muscoli a contrazione torpida. La stessa differenza fu notata da Lyding (3) tra il muscolo pettorale del colombo e del gallo (muscolo a contrazione rapida) e i muscoli dell'anca (a contrazione torpida) degli stessi animali.

Sempre in rapporto al contenuto in « lattacidogeno » dei muscoli, risultò successivamente anche a noi (4), nel confronto tra due pesci di acqua dolce, che i muscoli della trota, pesce capace di movimenti molto vivaci, presentano un contenuto più elevato in « lattacidogeno » di quelli del carpione, che è dotato di movimenti più lenti.

Ci sembrò pertanto opportuno eseguire eguali confronti anche riguardo al contenuto in « fosfogeno » dei muscoli.

Sperimentammo nel coniglio e nel colombo, confrontando tra loro per il primo il contenuto in fosfogeno del bicipite femorale (muscolo a contrazione rapida) con quello del soleo (a contrazione torpida); e per il secondo il contenuto del muscolo pettorale (a contrazione rapida) con quello dei muscoli dell'anca (a contrazione torpida).

Le determinazioni dell'acido fosforico inorganico e del « fosfogeno » si eseguirono a mezzo del metodo colorimetrico di Briggs (5) (con l'uso del colorimetro di Duboscq) e precisamente con la tecnica descritta da P. e G. P. Eggleton (6).

(1) Eggleton P. a. Eggleton G. P., « Journ. of. Phys. » LXIII, 2, (1927).

(2) Embden G. u. Adler E., *Hoppe-Seylers* « Ztscr. f. phys. Chemie », CXIII, p. 15 (1921).

(3) Lyding G., Ibidem, CXIII, p. 223 (1921).

(4) Martino G., Ibidem, CLXIII, 4-6 (1926); « Arch. di Sc. Biol. », IX, 1-2 (1926).

(5) Briggs, « Journ. Biol. Chem. », LIII, p. 13 (1922).

(6) Eggleton P. a. Eggleton G. P., loc. cit.

Circa 400-500 mg. di muscolo, dopo l'esatta determinazione del peso, vengono sminuzzati in un mortaio in acido tricloracetico 4 %, versati in un cilindro graduato (esattamente calibrato) e diluiti con il liquido di lavaggio del mortaio (acido tricloracetico 4 %) nella proporzione di 4 o 5 cc. per 100 mg. di muscolo. L'acido tricloracetico deve essere prima raffreddato con ghiaccio, e così pure il mortaio allo scopo di limitare la scissione del « fosfogeno ».

Si filtra dopo 10' minuti, ed una parte aliquota del filtrato si diluisce esattamente con acqua distillata fino a 12 cc. Si prepara uno « standard » di fosfato inorganico (da una soluzione a titolo esattamente noto) contenente approssimativamente la stessa quantità di fosforo della parte aliquota di filtrato, e si diluisce ugualmente fino a 12 cc. Poi si aggiungono contemporaneamante i reagenti di Briggs (1) alle due soluzioni, e con la massima rapidità possibile si eseguono al colorimetro dei confronti tra le due soluzioni a brevi intervalli tra di loro e tenendo sempre esattamente conto del tempo, fino a 40'-45' minuti dopo l'aggiunta dei reagenti di Briggs.

I risultati delle letture eseguite si utilizzano poi per la costruzione della grafica suaccennata della intensità relativa di colore nei vari tempi, e, prolungandola in dietro fino al tempo zero, si ricava il valore indicante l'acido fosforico inorganico, mentre la differenza tra il valore ottenuto nell'ultimo confronto (cioè dopo i 40'-45' minuti suddetti) e quello ottenuto al tempo zero rappresenta il « fosfogeno ».

I conigli e i colombi furono sempre uccisi per dissanguamento.

Le cifre riportate nelle tabelle I e II esprimono in mg. di P % le quantità di acido fosforico inorganico e di « fosfogeno » riscontrate nelle varie esperienze.

Come risulta dalla tabella I, per l'acido fosforico inorganico dei muscoli di coniglio si trovarono valori oscillanti fra 22 1/2 e 24 mg. di P % per il bicipite femorale (colonna 2), e fra 24 1/2 e 32 mg. % per il soleo (colonna 3); esso risultò quindi per il muscolo a contrazione torpida alquanto più elevato che per quello a contrazione rapida; viceversa per il « fosfogeno » si riscontrarono valori molto più alti per il bicipite femorale (colonna 4) che per il soleo (colonna 5), e cioè da 25 a 28 mg. di P % nel primo caso, e da 10 1/2 a 14 1/2 nel secondo. Anche nei colombi (tabella II) si riscontrarono per il muscolo pettorale, in confronto con i muscoli dell'anca, valori un po' più bassi di acido fosforico inorganico (colonne 2 e 3) e valori molto più elevati di « fosfogeno » (colonne 4 e 5): per quest'ultimo si trovarono da 23 1/2 a 27 mg. di P % nel pettorale e da 10 a 12 mg. di P % nei muscoli dell'anca.

In altri termini, come per il « lattacidogeno » ai precedenti autori, così anche a noi per il « fosfogeno » risultò una netta e costante differenza tra i due tipi di muscoli (di coniglio e di colombo) presi in esame, e precisamente nel senso che i muscoli capaci di contrazioni più rapide sono quelli, nei quali il « fosfogeno » si trova in quantità più rilevante, mentre un comportamento inverso presenta il fosforo inorganico contemporaneamente presente.

(1) 2 cc. di « soluzione A » (Molibdato d'ammonio 5 % in acido solforico 5,4 N) e 1 cc. di « soluzione B » (idrochinone 0.5 % in solfito di sodio 20 %).

TABELLA I.

Coniglio	Acido fosforico mg. di P °/₀		Fosfogeno mg. di P °/₀	
	Bicipite femorale	Soleo	Bicipite femorale	Soleo
1	2	3	4	5
1°	23 1/2	31 1/2	26 1/2	11
2°	24	24 1/2	25	10 1/2
3°	23	30 1/2	27	14 1/2
4°	22 1/2	32	28	13 1/2

TABELLA II.

Colombo	Acido fosforico mg. di P °/₀		Fosfogeno mg. di P °/₀	
	Pettorale	Muscoli dell'anca	Pettorale	Muscoli dell'anca
1	2	3	4	5
1°	39 1/2	41	25	11
2°	35 1/2	36	24	10
3°	35	38	24 1/2	10 1/2
4°	38 1/2	41	24	10 1/2
5°	38	40	23 1/2	11
6°	38	42	27	12

Zoologia. — *Ricerche anatomo-fisiologiche sul significato del pancreas intraepatico nei Teleostei.* Nota di G. Brunelli, presentata [1] dal Corrisp. F. Raffaele.

Le nostre conoscenze sui rapporti tra pancreas e fegato nei Pesci si possono riassumere nei seguenti punti di vista. Nell'inizio si era pensato che nei Teleostei il pancreas in molti casi mancasse e che le appendici piloriche più o meno sviluppate avessero una funzione vicariante. In seguito si scoprì che nei casi in cui pare che il pancreas manchi, esiste in molti casi un pancreas diffuso e inoltre il Laguesse pubblicò il notevole reperto che esiste talvolta un pancreas intraepatico di solito coesistente col pancreas diffuso.

Circa la presenza o l'assenza del pancreas intraepatico nei Teleostei si hanno le recenti ricerche di Castaldi [2], le quali dimostrano che nelle differenti famiglie di tali Pesci il pancreas intraepatico è diversamente sviluppato, ciò che in via di massima trova conferma nelle indagini eseguite nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia, avendo colla mia assistente Dr. Rizzo sottoposto a revisione le più importanti forme di Teleostei.

Nessun autore però si era domandato in quale rapporto stia la presenza del pancreas intraepatico col diverso metabolismo dei Pesci che lo presentano in confronto degli altri.

Da tali indagini risulta, secondo la mia interpretazione, che esistono nei Pesci due tipi fisiologici di fegato, uno a regolazione glicogenica e l'altro in cui prevalgono i depositi di sostanze grasse, e in cui il pancreas intraepatico è poco sviluppato (alcuni Teleostei) o mancante (alcuni Teleostei, Selaci). Il tipo classico in cui si verifica quest'ultima circostanza è dato appunto dai Selaci, nei quali, come si esprime il Bottazzi, il fegato diventa proprio un organo di accumulamento di grasso.

Nei Teleostei il fegato a regolazione glicogenica sembra appartenere con prevalenza ai Pesci con pancreas intraepatico. Caso tipico la Carpa con fegato a pancreas intraepatico sviluppato e il cui fegato contiene notevoli quantità di glicogeno. Questo reperto si accorda col modo di nutrizione dei Pesci; infatti il pancreas intraepatico è sviluppato in quelle forme come i Ciprinidi e gli Sparidi, in cui prevale od è notevole la nutrizione a base di idrati di carbonio.

(1) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(2) Castaldi L., *Elenco dei pesci che presentano un pancreas intraepatico*, in « Monitore zoologico italiano », 33, 12-1922.

Nei Teleostei sembra che le forme che si nutrono a prevalenza di molluschi e di crostacei (almeno nell'età giovanile), cioè di un nutrimento che è fonte cospicua di glicogeno, posseggano un fegato a pancreas intraepatico di tipo a prevalente regolazione glicogenica.

È vero che, secondo alcuni fisiologi, la funzione glicogenica del fegato dipende da un enzima elaborato dallo stesso parenchima epatico, ma è anche vero che si attribuisce all'ormone pancreatico una importanza nella glicogenesi e, d'altra parte, la sinergia fisiologica dell'ormone pancreatico con altri ormoni nel metabolismo dei carboidrati è ancora difficile a precisarsi (Pende).

Il risultato delle ricerche sovra accennate si armonizza colla teoria dei fisiologi circa la secrezione interna del pancreas e alla supposizione che l'increto pancreatico si opponga a un'eccessiva scissione del glicogeno nel fegato (Tigersted).

Fonte precipua di glicogeno nella nutrizione a mezzo di crostacei lo stesso glicogeno contenuto in essi in notevole quantità, e forse anche i glicoproteidi della chitina da cui il glicogeno potrebbe derivare, sebbene su questo punto ci siano ancora delle incertezze. Pesci prevalentemente carnivori come l'Anguilla e il Luccio mancano invece di pancreas intraepatico. Nei Pesci senza pancreas intraepatico o con pancreas intraepatico poco sviluppato, è più facile che alla deposizione di glicogeno segua o si sovrapponga quella di sostanze grasse. Ciò si accorda in modo mirabile colle dottrine dei fisiopatologi. Senza esporre le diverse ipotesi e controversie sul modo di azione del pancreas nel regolare il ricambio degli idrati di carbonio, dobbiamo ricordare quanto appresso.

Secondo Rondoni quando l'apporto alimentare dei carboidrati passa un certo limite e tutti i depositi di glicogeno sono saturi, ecco che allora l'in più dei carboidrati è immagazzinato sotto forma di grasso. Rosenfeld ha dimostrato che quando forti quantità di grassi si portano nel fegato vi è un vero rapporto antagonistico tra il contenuto di glicogeno e il contenuto di grasso, e Yunkerdorf parla addirittura di antagonismo tra glicogeno e grasso nel fegato.

Bottazzi ricorda come uno dei più importanti problemi della chimica biologica sia quello perchè il fegato si arricchisce di grasso quando si impoverisce di glicogeno e viceversa.

È notevole che quanto sopra si è esposto circa la funzione del pancreas intraepatico serve nei Pesci a rischiarare quelle relazioni fra l'infiltrazione glicogenica e l'adiposi cellulare che non sono spiegate e sono suscettibili di diversa interpretazione (Lustig).

Diversi autori sono d'accordo nell'ammettere che l'ormone pancreatico influenzi la scissione del glicogeno inibendola. D'altra parte la formazione del glucosio ha forse un'importanza per la formazione della glicerina e la sintesi delle sostanze grasse. Resta ancora oscura la quistione prospettata da alcuni fisiologi circa la genesi del grasso epatico; per esempio Gley

scrive: « Si è constatato che i Pesci e i Crostacei il cui fegato è ricco di grasso hanno una nutrizione esclusivamente azotata e che questo grasso epatico non può dunque provenire che dall'albumina ». Debbo obiettare che questa dizione di Gley « esclusivamente azotata » non è esatta e non trova riscontro nella nutrizione degli animali marini. Anche i Pesci che si nutrono di altri Pesci, nell'età giovanile sono di solito divoratori di macroplancton e di microplancton sotto forma di crostacei che contengono quantità non trascurabile di idrati di carbonio e di grasso.

Anzi Pesci a fegato molto ricco di olio, come i Gadidi, sono sovrattutto, come avviene per i celebri merluzzi del mare del Nord, mangiatori di crostacei. Qualche specie di merluzzo come il Seelachs o *Gadus virens* si nutre, è vero, di aringhe, ma è noto che queste sono alla lor volta ricche di olio e si nutrono di crostacei.

Se anche Macdonal ritiene che il grasso nelle aringhe, negli spratti, negli sgombri e nei salmoni derivi prevalentemente da scissione di sostanze proteiche, lo Johnstone, al quale mi associo, fa notare che il grasso potrebbe derivare dai crostacei di cui i Pesci pelagici prevalentemente si nutrono.

Le ricerche anatomo-fisiologiche sul pancreas intraepatico trovano nello studio della etologia dei Pesci la necessaria integrazione, e serviranno sempre più a renderci conto dei due tipi di fegato a infiltrazione glicogenica e a infiltrazione adiposa, sui quali mi propongo ulteriori indagini.

Zoologia. — *Su di un rarissimo Cetaceo spiaggiato nel litorale di Nettuno* [1]. Nota di G. Brunelli e G. Fasella, presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

Nel decorso novembre, la mattina del 9, ha spiaggiato nel territorio di Nettuno, presso Foce Verde, un Cetaceo, sul quale il Podestà di detto Comune richiamò l'attenzione del Prefetto di Roma e dell'Ufficio Pesca del Ministero dell'Economia Nazionale.

Questo Cetaceo, sconosciuto dal popolo, che gli attribuiva i nomi più fantastici, venne da noi riconosciuto come uno Zifioide, sottofamiglia di Cetacei molto interessante, perchè segna un ponte di passaggio tra i Denticeti e i Misticeti.

Degli Zifioidi fin'ora spiaggiati nel Mediterraneo ci dà notizia il Vinciguerra in una Nota presentata al Congresso della Società Italiana per il progresso delle Scienze, tenuto in Bologna nel 1926 [3].

(1) Il presente lavoro è stato diretto dal prof. G. Brunelli.

(2) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(3) Vinciguerra Decio, *Due rari Cetacei di Liguria: Ziphius Cavirostris Cuv. e Pseudorcha crassidens Owen*, « Res Ligusticae », n. 40, Genova 1926.

Poche sono le catture di *Ziphius cavirostris* Cuv., nel Mediterraneo. Di un individuo, arenato sulle coste della Corsica, lo scheletro si conserva a Cette. Un altro, preso a Villafranca, trovasi nel Museo Zoologico dell'Università di Jena. Nel Museo Zoologico di Firenze esiste lo scheletro di un individuo arenato a Beaulieu, presso Villafranca, il 4 settembre 1878, e quello di Pisa ne possiede uno di Livorno senza data e il cranio di un altro esemplare preso a Varazze (Liguria Occidentale) il 4 settembre 1900. Un cranio trovasi anche nel Museo di Cagliari.

A Monaco esiste lo scheletro di un individuo preso a Beaulieu nel 1913 e si ha notizia di altri due osservati sulla costa mediterranea della Spagna. Finalmente vi è un individuo di Albissola, catturato nel novembre 1925 e di sesso femminile, ch'è citato nella menzionata Memoria del Vinciguerra.

Esaminato superficialmente, lo Zifioide spiaggiato a Foce Verde poteva passare per lo *Ziphius cavirostris*, sebbene vi siano contraddizioni tra gli autori che hanno studiato lo Zifio anche per i caratteri esterni: per esempio molti descrivono lo *Ziphius cavirostris* come di colore cinereo, mentre l'esemplare studiato dal Vinciguerra è di colorito quasi uniformemente nero.

All'esame però del cranio e della dentatura rudimentale, esame che naturalmente fu possibile fare solo dopo alcuni giorni, il Cetaceo spiaggiato a Foce Verde si è potuto ascrivere al genere *Mesoplodon*. I due denti non si trovano infatti all'apice della mandibola, ma notevolmente discosti. Per i raffronti osteologici, con i quali è stato possibile meglio giungere ad una più esatta determinazione, è stata consultata la Memoria di Anderson, pubblicata negli « Atti del Congresso Internazionale Zoologico di Berna » (1904), intitolata: *Some notes on the cetacea of Irish Atlatic coast*, che contiene interessanti fototipie dei pochissimi esemplari di *Mesoplodon* conservati nei musei di Europa.

Circa la determinazione della specie vi potrebbe essere qualche dubbio, nel senso che i denti del *Mesoplodon bidens* sono molto sporgenti, mentre quelli del nostro esemplare sono nascosti negli alveoli ed erano ricoperti dalla gengiva; ma è noto che negli Zifioidi la riduzione dei soli due denti, che li caratterizzano, è massima nel sesso femminile, al quale apparteneva appunto l'esemplare di Foce Verde.

È la prima volta che il *Mesoplodon bidens* Sow., risulterebbe catturato nel Mediterraneo. Questa cattura prova una volta di più che gli Zifioidi sono specie cosmopolite, sebbene possa trattarsi, come per altri rari cetacei, di una casuale incursione di un esemplare atlantico dallo stretto di Gibilterra. Non ci nascondiamo però che di molti cetacei spiaggiati in Italia, per
[illegible] coordinamento o di persone che se ne interessassero, si per-
[illegible], e così sarebbe stato dell'esemplare di Foce Verde se
[illegible]on se ne fosse occupato, dopo la notizia ricevuta dalle Auto-
[illegible]attura di un individuo di *Mesoplodon* nel Mediterraneo con-

ferma le vedute dell'insigne paleontologo Abel, il quale, seguendo le idee di Forbes, ha posto in quarantena le numerose specie create dai paleontologi pel genere *Dioplodon*. Primo tra gli altri il *Dioplodon Farnesinae* di Capellini va radiato, poichè com'è spiaggiato nel 1927 il *Mesoplodon* a Foce Verde, così a maggior ragione può esser spiaggiato molti secoli addietro nel mare Laziale, quando forse il *Mesoplodon* era più comune nel Mediterraneo: lo stesso deve dirsi, probabilmente, del *Dioplodon senensis* e *bononiensis*.

La storia dei rapporti fra gli Zifioidi viventi e fossili è del massimo interesse per la storia della paleontologia, a cominciare da quando Cuvier aveva scambiato per fossile il cranio dello *Ziphius cavirostris*. Ancor più rari dello *Ziphius* sono gli esemplari di *Mesoplodon* spiaggiati in Inghilterra, Germania (un solo esemplare), in Francia (costa atlantica), sebbene anche per tali nazioni debba osservarsi quello che è stato detto per le nostre coste: cioè la deficienza di sistematici rilevamenti sugli animali spiaggiati.

È poi deplorevole che moderni trattati di Zoologia non facciano mensione degli Zifioidi e ancor meno del genere *Mesoplodon*, ch'è uno dei più importanti per le forme di passaggio tra i Denticeti e Misticeti, come Abel ha fatto notare.

Noi riteniamo che i cetacei abbiano una origine polifiletica ed è forse un errore di comprendere i Fiseteridi e gli Zifioidi in una stessa famiglia e sarebbe forse più opportuno riguardare gli Zifioidi come famiglia a sè.

Sarebbe anche opportuno che gli Zoologi e i Paleontologi approfondissero lo studio comparativo degli Zifioidi viventi e fossili, seguendo i concetti della paleolobiologia di Abel, ch'è una branca di scienza moderna, destinata a sicuro successo.

Il grande paleozologo Kovalewski ha già opportunamente rilevato che le nostre conoscenze sui mammiferi fossili sono assai meno progredite di quanto le farebbe credere il gran numero di generi e di specie creati.

Biologia. — *Osservazioni sulla biologia sessuale degli Scitodoidi.* Nota di B. Monterosso, presentata dal Corrisp. A. Russo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *I « semi giganti » ed un caso di « poliendospermia » per effetto di impollinazione estranea su « Nicotiana rustica »* [1]. Nota di R. Savelli, presentata [2] dal Socio B. Longo.

I. - *La posizione sistematica degli impollinanti e l'affinità sessuale rispetto a « Nicotiana rustica L. »* — In *N. rustica*, dopo una impollinazione propria, lo stimma e lo stilo, rapidamente attraversati da innumerevoli tubetti pollinici, compiono presto la loro funzione e presto cadono. Nel fiore emasculato e mantenuto vergine, il gineceo conserva molto più a lungo il suo stimma vivo, recettivo, ipermaturo, *in attesa*: tuttavia mi risulta che almeno la maggioranza degli ovuli invecchia perdendo la fecondabilità e la capacità di sviluppo prima assai che lo stilo avvizzisca. Impollinando *N. rustica* con *Petunia* si realizza una condizione che non si potrebbe dire, a rigore, intermedia, perchè è molto meno prossima al caso di verginità che non al caso di impollinazione legittima: lo stilo si conserva un po' più a lungo, direi anche in questo caso in attesa di una impollinazione meno estranea; ma se questa venga impedita ben presto si constata da parte del polline di *Petunia* una potente azione [3], i cui effetti ho parzialmente descritto in una Nota pubblicata qualche tempo addietro nel volume XXXV del «Nuovo Giornale Botanico Italiano». Nel citato lavoro ho taciuto di alcuni fenomeni particolari che per la loro singolarità mi son sembrati più degni di venir segnalati in questa sede, fenomeni che del resto sono in parte comuni a quello che in *N. rustica* può osservarsi anche per opera di *N. Langsdorffii*.

Questa sia pur parziale corrispondenza di effetti riesce sorprendente ed inopinata se si confronti, da un lato, con la distanza che negli ordinari schemi di classificazione si è abituati a frapporre tra *N. Langsdorffii* e *Petunia* e, d'altro lato, con l'affinità che – secondo gli stessi schemi – dovrebbe ammettersi tra *N. rustica* e *N. Langsdorffii*.

Ciò non può non dar luogo a qualche riflessione, ed intanto io debbo dire che tutti gli incroci e prove di incroci da me tentati su *N. Langsdorffii* o con polline di *N. Langsdorffii* su altre *Nicotianae*, hanno potuto convincermi che questa pianta ha un comportamento prossimo a quello delle specie di *Nicotiana* della sezione *Petunioides*. Invece *N. Langsdorffii* nella classica monografia del Comes si trova collocata al polo opposto, nella sezione *Rustica*,

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione Sperimentale di Rovigo.

(2) Nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

(3) L' impollinazione reciproca, cioè operata da *N. rustica* sul gineceo di *Petunia* non ha su questo alcun sensibile effetto. *Petunia* è anche insensibile al polline di *Nicotiana glauca*.

cui – per l'occhio del sistematico – la destina senza equivoco il colore luteo che ha la corolla della sua forma tipica, colore che tuttavia regredisce parzialmente in alcune sue varietà, che allora più visibilmente si scostano dai rappresentanti veramente tipici della sezione *Rustica*.

Spetta allo Splendore il merito di aver dubitato per primo se *N. Langsdorffii* sia davvero da ascriversi alla sezione *Rustica*. Egli accenna ad una proposta: di sbalzarla bruscamente all'altro estremo e cioè tra le *Petunioides*; ciò sulla base di tenui indizî, come la forma, la grandezza e la scultura del seme ed il color ceruleo del polline, caratteri che, secondo Splendore, sono più ricchi di significato filogenetico e di valore diagnostico che non il colore della corolla [1].

I dati fisiologici sull'affinità sessuale mi porterebbero quasi a sottoscrivere l'opinione di Splendore; senonchè una più comprensiva e più moderna valutazione genetica ci mostra l'inanità dello sforzo di costringere le specie di un genere vasto come *Nicotiana* in un ordinamento lineare, nel quale esse si succedano in fila indiana, da un polo all'altro del genere, tra due specie estreme concepite come antagoniste. Le idee introdotte dal De-Vries con la sua *Intracellulare Pangenesis* (1889), armonizzate nella concezione mendeliana, portano a vedere nella specie la espressione di un determinato aggruppamento o *costellazione* di unità distinte e indipendentemente trasferibili, il cui numero è relativamente piccolo in confronto a quello delle specie e la cui presenza, perciò, deve necessariamente essere comune a molte specie anche lontane e per altri caratteri antagoniste.

In un periodo di reazione a tale atomicismo genetico si è creduto di poter dire che questi *caratteri-unità* mendeleggianti potessero essere soltanto quelli varietali: i più superficiali e meno significativi. Ma ciò è falso: la trasferibilità e l'associabilità indipendente dei caratteri trova ovvî limiti morfologici e fisiologici che nessun mendelista può disconoscere; ma ben lungi dal riguardare soltanto i caratteri varietali, essa appare luminosamente anche esaminando la distribuzione dei caratteri distintivi dei generi e delle famiglie.

Dato ciò, la rappresentazione sensibile dei rapporti tassonomici di un dato genere o di una data famiglia, non può più essere fatta con una linea o con un albero, ma – caso mai – con un reticolo le cui maglie si intersecherebbero variamente nello spazio in un modo che sarebbe concretamente determinabile soltanto per i gruppi più semplici. Da questo punto di vista la questione di sapere se *N. Langsdorffii* debba ascriversi a *Rustica* o a *Petunioides*, diventa senza senso: si può dire soltanto che questa specie rappresenta uno dei più caratteristici luoghi di intreccio in cui convergono gli elementi di *Rustica* e quelli di *Petunioides*. Così, per esempio, può anche

(1) Splendore, *Un nuovo elemento diagnostico delle Nicotianae.* « Bollettino tecnico di Scafati », 1904; e *Sinopsi dei semi del gen. Nicotiana.* « *Scafati* », *1906.*

intravedersi il meccanismo per il quale due specie possono mostrare spiccata affinità sessuale per una terza e non averne molta fra loro.

Da questo punto di vista non è più da meravigliarsi se per l'analisi di alcuni fenomeni particolari non esito ad ammettere che rispetto a *N. rustica* una specie generalmente collocata nella stessa sezione (*N. Langsdorffii*) possa ravvicinarsi ad una come *Petunia* che, non solo appartiene a genere diverso, ma viene generalmente collocata in una tribù diversa (Nicotianee o Cestroidee per *Nicotiana* e Salpiglossidee per *Petunia*).

In linea di fatto, il polline di *N. Langsdorffii* provoca nel gineceo di *N. rustica* alcune delle reazioni più caratteristiche delle impollinazioni molto eterogenee: una di queste consiste nella occasionale formazione di « semi giganti ».

II. - *I semi giganti.* — Ho detto nel mio precedente lavoro che, nelle impollinazioni con *Petunia* è un fenomeno affatto costante un lieve aumento generale nelle dimensioni di quei semi che riescono a svilupparsi con buona conformazione esterna, in confronto ai semi normali provenienti da fecondazione legittima. Darò qualche misura: in una stirpe di *N. rustica* v. *texana* i semi normali vanno da un massimo di mm. $1.17 \times 0.85 \times 0.85$, ad un minimo di mm. $0.85 \times 0.57 \times 0.65$; ma queste varianti estreme sono poco popolate, il maggior numero dei semi raccogliendosi intorno a mm. $1.06 \times 0.66 \times 0.76$. Tra i semi di buona conformazione ottenuti per impollinazione con *Petunia*, i più piccoli misurano mm. $0.93 \times 0.57 \times 0.65$, la maggior frequenza si raccoglie intorno a mm. $1.11 \times 0.69 \times 0.77$; quanto poi alle dimensioni massime, si osserva che alcuni pochi si staccano nettissimamente, in modo che se si facessero tante misure da poter costruire un poligono di variazione questo apparirebbe nel più dei casi duplice, o almeno con due vertici profondamente separati da una valle. Uno dei semi giganti dato da questa stirpe misurava mm. $1.54 \times 0.89 \times 0.98$, il che significa, in volume, *più del doppio del seme normale ottenibile per fecondazione propria.* Ma semi giganti grossissimi si ottengono anche per impollinazione con *N. Langsdorffii.* Per esempio: da *N. rustica* v. *brasilia* forma Erbasanta se ne ottenne un seme che misurava mm. $1.38 \times 0.93 \times 0.86$, il che significa anche qui quasi il doppio del corrispondente seme normale.

Che cosa contengono questi semi giganti? Talvolta sono affatto vuoti, più spesso contengono endosperma, spesso endosperma ed embrione; ma nei prodotti ottenuti con *N. Langsdorffii* molto spesso l'embrione presenta anomalie la cui più facile spiegazione risiede nel probabile concrescimento di due embrioni. La presenza di due embrioni in un sol seme è stata spesso spiegata con la fecondazione dell'oosfera da parte di uno spermio e di una sinergide da parte dell'altro spermio. Ma allora, si potrebbe obiettare, il nucleo secondario del sacco, rimanendo non fecondato, non dovrebbe svilupparsi: tale è il caso di *Najas major* illustrato dal Guignard. Qui invece la poliembrionia è accompagnata dalla presenza di un endosperma. Ma in

verità, questo fatto non può costituire una obiezione poichè in *Nicotiana* molto spesso l'endosperma si sviluppa apomitticamente anche in semi non embrionati; tanto più facilmente possiamo immaginare che si possa sviluppare, per effetto correlativo, in un seme in cui la presenza di due embrioni deve esercitare una eccitazione trofica notevolissima.

Sta di fatto che in qualcuno di questi semi giganti generati in *N. rustica* dal polline di *N. Langsdorffii* si è talvolta trovato un embrione normale e, accanto, un corpicciatolo che non poteva interpretarsi altrimenti che come un altro embrione molto deforme e arrestato nel suo sviluppo.

III. - *Poliendospermia.* — Un seme gigante ottenuto da impollinazione con *Petunia* ha iniziato una germinazione anomala perchè avveniva attraverso una lacerazione dorsale del tegumento, germinazione subito arrestatasi. Questo seme conteneva i seguenti corpi, nella valutazione delle cui dimensioni bisogna tener presente il naturale rigonfiamento avvenuto per imbibizione: 1° un corpicciuolo subrotondo con prolungamento conico, di mm. 0.42 di massimo diametro; 2° una grande massa globoide bianca di circa un millimetro di diametro; 3° un'altra grande massa bianca bilobata di millimetri 1.03 × 0.38.

Queste ultime due grandi masse sono a contorni ben delimitati e nettamente distinte l'una dall'altra. Il loro tessuto è perfettamente riconoscibile per la sua piena corrispondenza col tessuto ricco di riserve che spetterebbe all'albume normale. Non esito a dire che questo seme aveva due masse endospermiche distinte.

Può forsè supporsi che ciò derivi dalla mancata fusione dei due nuclei polari e dal loro indipendente sviluppo, legato, o non, alla fecondazione di uno di essi o di ambedue, applicando così a questo caso la ben nota ipotesi del Webber; possono escogitarsi altre spiegazioni: resta il fatto che in queste impollinazioni estranee i normali rapporti di sviluppo vengono alterati con una frequenza di gran lunga maggiore che non possa verificarsi nella fecondazione normale.

IV. - *L'affinità sessuale e la frequenza delle anomalie embrionali.* — Ciò non toglie che, come dicevo, sia una questione di *frequenza* e che, anche con queste impollinazioni, possano ottenersi embrioni normali: non si tratta dunque di una *patozigotia* inevitabile. Secondo me la cosa va spiegata così: la precisa orientazione di un gamete verso l'oosfera o verso il nucleo secondario del sacco, la esatta fusione in uno zigoto armonico, la precisa orientazione e successione dei piani di divisione dello zigoto, ecc., sono fatti regolati da forze che nella fecondazione legittima ed in quella illegittima hanno intensità molto diverse. L'oosfera che attrae e lo spermio che è attratto costituiscono un sistema di cui l'elemento ricevente e l'elemento trasmittente dei relativi stimoli non possono non essere in un certo stato di corrispondenza. Nello stimolo che agisce, il lato chimico o quello elettrico sono distinti per noi, ma nella natura connessi e bene armonizzati. Ora,

quando da una fecondazione normale passiamo ad una fra specie molto diverse, l'armonica rispondenza di questi stimoli vien meno, le forze orientatrici saranno necessariamente meno precise e più deboli, sopratutto meno attivi e meno precisi saranno quei processi e quei dispositivi di autoregolazione per cui nell'embrione normale si ripara rapidamente agli attentati esterni, tanto che qualcuno potè dire che « l'embrione è elastico, non plastico ». Allora, quelle perturbazioni che nel caso normale sarebbero state impotenti a deviare il corso dei processi, possono divenire qui sufficienti, e quindi è naturale che aumenti la frequenza degli effetti letali e l'efficacia delle cause teratogene.

A me non sembra neanche improbabile che in queste unioni eterogenee possano intervenire altresì fatti di iperfecondazione con successive scissioni, che possono condurre alla formazione di un numero irregolare di prodotti gemelli e mal differenziati come talvolta si trovano in questi semi giganti i quali dunque - una volta segnalati - meritano il più attento studio da parte dell'embriologo.

Embriologia vegetale. — *Fenomeni di aposporia somatica, di aposporia goniale e di embrionia avventizia in « Ochna multiflora »*. Nota preliminare [1] di E. Francini, presentata [2] dal Corrisp. E. Carano.

Ochna multiflora [3] per alcune interessanti particolarità del suo sviluppo apomittico, è degna di speciale attenzione: credo perciò conveniente anticipare in questa breve Nota i risultati più salienti delle mie ricerche.

In *Ochna multiflora* è possibile lo sviluppo di gametofiti femminei da cellule somatiche dello sporofito: è possibile raramente che qualche cellula dell'epidermide nucellare si accresca, si differenzi dalle cellule sue simili, invada la cavità nucellare, distruggendo la cellula madre delle megaspore degeneranti, sostituendosi ad essa e acquistando carattere di gametofito. È, in altri termini, possibile il fenomeno dell'*aposporia somatica*.

Ochna multiflora costituisce quindi fra le piante superiori il terzo esempio di aposporia somatica sicuramente accertata, dopo quello degli *Hieracium*

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Firenze.

(2) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(3) Il materiale fu tratto da una pianta dell'Orto Botanico di Firenze, che porta il nome di *Ochna multiflora D. C.* La stessa pianta è stata però dal Van Tieghem chiamata *Diporidium uniflorum V. T.* (Van Tieghem M. Ph., *Subdivision du genre Ochne et constitution actuelle de la tribu des Ochnées.* « Journal de Botanique », XVI[e] année, N. 4, pp. 113–128, Paris, 1902).

della sez. *Pilosella* scoperto da Rosenberg nel 1906 [1] e quello di *Artemisia nitida*, illustrato dal Chiarugi nel 1926 [2].

Ma è possibile anche che la cellula madre delle megaspore non degeneri, ma si accresca vacuolizzando lentamente il suo citoplasma e accrescendo il volume del suo nucleo: questo non passa, per quanto risulta finora, per uno stadio di sinapsi, onde si può dire che la cellula archisporiale non acquista neppure i caratteri di gonotoconte e diventa direttamente un gametofito germogliante. È, in altri termini, possibile in *Ochna multiflora* anche il fenomeno della *aposporia goniale*, molto più frequente del primo.

I due tipi di aposporia si trovano quindi in questa pianta fra loro associati, come lo sono in *Hieracium excellens* [3] e in *Artemisia nitida*.

Ma mentre in molte piante apomittiche l'aposporia goniale si attua per mezzo di complicati meccanismi citologici, particolarmente adattati alla graduale trasformazione della divisione riduzionale in una divisione equazionale, e alla graduale perdita da parte della cellula madre delle megaspore della natura di gonotoconte, in *Ochna multiflora* l'aposporia goniale si attua direttamente in quanto la cellula madre non acquista nemmeno temporaneamente l'aspetto di gonotoconte, non essendo mai accennato allo stadio di sinapsi. Possiamo dire quindi che il sottotipo *Antennaria alpina* del tipo *Antennaria* [4] viene attuato in *Ochna multiflora*, almeno per quanto risulta finora, in una maniera ancora più tipica di quello che non venga attuato in altre piante apomittiche, come ad es. nella stessa *Antennaria alpina*, nella quale Juel [5] ha messo in evidenza nei primi stadi un aspetto di sinapsi, e per la quale Rosenberg [6] recentemente suppone, in seguito alle ricerche sulla microsporogenesi di *Hieracium pseudoillyricum*, uno schema paragonabile a quello descritto per il sottotipo *Artemisia nitida*.

(1) Rosenberg O., *Ueber die Embryobildung in der Gattung Hieracium.* « Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft », Bd. XXIV, pp. 157-161, Taf. XI, Berlin, 1906.

Rosenberg O., *Cytological Studies on the Apogamy in Hieracium.* « Botanisk Tidsskrift », Bd. 28, H. 1, pp. 143-170, 2 Pl., Kobenhavn, 1907.

(2) Chiarugi A., *Fenomeni di aposporia e di apogamia in Artemisia nitida Bertol.* « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Cl. Sc. fis.-mat. nat., vol. III, Ser. 6ª, 1° sem., fasc. 5°, pp. 281-284, Roma, 1926.

Chiarugi A., *Aposporia e apogamia in Artemisia nidida Bertol.* « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. XXXIII, pp. 501-626, tavv. III-IX, Firenze, 1926.

(3) Rosenberg O., 1907, op. cit.

(4) Chiarugi A., *Il gametofito femmineo delle Angiospermae nei suoi vari tipi di costruzione e di sviluppo.* « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. XXXIV, pp. 5-133, Firenze, 1927; cfr. pp. 102-103, fig. 7.

(5) Juel O., *Vergleichende Untersuchungen über typische und parthenogenetische Fortpflanzung bei den Gattung Antennaria.* « Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar », Bd. 33, n. 5, pp. 1-59, 6 Taf., Stockholm, 1900.

(6) Rosenberg O., *Die semiheterotypische Teilung und ihre Bedeutung für die Enstehung Verdoppelter Chromosomenzahlen.* « Hereditas », Bd. VIII, pp. 305-338, 1926-27; cfr. p. 332.

Per la sua evoluzione direttamente diploidica, la cellula madre delle megaspore non si differenzia notabilmente dalle altre cellule somatiche. *Ochna multiflora* costituisce quindi un esempio molto bello per dimostrare che nelle piante la linea germinale si differenzia molto tardivamente e in maniera non sempre netta dalla linea somatica. È sopratutto un criterio di posizione quello che ci permette di riconoscere la cellula della linea germinale e ci rende sicuri del fenomeno dell'aposporia goniale, in quanto la specie possiede un archisporio unicellulare in una nucella del tipo tenuinucellato.

La sicurezza del fenomeno dell'aposporia somatica l'abbiamo quando assistiamo all'evoluzione di cellule ben differenziate dall'archisporio e di natura strettamente somatica, come lo sono le cellule dell'epidermide nucellare.

In *Ochna multiflora* l'evoluzione di tali cellule ricorda molto da vicino quella illustrata in *Hieracium aurantiacum* e in *Artemisia nitida*. La pianta in studio costituisce quindi un nuovo esempio che i due tipi di aposporia sono fra loro in stretto rapporto, e che fra di essi si può supporre un graduale passaggio.

Qualunque sia la sua origine, o per aposporia somatica, o per aposporia goniale, il gametofito femminile rimane lungo tempo allo stadio uninucleato in una fase di germinazione. È superfluo aggiungere che nella sua storia ontogenetica sono completamente soppresse le prime due divisioni dello sviluppo, come è convenzionalmente inteso. Il nucleo che trovasi nel centro del gametofito si divide per mezzo della divisione somatogenica e si polarizza. A tale stadio la polarizzazione può presentare qualche anomalia e qualche gametofito può degenerare. A compiuto sviluppo il gametofito possiede normalmente otto nuclei. Le sinergidi e l'oosfera hanno aspetto normale e così i nuclei polari; le tre antipodi assai grosse presentano un vacuolo assai notevole nella parte prospettante verso il micropilo e degenerano precocemente con cromatolisi dei loro nuclei.

È ovvio come ad un gametofito formatosi per un processo di aposporia non necessiti fecondazione; però uno sviluppo apogamico dell'embrione non sono riuscita ancora ad osservarlo. Fino a prova contraria, il gametofito aposporico di *Ochna multiflora* è incapace di dare origine ad un embrione, sia per un processo di apogamia goniale (ooapogamia) dall'oosfera diploide, sia per un processo di apogamia somatica dalle restanti cellule del gametofito. Il comportamento di *Ochna multiflora* a questo riguardo coincide quindi con quello di *Artemisia nitida*. Tuttavia, a differenza di quest'ultima, *Ochna multiflora* presenta una forte percentuale di semi fertili, e la ragione di questo, sta nel fatto che alcune cellule epidermiche del tegumento dell'ovulo, presso la regione micropilare, sono capaci di acquistare dimensioni maggiori delle altre, di sporgere nella cavità del gametofito e di proliferare, evolvendosi in embrioni avventizi, che vengono nutriti dall'albume prove-

niente dalle divisioni del nucleo secondario del gametofito diploide. In altri termini, la fertilità di *Ochna multiflora* è conseguenza, almeno da quello che mi risulta finora, di un fenomeno di *embrionia estrasaccale*. L'albume in un primo tempo ha aspetto nucleare, in seguito diviene cellulare; l'embrione, che può sporgere nel gametofito provenendo da direzioni diverse, si presenta assai tozzo con un sospensore assai largo e mal differenziato, con evidente tendenza in certi casi a proliferare lateralmente, accennando così ad una potenzialità di *poliembrionia*.

Accanto ai frutti contenenti semi fertili si trovano assai spesso impiantati sul grosso ricettacolo carnoso alcuni frutti più piccoli contenenti semi abortivi; in alcuni di essi si è potuto accertare che il canale micropilare è occupato da tessuto parenchimatico uniforme, sviluppatosi per proliferazione di cellule parenchimatiche della regione calazale al di sotto delle antipodi, dopo la degenerazione e il riassorbimento del gametofito, in cui non si è sviluppato l'embrione avventizio nella regione micropilare. Tali frutti sono partenocarpici.

Prima di terminare queste poche notizie preliminari su tale interessantissima pianta, devo aggiungere che il numero dei cromosomi, non ancora potuto determinare con sicurezza, è molto elevato, e ciò è in armonia con quello che è stato rilevato in moltissime altre piante apomittiche.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Palazzo fa omaggio di un suo opuscolo dal titolo: « Magnetometria applicata alle indagini di giacimenti minerari nel sottosuolo ».

L'Accademico Segretario prof. Parravano presenta i libri giunti in dono, segnalando il vol. XXIV dell' « Archivio Italiano di Anatomia e Embriologia »; il « Manuale di storia della Medicina » del prof. D. Barduzzi ed in particolar modo gli « Atti del II Congresso nazionale di chimica pura e applicata » che, tenutosi nel 1924 a Palermo per il centenario della nascita di Cannizzaro, riuscì una solenne adunata delle forze della chimica italiana. Propone che al Segretario generale dell'Associazione Italiana di Chimica prof. Marotta, a cui spetta il merito della redazione dei tre volumi degli « Atti del Congresso », l'Accademia invii una lettera di ringraziamento e di elogio.

L'Assemblea approva.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Severi legge, anche a nome del Socio Castelnuovo, la relazione con la quale si propone la stampa negli « Atti Accademici » della Memoria del dr. B. Segre « Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti ».

L'Assemblea approva.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 gennaio 1928

ALEXANDER C. P. — Undescribed Crane Flies from the Holarctic Region in the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXII). Washington, 1927. 8°, pp. 1-17.

ARCANGELI A. — Iposudi terrestri raccolti nell'Estremo Oriente dal prof. Filippo Silvestri. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX, pp. 211-269). Portici, 1927. 8°.

Archivio italiano di Anatomia e di Embriologia. Vol. XXIV. Firenze, 1927. 8°, pp. 1-793.

Atti del II Congresso Nazionale di Chimica pura ed applicata. Vol. I-III. Roma, 1927. 8°, pp. I-LXXII, 1-608, 609-1128, 1131-1646.

BORGIA G. — Le colonie marine e montane. La colonia marina di Manfredonia. Manfredonia, 1927. 8°, pp. 1-37.

FILENI E. — Il XIII Congresso Internazionale di Agricoltura, maggio-giugno 1927. (Estr. dal « Bollettino dell'Ente Nazionale delle Cattedre ambulanti di Agricoltura »). Roma, 1927. 8°, pp. 1-27.

JULIA G. — Cours de Cinématique. Paris, 1928. 8°, pp. 1-148.

LACROIX A. — La constitution lithalogique des îles volcaniques de la Polynésie Australe. (Extr. des « Mémoires de l'Académie des Sciences ». Tome LIX). Paris, 1927. 4°, pp. 1-82.

PALAZZO L. — Magnetometria applicata alle indagini di giacimenti minerari nel sottosuolo. (Estr. dalle « Memorie della Pont. Accademia delle Scienze (I Nuovi Lincei) ». Ser. II. Vol. X, pp. 271-308). Roma, 1927. 4°.

PENTON F. A. — New Parasitic Hymenoptera of the Subfamily Anteoninae from the Americas. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXII). Washington, 1927. 8°, pp. 1-16.

ROMEI E. — Contribuzione alla conoscenza di alcuni Lepidotteri della Tripolitania. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX, pp. 270-281). Portici, 1927. 8°.

SHAPLEY H. and WATERFIELD W. F. H. — The Photographic Study of Long Period Variable Stars. (Reprint. from « Popular Astronomy ». Vol. XXXV, n. 9). New Haven, 1927. 8°, pp. 1-5.

SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza dei *Polydesmidae* (Diplopada) dell'Africa Occidentale. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX, pp. 282-323). Portici, 1927. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 gennaio 1928 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sugl'integrali algebrici semplici e doppi.* Nota III [1] del Socio F. Severi.

8. Sia ora, in coordinate non omogenee, $f(x, y, z) = 0$ l'equazione di una superficie irriducibile, d'ordine m, dotata di singolarità ordinarie (linea doppia, ecc.) e situata genericamente rispetto agli assi. Suppongasi che sussista un'identità del tipo

$$(1) \qquad Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = Nf,$$

con A, B, C polinomi di grado $l \leq m - 2$ ed N polinomio del grado $l - 1$ (al più). Introdotte le coordinate omogenee x, y, z, t, cangiando in modo ovvio il significato dei simboli, la (1) dà:

$$(mA - xN) f'_x + (mB - yN) f'_y + (mC - zN) f'_z = tNf'_t .$$

Per $t = 0$ verrà identicamente (n. 7):

$$mA_0 - xN_0 = 0 \ , \ mB_0 - yN_0 = 0 \ , \ mC_0 - zN_0 = 0 ,$$

ove A_0, B_0, C_0 denotano i polinomi omogenei formati dal complesso dei termini di grado l dei polinomi A, B, C, quali figurano, in coordinate non omogenee, nella (1), ed N_0 è un polinomio omogeneo di grado $l - 1$, che

(1) Presentata nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

ha significato analogo rispetto ad N. Posto $N_0 = m\theta(x, y, z)$, in cui θ è un polinomio omogeneo di grado $l - 1$, risulta dunque:

$$A = x\theta + tA_1 \ , \ B = y\theta + tB_1 \ , \ C = z\theta + tC_1 \ , \ N = m\theta + tN_1 \ ,$$

o in coordinate non omogenee:

$$(11)\ A = x\theta + A_1 \ , \ B = y\theta + B_1 \ , \ C = z\theta + C_1 \ , \ N = m\theta + N_1 \ ,$$

le A_1, B_1, C_1 essendo di grado $l - 1$ (al più) ed N_1 di grado $l - 2$ (al più).

Si osserverà inoltre che la superficie $A = 0$ passa pel gruppo jacobiano del fascio $x = \text{cost.}$, perchè nei punti di questo gruppo si annullano f, f_y', f_z' e non f_x'. Analoghe conclusioni nei riguardi di $B = 0$, $C = 0$.

Dunque:

Tre superficie $A = 0, B = 0, C = 0$, *d'ordine* $l \leq m - 2$, *soddisfacenti a un'identità del tipo* (1), *godono, per questo solo fatto, della proprietà di passare rispettivamente per le rette all'infinito dei fasci* $x = \text{cost.}, y = \text{cost.}, z = \text{cost.}$, *e pei gruppi jacobiani di questi fasci, nonchè di segare ulteriormente il piano all'infinito lungo la medesima curva.*

9. Premesse queste osservazioni, veniamo a considerare una superficie $A = 0$ d'ordine $m - 2$, aggiunta ad f, alla quale aggiunta prescriviamo soltanto di passare pei punti del gruppo jacobiano J del fascio $x = \text{cost.}$, che sono i punti comuni ad $f = 0, f_y' = 0, f_z' = 0$, fuori della linea doppia. Sappiamo che un'aggiunta siffatta esiste di certo, quando la superficie è irregolare; ma non è escluso che esista anche se la superficie è regolare.

Si possono determinare due aggiunte B, C, d'ordine $m - 2$, da associarsi ad A, in guisa da soddisfare alla (1)? Si osservi all'uopo che i gruppi jacobiani J, J_1 dei fasci $x = \text{cost.}, y = \text{cost.}$ sono le sezioni di Γ_z, fuori della linea doppia, colle superficie $f_y' = 0$, $f_x' = 0$. Pertanto i gruppi J, J_1 sono equivalenti su Γ_z. E siccome le aggiunte d'ordine $m - 2$ segano su Γ_z, fuori della linea doppia, una serie lineare completa (n. 6), quelle che passano per J segano la stessa serie lineare (completa) di quelle che passano per J_1; cioè ad ogni $A = 0$, che passi per J, è associata una (ed una sola!) aggiunta $B = 0$, d'ordine $m - 2$, passante per J_1, la quale incontra Γ_z, fuori di J, e della linea doppia, nello stesso gruppo di punti in cui Γ_z è incontrata, fuori di J e della linea doppia, da $A = 0$. Le superficie $Af_x' = 0$, $Bf_y' = 0$ segano dunque su Γ_z, complessivamente, lo stesso gruppo di punti; epperò la funzione razionale $\frac{Af_x'}{Bf_y'}$ è costante su Γ_z, ovvero su Γ_z è $Af_x' - \lambda Bf_y' = 0$, con λ costante. Inglobando $-\lambda$ nel polinomio B, si ottiene la superficie $Af_x' + Bf_y' = 0$, che passa per Γ_z. E siccome questa superficie passa anche doppiamente per la linea doppia di f, a norma del teorema

fondamentale di Nöther, $Af'_x + Bf'_y$ sarà una combinazione lineare di f_x, f; cioè varrà un'identità del tipo (1), ove la C risulta manifestamente un'aggiunta d'ordine $m-2$ (al più), passante pel gruppo jacobiano del fascio $z = \text{cost}$. La superficie $C = 0$ è individuata, perchè dalla $Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = N'f$, confrontata colla (1), si trae:

$$(C - C')\, f'_z = (N - N')\, f,$$

il che importa $C = C', N = N'$, se no f dovrebbe dividere uno dei due fattori del 1° membro, che sono entrambi di grado $< m$. Si conclude:

Conoscendosi una superficie A, *d'ordine* $m-2$, *aggiunta ad* f, *alla quale sia imposta la sola condizione di passare pel gruppo jacobiano del fascio* $x = \text{cost.}$, *ad essa restano associate due aggiunte d'ordine* $m-2$, *ben determinate*, B, C, *legate ad* A *da un'identità del tipo* (1). *Le tre aggiunte sono in condizione simmetrica: una qualunque di esse determina in modo univoco le altre due.*

È superfluo avvertire che ciò che è individuata, da una qualunque delle A, B, C, è la terna delle superficie, non i polinomi A, B, C, i quali sono determinati a meno d'una costante moltiplicativa. Chiameremo *associate* tre aggiunte d'ordine $m-2$ nelle condizioni del teorema precedente.

10. Poichè tre aggiunte associate soddisfano altresì al teorema del n. 8 e d'altronde (n. 9) ogni aggiunta d'ordine $m-2$ passante pel gruppo jacobiano di $x = \text{cost.}$ appartiene a una terna di aggiunte associate, possiamo affermare che:

Ogni superficie aggiunta d'ordine $m-2$ *passante pel gruppo jacobiano del fascio* $x = \text{cost.}$, *contiene in conseguenza la retta all'infinito del fascio.*

Sotto forma invariantiva:

Le curve $C + C'$ *che passano pel gruppo jacobiano d'un fascio lineare* $|C|$, *contengono in conseguenza il gruppo base del fascio.*

Risultato che resta acquisito soltanto per i fasci $|C|$ tolti da sistemi lineari le cui imagini proiettive sono superficie birazionalmente equivalenti ad f, dotate di singolarità ordinarie. Esso va ravvicinato al risultato parziale del n. 4, che valeva invece sotto ipotesi più generali.

Osservazione. – Il procedimento svolto nel n. 9 è applicabile senza cangiamenti, se l'aggiunta $A = 0$, da cui si parte, è di ordine $m-3$ (o $m-4$, ecc.) e passa pel gruppo jacobiano del fascio $x = \text{cost}$. Ad A restano associate due aggiunte B, C, dello stesso ordine, soddisfacenti alla (1) e passanti perciò pei gruppi jacobiani dei fasci $y = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$ e per le rette all'infinito dei fasci stessi, come la A viene in conseguenza a passare per la retta all'infinito di $x = \text{cost}$. Insomma:

Ogni superficie d'ordine $m-2-\delta$ $(\delta \geqq 0)$, *aggiunta ad* f, *passante pel gruppo jacobiano del fascio* $x = \text{cost.}$, *contiene in conseguenza la retta all'infinito di questo.*

Sotto forma invariantiva, per $\delta = 1$, si ottiene di nuovo il risultato del n. 4.

11. Cerchiamo di determinare la forma del polinomio N, che figura nella (1), supposto che le A, B, C sieno aggiunte d'ordine $m-2$.

Considero all'uopo la funzione razionale di x, y, z:

$$\Phi = \frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_z'}\right). \tag{12}$$

Sviluppando viene:

$$\Phi = \frac{1}{f_z'^2}\left[f_z''(A_x' + B_y') - f_z'(Af_{zz}'' + A_z'f_x' + Bf_{zy}'' + B_z'f_y') + f_{zz}''(Af_x' + Bf_y')\right], \tag{13}$$

dalla quale, ricordata la (1) e l'identità:

$$Af_{zx}'' + A_z'f_x' + Bf_{zy}'' + B_z'f_y' = \frac{\partial}{\partial z}\left(Af_x' + Bf_y'\right),$$

segue:

$$\Phi = \frac{1}{f_z'^2}\left[f_z'^2(A_x' + B_y' + C_z' - N) + f(Nf_{zz}'' - f_z'N_z')\right]. \tag{14}$$

Sicchè, *sopra* f, è

$$\Phi = \frac{A_x' + B_y' + C_z' - N}{f_z'}. \tag{15}$$

Ora $\frac{A}{f_z'}$, $\frac{B}{f_z'}$ sono funzioni olomorfe di x, y in ciascuno dei due intorni di un punto generico della linea doppia; e tali quindi sono le loro derivate [1]. Perciò Φ, in base alla (12) che la definisce, è olomorfa in ogni intorno di un punto generico della linea doppia.

Posto

$$Q = A_x' + B_y' + C_z' - N, \tag{16}$$

dovrà dunque $Q = 0$ essere una superficie aggiunta ad f; altrimenti, per la (15), Φ sarebbe infinita in ogni intorno di un punto generico della linea doppia.

(1) Nella mia ricerca sull'interpretazione geometrica della condizione d'integrabilità ho avuto occasione di determinare le curve di livello zero e infinito della $\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right)$ [e similmente della $\frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_z'}\right)$]. Si trova agevolmente che le curve zero sono la curva all'infinito di f (che è una curva zero doppia) e la curva dei contatti dei fasci $\frac{A}{f_z'} = \text{cost.}$, $x = \text{cost.}$; la curva polare è la Γ_z, contata 3 volte.

La superficie Q risulta *a priori* di ordine $m-3$. Ma è ormai facile verificare che, nel fatto, essa è di ordine $m-4$ (al più). Invero, dalle (11) ricavasi

$$A'_x = \theta + x\theta'_x + \frac{\partial A_1}{\partial x}, \quad B'_y = \theta + y\theta'_y + \frac{\partial B_1}{\partial y}, \quad C'_z = \theta + z\theta'_z + \frac{\partial C_1}{\partial z},$$

onde:

$$A'_x + B'_y + C'_z = m\theta + \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z},$$

cioè, tenuta presente l'ultima delle (11):

$$Q = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z} - N_1,$$

la quale prova che Q è d'ordine $m-4$.

Attesa la simmetria dell'identità (1), rispetto alle x, y, z e alle A, B, C, se invece di muovere dalla funzione (12), si parte dalla

$$\Psi = \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f'_x}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{C}{f'_x}\right),$$

si trova similmente, sopra f, $\Psi = \frac{Q}{f'_x}$. E analogamente, con un'ulteriore circolazione delle lettere. Concludiamo che:

Il polinomio N, *che figura nel legame* (1) *fra tre aggiunte associate* A, B, C *di ordine* $m-2$, *ha la forma*:

$$N = A'_x + B'_y + C'_z - Q,$$

ove Q *è un'aggiunta d'ordine* $m-4$. *Sopra la superficie, valgono inoltre le relazioni*:

$$(17)\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f'_z}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f'_z}\right) = \frac{Q}{f'_z}, \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f'_x}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{C}{f'_x}\right) = \frac{Q}{f'_x},$$
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{C}{f'_y}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{A}{f'_y}\right) = \frac{Q}{f'_y}.$$

Osservazione. - La (1), tenuto conto della (16), può scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{f}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{f}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{f}\right) + \frac{Q}{f} = 0,$$

il che fa intravedere legami colla teoria degl'integrali doppi di funzioni razionali, delle tre variabili indipendenti x, y, z.

12. Supposta soddistatta la (1), nell'espressione differenziale $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$ passiamo dalle variabili x, y alle y, z. Verrà:

$$\frac{A dy - B dx}{f'_z} = \frac{A f'_x + B f'_y}{f'_x f'_z} dy + \frac{B}{f'_x} dz = \frac{B dz - C dy}{f'_x} .$$

E similmente, passando dalle variabili y, z alle z, x, avremo:

$$\frac{A dy - B dx}{f'_z} = \frac{B dz - C dy}{f'_x} = \frac{C dx - A dz}{f'_y} .$$

Sicchè queste espressioni differenziali potranno considerarsi subordinate su f dallo pfaffiano, nelle tre variabili indipendenti x, y, z, $R dx + S dy + T dz$, ove $R = \frac{1}{3}\left(\frac{C}{f'_y} - \frac{B}{f'_z}\right)$, $S = \frac{1}{3}\left(\frac{A}{f'_z} - \frac{C}{f'_x}\right)$

$$T = \frac{1}{3}\left(\frac{B}{f'_x} - \frac{A}{f'_y}\right) .$$

Pertanto *gl'integrali*

$$(18)\quad L_1 = \int \frac{A dy - B dx}{f'_z} , \quad L_2 = \int \frac{B dz - C dy}{f'_x} , \quad L_3 = \int \frac{C dx - A dz}{f'_y} ,$$

avranno valori uguali lungo un ciclo lineare qualsiasi σ *di* f.

L'integrale di una qualunque delle predette espressioni differenziali si chiamerà, come ho già detto, un *integrale di differenziale semiesatto di 1ª specie*. Di 1ª specie, per la ragione che vedremo di seguito.

13. Fissiamo ora l'attenzione sull'integrale doppio di 1ª specie

$$(19)\qquad I = \iint \frac{Q}{f'_z} dx dy .$$

È un integrale senza periodi. Questo risulta senz'altro dall'analisi svolta a p. 364 del t. II del Trattato di Picard et Simart, perchè l'integrale che si considera, in virtù della prima delle (17), ha già quella speciale forma, che permette la deduzione ivi contenuta; la quale si riferisce, è vero, al caso di una superficie col numero base 1, ma ha valore generale per gl'integrali aventi quella forma.

Ne segue che il valore di I sopra una superficie qualunque (continua, bilatera) avente per contorno σ, non dipende che dal contorno. L'integrale I è un funzionale uniforme e dovunque finito di linea!

Viceversa, se (19) è un integrale doppio di 1ª specie senza periodi, esistono [1] tre aggiunte A , B , C d'ordine $m - 2$, legate all'aggiunta Q d'or-

(1) Cfr. LEFSCHETZ, « American Math. Society », t. 22, n. 3, 1921, pp. 349-50.

dine $m-4$, dalle relazioni (1), (16), epperò I è associato ad un integrale semiesatto del tipo (18). Questa terna di aggiunte associate non è però individuata. Invero, se $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ sono tre aggiunte associate d'ordine $m-2$, relative ad un integrale semplice picardiano di 1ª specie, sicchè abbiano luogo le identità:

$$\bar{A}f'_x + \bar{B}f'_y + \bar{C}f'_z = \bar{N}f \quad , \quad \bar{A}'_x + \bar{B}'_y + \bar{C}'_z = \bar{N} \ ,$$

le aggiunte d'ordine $m-2$, $\mathfrak{A} = A - \lambda\bar{A}$, $\mathfrak{B} = B - \lambda\bar{B}$, $\mathfrak{C} = C - \lambda\bar{C}$, con λ parametro arbitrario, sono ancora associate, e soddisfanno alle

$$\mathfrak{A}f'_x - \mathfrak{B}f'_y + \mathfrak{C}f'_z = \mathfrak{N}f \quad , \quad \mathfrak{N} = N - \lambda\bar{N} = \mathfrak{A}'_x + \mathfrak{B}'_y + \mathfrak{C}'_z - Q \ ,$$

e quindi l'integrale semiesatto ad esse relativo dà luogo ancora all'integrale doppio I. L'osservazione si può manifestamente invertire. Dunque:

Ad ogni integrale semiesatto di 1ª specie corrisponde un integrale doppio di 1ª specie senza periodi; ad ogni tale integrale doppio corrisponde un sistema lineare ∞^1 d'integrali semiesatti.

14. Sia Δ una superficie, avente per contorno σ, sulla riemanniana V di f. Se Δ non incontra la superficie di Riemann Z, che corrisponde in V alla curva Γ_z (comune a $f=0$, $f'_z=0$, fuori della linea doppia), scegliendo una faccia opportuna di Δ, dopo aver fissato un verso determinato su σ, le funzioni $\frac{A}{f'_z}$, $\frac{B}{f'_z}$ risultano olomorfe in Δ, e, in forza della formula di Green [1], si ha:

$$(20) \quad \iint_{\Delta} \frac{A}{f'_z}\,dx\,dy = \iint_{\Delta} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f'_z}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f'_z}\right)\right] dx\,dy = \int_{\sigma} \frac{A\,dy - B\,dx}{f'_z} \ .$$

Sicchè, anche se Δ incontra le superficie di Riemann X, Y, corrispon-

(1) Per l'estensione di tale formula al campo complesso vedi la Nota di NALLI e ANDREOLI in questi «Rendiconti», 1927, 2° sem., p. 92. La definizione che ivi si dà dell'integrale doppio di una funzione di due variabili complesse, per quanto formalmente diversa e di più larga portata, si riduce, nel caso delle funzioni analitiche, a quella di Poincaré (cfr. le formule alla fine della precedente Nota di NALLI e ANDREOLI, 1927, 1° sem., p. 966, con quelle contenute a p. 50 del vol. I del *Trattato* di PICARD e SIMART). L'identità sostanziale delle due definizioni legittima l'applicazione della formula di Green a integrali doppi, che, come nel caso nostro, sono definiti al modo di Poincaré. In verità quella formula, dai predetti autori, è stabilita nel caso di funzioni uniformi di x, y. Ma ci si riduce subito a questo caso, rappresentando la riemanniana V nello S_4 m-plo (x, y), e tenendo conto che Δ non contiene punti di diramazione.

denti in V alle sezioni Γ_x, Γ_y di $f = 0$ con $f'_x = 0, f'_y = 0$, fuori della linea doppia, poichè

$$(21) \qquad \iint_{\Delta} \frac{Q}{f'_z}\, dx\,dy = \iint_{\Delta} \frac{Q}{f'_x}\, dy\,dz = \iint_{\Delta} \frac{Q}{f'_y}\, dz\,dx \quad ,$$

e inoltre gl'integrali (18) hanno gli stessi valori al ciclo σ, il loro valore comune potrà esprimersi con uno qualunque degl'integrali (21).

Dunque il valore (21) è espresso dal valore (18), sempre che Δ non incontri una almeno delle X, Y, Z. E, trattandosi di un integrale doppio di 1ª specie, il risultato vale anche se la superficie Δ contiene qualche punto all'infinito, perchè una trasformazione omografica la riduca a una superficie finita. Ne segue che *l'integrale* (18) *si annulla lungo un ciclo lineare* σ, *di una curva algebrica qualunque* D *di* f, *il quale sia omologo a zero sopra la curva*. Invero, per deformazione continua su D (con che non s'altera il valore (18)), il ciclo σ può ridursi al contorno di un piccolissimo disco Δ della riemanniana D. Se D non passa per alcun punto cuspidale, restringendo abbastanza il disco Δ, si potrà evitare ch'esso incontri una almeno delle X, Y, Z; e il valore (18) risulterà uguale al valore (21), cioè a zero[1].

Se D contiene un punto cuspidale P e Δ è un dischetto di D contenente P, potremo condurre per σ una piccola superficie Δ' contornata da σ e non incontrante X, Y, Z. Il valore (21) risulterà uguale (n. 13) al valore dell'integrale I sopra Δ', epperò al valore dell'integrale (18) lungo σ.

Così concludesi, anche in tal caso, che l'integrale (18) è nullo lungo σ.

Osservazione. – Se il contorno σ non passa per alcuno dei punti comuni X, Y, Z a due a due, si può deformar di poco Δ, lasciando fisso σ [con che non s'altera il valore (21)] in modo che Δ non passi per nessuno di quei punti, se pure prima ci passava. Allora Δ potrà spezzarsi in un numero finito di parti ciascuna delle quali o non incontra Z o incontra la sola Z. Per ciascuna di queste parti varrà l'uguaglianza fra i valori (21) e (18), onde varrà anche per l'intera Δ.

Se σ passa per qualcuno di quei punti, si assumerà a curva di diramazione la jacobiana di una rete generica, la qual jacobiana non incontri σ, e si concluderà come sopra, tosto che avremo provato, come faremo nel n. 16, l'invarianza degl'integrali (18) per trasformazioni birazionali. (Gl'integrali (21) lo sono evidentemente). Dunque *la formula di Green* (20) *vale incondizionatamente, cioè il valore dell'integrale doppio* (21), *sopra una qualunque superficie, è uguale al valore dell'integrale semiesatto* (18) *al contorno.*

(1) Un integrale doppio di 1ª specie è identicamente nullo sopra ogni ciclo algebrico a due dimensioni (Lefschetz). La proposizione (di cui il Lefschetz ha dimostrato l'inversa, ben più riposta e notevole) si può stabilire trasformando birazionalmente f in guisa che la curva data si muti in una situata in un piano $x =$ cost.; il che è possibile in infiniti modi.

Matematica. — *Sul rotore dei tensori.* Nota del Corrispondente. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sopra i solfuri di molibdeno.* II. *Equilibrio di riduzione del bisolfuro di molibdeno a mezzo dell'idrogeno.* Nota [1] del Socio N. Parravano e di G. Malquori [2].

Van den Pfordten [3] prima e più tardi Guichard [4] hanno messo in evidenza che il bisolfuro di molibdeno può ridursi a metallo per riscaldamento in corrente d'idrogeno, mentre Moissan [5] ha riottenuto il bisolfuro facendo agire a 1200° idrogeno solforato su molibdeno.

La riduzione di MoS_2 con idrogeno:

$$MoS_2 + 2H_2 = 2H_2S + Mo$$

è quindi una reazione invertibile e ad essa corrisponde ad ogni temperatura un rapporto costante $\frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$.

Gli equilibri si stabiliscono con velocità molto maggiore partendo da solfuro e idrogeno anzichè da metallo e acido solfidrico, e perciò per le nostre misure ci siamo sempre serviti della reazione di riduzione. I risultati così ottenuti sono stati controllati con la reazione inversa tutte le volte che questa si è prestata all'esperienza.

Lo studio dell'equilibrio di riduzione è stato condotto con un metodo dinamico analogo a quello di cui si è servito Jellinek [6].

Si faceva passare una corrente d'idrogeno a velocità nota e costante sopra il solfuro contenuto in una navicella posta al centro di un tubo di porcellana riscaldato. Si formava così un miscuglio di acido solfidrico e idrogeno nel quale si dosava il primo assorbendolo con KOH N/5 e dosandolo iodometricamente, e si misurava direttamente il volume del secondo raccogliendolo su bagno di acqua.

(1) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(3) « Berichte », 17, 731 (1885).
(4) « Ann. Chim. Phys. », [7], 23, 550 (1901).
(5) « Bull. Soc. Chim. », [3], 13, 969 (1895).
(6) « Zeit. anorg. Ch. », 142, 1 (1925).

La velocità della corrente gassosa era misurata da un velocimetro a tubo capillare interposto fra l'apparecchio di produzione dell'idrogeno e la camera di reazione (fig. 1).

Il volume di questa era stato notevolmente ridotto con canne di porcellana.

Abbiamo impiegato molibdenite sarda molto pura (0.6 °/₀ di Fe e 0.4 °/₀ di Si). L'idrogeno è stato prodotto con zinco e acido solforico e purificato attraverso permanganato in soluzione alcalina, acetato di piombo, nitrato di argento, rame arroventato ed infine è stato seccato su anidride fosforica.

Per una stessa temperatura è stato determinato il rapporto $\frac{V_{H_2}}{V_{H_2S}} = \frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$ con diverse velocità della corrente gassosa. Il valore limite di questo rapporto è stato ricavato per estrapolazione grafica. I valori ottenuti sono riportati nella tabella seguente:

Tabella I.

t°	Velocità della corrente gassosa in litri-ora	$\frac{V_{H_2S}}{V_{H_2}}$
805°	2	0.003439
»	1.21	0.00487
»	0.40	0.00561
		0.005835 valore estrapolato
910°	1,25	0.006935
»	1.15	0.007359
»	0.27	0.008415
		0.008750 valore estrapolato
1005°	1	0.008833
»	0.88	0.01015
»	0.75	0.01159
»	0.52	0.01213
		0.01373 valore estrapolato
* 1100°	1.66	0.01646
* »	1.40	0.01698
* »	0.29	0.01905
		0.01913 valore estrapolato

Il corpo di fondo si mantiene solido a tutte le temperature alle quali si è sperimentato, e risulta sempre costituito, come vedremo, di due fasi.

Le esperienze contrassegnate con asterisco sono state controllate raggiungendo l'equilibrio con la reazione inversa, e cioè facendo agire idrogeno solforato sul metallo.

Conosciuti i valori limiti di $\frac{V_{H_2S}}{V_{H_2}}$ alle temperature studiate, è possibile risalire alle tensioni del bisolfuro del molibdeno, servendosi delle costanti di dissociazione K dell'acido solfidrico a quella temperatura [1].

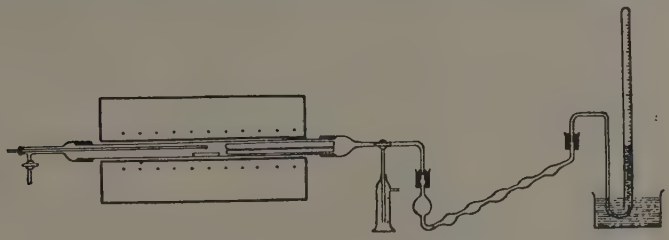


Fig. 1.

Dette tensioni infatti si ricavano dall'espressione:

$$\log P_{S_2} = 2 \log \frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}} + \log K .$$

Nella tabella che segue sono riportati i valori di $\log \frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$ e i corrispondenti di $\log P_{S_2}$ per le temperature sperimentate.

Tabella II.

t°	$\log \frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$	$\log P_{S_2}$	Q
805°	— 2.235	— 7.620	77400 cal.
910°	— 2.059	— 6.463	79200 »
1005°	— 1.863	— 5.453	80000 »
1100°	— 1.319	— 4.629	81100 »
			Media 79425 »

Introducendo i valori di $\log P_{S_2}$ così determinati nella formula approssimata di Nernst, si ricavano i valori di Q riportati nell'ultima colonna.

(1) Preuner e Schupp, « Zeit. Phys. Chem. », *68*; 157 (1909); Randall e Bichowsky, « J. Am. Chem. Soc. », *40*; 368 (1918).

Servendosi invece dell'equazione dell'isocora si hanno i seguenti valori per le tonalità della reazione:

805°– 910°	Q	= — 20.000 cal.
910°–1005°	Q	= — 28.000 »
1005°–1100°	Q	= — 24.000 »

Per stabilire la monovarianza del sistema abbiamo studiato la riduzione isotermica alla temperatura di 1100°. Si faceva passare sopra il solfuro un volume noto d'idrogeno a velocità costante, e a determinati intervalli di tempo si prelevava un campione del miscuglio passato e si stabiliva il rapporto $\frac{V_{H_2S}}{V_{H_2}}$.

I risultati sono riprodotti nella tabella.

TABELLA III.

MoS_2 gr. 2; zolfo nel solfuro gr. 0.80.

gr. di zolfo sottratto al corpo di fondo	Velocità della corrente gassosa in litri-ora	$\frac{V_{H_2S}}{V_{H_2}}$
0.15	1.40	0.01698
0.19	»	0.01673
0.25	»	0.01679
0.50	»	0.01659
0.57	»	0.01598
0.65	»	0.01639
0.73	»	0.01652
0.75	»	0.00933
0.77	»	0.00021
0.80	»	0

La costanza dei valori ottenuti conferma che sono sempre presenti due solidi.

Farmacologia. — *Ricerche farmacologiche col permanganato di sodio per iniezioni endovenose.* Nota [1] del Socio L. Sabbatani.

Studiando l'azione farmacologica dei permanganati [2], ho dovuto cercare anche quale è l'effetto che il permanganato di sodio produce, quando è iniettato direttamente nelle vene dei comuni animali d'esperimento.

Appena entra in circolo, agisce simultaneamente sul plasma sanguigno, sugli elementi istologici del sangue, e sull'endotelio dei vasi, ma la parte maggiore si fissa sui globuli rossi; e mentre esaurisce su di essi il suo potere ossidante, provoca immediatamente una emolisi intensa, emoglobinemia, emoglobinuria ed anemia, che entro certi limiti sono proporzionali alla dose iniettata.

Contemporaneamente il permanganato si riduce a biossido di manganese, che per l'ambiente in cui si forma resta colloidale.

L'azione del permanganato di sodio iniettato nelle vene in un primo tempo si limita quindi ad un effetto locale sul sangue, e mentre questo reagisce col permanganato e lo riduce, fa da antidoto ad esso ed impedisce che come tale possa diffondere ai tessuti ed agli organi e dare quella che sarebbe l'azione generale del permanganato.

Se la dose è piccola, gli animali sopravvivono benissimo, perchè la lesione ematica è lieve, e perchè è anche piccola la quantità di biossido di manganese che si forma, insufficiente esso pure a dare un'azione generale apprezzabile.

Se la dose di permanganato iniettata è grande, mentre l'azione locale distruttiva sui globuli rossi è più grande, si forma contemporaneamente una grande quantità di biossido di manganese colloidale, ed all'azione locale sul sangue, prodotta dal permanganato, segue un'azione generale da biossido di manganese colloidale.

Quando in fine s'arriva alla dose minima letale di permanganato, la lesione sul sangue è molto forte, ma per se stessa non sarebbe ancora causa sufficiente della morte, la quale va ricercata allora nell'azione tossica generale del biossido di manganese.

(1) Presentata nella seduta del 6 novembre 1927.

(2) Sabbatani L., I. *Fattori chimici che intervengono nell'azione farmacologica del permanganato di potassio.* « Riforma Medica », anno XXXVI, n. 32, 1920; II. *Osservazioni farmacologiche sul permanganato di potassio.* « Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova ». vol. XXXVI, 27 giugno 1920; III. *Osservazioni sui globuli rossi trattati col permanganato di potassio.* « Haematologica », I, 1920, 485-507; IV. *Saggi di fossilizzazione sperimentale.* « Bollettino della Società Geologica Italiana », XXXIX, 1920, 317-323.

Da ciò risulta che, dopo il primo momento, l'azione farmacologica del permanganato di sodio iniettato nelle vene si identifica coll'azione generale del biossido di manganese. Da esperienze parallele ho visto in fatti che la dose minima letale del permanganato di sodio ($NaMnO_4$) e del biossido di maganese (MnO_2) è per chilogrammo di coniglio e per iniezione endovenosa la stessa, di g.-mol. 0.00023.

L'azione locale del permanganato si svolge rapidissima, quasi immediata. L'azione generale del biossido di manganese colloidale che resta si svolge invece lentamente e tardiva, perchè, come avviene di tutti i colloidi minerali, quando non floculino subito a contatto del sangue e non siano quindi letali per azioni meccaniche sul circolo sanguigno, finchè sono e restano colloidali sono farmacologicamente inattivi [1], e dànno poi un'azione generale solo quando a poco a poco dalla forma insolubile passano a forme solubili, ionizzabili, chimicamente e farmacologicamente attive.

Per questo, come l'azione del permanganato dopo il primo momento si identifica con quella del biossido di manganese colloidale, così in ultimo l'azione di questo si identifica con quella dei prodotti di riduzione ulteriore che si formano nell'organismo dal biossido di manganese:

$$NaMnO_4 \longrightarrow MnO_2 \longrightarrow MnO$$

e questo è oggetto di ulteriori ricerche, che sto facendo attualmente.

L'azione emolitica in vitro del permanganato è confermata da facili esperienze, ma si mette bene in evidenza solo quando si adoperino quantità molto piccole di permanganato; adoperandone quantità rilevanti, invece dell'azione emolitica si ha una mineralizzazione dei globuli rossi [2].

In *un globulo rosso* lavato di coniglio si ha:

emolisi	con g.-mol	7.9×10^{-16}
mineralizzazione completa	» »	3540×10^{-16}

(1) Questo è un fatto che risulta dimostrato da tutti i lavori che si sono eseguiti sui colloidi minerali nell' Istituto di Farmacologia di Padova dal 1914 in poi.

(2) « Bollettino della Società Geologica Italiana « Haematologica », luoghi citati.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve piane in un punto di flesso.* Nota di G. Palozzi, presentata [1] dal Socio G. Castelnuovo.

1. C. Segre, in una Nota dell'Accademia dei Lincei del 1897 [2], ha dimostrato che due curve piane C e $\bar{C}$, aventi in un punto O la stessa tangente ed un contatto d'ordine ugualmente elevato con questa, posseggono sempre un invariante proiettivo, chiamato [3] *invariante di Segre*. Precisamente, se $y = ax^n + \cdots$, $y = \bar{a}x^n + \cdots$ $(n \geq 1)$ sono gli sviluppi, in un intorno di O, della $y(x)$ definita su C e $\bar{C}$, quest'invariante vale $a/\bar{a}$; e, se r è una retta prossima ad O che seghi, in vicinanza di O, le curve C, $\bar{C}$ e la tangente comune t nei punti P, $\bar{P}$, T e se M è un qualunque punto di r distinto dai precedenti, il valore limite di D = (P$\bar{P}$TM), quando si faccia tendere r a passare per O, con legge arbitraria (purchè la posizione limite di r sia diversa da t) e quando si faccia variare M su r, sempre con legge arbitraria (purchè la posizione limite di M, sulla posizione limite di r, sia diversa da O), è indipendente tanto dalla posizione limite di r che di M ed eguaglia il rapporto $a/\bar{a}$.

Recentemente, E. Bompiani [4] ha ripreso la questione nell'ipotesi che O sia un punto ordinario per C e $\bar{C}$ ed ha dimostrato, esaminando nello sviluppo di D (in funzione del parametro in dipendenza del quale si fanno variare r ed M) i termini seguenti quello noto, che, se il contatto fra C e $\bar{C}$ è del 1° ordine, esistono una *retta* per O e, su questa, un *punto invarianti* [5], dipendenti dagli intorni del 3° e 4° ordine di O su C e $\bar{C}$, e che, se il contatto è d'ordine $n > 1$, gli intorni d'ordine $n + 1$ determinano un *invariante infinitesimo* [6] e quelli d'ordine $n + 2$ una *retta invariante*. L'importanza di questi risultati sta in ciò che, scegliendo opportunamente la curva $\bar{C}$, essi forniscono, per via puramente geometrica, gli elementi (*arco e curvatura proiettivi*) necessari per lo studio proiettivo della curva C (supposta priva di singolarità).

(1) Nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

(2) *Su alcuni punti irregolari delle curve algebriche, ecc.* Ser. V, vol. VI.

(3) Da E. Bompiani nella Nota: *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane.* «Rendiconti Lincei», Ser. V, vol. III, 1926.

(4) Loc. cit.

(5) Dicendo *invariante* sottintendo sempre *per collineazioni*.

(6) Che chiamerò *invariante di Bompiani*.

La presente Nota è dedicata, per la massima parte, all'analisi del birapporto D, nel caso in cui O sia un punto di flesso per entrambe le curve C e $\bar{C}$ o per una di esse soltanto; i risultati ottenuti in quest'analisi vengono poi applicati allo studio proiettivo dell'intorno di un punto di flesso di una curva piana [1] e a quello sul contatto di due superficie.

2. – Le curve C e $\bar{C}$, entrambe con flesso in O, riferite ad un qualsiasi sistema di cordinate proiettive non omogenee avente l'origine in O e l'asse x coincidente con la comune tangente di flesso, abbiano le equazioni

$$y = x^3 \sum_0^\infty{}_i\, a_i x^i \qquad y = x^3 \sum_0^\infty{}_i\, \bar{a}_i x^i \qquad (a_0 , \bar{a}_0 \neq 0)$$

e la retta r l'equazione

$$x = \alpha y + \varepsilon \tag{1}$$

con $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \cdots$ e α_0 finito, giusta la condizione che la posizione limite di r sia diversa da t. L'ascissa del punto P, in cui r sega (in vicinanza di O) la curva C, ha uno sviluppo del tipo

$$x = \varepsilon + \alpha\varepsilon^3 \sum_0^\infty{}_j\, \delta_j \varepsilon^j = \varepsilon \left(1 + \alpha\varepsilon^2 \sum_0^\infty{}_j\, \delta_j \varepsilon^j \right)$$

ove

$$\delta_0 = a_0 \ , \ \delta_1 = a_1 \ , \ \delta_2 = a_2 + 3\, a_0^2 \alpha_0 \ , \ \delta_3 = a_3 + 7\, a_1 a_0 \alpha_0 + 3\, a_0^2 \alpha_1 ,$$

e, in generale, trascurando i termini indipendenti da a_i con $i \geqq j$,

$$\delta_j = a_j + \cdots , \delta_{j+1} = a_{j+1} + \cdots ;$$

di qui cambiando a_i in $\bar{a}_i$, si ottengono i coefficienti $\bar{\delta}_j$ dello sviluppo dell'ascissa $\bar{x}$ dell'intersezione $\bar{P}$ (prossima ad O) di r con $\bar{C}$.

Siano poi x_0 , y_0 le coordinate del punto M appartenente ad r: tali coordinate saranno, in generale, funzioni di ε, e, per l'ipotesi $\lim_{\varepsilon \to 0} M \neq 0$, non può essere contemporaneamente $\lim_{\varepsilon \to 0} x_0 = x_0^{(0)} = 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} y = y_0^{(0)} = 0$.

Dopo ciò si trova, per il birapporto $D = (P\bar{P}TM) = (x\bar{x}\varepsilon x_0)$,

$$D = \frac{\sum_0^\infty{}_j\, \delta_j \varepsilon^j \quad x_0 - \varepsilon \left(1 + \alpha\varepsilon^2 \sum_0^\infty{}_j\, \bar{\delta}_j \varepsilon^j \right)}{\sum_0^\infty{}_j\, \bar{\delta}_j \varepsilon^j \quad x_0 - \varepsilon \left(1 + \alpha\varepsilon^2 \sum_0^\infty{}_j\, \delta_j \varepsilon^j \right)}$$

(1) Studio dovuto anch'esso al Bompiani (v. *Per lo studio proiettivo-differenziale delle singolarità.* « Boll. Unione Mat. Ital. », a. V, 1926) ed al quale i risultati suindicati portano qualche nuovo contributo.

il cui secondo membro, scritto per disteso, verrà indicato con

$$D_0 + D_1\varepsilon + D_2\varepsilon^2 + \cdots .$$

3. Sia ora $a_0 \neq \bar{a}_0$. Si ha, anzitutto, l'*invariante (finito) di Segre* $D_0 = a_0/\bar{a}_0 \neq 1$; e poi

$$D_1\varepsilon = \frac{a_0}{\bar{a}_0}\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)\varepsilon$$

che (come D_0) è indipendente dalla posizione limiti di r e di M, onde

$$I_4 = \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)\varepsilon$$

è un invariante infinitesimo delle due curve C *e* $\overline{C}$, dipendente dagli intorni del 4° ordine di O (come denota l'indice 4).

Al contrario,

$$D_2 = \frac{a_0}{\bar{a}_0}\left[\frac{a_2}{a_0} - \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_0} + 3(a_0 - \bar{a}_0)\alpha_0 - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right)\right]$$

dipende dalla posizione limite di r, ma non da quella di M; e quindi *esiste una retta invariante* r_0, determinata dagli intorni del 5° ordine di O, per la quale è $D_2 = 0$.

Si consideri il punto di contatto R_0 di questa retta con la curva inviluppo delle rette (1). Presa r_0 come asse y [1] (sicchè $y_0^{(0)} \neq 0$), è

$$R_0 \equiv \left(0, -\frac{1}{\alpha_1}\right)$$

e

$$D_3 = \frac{a_0}{\bar{a}_0}\left[\frac{a_3}{a_0} - \frac{\bar{a}_3}{\bar{a}_0} + 3(a_0 - \bar{a}_0)\alpha_1 - \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_0}\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right) + (a_0 - \bar{a}_0)\frac{1}{y_0^{(0)}}\right]$$

che dipende, dunque, da questo punto di contatto e dalla posizione limite M_0 di M su r_0. Se si determina questa in modo che sia $D_3 = 0$, e se poi si fa variare R_0, si conchiude che *gl'intorni del 6° ordine di* O *su* C *e* $\overline{C}$ *determinano su* r_0 *una proiettività (non involutoria) in cui* O *è punto unito;* e quindi che *in generale (cioè se queste proiettività non è parabolica) esiste su* r_0 *un punto invariante* ($\neq 0$) dipendente da quegli intorni.

4. Sia $a_0 = \bar{a}_0$ e, inoltre, $a_i = \bar{a}_i$ per $i < k$, una $\bar{a}_k \neq \bar{a}_k$. L'invariante di Segre vale 1; $D_j = 0$ per $j < k$, mentre

$$D_k\varepsilon^k = \frac{a_k - \bar{a}_k}{a_0}\varepsilon^k \quad , \quad D_{k+1}\varepsilon^{k+1} = \frac{1}{a_0}\left[a_{k+1} - \bar{a}_{k+1} - (a_k - \bar{a}_k)\frac{\bar{a}_1}{a_0}\right]\varepsilon^{k+1},$$

(1) Al solo scopo di semplificare i calcoli.

entrambi indipendenti da α_0 e da $x_0^{(0)}$. Si hanno quindi (non uno, ma) *due invarianti infinitesimi* I_{n+1}, I_{n+2}, ove $n\,(=k+2)$ è l'ordine di contatto di C e $\bar{C}$ in O.

Procedendo come al numero precedente (e trattando separatamente i i casi $k=1$ e $k>1$), si trova poi che gli intorni d'ordine $n+1$ determinano una *retta invariante* sulla quale gli intorni d'ordine $n+2$ determinano, a loro volta, una proiettività in cui O è unito e quindi, in generale, *un punto invariante* ($\neq 0$).

5. Mantenendo l'ipotesi che C abbia un flesso in O, supporrò, invece, che O sia un punto ordinario per $\bar{C}$ e che le due curve abbiano in esso un contatto del 1° ordine.

Se

$$y = x^2\left(\bar{h} + \sum_0^\infty{}_i\, \bar{a}_i\, x^{i+1}\right) \qquad (\bar{h} \neq 0)$$

è l'equazione di $\bar{C}$, si ha che $\frac{a_0}{\bar{h}}$ è *un invariante infinitesimo* $I_{3,2}$ (cioè dipendente dall'intorno del 3° ordine di O su C e da quello del 2° su $\bar{C}$), e che, anche qui, v'è *una retta invariante* e su di essa una proiettività con O per punto unito e quindi, in generale, un *punto invariante* ($\neq 0$), dipendenti dai due intorni successivi.

6. I precedenti risultati si possono utilizzare per caratterizzare proiettivamente gli intorni del 9° e 10° ordine di un punto O di flesso di una curva piana C [1]. Per semplificare i calcoli conviene ricorrere alla rappresentazione – intrinseca ed invariante – di C, in un intorno di O [2],

$$y = x^3 + gx^7 - gx^8 + \cdots .$$

Come curva C prenderò la cubica cuspidata (in un punto $\neq 0$) a contatto 7 — punto con C in O, $y = x^3$. Allora, se la precedente equazione di C si scrive

$$y = x^3 + gx^7 - gx^8 + hx^9 + lx^{10} + \cdots ,$$

(1) Nella Nota ultima citata al n. 1, il Bompiani ha caratterizzato gli intorni d'ordine inferiore al 9°.

(2) A cui si perviene assumendo come trilatero di riferimento la tangente a C in O (asse x), la retta luogo delle cuspidi delle cubiche aventi una cuspide in un punto $\neq O$ e un contatto 6 — punto con C in O (asse y) e la congiungente il punto O_2 — cuspide della cubica a contatto 7 — punto con C in O — con il punto O_1 in cui la tangente a C è incontrata dalla tangente cuspidale ad una qualsiasi cubica cuspidata a contatto 5 — punto con C in O; e come punto unità il punto $\neq O$ in cui la suddetta cubica cuspidata a contatto 7 — punto taglia la quartica avente in O un contatto 4 — punto con C, il punto doppio O_2 con tangente nodale O_2O e tangente in O alla O_1O_2.

sono (n. 4) *invarianti la retta* (legata all'intorno di O del 9° ordine)

$$13\,gx + hy = 0\,,$$

ed il punto (legato all'intorno del 10° ordine)

$$x = \frac{104\,h}{169\,l - 104\,h} \quad , \quad y = \frac{104\,g}{13\,l - 8\,h}$$ (1).

7. Per fare un'altra applicazione dei risultati dei nn. 1–5, si considerino due superficie S ed $\overline{S}$, aventi in un punto O un contatto del 1° ordine, e le sezioni σ e $\overline{\sigma}$ prodotte su di esse da un piano π per O, distinto dal piano tangente comune. Sia t la retta d'intersezione di questi piani, e γ la linea d'intersezione di quelle superficie. Distinguo due casi:

1° *Le tangenti asintotiche di* S *ed* $\overline{S}$ *siano distinte.* Allora: a) *se t non è tangente asintotica (nè di* S *nè di* $\overline{S}$*), a tutte le coppie di sezioni* $\sigma, \overline{\sigma}$ *prodotte dai piani del fascio aventi per asse t spetta lo stesso invariante di Segre; se poi t è tangente a* γ*, l'invariante di Segre vale* 1 *e, se t è tangente cuspidale, a tutte le coppie* $\sigma, \overline{\sigma}$ *indicate spetta anche lo stesso invariante di Bompiani, mentre, se t è tangente nodale, quest'invariante dipende da* π *e quindi esiste una retta invariante per* O; - b) *se t è tangente asintotica di* S ($\overline{S}$) *l'invariante di Segre diviene uguale a zero* (∞) *e a tutte le coppie di sezioni prodotte dai piani del fascio di asse t spetta lo stesso invariante* $I_{3,2}$ ($I_{2,3}$).

2° *Le superficie* S *ed* $\overline{S}$ *abbiano le stesse tangenti asintotiche.* a) *Se t è tangente asintotica, a tutte le coppie di sezioni prodotte dai piani del fascio di asse t spetta lo stesso invariante di Segre; se poi t non è a incontro quadripunto, e, se il punto* O *è parabolico, a tutte le coppie indicate spetta anche lo stesso invariante* I_{n+1} ($n = 3$), *mentre, se* O *non è parabolico,* I_{n+1} *dipende da* π *e quindi, se neppure la tangente asintotica* $\neq t$ *è a incont o quadripunto, esiste una retta invariante per* O; - b) *se t non è tangente asintotica a tutte le coppie* $\sigma, \overline{\sigma}$ *spetta sempre lo stesso invariante di Segre.*

(1) Si potrebbero considerare anche gli invarianti di C e $\overline{C}$ I_{n+1}, I_{n+2} ($n = 6$): essi forniscono i due *invarianti infinitesimi della sola* C g_{24} e $-g_{25}$ (e quindi l'*invariante finito* g); ma l'invarianza di g_{24} ecc. risulta, più semplicemente, dalla stessa rappresentazione scelta per C.

Analisi. — *Equazione integrale di terza specie ed applicazioni alle equazioni differenziali.* Nota I di P. NALLI, presentata [1] dal Corrisp. G. FUBINI.

In una Nota pubblicata nel 1926 nei « Rendiconti del Circolo Matematico » di Palermo, mi sono occupata della risoluzione dell'equazione integrale di terza specie a nucleo reale e simmetrico ed ho asserito che sarebbe facile trattare della risoluzione dell'equazione a nucleo qualunque.

Di ciò mi occupo nella presente Nota.

Considero l'espressione

$$k(s)\,p(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,p(t)\,dt \tag{1}$$

come il risultato di un'*operazione* H *applicata a* $p(s)$: $\mathrm{H}[p(s)]$.

Suppongo $\mathrm{K}(s,t)$, reale o complessa, sommabile insieme col quadrato del suo modulo nel quadrato $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, $k(s)$ misurabile ed a modulo limitato quasi dapertutto in (a,b), $p(s)$ appartenente ad $\Omega(a,b)$, denotando così il campo delle funzioni reali o complesse che sono sommabili in (a,b) insieme coi quadrati dei loro moduli.

L'operazione H *si compone per mezzo di un numero finito o di una infinità numerabile di operazioni che chiamo elementari, a due a due ortogonali.*

Le operazioni elementari sono di due tipi.

1° tipo:

$$\mathrm{S}[p(s)] = \mu\varphi(s)\int_a^b \psi(t)\,p(t)\,dt \tag{2}$$

dove μ *è una costante reale non nulla* che chiameremo *costante caratteristica* di S e $\varphi(s)$ e $\psi(s)$, in $\Omega(a,b)$, sono tali che

$$\int_a^b |\varphi(s)|^2\,ds = 1 \qquad , \qquad \int_a^b |\psi(s)|^2\,ds = 1\,.$$

Se $\varphi(s) = \overline{\psi(s)}$ diremo la S *simmetrica.*

2° tipo:

$$\mathrm{T}[p(s)] \sim \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{d_\lambda f(s;\lambda) \cdot d\int_a^b g(t;\lambda)\,p(t)\,dt}{d\rho(\lambda)} \tag{3}$$

(1) Nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

dove $f(s;\lambda)$ e $g(s;\lambda)$ sono due funzioni definite per s in (a,b) e λ reale tra $-\infty$ e ∞, sono costanti rispetto a λ per $\lambda > \beta$ e per $\lambda < \alpha$, α e β convenienti, rispetto ad s sono funzioni di $\Omega(a,b)$ ed è

$$\int_a^b |f(s;\lambda)|^2\, ds = \int_a^b |g(s;\lambda)|^2\, ds = \rho(\lambda),$$

$\rho(\lambda)$ continua e generalmente crescente in $(-\infty,\infty)$.

Per $\lambda < \mu$

$$\int_a^b f(s;\lambda)\,\overline{f(s;\mu)}\, ds = \int_a^b \overline{f(s;\lambda)}\, f(s;\mu)\, ds = \rho(\lambda)$$

ed analogamente per la $g(s;\lambda)$.

Inoltre, per qualunque funzione $\varphi(s)$ in $\Omega(a,b)$ le due funzioni di λ

$$\sigma(\lambda) = \int_a^b f(s;\lambda)\,\varphi(s)\, ds \quad , \quad \tau(\lambda) = \int_a^b g(s;\lambda)\,\varphi(s)\, ds$$

sono continue ed a variazione limitata in $(-\infty,\infty)$ ed esistono i due integrali di Hellinger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma \cdot d\sigma}{d\rho} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau \cdot d\tau}{d\rho}.$$

La scrittura simbolica (3) sta ad indicare che $T[p(s)]$ è quella funzione di s in $\Omega(a,b)$, determinata a meno dei punti di un insieme di misura nulla, per la quale si ha, per qualunque $q(s)$ in $\Omega(a,b)$,

$$\int_a^b T[p(s)]\, q(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, \frac{d\int_a^b f(s;\lambda)\, q(s)\, ds \cdot d\int_a^b g(t;\lambda)\, p(t)\, dt}{d\rho(\lambda)}$$

dove il secondo membro è un integrale di Hellinger.

Chiameremo $\rho(\lambda)$ *funzione caratteristica* dell'operazione T.

Se

$$f(s;\lambda) = \overline{g(s;\lambda)}$$

chiameremo la T *simmetrica.*

Diamo ora la definizione di *operazioni ortogonali.*

Due operazioni elementari del primo tipo, costruite l'una per mezzo delle funzioni $\varphi_1(s)$ e $\psi_1(s)$, l'altra per mezzo delle funzioni $\varphi_2(s)$ e $\psi_2(s)$, le diremo ortogonali se

$$\int_a^b \varphi_1(s)\,\overline{\varphi_2(s)}\, ds = \int_a^b \psi_1(s)\,\overline{\psi_2(s)}\, ds = 0.$$

Due operazioni elementari di tipo diverso, una costruita per mezzo delle funzioni $\varphi(s)$ e $\psi(s)$, l'altra per mezzo delle funzioni $f(s;\lambda)$ e $g(s;\lambda)$ le diremo ortogonali se

$$\int_a^b f(s;\lambda)\,\overline{\varphi(s)}\,ds = \int_a^b g(s;\lambda)\,\overline{\psi(s)}\,ds = 0\,.$$

Finalmente, due operazioni elementari del secondo tipo, una costruita per mezzo delle funzioni f_1 e g_1, l'altra per mezzo delle funzioni f_2 e g_2, le diremo ortogonali se, qualunque sieno λ e μ,

$$\int_a^b f_1(s;\lambda)\,\overline{f_2(s;\mu)}\,ds = \int_a^b g_1(s;\lambda)\,\overline{g_2(s;\mu)}\,ds = 0\,.$$

L'operazione H, come abbiamo detto, *si compone per mezzo di un numero finito o di una infinità numerabile di operazioni elementari, a due a due ortogonali:* in simboli

$$(4) \qquad H = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + T_1 + T_2 + T_3 + \cdots,$$

il che significa che $H[p(s)]$ è la somma delle due funzioni verso cui convergono in media nell'intervallo (a,b) le due serie

$$\sum_1^\infty{}_n\, S_n[p(s)] \quad , \quad \sum_1^\infty{}_n\, T_n[p(s)]\,.$$

Quando $k(s)$ prende solo un numero finito di valori quasi dapertutto in (a,b), mancano le T.

Per ogni T_n c'è una funzione caratteristica $\rho_n(\lambda)$ ed un intervallo (α_n,β_n) fuori del quale essa si riduce a due costanti. Questi intervalli sono tutti compresi nell'intervallo $-L, L$, dove L è l'estremo superiore del modulo di $k(s)$ in (a,b), escluso eventualmente un insieme di misura nulla dove $k(s)$ non è limitata.

Il secondo membro della (4) si chiamerà *forma canonica* dell'operazione H.

Quando le operazioni elementari che compongono la H sono simmetriche, diremo che la H è *simmetrica.*

Per ciò è necessario e sufficiente che sia

$$\int_a^b H[p(s)]\,\overline{q(s)}\,ds = \overline{\int_a^b H[q(s)]\,\overline{p(s)}\,ds}\,,$$

il che si presenta certamente se $k(s)$ è reale e $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, ma non so se può accadere in altri casi.

Per un'operazione H simmetrica è reale l'espressione

$$\int_a^b \mathrm{H}[p(s)]\,\overline{p(s)}\,ds\,.$$

Quando essa non è negativa (positiva) diremo che l'operazione H è *definita positiva (negativa)*.

Se H non è simmetrica, consideriamo l'operazione

$$\overline{\mathrm{H}}[p(s)] = \overline{k(s)}\,p(s) + \int_a^b \overline{\mathrm{K}(t,s)}\,p(t)\,dt\,:$$

chiameremo *associate* le operazioni H ed $\overline{\mathrm{H}}$.

La forma canonica della $\overline{\mathrm{H}}$ si ottiene da quella della H sostituendo alle due funzioni $\varphi(s)$ e $\psi(s)$ di un'operazione elementare del primo tipo, rispettivamente $\overline{\psi(s)}$ e $\overline{\varphi(s)}$, ed alle due funzioni $f(s;\lambda)$, $g(s;\lambda)$ di un'operazione elementare del secondo tipo, rispettivamente $\overline{g(s;\lambda)}$ ed $\overline{f(s;\lambda)}$.

I due prodotti di due operazioni associate: $\overline{\mathrm{H}}\cdot\mathrm{H}$ ed $\mathrm{H}\cdot\overline{\mathrm{H}}$, sono operazioni simmetriche definite positive.

Quando si sanno ridurre a forma canonica queste due operazioni si sa ridurre anche H ed inversamente.

Il problema di riduzione di un'operazione si riconduce quindi sempre a quello di riduzione di operazioni simmetriche.

Ciò premesso, ci proponiamo di risolvere l'equazione integrale di terza specie

$$(5) \qquad k(s)\,p(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,p(t)\,dt = f(s)\,,$$

data la $f(s)$ in $\Omega(a,b)$.

Vogliamo che la $p(s)$ soddisfi all'equazione quasi dapertutto in (a,b).

Importa la considerazione delle eventuali funzioni $v(s)$ soddisfacenti all'equazione $\mathrm{H}[v] = 0$ e delle funzioni $u(s)$ soddisfacenti alla $\overline{\mathrm{H}}[u] = 0$.

Le prime sono tutte e sole le funzioni $v(s)$ soddisfacenti alla $\overline{\mathrm{H}}\cdot\mathrm{H}[v] = 0$ e le seconde le soddisfacenti alla $\mathrm{H}\cdot\overline{\mathrm{H}}[u] = 0$.

La ricerca di tali funzioni è un problema che si sa risolvere quando si sa ridurre a forma canonica un'operazione simmetrica.

Infatti, denotando con h una costante qualunque non nulla, quando si conoscono le eventuali operazioni elementari di primo tipo dell'operazione simmetrica

$$h\,p(s) + \overline{\mathrm{H}}\cdot\mathrm{H}[p(s)]$$

la cui costante caratteristica sia h, se tali operazioni sono costruite per mezzo delle funzioni $v_i(s)$, $\overline{v_i}(s)$ $(i = 1, 2, \cdots)$, la più generale funzione $v(s)$ soddisfacente alla $\mathrm{H}[v] = 0$ è una arbitraria combinazione lineare

delle v_i, quando esse sono in numero finito, e quando esse sono in numero infinito è la funzione verso cui converge in media la serie

$$\sum_1^\infty c_i v_i(s)$$

quando le c_i sono sottoposte alla sola condizione che la serie $\sum_1^\infty |c_i|^2$ risulti convergente.

Analogamente per le $u(s)$ soddisfacenti alla $\bar{H}[u] = 0$.

Quando il punto *zero* non è punto limite delle costanti caratteristiche delle operazioni elementari di primo tipo che compongono la H, ne è punto limite di intervalli nei quali qualcuna delle funzioni caratteristiche delle operazioni elementari di secondo tipo che compongono la H non è costante (il che accade certamente quando $|k(s)|$ si mantiene superiore ad un numero positivo quasi dapertutto in (a, b)) le $u_i(s)$ e le $v_i(s)$ sono nello stesso numero finito.

Per la risolubilità della (5) è necessario che sia

$$\int_a^b f(s)\,\overline{u(s)}\,ds = 0$$

per ogni eventuale funzione $u(s)$ soddisfacente alla $\bar{H}[u] = 0$.

Per il che, quando esistono di tali funzioni $u(s)$, è necessario e sufficiente che la $f(s)$ soddisfi alle condizioni

$$(6) \qquad \int_a^b f(s)\,\overline{u_i(s)}\,ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots),$$

in numero finito o numerabile.

Fisica matematica. — *Sopra gli integrali generali di alcune equazioni differenziali di fisica matematica.* Nota di G. WATAGHIN, presentata [1] dal Socio C. SOMIGLIANA.

1. La spiegazione delle interferenze luminose in base all'ipotesi della struttura corpuscolare della luce presenta delle difficoltà ben note. In uno studio precedente [2] feci il tentativo di superare alcune di queste difficoltà considerando i quanti di luce come risultanti dalla sovrapposizione di onde elettromagnetiche ordinarie, piane o sferiche. Questa scomposizione del quanto in « componenti armoniche » permette di far vedere come l'ipotesi

(1) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(2) « Nuovo Cimento », A. IV, n. 7, p. 315, 1927.

quantistica non si trovi in contraddizione colla teoria ondulatoria delle interferenze e possa servire di base per l'interpretazione di tutto il complesso dei fenomeni ottici.

In questa Nota mi propongo di dimostrare un teorema sopra le soluzioni dell'equazione:

$$(1) \qquad \Delta_2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

il quale permette di costruire dei modelli del quanto di luce conformi alle idee citate. Le applicazioni di questo teorema fanno oggetto di un altro lavoro. Contemporaneamente enuncio i teoremi analoghi relativi ad alcune altre equazioni di fisica matematica.

Teorema: *Ogni soluzione* $f(x, y, z, t)$ *dell'equazione* (1), *che soddisfa alle ipotesi* A *e* B *sotto enunciate, è rappresentabile (per qualunque valore di* x, y, z, t*) mediante la formula:*

$$(2) \qquad f(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[F_1(u, v, w)\, e^{i\left(ux+vy+wz+\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct\right)} + \\ + F_2(u, v, w)\, e^{i\left(ux+vy+wz-\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct\right)} \Big] du\, dv\, dw$$

ove le funzioni $F_1(u, v, w)$ e $F_2(u, v, w)$ sono scelte in modo opportuno. Ne segue, che *tali soluzioni si possono ottenere, sovrapponendo onde piane.*

Per la validità della (2) basta che la $f(x, y, z, t)$ soddisfi alle ipotesi seguenti:

Ipotesi A: *Per ogni valore di* x, y, z, t, che non appartiene a un insieme prefissato S di punti, linee e superficie « singolari » [1], *la* $f(x, y, z, t)$ *sia rappresentabile mediante l'integrale di Fourier:*

$$(3) \qquad f(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u, v, w, t)\, e^{i(ux+vy+wz)}\, du\, dv\, dw$$

ove

$$(3') \qquad g(u, v, w, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta, t)\, e^{-i(u\xi+v\eta+w\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Condizioni sufficienti per la validità delle (3) e (3') sono note. Per le applicazioni che faremo basta supporre:

(1) Quest'insieme S potrebbe essere vuoto, come anche potrebbe essere composto di punti $P(x, y, z, t)$ e di superficie $\varphi(x, y, z, t) = 0$ mobili o deformabili col tempo.

1° che la $f(x, y, z, t)$, pensata come funzione di una delle variabili x, y, z, t, soddisfi in ogni intervallo finito (e per ciascuna di esse) alle condizioni di Dirichlet [1];

2° che l'integrale:

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int |f(x, y, z, t)|\, dx\, dy\, dz$$

abbia per ogni t un valore finito [2].

Ipotesi B: *Il secondo membro della* (3) *sia derivabile almeno due volte rispetto a* x, y, z, t *sotto il segno dell'integrale.*

Un teorema analogo a quello sopra enunciato è stato già dimostrato dal E. T. Whittaker [3].

Quest'Autore ha fatto vedere che, se la $f(x, y, z, t)$ è una soluzione della (1), e se si considera nell'intorno di un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) non singolare per la $f(x, y, z, t)$ un ramo monodromo di essa, allora è possibile rappresentare questa soluzione in tutto l'intorno del punto considerato, in cui vale lo sviluppo della f nella serie di potenze di $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $t - t_0$ nel modo seguente:

$$(5) \qquad f(x, y, z, t) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + z\cos\theta + ct, \theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

ove F è una funzione derivabile almeno due volte rispetto all'argomento:

$$X = x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + z\cos\theta + ct.$$

Il teorema sopra enunciato costituisce ovviamente una generalizzazione del teorema di Whittaker. Per dimostrarlo sostituiamo l'espressione (3) della $f(x, y, z, t)$ nell'equazione (1). Otteniamo [4]:

(1) Diciamo che una $f(x)$ soddisfa nell'intervallo finito $a^{\prime\prime\prime}b$ alle condizioni di Dirichlet, se: 1° o la $f(x)$ è finita in tutto l'intervallo e questo è scomponibile in un numero finito di intervalli aperti, in ciascuno dei quali la $f(x)$ è monotona; 2° oppure nell'intervallo $a^{\prime\prime\prime}b$ esiste un numero finito di punti, in cui la $f(x)$ diventa ∞, ma esclusi dall'intervallo degli intorni piccoli a piacere di questi punti, nel resto dell'intervallo la $f(x)$ rimane finita; inoltre l'intervallo è scomponibile in un numero finito di parti, in cui la $f(x)$ è monotona, e l'integrale: $\int_a^b f(x)\, dx$ è finito.

(2) Condizioni sufficienti molto più generali sono state stabilite da A. Pringsheim, «Math. Ann.», v. *68*, p. 367, 1910, e v. *71*, p. 289, 1911. Vedi anche H. S. Carslaw, *Theory of Fourier's series and integrals*, London, 1921, pp. 287 e 289.

(3) «Math. Ann.», v. *57*, p. 333, 1903.

(4) L'integrale, che compare nel primo membro della (6), è certamente finito in virtù dell'ipotesi B.

$$(6)\qquad \iiint_{-\infty}^{\infty}\left[-(u^2+v^2+w^2)\,g-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right]e^{i(ux+vy+wz)}\,du\,dv\,dw=0.$$

Per ipotesi la (6) è soddisfatta in ogni campo, che non comprende i punti di discontinuità della $f(x,y,z,t)$. Se ne deduce, che è identicamente nulla l'espressione:

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+c^2(u^2+v^2+w^2)\,g=0.$$

Infatti, possiamo immaginare la (6) come un'equazione integrale nella funzione: $\Psi(u,v,w)=-(u^2+v^2+w^2)\,g-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$, e osservare che, se per ogni punto (x,y,z) [che non fa parte dell'insieme S dei punti singolari] è:

$$(8)\qquad \Phi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\Psi(u,v,w)\,e^{i(ux+vy+wz)}\,du\,dv\,dw=0$$

allora, per il teorema di Fourier:

$$(8')\qquad \Psi(u,v,w)=\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-i(u\xi+v\eta+w\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=0.\ \text{c.v.d.}^{(1)}.$$

Orbene, dalla (7) si deduce, che la $g(u,v,w,t)$ è necessariamente della forma:

$$(9)\qquad g(u,v,w,t)=G_1(u,v,w)\cdot e^{i\cdot\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct}+G_2(u,v,w)\,e^{-i\cdot\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct}.$$

Sostituendo quest'espressione nella formola (3), potremo rappresentare la $f(x,y,z,t)$ nel modo seguente:

$$(2')\qquad f(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\Big[G_1(u,v,w)\,e^{i\left(ux+vy+wz+\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct\right)}+$$

$$+\,G_2(u,v,w)\,e^{i\left(ux+vy+wz-\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct\right)}\Big]\,du\,dv\,dw$$

oppure anche, se $f(x,y,z,t)$ è reale:

$$(2'')\qquad f(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\Big[H_1(u,v,w)\cdot\cos(ux+vy+wz)\cdot\cos\left(\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct\right)+$$

$$+\,H_2(u,v,w)\cdot\operatorname{sen}(ux+vy+wz)\operatorname{sen}\left(\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct\right)\Big]\,du\,dv\,dw.$$

(1) In altre parole, non esistono funzioni Ψ, non identicamente nulle, ortogonali al nucleo $e^{i(ux+vy+wz)}$.

Le (2′) e (2″) sono precisamente le relazioni che volevamo dimostrare. La (2′) non differisce, evidentemente, dalla (2).

Ognuna di queste formole rappresenta « l'integrale generale » dell'equazione (1) e comprende tutte le soluzioni di quest'equazione, che soddisfano alle condizioni A e B. È facile verificare, che le (2) e (2″) rappresentano una soluzione dell'equazione (1), anche quando le funzioni reali F_1, F_2 o H_1, H_2 sono prefissate ad arbitrio, purchè i secondi membri di queste equazioni definiscano una $f(x, y, z, t)$ derivabile due volte rispetto a x, y, z, t e purchè sia lecita la derivazione sotto il segno dell'integrale.

L'importanza della formola (2) per lo studio di alcuni problemi di fisica matematica è dovuta principalmente al fatto, che essa rappresenta la soluzione generale dell'equazione (1) come risultante dalla sovrapposizione o interferenza di infinite onde piane di ampiezza costante, propagantesi con velocità costante (uguale a c). Infatti, pensando l'integrale (2) come limite di una somma, si ha, che ciascun addendo è della forma:

$$(10) \qquad A e^{i\rho(\alpha x+\beta y+\gamma z \pm ct)}$$

con significato ovvio dei simboli: $\rho\alpha = u$, $\rho\beta = v$, $\rho\gamma = w$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$; la frequenza e la lunghezza d'onda delle costituenti elementari sono:

$$(11) \qquad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{2\pi} = \frac{\rho}{2\pi}.$$

Questo risultato è stato già stabilito ed applicato nella Memoria di Whittaker, loc. cit., però la classe delle soluzioni per cui vale la dimostrazione del Whittaker è molto più ristretta di quella considerata nella presente Nota. Un'applicazione importante della proposizione enunciata all'ottica ondulatoria si trova nel lavoro di J. Picht [1].

Analogamente la formola (2) dà la scomposizione della soluzione generale della (1) in costituenti elementari, ciascuna delle quali rappresenta un'onda piana *stazionaria*.

In conclusione possiamo enunciare il teorema seguente: *ogni soluzione dell'equazione* (1) *soddisfacente alle ipotesi* A *e* B *può essere generata o mediante la sovrapposizione di un sistema* (2) *di onde piane, che si propagano con velocità c, oppure mediante un sistema* (2″) *di onde piane stazionarie.*

La limitazione relativa alla necessità di definire la $f(x, y, z, t)$ in tutto lo spazio e per ogni t non è essenziale e non lede la generalità delle formole trovate. Infatti, se la $f(x, y, z, t)$ è prefissata in una porzione qualunque dello spazio e per un intervallo di tempo limitato, basta esten-

(1) J. Picht, « Ann. d. Phys. », v. 77, p. 785, 1925. Anche le formole dedotte dal Debye: « Ann. d. Phys. », v. *30*, p. 755, 1909, rientrano nel campo di applicazione delle formole di Whittaker. Per altre applicazioni vedi mia Nota di prossima pubblicazione.

dere la definizione di f, ponendola uguale a zero nel resto dello spazio e per ogni altro valore di t, per essere in grado di applicare le formole stabilite.

Per ritrovare ora la formola (5) di Whittaker bisogna poter eseguire nella (2) una trasformazione di variabili ponendo: $u = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $v = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, $w = \rho \cos\theta$; si ottiene:

$$(12)\quad f(x,y,z,t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [M_1(\rho,\theta,\varphi)\, e^{i\rho(x\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + y\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + z\cos\theta + ct)} +$$

$$+ M_2(\rho,\theta,\varphi)\, e^{i\rho(x\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + y\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + z\cos\theta - ct)}]\, d\rho\, d\theta\, d\varphi .$$

Trattandosi di integrali fra limiti ∞, è da notare che questa trasformazione non è sempre lecita. Essa è certamente lecita, se il $\lim_{\rho\to\infty}(\rho^3 M_i) i = 1, 2 = 0$. Se poi una delle M_i è nulla, la (12) si riduce ad un caso particolare della (2).

È chiaro che la (2) potrebbe essere generalizzata ulteriormente nel modo seguente:

$$(13)\quad f(x,y,z,t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} [F(X,u,v,w) + G(Y,u,v,w)]\, du\, dv\, dw$$

ove

$$X = ux + vy + wz + \sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct$$

$$Y = ux + vy + wz - \sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot ct .$$

Occorre naturalmente supporre, che l'integrale (13) esista e che le funzioni F e G sieno derivabili almeno due volte rispetto a X e a Y. Allora la (13) rappresenta ancora l'integrale generale della (1), e la formola (5) di Wittaker non è che un caso particolare della (13).

2. In modo perfettamente analogo possono essere estesi i campi di applicazione di altre formole date dal Whittaker per gli integrali generali delle equazioni:

$$(14)\quad \Delta_2 U + k^2 U = 0$$

$$(15)\quad \Delta_2 V = 0 .$$

Per entrambe, se si ammette, che una soluzione $f(x,y,z)$ sia rappresentabile coll'integrale di Fourier:

$$(16)\quad f(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(u,v,z)\, e^{i(ux+vy)}\, du\, dv$$

ove

$$g(u,v,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,z)\, e^{-i(u\xi+v\eta)}\, d\xi\, d\eta$$

e si ripete il ragionamento esposto nel § 1, si arriva alle formule seguenti:

$$(17) \qquad U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [F(X_1, u, v) + G(Y_1, u, v)]\, du\, dv$$

ove

$$X_1 = ux + vy + \sqrt{k^2 - u^2 - v^2}\cdot z$$

$$Y_1 = ux + vy - \sqrt{k^2 - u^2 - v^2}\cdot z$$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [F(X_2, u, v) + G(Y_2, u, v)]\, du\, dv$$

ove

$$X_2 = ux + vy + i\sqrt{u^2 + v^2}\, z$$

$$Y_2 = ux + vy - i\sqrt{u^2 + v^2}\, z$$

le quali sono precisamente le generalizzazioni cercate delle formole di Whittaker:

$$U = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi)\, e^{i(x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + z\cos\theta)}\, d\theta\, d\varphi$$

$$V = \int_0^{2\pi} F(z + ix\cos u + iy \operatorname{sen} u, u)\, du.$$

Idromeccanica. — *Complementi relativi al calcolo dell'azione dinamica di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita.* Nota di E. RAIMONDI, presentata [1] dal Corrispondente U. CISOTTI.

1. Abbiamo trovato [2] che la formola (15)

$$(42) \qquad \zeta - \zeta_0 = -i\int_{Z_0}^{Z} \frac{e^{iF}\,dZ}{Z},$$

dove

$$(43) \qquad F(Z) = -i\lg k - \frac{i\omega\alpha}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\lg Z - \frac{\omega\sigma}{\pi}\right)d\sigma +$$

$$+ -\frac{i\omega}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\lg Z - \frac{\omega\sigma}{\pi}\right)d\sigma,$$

stabilisce la corrispondenza conforme tra il campo C (fig. 1) del piano ζ

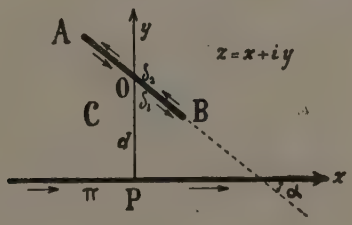


Fig. 1.

(sistema segmento-parete) ed il campo Γ (fig. 3) del piano Z (corona circolare).

Alla (42) si può dare la forma

$$(44) \qquad \zeta - \zeta_0 = -ik\int_{Z_0}^{Z} e^{iF_1}\,\frac{dZ}{Z},$$

(1) Nella seduta del 15 gennaio 1928.

(2) Nei richiami delle formole e delle figure ci riferiremo alle nostre quattro Note, sullo stesso argomento, già pubblicate in questi «Rendiconti», vol. II, serie 6ª, 2° sem., fasc. 7°-8°, ottobre 1925; vol. III, serie 6ª, 1° sem., fasc. 1°, gennaio 1926; vol. IV, serie 6ª, 2° sem. fasc. 7°-8°, ottobre 1926; vol. IV, serie 6ª, 2° sem., fasc. 9°, novembre 1926.

ponendo

$$(45) \qquad F_1(Z) = -\frac{i\omega\alpha}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\lg Z - \frac{\omega\sigma}{\pi}\right)d\sigma +$$

$$+ -\frac{i\omega}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\lg Z - \frac{\omega\sigma}{\pi}\right)d\sigma .$$

2. Nell'espressione di $\zeta - \zeta_0$ figurano le costanti

$$\alpha \ , \ \omega \ , \ q \ , \ k \ ,$$

α è un dato del problema, poichè rappresenta l'angolo che la lastra fa con la parete indefinita;

ω è il semiperiodo reale delle funzioni ellittiche di Weïerstrass;

q dipende da entrambi i periodi delle funzioni ellittiche stesse, poichè, come sappiamo, ha l'espressione

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}} ;$$

k, infine, è un coefficiente di proporzionalità, che viene determinato fissando l'unità di lunghezza (e che si potrebbe porre uguale ad 1, se ciò facesse comodo).

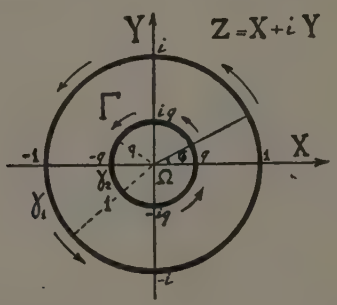


Fig. 3.

Vediamo come si possano esprimere ω e q mediante i dati del problema.

Poichè nella trasformazione conforme rappresentata dalla (44) ai seguenti punti del piano ζ

$$P \ , \ A \ , \ B$$

abbiamo fatto corrispondere, ordinatamente[1], i seguenti punti del piano Z

$$1 \ , \ q \ , \ -q \ ,$$

(1) Vedi la seconda delle quattro Note sopra citate, a p. 26.

se z_0 e z sono, ordinatamente, le affisse degli estremi del segmento orientato AB (fig. 1), la cui lunghezza indicheremo con l; poichè

$$z - z_0 = l e^{i\alpha},$$

abbiamo per la (44) che

$$l = ike^{-i\alpha} \int_{-q}^{q} e^{iF_1} \frac{dZ}{Z} \quad . \tag{46}$$

Analogamente, detto β l'angolo che il segmento orientato $AP = s$ fa colla parete, abbiamo, per la (44),

$$s = ike^{-i\beta} \int_{1}^{q} e^{iF_1} \frac{dZ}{Z} \quad . \tag{47}$$

Le (46) e (47) appunto definiscono le costanti l ed s [e cioè la larghezza della lastra e la distanza di un suo estremo dal punto P della parete] in funzione di ω e q.

3. È interessante considerare il rapporto

$$\frac{l}{s} = e^{i(\beta-\alpha)} \frac{\int_{-q}^{q} e^{iF_1} \frac{dZ}{Z}}{\int_{1}^{q} e^{iF_1} \frac{dZ}{Z}} \quad . \tag{48}$$

Posto

$$\frac{d\Phi(Z)}{dZ} = \frac{e^{iF_1}}{Z},$$

per lo sviluppo di Mac-Laurin, e trascurando le potenze di q superiori alle prime [1], si ha

$$\int_{-q}^{q} e^{iF_1} \frac{dZ}{Z} = \Phi(q) - \Phi(-q) = 2q\Phi'(0) \quad ,$$

$$\int_{1}^{q} e^{iF_1} \frac{dZ}{Z} = \Phi(0) - \Phi(1) + q\Phi'(0)$$

(1) Questa è l'approssimazione già adottata nel calcolo approssimato che fu oggetto della quarta delle Note precedenti.

ed alla (48) si può dare la forma

$$\frac{l}{s} = 2e^{i(\beta-\alpha)} \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0) - \Phi(1)} q \,. \tag{49}$$

La (49) ci dice che $\frac{l}{s}$ è proporzionale a q, e che quindi si possono trascurare le potenze di q, quando $\frac{l}{s}$ è piccolo, cioè per una lastra di data larghezza, quando essa è abbastanza lontana dalla parete, come avevamo già asserito [1].

Osserviamo, infine, che nel secondo membro della (49), come già nella (48), non compare la k, poichè esso è uguale al rapporto di due lunghezze. Ciò conferma quanto abbiamo detto sulla natura ai tale costante.

Meccanica. — *Sullo scostamento geodetico nelle varietà anolonome.* Nota di G. Vranceanu, presentata [2] dal Socio T. Levi-Civita.

Cercando di fare qualche applicazione delle equazioni alle variazioni di una geodetica in una varietà anolonoma, che io avevo indicato in un'altra Nota [3], mi sono accorto che quelle equazioni non valgono in generale per le varietà anolonome. Questo proviene dal fatto, che io avevo considerato come scostamenti della geodetica base a una geodetica vicina, solo quelli che verificano le relazioni anolonome della varietà.

Considerando, invece, degli scostamenti che non verificano tali relazioni, e tenendone conto nel formare le equazioni alle variazioni, si può vedere che il mio precedente procedimento non è, in generale, legittimo se le relazioni anolonome della varietà non sono completamente integrabili [4].

Naturalmente le equazioni alle variazioni e il criterio di stabilità indicate da me [5], *valgono sempre per le varietà riemanniane.*

Nel caso di una varietà anolonoma, intervengono nelle equazioni alle variazioni, accanto alla curvatura della varietà, anche degli elementi relativi alla geodetica considerata, come faremo vedere in questa Nota.

(1) Vedi la quarta delle Note precedenti, al N. 2.

(2) Nella seduta del 18 dicembre 1927.

(3) *Sopra la stabilità geodetica* (« Rendiconti », vol. V, 1927, p. 107).

(4) Cfr. anche E. Cartan, *Sur l'écart géodésique*, ecc., (« Rendiconti », vol. V, 1927, pp. 611-612).

(5) Vedi ancora *Stabilità geodetica; Applicazioni*, ecc. (« Rendiconti », vol. V, 1927, p. 275).

Sia una varietà metrica V_n nella quale esistano un certo numero $n-m$ di relazioni non integrabili della forma

$$(1) \qquad \sum_1^n{}_i \lambda_{k/i}\, dx_i = 0\,, \qquad (k = m+1, \cdots, n)$$

dove le $\lambda_{k/i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sono i momenti di $n-m$ congruenze (k) normale tra di loro. Le geodetiche della varietà anolonoma V_n^m, così definita, considerate come curve nella varietà V_n sono dati dalle equazioni

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{ds} = \sum_1^m{}_h \lambda_h^i\, u_h\,, \qquad (i, = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_h}{ds} = \sum_1^m{}_{\alpha\beta}\, \gamma_{h\alpha\beta}\, u_\alpha\, u_\beta\,, & (h = 1, 2, \cdots, m) \\ u_k = 0\,, & (k = m+1, \cdots, n) \end{cases}$$

dove λ_h^i sono i parametri di m congruenze (h) normale tra di loro e alle $n-m$ congruenze (k), $\gamma_{h\alpha\beta}$ sono i coefficienti di rotazione di Ricci delle m congruenze (h), e le u sono i coseni che la direzione della geodetica forma in un punto generico colle congruenze (h) e (k).

Sia

$$(B) \qquad x_i = \varphi_i(\sigma) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

una geodetica, ossia una soluzione del sistema [(2), (3)], σ essendo l'arco di questa geodetica.

Consideriamo una geodetica vicina (g)

$$(4) \qquad x_i = \varphi_i(\sigma) + \sum_1^n{}_\alpha \lambda_\alpha^i\, \varepsilon_\alpha\,,$$

indicando con ε_α le componenti dello scostamento secondo le congruenze (h) e (k). Supponiamo per semplicità che la geodetica (B) sia stata presa come appartenente alla congruenza (1), e che lo scostamento sia sempre ortogonale a (B), con che $\varepsilon_1 = 0$. In questo caso i coseni della geodetica (g) sono dati dalle formule

$$(5) \qquad \begin{cases} u_1 = 1\,, \\ u_h = \dfrac{d\varepsilon_h}{d\sigma_1} + \sum_2^n{}_\alpha w_{h\alpha}\varepsilon_\alpha\,, & (h = 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$$

nelle quali si è tenuto conto solamente dei termini di primo ordine nelle ε. Per uniformità abbiamo posto σ_1 invece di σ, e indicato con $w_{h\alpha}$ le differenze.

$$(6) \qquad w_{h\alpha} = \gamma_{h1\alpha} - \gamma_{h\alpha 1}\,.$$

Supponiamo di più che (come è sempre possibile) le congruenze (2), (3), $\cdots$, (m) si trasportano per parallelismo nella varietà V_n''', lungo la geodetica (B), in quale caso si hanno lungo (B) le relazioni

$$\gamma_{\alpha l 1} = 0 \qquad (\alpha, l \leq m). \tag{6'}$$

Introducendo i valori (5) nelle equazioni (3), la prima risulta identicamente soddisfatta e le equazioni alle variazioni assumano la forma

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varepsilon_h}{d\sigma_1^2} + \sum_2^m{}_\alpha (\gamma_{1h,1\alpha} - W_{h\alpha})\,\varepsilon_\alpha + \sum_{m+1}^n{}_r V_{hr}\,\varepsilon_r = 0\,, & (h = 2, 3, \cdots, m) \\ \dfrac{d\varepsilon_k}{d\sigma_1} + \sum_2^m{}_\alpha w_{k\alpha}\,\varepsilon_\alpha + \sum_{m+1}^n{}_r w_{kr}\,\varepsilon_r = 0\,, & (k = m+1, \cdots, n) \end{cases} \tag{7}$$

dove $\gamma_{1h,1\alpha}$ sono i coefficienti di Ricci relativi alle sole congruenze (h), e si è posto per semplicità

$$W_{h\alpha} = \sum_{m+1}^n{}_\beta w_{h\beta}\, w_{\beta\alpha}\,, \qquad V_{hr} = \frac{dw_{hr}}{d\sigma_1} - \frac{dw_{1h}}{d\sigma_r} - W_{hr}\,.$$

Abbiamo diviso in due parti la sommatoria delle ultime equazioni (7), per mettere in evidenza i termini che caratterizzano l'anolomia della varietà, che sono proprio le quantità $w_{k\alpha}$ ($k > m$, $\alpha \leq m$), e a traverso esse le $W_{h\alpha}$ ($h, \alpha \leq m$). Infatti, supponiamo che le relazioni (1) siano completamente integrabili. In questo caso tutte le quantità $w_{k\alpha}$, $W_{h\alpha}$ ($k > m$, $h\,\alpha \leq m$) sono nulle, e le ultime equazioni (7) formano un sistema differenziale lineare ed omogeneo nelle sole quantità ε_k ($k > m$). Se prendiamo per questo sistema la soluzione evidente, nella quale tutte le ε_k sono nulle, le prime equazioni (7) assumano la forma già nota [1]

$$\frac{d^2\varepsilon_h}{d\sigma_1^2} + \sum_2^m{}_\alpha \gamma_{1h,1\alpha}\,\varepsilon_\alpha = 0 \qquad (h = 2, 3, \cdots, m)\,. \tag{8}$$

La reciproca non è vera, e cioè, esistono delle geodetiche in V_n''' per le quali le equazioni alle variazioni possono assumere la forma (8), senza che le equazioni (1) siano completamente integrabili. Per questo è necessario e basta che le quantità $w_{h\alpha}$ ($k > m$, $\alpha \leq m$) siano nulle solamente lungo (B). Si deve osservare che le $w_{k\alpha}$ non rappresentano tutte le condizioni d'integrabilità delle (1), che sono date dalle formule

$$\gamma_{kl\alpha} - \gamma_{k\alpha l} = 0 \qquad (k > m\,;\ \alpha, l \leq m). \tag{8'}$$

In generale le equazioni (7) formano un sistema non scindibile dell'ordine $n + m - 2$.

(1) *Sopra la stabilità geodetica.* («Rendiconti», 5^6, 1927, p. 109, formule (6)).

Nel caso di una V_3^2, le equazioni (7) prendono la forma

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varepsilon_2}{d\sigma_1^2} + (k - w_{23}\, w_{32})\,\varepsilon_2 + \left(\dfrac{dw_{23}}{d\sigma_1} - \dfrac{dw_{12}}{d\sigma_3} - w_{33}\, w_{23}\right)\varepsilon_3 = 0\,, \\ \dfrac{d\varepsilon_3}{d\sigma_1} + w_{32}\,\varepsilon_2 + w_{33}\,\varepsilon_3 = 0\,, \end{cases}$$

che si può ottenere dalle equazioni del prof. Cartan [1], eliminando l'incognita ausiliaria w, e mettendo in evidenza la curvatura k, ossia il coefficiente di Ricci $\gamma_{12,12}$ relativo alle congruenze (1) e (2).

Fisica. — *Velocità molecolari, stati d'eccitazione e probabilità di transizione in un gas degenere.* Nota I di E. Persico, presentata [2] dal Socio O. M. Corbino.

1. La teoria cinetica dei gas perfetti, basata sulle considerazioni statistiche di Maxwell e Boltzmann, è stata riconosciuta inapplicabile quando il gas si trovi a bassissima temperatura o presenti altissima densità: più precisamente, quando il rapporto

$$(1)\qquad a = \frac{nh^3}{(2\pi mk\,\mathrm{T})^{3/2}}$$

(dove n è il numero di molecole per c. c. ed m la massa di ciascuna) non sia trascurabile rispetto all'unità. In questi casi, anche se si considera ancora il gas come perfetto, cioè se si trascura l'azione mutua delle molecole e il loro volume, si deve però considerare il movimento delle molecole come soggetto alle leggi quantistiche, e, secondo una ipotesi formulata da Fermi e generalmente accettata, si deve applicare alle molecole lo stesso principio che Pauli ha enunciato per i vari elettroni di un atomo, cioè: non vi possono mai essere in un gas due molecole uguali con gli stessi numeri quantici. In particolare non vi possono essere in nessun istante due molecole uguali aventi le stesse componenti di velocità. Il gas, in queste condizioni, dicesi *degenere*, e si discosta nel suo comportamento fisico da un gas perfetto (p. es., anche allo zero assoluto ha una certa energia e una certa pressione, e ciò si comprende se si pensa che un gas in cui tutte le molecole fossero in quiete, contravverrebbe al principio enunciato poc'anzi).

(1) Nota già citata.
(2) Nella seduta dell' 8 gennaio 1928.

Per l'idrogeno nelle condizioni normali, a è dell'ordine di 1/1000 e quindi si è lontani dalla degenerazione.

Le condizioni di degenerazione (cioè a dell'ordine di 1, o maggiore) si possono realizzare in tre diverse circostanze:

1° Quando T è assai piccolo, sperimentando cioè a 3° o 4° assoluti ed innalzando la pressione a qualche atmosfera. Alle difficoltà tecniche di queste esperienze si aggiunge il fatto che in queste condizioni il gas, come è noto, non può più considerarsi perfetto perchè intervengono le azioni mutue tra le molecole.

2° Quando n è assai grande; questa condizione è realizzata in certe stelle dove la densità può raggiungere anche 10^5, e perciò malgrado la elevata temperatura, il gas è completamente degenere.

3° Quando m è piccolo, quando cioè si tratta di elettroni anzichè di atomi. Questa condizione è realizzata (oltrechè nelle stelle) nell'interno dei metalli, dove, come ha mostrato il Sommerfeld (Naturwissenschaften, 41, 825, 1927), il gas degli elettroni deve ritenersi degenere anche a temperatura ordinaria.

2. La distribuzione delle velocità delle molecole e conseguentemente l'equazione di stato per un gas degenere, è stata calcolata da Fermi (« Zs. f. Ph. », 36, 902, 1926) nell'ipotesi che le molecole siano monoatomiche e si possano assimilare a punti materiali, e abbiano quindi 3 gradi di libertà. È facile però comprendere che, se le molecole, anche essendo monoatomiche, sono suscettibili di diversi stati di eccitazione, ed hanno quindi, oltre ai 3 gradi di libertà del moto traslatorio, uno o più gradi di libertà caratteristici delle loro condizioni interne, la distribuzione delle velocità deve risultarne modificata. Infatti, mentre p. es., nel primo caso non vi possono essere due molecole aventi le stesse componenti di velocità, nel secondo possono esservi, purchè si trovino in stati di eccitazione diversi (infatti per non violare il principio di Pauli basta che differiscano per uno solo dei numeri quantici).

Reciprocamente, la distribuzione delle molecole nei vari stati di eccitazione e le probabilità di passaggi dall'uno all'altro nell'ipotesi di Pauli–Fermi, restano influenzate dalla distribuzione delle velocità di traslazione. Infatti, p. es., il passaggio di una molecola da uno stato 1 a uno stato 2 risulta vietato, se vi è già nel gas una molecola nello stato 2 avente le stesse componenti di velocità. Pertanto anche le formule di Einstein per la probabilità di transizione vanno modificate.

Scopo di questo lavoro è appunto ricercare quantitativamente come la legge di distribuzione delle velocità, quella della ripartizione nei vari stati di eccitazione e quelle delle probabilità di transizione vengano modificate in un gas degenere monoatomico per effetto della loro mutua dipendenza stabilita dal principio di Pauli.

3. Limitiamoci al caso che lo stato di eccitazione degli atomi sia caratterizzato da un solo numero quantico; e le energie corrispondenti ai vari stati di eccitazione siano:

$$\omega_j \quad , \quad (j = 1, 2, 3 \cdots)$$

Supponiamo (v. Fermi, loc. cit.) le molecole attratte proporzionalmente alla distanza da un centro fisso, intorno al quale costituiscono altrettanti oscillatori armonici di frequenza ν. L'energia di uno di questi dovrà essere un multiplo di $h\nu$ e quindi l'energia totale di una molecola sarà del tipo

$$\omega_{js} = \omega_j + sh\nu \qquad (j, s = 1, 5, 3 \cdots) \tag{2}$$

Noi dovremo ora supporre che la frequenza ν sia scelta in modo da non coincidere con nessuna delle frequenze di emissione $\frac{\omega_j - \omega_k}{h}$ nè con loro sottomultipli: ciò sarà certo possibile, essendo completamente arbitraria la forza di attrazione del centro fisso, e quindi ν. Con tale presupposto, data l'energia totale di una molecola vi è al più un solo modo di ripartirla fra energia interna ω_j ed energia del moto oscillatorio $sh\nu$: restano cioè determinati j ed s. Perciò per ricercare il numero N_{js} di molecole aventi una data energia ω_{js} basta cercare il numero di quelle che, trovandosi nello stato j, hanno l'energia di oscillazione $sh\nu$ e ciò si può fare nello stesso modo come per le molecole non eccitabili (v. Fermi, loc. cit.). Si trova:

$$N_{js} = \frac{(s+1)(s+2)}{2} \frac{\alpha e^{-\frac{\omega_{js}}{kT}}}{1 + \alpha e^{-\frac{\omega_{js}}{kT}}}$$

dove α è una costante determinata dalla condizione $\sum_{js}^{\infty} N_{js} = N$.

Questa espressione è simile a quella che vale nel caso delle molecole non eccitabili, nel qual caso però in luogo di $\omega_{js} = \omega_j + sh\nu$ figura la sola $sh\nu$. Perciò si comprende come, proseguendo il calcolo nello stesso modo, si giunga a trovare, per la densità delle molecole nello stato j aventi la forza viva L, l'espressione

$$n_j(L)\, dL = \frac{8\pi}{\sqrt{2}} \frac{m^{3/2}}{h^3} \sqrt{L} \frac{Ae^{-\frac{\omega_j + L}{kT}}}{1 + Ae^{-\frac{\omega_j + L}{kT}}} dL$$

che differisce da quella valida per le molecole non eccitabili solamente per avere $\omega_j + L$ in luogo di L. La costante A va determinata in base alla densità totale n, e dà una misura dal grado di degenerazione. Ponendo ora

$$Ae^{-\frac{\omega_j}{kT}} = A_j \tag{3}$$

l'espressione precedente diviene:

$$(4) \qquad n_j(\mathrm{L})\,d\mathrm{L} = \frac{8\pi}{\sqrt{2}}\frac{m^{3/2}}{h^3}\sqrt{\mathrm{L}}\,\frac{\mathrm{A}_j e^{-\frac{\mathrm{L}}{kT}}}{1+\mathrm{A}_j e^{-\frac{\mathrm{L}}{kT}}},$$

da cui si vede che: la distribuzione della forza viva tra le molecole nello stato j è la stessa che si avrebbe se esse costituissero un gas a sè, la cui costante di degenerazione fosse A_j.

Bisogna però osservare che nello stabilire la (4) non si è tenuto conto del fatto che gli stati di eccitazione più elevati corrispondono a diametri atomici più grandi, e quindi a maggior probabilità di distruzione per urto, il che fa sì che stati molto elevati siano praticamente addirittura impossibili. Si cadrebbe così nello stesso inconveniente cui si va incontro nella ordinaria teoria, in cui si ammette che le densità degli atomi nei vari stati di eccitazione siano proporzionali a $e^{-\frac{\omega_j}{kT}}$: quando si calcola la densità totale si trova che la serie $\sum_1^\infty{}_j\, e^{-\frac{\omega_j}{kT}}$ diverge, appunto perchè non si tien conto di quella causa fisica di diminuizione dei termini elevati. Il Fermi ha dimostrato (questi «Rend.», 32, 493, 1923) che se ne può tener conto in modo approssimativo (ma sufficiente a rendere la serie convergente) moltiplicando la densità per e^{-bnv_j} dove v_j è il volume dell'atomo nello stato j: noi ammetteremo che lo stesso criterio sia applicabile nel nostro caso, e perciò alla (3) sostituiremo l'espressione

$$(4') \qquad n_j(\mathrm{L})\,d\mathrm{L} = \frac{8\pi}{\sqrt{2}}\frac{m^{3/2}}{h^3}\sqrt{\mathrm{L}}\,d\mathrm{L}\,\frac{\mathrm{A}_j e^{-\frac{\mathrm{L}}{kT}-bnv_j}}{1+\mathrm{A}_j e^{-\frac{\mathrm{L}}{kT}}}$$

che sarà il punto di partenza delle nostre considerazioni.

4. Integrando la precedente espressione rispetto a L da zero a ∞, si trova la densità delle molecole nello stato j: essa è

$$(5) \qquad n_j = \frac{(2\pi mk\mathrm{T})^{3/2}}{h^3}\,\mathrm{F}(\mathrm{A}_j)\,e^{-bnv_j}$$

dove si è posto

$$(6) \qquad \mathrm{F}(\mathrm{A}_j) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{A}_j\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx}{1+\mathrm{A}_j e^{-x}}.$$

La densità totale delle molecole sarà

$$(7) \qquad n = \frac{(2\pi mk\mathrm{T})^{3/2}}{h^3}\sum_1^\infty{}_j\,\mathrm{F}(\mathrm{A}_j)\,e^{-bnv_j}$$

e questa, insieme alle (3), serve a determinare le costanti A e A_j, quando sia data n.

Se poi si vuole la distribuzione della forza viva tra le varie molecole, indipendentemente dal loro stato di eccitazione, si deve eseguire su (4') la sommatoria rispetto a j, e si ha

$$(8) \qquad n(L)\,dL = \frac{8\pi}{\sqrt{2}} \frac{m^{3/2}}{h^3} \sqrt{L}\,dL \sum_1^\infty{}_j \frac{A_j e^{-\frac{L}{kT} - h\nu_j}}{1 + A_j e^{-\frac{L}{kT}}}.$$

In una Nota successiva mostreremo alcune applicazioni delle formule (5) e (8).

Chimica. — *Azione dell'acido amminosolfonico sui composti non saturi.* Nota di A. Quilico[1], presentata dal Socio G. Bruni[2].

In un precedente lavoro[3], ho esposto il probabile meccanismo della solfonazione dell'anisolo e degli altri eteri fenolici con acido amminosolfonico $NH_2 — SO_3H$ accennando alla possibilità della formazione di derivati orto come prodotti intermedi della reazione.

Allo scopo di sorprendere la formazione di tali derivati, sono ricorso al più accessibile degli eteri fenolici aventi la posizione para occupata, e cioè all'anetolo, giungendo a risultati, che se a tutta prima possono sembrare inattesi, costituiscono una ulteriore conferma della teoria data per la reazione.

Riscaldando a 140°–150° l'acido amminosolfonico con un eccesso di anetolo, ho ottenuto con buona resa, un sale di ammonio rispondente all'analisi alla formula $(C_{10}H_{11}O)SO_3NH_4$, e avente tutto il comportamento di un sale di un acido solfonico.

Il composto è stabile all'azione degli acidi diluiti a caldo, non avendosi reazione di solfati nemmeno dopo prolungato riscaldamento; gli alcali lo trasformano nei corrispondenti sali senza decomporlo. Per azione del PCl_5 a freddo si ottiene un cloruro p. f. 63°,5 la cui composizione e grandezza molecolare rispondono alla formula $(C_{10}H_{11}O)SO_2Cl$, e da questo, per ebollizione con ammoniaca alcoolica, l'ammide $(C_{10}H_{11}O)SO_2NH_2$ p. f. 156°. Non è descritto nella letteratura nessun acido anetolsolfonico di costituzione nota, poichè l'acido solforico concentrato agisce su di esso da polimerizzante,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(3) A. Quilico, questi « Rendiconti ».

come già ebbe ad osservare Cahours [1], trasformandolo in « anisoina », $(C_{10}H_{12}O)_x$. Di questo polimero, e del dimero solido metaanetolo $(C_{10}H_{12}O)_2$, sono stati preparati dei derivati solfonici di costituzione ignota, e cioè un disolfonico del metaanetolo $C_{20}H_{22}O_2(SO_3H)_2$ [2] che dà un cloruro $C_{20}H_{22}O_2(SO_2Cl)_2$ p. f. 182°-183° ed un acido solfonico dell'anisoina $(C_{10}H_{12}O_4S)_x$ [3].

Per verificare se il composto da me ottenuto fosse l'acido o. anetolsolfonico (I):

(I) $C_6H_3(OCH_3)(1)(SO_3H)(2)(CH=CH-CH_3)(4)$ (II) $C_6H_3(OCH_3)(1)(SO_3H)(2)(COOH)(4)$

pensai di trasformarlo, per ossidazione, nell'acido solfoanisico noto [4] (II) che fonde a 236° con decomposizione. Operando nelle condizioni indicate da Pfeiffer e Negreanu [5], per l'ossidazione dell'acido

$$CH_3OC_6H_4-CO-CH=CH-C_6H_3(OCH_3)SO_3H$$

e cioè con $KMnO_4$ alcalino all'ebollizione, ho ottenuto quantitativamente acido anisico, acido acetico e acido solforico; allo stesso risultato si giunge operando a temperatura ordinaria.

La conclusione che si può trarre da questo comportamento è che la solfonazione anzichè effettuarsi nel nucleo è avvenuta nella catena laterale.

Si potrebbe *a priori* pensare ad un'addizione dell'acido amminosolfonico sulla doppia legatura della catena laterale dell'anetolo secondo lo schema:

$$CH_3OC_6H_4-CH=CH-CH_3 + NH_2-SO_3H \longrightarrow CH_3OC_6H_4-CH(NH_2)-CH(SO_3H)-CH_3$$

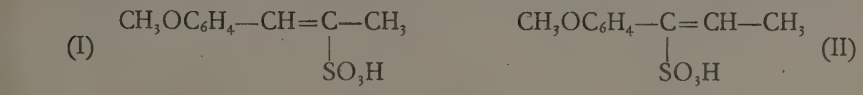
ma il composto così ottenuto sarebbe un acido amminosolfonico del tipo della taurina e non un sale di ammonio. Nemmeno si può pensare alla formazione di un etere dell'acido di Raschig che, per assunzione di una molecola d'acqua, come si verifica nell'etere etilico [6], si trasformi in alchilsolfato di ammonio:

$$CH_3OC_6H_4-CH_2-CH(O-SO_2NH_2)-CH_3 \longrightarrow CH_3OC_6H_4-CH_2-CH(O-SO_2-ONH_4)-CH_3$$

(1) « A. », 41, 63 (1842).
(2) Perrenoud, « A. », 187, 73 (1877).
(3) Orndorff e Morton, « Am. », 23, 195 (1900).
(4) Zervas, « A », 103, 341 (1857).
(5) « Ber. », 50, 1472 (1917).
(6) Paal e Kretschmer, « Ber. », 27, 1243 (1894).

data la differenza di composizione e la stabilità del sale ottenuto di fronte agli agenti idrolizzanti, ciò che dimostra essere lo zolfo direttamente unito al carbonio. Il composto contiene indubbiamente un doppio legame come è dimostrato dalla sua fragilità di fronte al permanganato anche a freddo e dalla scolorazione di una soluzione acetica di bromo.

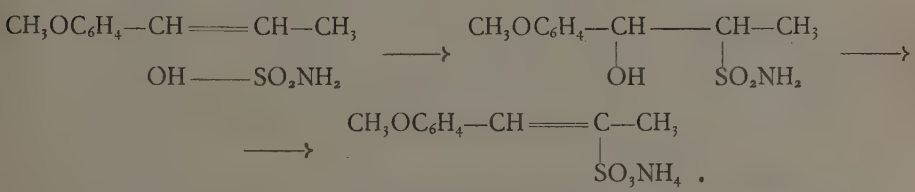
La costituzione che meglio si accorda con le proprietà chimiche di questo acido solfonico è quella espressa dalla formula (I) o dall'isomera (II):



(I) (II)

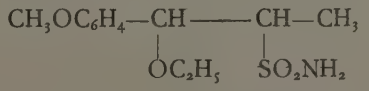
dalle quali appare evidente come l'ossidazione debba condurre ad acido anisico, acido acetico e acido solforico; quali delle due formule spetti all'acido in questione non sono ancora in grado di affermare, ma alcuni fatti che esporrò in un prossimo lavoro, rendono molto probabile la prima, che adotterò in questa Nota. Le sue proprietà concordano con quelle dell'acido vinilsolfonico $CH_2=CH—SO_3H$ noto [1].

Si può spiegare la formazione del sale di NH_4 dell'acido anetolsolfonico, ammettendo che l'ac. di Raschig si addizioni nella sua forma $NH_2—SO_2—OH$ sul doppio legame per dare l'ammide di un acido ossisolfonico che per successiva eliminazione di acqua e idratazione si trasponе a sale di ammonio di un acido solfonico non saturo:



Questa reazione è fondamentalmente la stessa che ha luogo per gli eteri fenolici semplici come l'anisolo, avendosi anche in tal caso un'addizione sul doppio legame, seguita da una trasposizione. Nell'anetolo abbiamo quattro doppi legami coniugati, dei quali il più attivo è senza dubbio quello della catena laterale come è dimostrato da altre reazioni di addizione, formazione di polimeri, di picrati, ecc.; su di questo avverrà quindi preferibilmente l'addizione.

È probabile che impiegando l'etere etilico dell'acido amminosolfonico si riesca ad isolare il composto intermedio di addizione:



(1) Elmer P. Kohler, « Am. Chem. J. », 20, 680 (1898).

o quanto meno i prodotti della decomposizione, alcool e la solfammide dell'acido anetolsolfonico.

A questo proposito, e per stabilire se la reazione abbia luogo per i fenoli a catena allilica, nei quali il doppio legame della catena laterale non è coniugato a quelli del nucleo, e per gli idrocarburi non saturi, continuerò queste ricerche.

Parte sperimentale.

Acido anetolsolfonico. $CH_3OC_6H_4—CH=C\begin{matrix}CH_3\\SO_3H\end{matrix}$. — Si riscaldano a 140°-150° a bagno d'olio, 10 gr. di acido amminosolfonico finamente polverizzato, con un eccesso di anetolo (25 gr.). Il liquido imbrunisce leggermente per la formazione di piccole quantità di resine, e si forma una massa cristallina gialla che va aumentando col tempo. Dopo 4-6 ore di riscaldamento si separa per decantazione l'eccesso di anetolo, si lava ripetutamente con etere, e si discioglie in poca acqua calda il sale di ammonio, completando l'eliminazione dell'anetolo e delle resine con successive estrazioni con etere del liquido acquoso. Per evaporazione del liquido limpido si ottiene il sale di ammonio in cristalli incolori che fondono decomponendosi a 235°-240°. La resa dipende molto dallo stato di suddivisione dell'acido impiegato e nella migliore delle preparazioni è stata di 20 gr. (teorico 25).

Analisi del sale puro seccato a 130°:

gr. 0.1516	trovato NH_3	6.55 %
	calcolato per $CH_3OC_6H_4C_3H_4SO_3NH_4$	6.94 %

Il sale di potassio, $CH_3OC_6H_4C_3H_4SO_3K$, si ottiene dal sale di ammonio in scaglie facilmente solubili in acqua. Il sale sodico, è meno solubile del sale potassico. Evaporando una soluzione del sale di ammonio con la quantità equivalente di $BaCl_2$ si ottiene il sale di bario in cristalli madreperlacei, facilmente solubili in acqua.

Analisi del sale secco:

gr. 0.3188	$BaSO_4$ gr. 0.1247	trovato Ba	23.11 %
		calcolato per $(CH_3OC_6H_4C_3H_4SO_3)_2Ba$	23.22 %

L'acido libero, $CH_3OC_6H_4C_3H_4SO_3H$, si ottiene dal sale di bario in soluzione acquosa con la quantità calcolata di H_2SO_4 diluito; cristallizza in aghetti bianchi igroscopici, solubilissimi in acqua, che dopo lunga permanenza in essicatore fondono verso 70°.

In soluzione acquosa scolora a freddo il $KMnO_4$ e riduce la soluzione ammoniacale di nitrato d'argento.

Cloruro dell'acido anetolsolfonico. $CH_3OC_6H_4—CH=C\begin{matrix}SO_2Cl\\CH_3\end{matrix}$. — Mescolando a temperatura ordinaria il sale sodico ben secco con PCl_5 in quantità equimolecolari, si ha una vivace reazione, che si completa con un leggero riscaldamento a bagno maria. Dopo un quarto d'ora si versa in acqua ghiacciata il prodotto della reazione e si separa il cloruro in cristallini gialli di odore caratteristico; la resa è teorica. Il prodotto è facilmente solubile in etere e in benzolo; per ricristallizzazione da quest'ultimo si ottiene in larghe lamine incolore lucenti che fondono indecomposte a 63°.5.

Analisi:

gr. 0.2021 AgCl gr. 0.1182 trovato Cl 14.47 %
calcolato per $CH_3OC_6H_4C_3H_4SO_2Cl$ Cl 14.38 %.

Per avere la certezza che non si trattasse di un polimero fu determinata la grandezza molecolare, mediante crioscopia in benzolo:

I. gr. 0.6060 in gr. 21.478 di benzolo trovato M = 246.1
II. gr. 0.3348 in gr. 19.044 di benzolo
Δ = 0°.350 trovato M = 251
Δ = 0°.560 calcolato per $CH_3OC_6H_4C_3H_4SO_2Cl$ 246.6.

Ammide dell'acido anetolsolfonico. $CH_3OC_6H_4—CH=C\begin{matrix}SO_2NH_2\\CH_3\end{matrix}$. — Per ebollizione del cloruro con ammoniaca alcoolica si ottiene l'ammide in aghi bianchi lucenti, che purificati per ricristallizzazione dall'alcool fondono a 156°.

Microanalisi:

gr. 0.007022 N corretto cm_3 0.589 $\left\{\begin{matrix}16.5°\\751\text{ mm.}\end{matrix}\right.$
trovato N 6.45 %
calcolato per $CH_3OC_6H_4C_3H_4SO_2NH_2$ 6.17 %

Ossidazione dell'acido anetolsolfonico. — Si disciolgono in acqua 5 gr. di sale potassico, si alcalinizza leggermente con KOH, e si porta alla ebollizione; si aggiunge a poco a poco il permanganato potassico disciolto in acqua fino a leggera colorazione rosea persistente. Per l'ossidazione occorrono circa 8 grammi di permanganato. Durante l'operazione si avverte l'odore gradevole dell'aldeide anisica. Si filtra alla pompa il precipitato bruno di idrato manganico, si concentra a bagno maria, e si acidifica nettamente con HCl: si forma un abbondante precipitato bianco cristallino che si estrae

sbattendo il liquido con etere. Per evaporazione del liquido etereo si ottengono gr. 2.5 di acido anisico (teorico 3) in cristalli aghiformi che purificati per cristallizzazione dall'alcool fondono a 185°. Il liquido acquoso acido viene svaporato a bagno maria: si ottiene una soluzione odorante fortemente di acido acetico, che per raffreddamento si rapprende in una massa cristallina costituita da cloruro e solfato potassico. Ad un identico risultato si giunge operando a temperatura ordinaria.

Chimica. — *I sistemi:* $Cd(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$; $Zn(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$; $Mg(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$ *a* 20°. Nota di G. Malquori [1] presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Lo studio dell'azione disidratante che l'acido nitrico ha sui nitrati idrati, permette l'identificazione dei diversi idrati ed è utile ausilio per l'interpretazione della loro struttura.

Ho, per questo, creduto opportuno di studiare i sistemi: $Cd(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$; $Zn(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$; $Mg(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$ a 20°.

Sugli idrati del nitrato di cadmio la ricerca più attendibile è quella di Funk [3], il quale ha trovato che fino al punto di fusione del tetraidrato è possibile l'esistenza di due idrati distinti: il noveidrato e il tetraidrato.

Al disopra del punto di fusione del tetraidrato può esistere anche il biidrato.

Lescoeurs [4] ha ottenuto biidrato aggiungendo ad una soluzione satura di tetraidrato, un uguale volume di acido nitrico fumante.

Anche per gli idrati del nitrato di zinco le notizie più sicure si hanno dal diagramma di stato tracciato da Funk [5]. Questi ha stabilito l'esistenza di tre idrati: il noveidrato, l'esaidrato e il triidrato.

Wassiljew [6], ha preparato un tetraidrato, trattando ossido di zinco con acido nitrico (d = 1.4).

Le indicazioni della letteratura al riguardo degli idrati del nitrato di magnesio sono più incerte e contraddittorie.

Funk [7] non è riuscito ad identificare un idrato più povero di acqua dell'esaidrato.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.
(3) « Z. anorg. », *20*, 393, (1899).
(4) « Ann. Chim. Phys. », [7], 7, 416, (1896).
(5) Loc. cit.
(6) « I. Russ. Ges. », *41*, 747, (1909).
(7) Loc. cit.

Per i sistemi $Zn(NO_3)_2 — HNO_3 — H_2O$ e $Mg(NO_3)_2 — HNO_3 — H_2O$, ho descritto le curve di solubilità estendendole fino alle soluzioni sature rispettivamente di nitrato di zinco tetraidrato e di nitrato di magnesio esaidrato, in acido nitrico (d = 1.52), mentre per il sistema $Cd(NO_3)_2 — — HNO_3 — H_2O$, ho potuto estendere la ricerca a tutto il campo delle concentrazioni.

I risultati che saranno esposti in dettaglio altrove sono riprodotti nella figura.

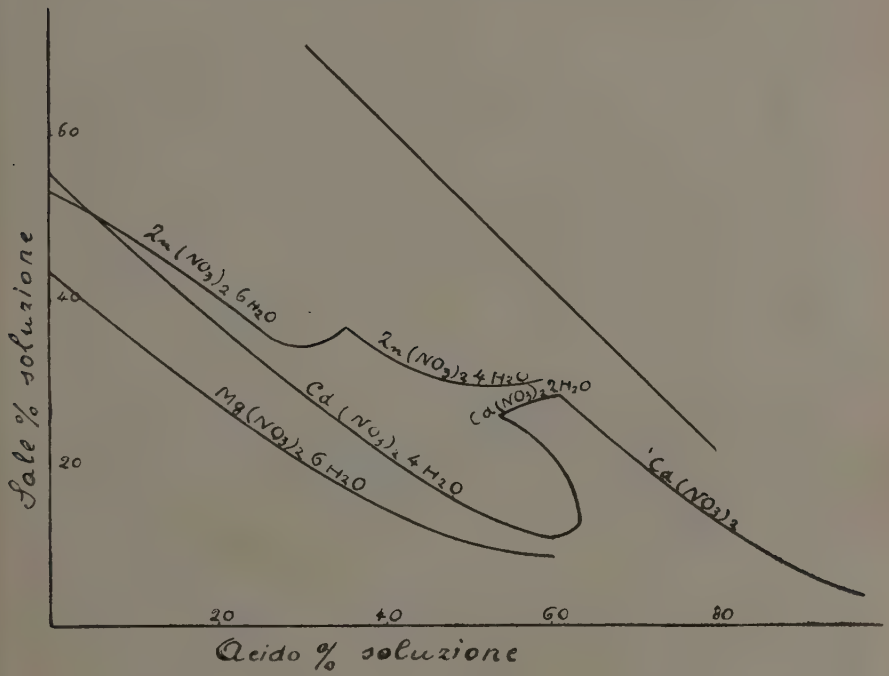


Fig. 1.

Come si vede, esistono in equilibrio con soluzioni acide di differente concentrazione i seguenti idrati:

$Cd(NO_3)_2\ 4H_2O$	in equilibrio	con	soluzioni contenenti fino al	52.95 %	HNO_3
$Cd(NO_3)_2\ 2H_2O$	»	»	»	60.01 %	»
$Zn(NO_3)_2\ 6H_2O$	»	»	»	34.45 %	»
$Zn(NO_3)_2\ 4H_2O$	»	»	»	59.21 %	»
$Mg(NO_3)_2\ 6H_2O$	»	»	»	49.12 %	»

Risulta inoltre che mentre il nitrato di cadmio tetraidrato, può essere completamente disidratato a temperatura ordinaria dall'acido nitrico (d = 1.52),

il nitrato di zinco esaidrato perde, nelle stesse condizioni, solo due molecole d'acqua, mentre il nitrato di magnesio esaidrato rimane inalterato.

Se si confronta l'azione disidratante che l'acido nitrico esercita sugli idrati dei nitrati dei metalli bivalenti con tutto un'assieme di proprietà quali: calore di idratazione, tensione di vapore, punto di fusione, si possono trarre interessanti deduzioni circa la struttura di questi nitrati idrati e la loro stabilità in relazione ai raggi ionici dei cationi.

Queste considerazioni saranno svolte altrove.

Chimica. — *Ancora sulla dispersione rotatoria degli aspartati alchilici.* Nota [1] di F. P. Mazza, presentata dal Socio A. Piutti.

In una nota in collaborazione con G. dello Jojo [2] ho pubblicato i risultati delle determinazioni delle variazioni con la lunghezza d'onda del potere rotatorio degli aspartati monoetilico e monoisoamilico, notando che la curva era di andamento tutto affatto normale e solo presentava un massimo assai spiccato in corrispondenza di $\lambda = 5209$ Å, cosa prevedibile poichè il Karrer aveva già notato un massimo positivo nella curva di dispersione rotatoria dell'acido aspartico.

La dottoressa M. L. Pagliarulo, proseguendo alcuni suoi studi sulle relazioni tra dispersione rotatoria e dispersione rifrattiva, ha creduto bene di ripetere il nostro lavoro pubblicandolo in questi « Rendiconti ». Dalle sue determinazioni risulterebbe una curva con un flesso nell'intervallo 5300-6200 Å. Vedo la necessità di fare alcune osservazioni per tutelare il valore delle nostre misure.

Nelle sue determinazioni la dottoressa Pagliarulo ha seguìto un metodo sperimentale in verità poco sensibile, non adoperando nemmeno la linea 5209 Å dello spettro d'arco dell' argento, in corrispondenza della quale noi abbiamo osservato il massimo del potere rotatorio. La dottoressa Pagliarulo si è, inoltre, servita di una polarimetro di Laurent nel quale era stata soppressa la lamina di quarzo mezza onda, ed ha perciò eseguite le misure leggendo col massimo di oscurità, ed impiegando le piccole intensità luminose fornite dalle linee della luce di tubi Geissler, decomposta con lo spettroscopio nonchè dello spettro di fiamma del litio e del sodio e di alcune linee dello spettro d'arco del mercurio e del rame. È chiaro che, operando in tal modo, la esattezza delle misure è assai scarsa, poichè è noto che l' errore sperimentale del polarimetro di Mitscherlich raggiunge, nelle migliori

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1927.

(2) « Rend. Acc. Lincei », 5 (6), fasc. IV.

condizioni, impiegando la intensa luce di una lampada a sodio, circa 0.1. Anzi il prof. Carelli nel suo lavoro *Sulla dispersione rotatoria di soluzioni fluorescenti*[1], pure impiegando come sorgente luminosa l'arco del mercurio e del ferro, ha notato, impiegando questo metodo, *scarti* forti, che, nel violetto, raggiungevano 30′.

E poichè la dottoressa Pagliarulo ha impiegato la soluzione di aspartato monoetilico al 0.748 %, che le dava anche angoli di rotazione compresi tra 2′ e 8′, si vede immediatamente l'attendibilità delle sue letture.

Ancora: la linea rossa dello spettro di fiamma del litio è assai oscura e ci ha costretti, nelle nostre esperienze, di adoperare il polverizzatore di Guye alimentato con idrogeno ed un angolo di penombra di 7°: non capisco come ha potuto la dottoressa Pagliarulo leggerla bene con la disposizione da lei impiegata. Le grandi difficoltà di lettura appariscono dai bellissimi lavori del Lowry sulla dispersione rotatoria del quarzo, sebbene la tecnica da lui impiegata fosse perfetta. Lo stesso devesi dire delle linee azzurro-oscure e violette: il Lowry, e noi, abbiamo impiegato la 4678 Å dello spettro d'arco del Cadmio con penombra di 8°, e le 4810, 4722 e 4680 Å dello zinco, con un regime di arco di 8 Amp. e con un sistema ruotante del tipo indicato dal Baly: pure si sono incontrate notevoli difficoltà di lettura, mentre invece la dottoressa Pagliarulo ha creduto di poter leggere con esattezza angoli di 5′-6′ con linee violette oscure quale quella 4046 Å del mercurio che, pertanto, nel suo lavoro sulla dispersione rotatoria delle soluzioni acquose di acido tartarico, confessava di non aver potuto impiegare, a causa della poca luce prodotta. Noi abbiamo invece impiegata una disposizione assai più sensibile, servendoci quasi esclusivamente di spettri d'arco, il che ci ha permesso di adoperare un polarimetro di Lippich a campo tripartito, con la sensibilità di più di 0°,01, ed abbiamo usato una soluzione di aspartato al 7.1 % che dava angoli di rotazione dell'ordine di 0°,25-1°,33. Da ciò si vede chiaramente quanto minore sia stato l'errore possibile.

Il fatto poi, che la dottoressa Pagliarulo tracci curve di dispersione rotatoria con gli angoli osservati e non colle rotazioni specifiche, nè dia dettagli di lunghezza di tubo, densità, ecc., fa sì che non si possano controllare i suoi valori con quelli già noti dalla letteratura, e ciò prescindendo da alcuni particolari sperimentali, quale la mancanza di un dispositivo per mantenere costante la temperatura.

Riguardo la curva di dispersione, non si può parlare di dispersione anomala, ma solo di anomalia di essa, perchè non sono sufficienti caratteri l'inflessione, il massimo e il cambiamento di segno come ha dimostrato lo Chapman[2]. Per gli aspartati monoalchilici, è da parlare semplicemente di

(1) «Rend. Acc. Lincei» (5), 32, 272.
(2) Chapman, «An. Rep.», 1914, 18.

una dispersione rotatoria complessa, per la quale sono necessarie due termini dell'equazione generale di Drude, e dello stesso segno.

In quanto allo studio dell' indice di rifrazione bisognerebbe calcolare le rifrazioni e le dispersioni specifiche e molecolari, e vedere se vanno d'accordo con la costituzione chimica del composto studiato. Inoltre bisogna tener presente che lavorando con eteri amminoacidi, in soluzione acquosa, sono necessarie le più rigorose precauzioni per evitare elevazioni di temperatura od altre cause che tanta influenza hanno sulla dinamica molecolare di questo genere di composti labilissimi. Termino pertanto col confermare i miei risultati e le conclusioni che ne ho tratte.

Geologia. — *La digitazione gneissica di Val Inferno (Gran Paradiso) e le sue relazioni con la massa frontale del ricoprimento quinto.* Nota di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentatata [1] dal Socio L. DE MARCHI.

La principale caratteristica tettonica presentata dalla parte anteriore del ricoprimento quinto nella zona compresa fra la Valsavarenche e la Valnontey (Gruppo del Gran Paradiso), è costituita dalla digitazione gneissica della Valle dell' Inferno. Nel corso del rilevamento geologico compiuto in questa regione durante l'estate del 1926 e 1927, *ho potuto constatare in maniera definitiva che la digitazione in discorso si collega nella sua parte superiore, e non nell' inferiore, alla massa frontale del Gran Paradiso (V).*

Dopo lunghe e non sempre agevoli ricerche, sono riuscito a stabilire la successione dei diversi tipi litologici che formano il tratto per noi interessante della cresta spartiacque fra le due valli sopranominate, tratto che si estende dal Monte Grand Sertze sino a Punta Lauson. Nella parte meridionale della giogaia, cioè lungo il costone roccioso che divide il ghiacciaio Timorion da quello del Grand Val, affiora il ben noto gneiss occhiadino, sottoposto, nei pressi dell' insellatura fra il Monte Grand Sertze e la Punta dell'Inferno, a una considerevole coltre di gneiss micaceo–granatiferi, ai quali fan seguito verso l'alto prima dei gneiss chiari, minuti, e poscia i gneiss scuri, grafitici della Punta dell' Inferno. Più a nord, nella depressione fra quest'ultima cima e la Punta del Tuf, tornano ad affiorare i gneiss chiari, ora minuti ed ora tendenziosamente occhiadini, che soggiacciono ai gneiss carboniosi di Punta del Tuf. Al di sopra di questi, sulla parete destra di Val Inferno, posano i calcari e le dolomie del Trias; da qui in su tutto il versante meridionale di Punta Lauson è formato da calcescisti, inframezzati da alcune lame triasiche più o meno potenti e, verso l'alto, da apofisi di rocce

(1) Nella seduta del 15 gennaio 1928.

simiche. Durante le mie numerose escursioni in questa zona, non sono mai stato capace di scorgere la più piccola traccia di terreni mesozoici nell'intero tratto di cresta compreso fra il Grand Sertze e la Punta del Tuf; d'altra parte la pendenza assiale verso Nord Est del ricoprimento esclude in modo assoluto che ciò che non passa per la cresta possa sussistere in aria.

La fronte della massa principale, nella sua parte nucleare, è costituita dai gneiss occhiadini, qua e là granitoidi, che affiorano sulla poderosa dorsale del Monte Grand Sertze, mentre verso l'esterno presenta dapprima un considerevole lembo di gneiss micacei, poi un banco di gneiss chiari, minuti, ed infine la poderosa copertura dei gneiss scuri carboniosi di Punta dell'Inferno e del costone posto a Nord del ghiacciaio Timorion. Su queste ultime formazioni si adagiano i calcescisti di Val Inferno, inframezzati da un ammasso lenticolare di prasiniti; il Mesozoico in discorso è molto potente nella parte bassa e media della valle, mentre nella parte superiore va sempre più assottigliandosi verso l'*alto*, finchè si riduce ad una lama sottilissima, progressivamente annullantesi in mezzo agli scisti permo-carboniferi. Infatti i gneiss grafitici, posti alla base della digitazione, si collegano presso Punta dell'Inferno con la massa originaria, in modo da pizzicare il Secondario sotto una vera e propria anticlinale gneissica, per quanto considerevolmente laminata.

Al nucleo della digitazione stanno i gneiss chiari, già ricordati per la insellatura fra Punta dell'Inferno e Punta del Tuf, mentre all'esterno si trova un rivestimento più o meno regolare di gneiss carboniosi; questi due tipi di rocce si succedono in una disposizione sinclinale - dovuta all'inflettersi verso il basso della fronte del ricoprimento - in parte modificata e complicata dai movimenti tettonici e forsanco dall'erosione pretriasica.

Al di sopra della digitazione gneissica, sul versante meridionale di Punta Lauson, si riscontrano quattro lame di Trias, delle quali le due inferiori sono notevolmente potenti. Verso il basso la digitazione si suddivide anteriormente in un certo numero di scaglie listriche, portando complicazioni e disturbi anche nel Trias, tanto che presso Leviona di mezzo gli affioramenti calcarei sono in numero di sei. La digitazione riappare per l'ultima volta sulla cresta M. Loczière–Leviona inferiore, ov'ebbi la fortuna di scoprire un lembo di gneiss chiaro minuto e tabulare, che con ogni evidenza termina inferiormente in mezzo ai terreni del Mesozoico, assieme alle tre lame triasiche sovrastanti, dalle quali è separato per mezzo di una potente massa di calcescisti.

Nel versante orientale della catena il nucleo della digitazione si continua, sotto forma di una fascia chiara molto evidente, tanto sulla parete a sinistra che su quella a destra del ghiacciaio del Lauson, frammezzo agli scisti scuri del Permo-Carbonifero; in nessun punto ho trovato traccia del Mesozoico di Val Inferno che, per le ragioni già esposte, non vi potrebbe in alcun modo affiorare, nè, data la posizione trasversale della fascia di gneiss chiari

rispetto al ghiacciaio del Lauson, è permessa la supposizione che il Mesozoico possa passare proprio sotto il ghiacciaio attraversando questi gneiss. Ciò dimostra una volta di più che la digitazione si collega alla massa principale del ricoprimento per la sua parte superiore e, nello stesso tempo, che il fenomeno si continua in profondità.

Riassumendo, mentre sulla cresta Grand Sertze-Punta del Tuf abbiamo una sola massa continua di vari gneiss, senza possibilità che vi passi mesozoico e nel versante orientale della giogaia, per la forte discesa assiale verso NE del ricoprimento, le diverse formazioni vengano a trovarsi tettonicamente superiori alla cresta e senza alcun lembo di Secondario che le attraversi, nel basso invece, presso Leviona inferiore, le estremità della di-

Fig. 1. – Cartina geologica della giogaia Herbetet-P.ta Lauson
scala 1 : 37.500. Gb. Dal Piaz dis.

Spiegazione dei numeri: 1, P.ta Lauson; 2, P.ta del Tuf (q. 3392); 3, P.ta dell'Inferno (q. 3420); 4, Grand Sertze (q. 3514); 5, Timorion (q. 3034); 6, Val Inferno.

gitazione sia gneissiche che triasiche poggiano sui calcescisti, per il che non è possibile se non « una inflessione, aperta verso il basso, della fronte del ricoprimento ».

L'ing. V. Novarese [1] nel suo profilo della Grivola, fa arrivare i calcescisti di Val Inferno fino alla cresta spartiacque subito a sud della Punta del Tuf [2], mentre sulla parte settentrionale di Punta dell'Inferno [3] segna

(1) Novarese V., *Il profilo della Grivola.* « Bollettino Comitato Geologico », Roma, 1909, p. 497, ecc., tav. XV.

(2) Avverto il lettore che per la toponomastica seguo la tavoletta fotogrammetrica al 25.000 (Gran Paradiso) dell' I. G. M., nella quale la Punta del Tuf (q. 3392) corrisponde

una notevole massa di Trias neritico, poggiante sopra gli stessi gneiss chiari, più meno occhiadini, che formano il Grand Sertze, ecc. Queste osservazioni sono contraddette dai risultati sovra esposti delle nostre estese e dettagliate ricerche; probabilmente i gneiss chiari e i gneiss micacei della sella fra il Grand Sertze e la Punta dell' Inferno, molto simili se visti da lontano ai calcari triasici e rispettivamente ai sedimenti orogeni del Lias, potrebbero

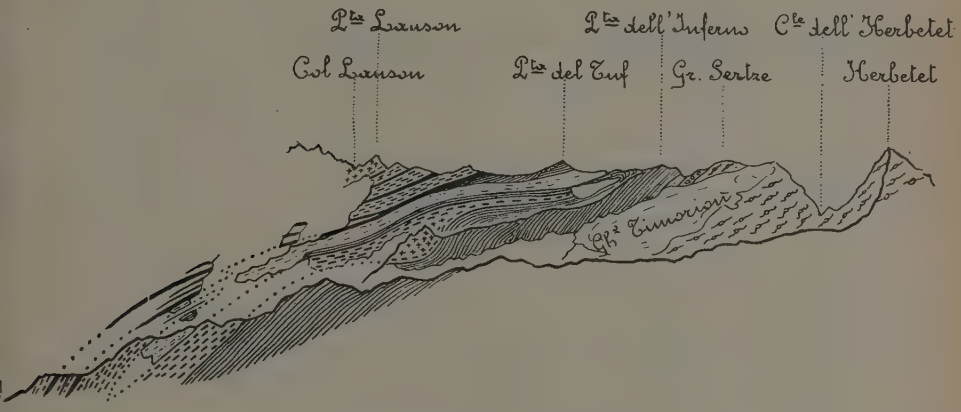


Fig. 2. – Versante occidentale della catena Herbetet–P.ta Lauson; scala 1 : 37.500. Gb. Dal Piaz dis.

Spiegazione dei numeri: 1, Leviona inferiore.

Quaternario.

Intrusioni simiche di età alpina (prasiniti).

Calcescisti.

Calcari e dolomie del Trias.

Gneiss scuri grafitici.

Gneiss chiari, ora minuti ed ora tendenziosamente occhiadini.

Gneiss micaceo-granatiferi.

Gneiss occhiadini, qua e là granitoidi.

esser stati facilmente la causa dell'errore. Secondo l'ing. Novarese il lembo carbonifero interno (inferiore) della digitazione si collegherebbe verso l'alto mediante un'*anticlinale* al lembo esterno (superiore), mentre noi abbiamo visto ch'esso è indiscutibilmente connesso ai gneiss grafitici del Costone posto a nord del ghiacciaio Timorion, ecc., i quali non figurano nel disegno dell'Autore prima citato. Recentemente l'ing. A. Stella ebbe occasione di pub-

alla costa dell'Inferno (q. 3384) di Novarese e la Punta dell' Inferno (q. 3420) corrisponde a Punta del Tuf (q. 3420) di Novarese e del foglio geologico al 100.000 del Gran Paradiso (R. Ufficio Geologico).

blicare alcuni profili della Valle d'Aosta (R. Ufficio Geologico, 1927) e disegnò tra gli altri uno spaccato del Gran Paradiso seguendo ancora le idee dell'ing. Novarese, per cui la digitazione di Val Inferno si congiungerebbe alla massa frontale del ricoprimento per la sua *estremità inferiore*.

Nel foglio al 100.000 del Gran Paradiso, pubblicato nel 1912 dal Regio Ufficio Geologico, tutta la zona gneissica del costone a nord del ghiacciaio Timorion e la parte alta di Val Inferno, sino alla punta omonima, sono rimaste disgraziatamente *in bianco*, mentre fra il ghiacciaio del Lauson e il minuscolo ghiacciaio posto a nord–est della punta del Tuf sono segnati dei calcescisti che assolutamente non esistono. Abbiamo visto in precedenza com'è costituita e come dev' essere interpretata questa regione che, per quanto ristretta, presenta tuttavia considevoli difficoltà, non solo per lo studio ma anche per il semplice accesso.

Nella sintesi di R. Staub « Der Bau der Alpen » [1], la digitazione di Val Inferno è interpretata correttamente, ma il suo collegamento col ricoprimento del Gran Paradiso vien supposto più alto del vero e asportato dall'erosione.

Un' interpretazione schematica del fenomeno, ma tuttavia pressochè corrispondente a quella da noi data, si trova in una nota [2] e nel lavoro « Sulla struttura delle Alpi Occidentali » [3] di F. Hermann; un'altra di molto maggior dettaglio, è apparsa nel recentissimo « Stereogramma delle Alpi Valdostane centrali » del medesimo Autore [4], stereogramma disegnato per il tratto Grivola-Herbetet anche sulla base dei rilievi di dettaglio eseguiti nell'estate del 1926 dallo scrivente.

Sono lieto di porgere pubblicamente i sensi della mia profonda riconoscenza al dott. F. Hermann, che mi fu maestro paziente e autorevole negli studi geologici sul Gruppo del Gran Paradiso.

(1) Staub R., *Der Bau der Alpen.* « Mat. C. Géol. Suisse », n. 8, 52e livr., 1924. (spaccati).

(2) Hermann F. *Sur le faisceau de plis en retour de Valsavarenche et les prolongements de l'éventail de Bagnes dans les Alpes franco-italiennes.* « C. R. Ac. Sc. ». Parigi, tomo 180, 1925, p. 1515, figura.

(3) Hermann F., *Sulla struttura delle Alpi occidentali.* « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », Milano, 1925, vol. LXIV, tav. VI, fig. 4. n. 11.

(4) Hermann F., *Stereogramma tettonico delle Alpi Valdostane centrali*, segmento 2 « Memorie Istituto Geologico di Padova », vol. VII, 1927.

Biologia. — *Osservazioni sulla biologia sessuale degli « Scitodoidi »* [1]. Nota di B. Monterosso, presentata [2] dal Socio A. Russo

Pochissimi lavori possediamo sulla vita sessuale dei Ragni appartenenti al genere *Scytodes Latr.* [3], ciò che potrebbe recar meraviglia data la diffusione e l'importanza di questo gruppo. Le osservazioni, che sono per comunicare, ci daranno sufficiente ragione di tale scarsezza di notizie. Difatti, come è stato accennato in uno scritto precedente (1927), molte e forse tutte le specie del gruppo menano vita notturna, trattenendosi nei luoghi più reconditi, e allontanandosi pochissimo dalle fessure, ove hanno passato il giorno in una specie di letargo. L'ovificazione ha luogo in tali impenetrabili nascondigli e il bozzolo ovigero, come diremo fra breve, viene costantemente mantenuto fra le appendici della madre, la quale per tutto il tempo, fino all'uscita dei piccoli, non va all'aperto. Se talora, eccezionalmente, si affaccia dalla fessura, sperando di soddisfare la fame, non porta seco il bozzolo, ma lo lascia assicurato ai fili, tesi nell'interno del nascondiglio. Ecco perchè è quasi del tutto sfuggito il comportamento di queste specie riguardo alle uova. In cattività, nessun Araneologo aveva potuto ottenere le uova, forse perchè, essendosi fino ad ora sconosciuto il verò regime alimentare di questi organismi, le prigioniere restavano mal nutrite e quindi in condizione assolutamente contraria alla possibilità di portare a termine le cellule sessuali femminili. Avendo trovato il modo di nutrirle sufficientemente (1927), ho potuto ottenere, nel mio allevamento, frequenti accoppiamenti ed avere diversi bozzoli. Do qui di seguito, in poche parole, le più interessanti osservazioni, fatte in proposito.

Accoppiamento. - Tutte le specie [4] che vivono qui nelle case si comportano ugualmente. Il ♂ è sempre pronto all'atto sessuale. La ♀, come risulta dalle mie ricerche, vi si presta solo quando è matura, ma vergine.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Zoologico della R. Università di Catania.

(2) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(3) Gli Araneologi moderni hanno ristretto il gen. *Scytodes* nei limiti, indicati non da Latreille, ma da Walckenaer. Per la legge di priorità tuttavia il genere in parola deve portare il nome del fondatore: in tal guisa va corretta l'indicazione data nella Nota precedente (1927).

(4) Non ne do l'elenco, proponendomi di comunicarlo completo, quando avrò finito di diagnosticare le varie specie, tra le quali però manca la sp. tipica (*S. thoracica Latr.*). Del resto, salvo qualche particolare di secondaria importanza, si comportano tutte nello stesso modo.

Si rifiuta validamente con tutti i mezzi di cui dispone (forza degli arti e fuga), quando è ancora impubere o quando è stata fecondata di già. Tuttavia, ho assistito diverse volte all'accoppiamento violento, voluto solo dal maschio: fatto che in altri Ragni è veramente eccezionale o addirittura impossibile. Sui particolari della copulazione mi esimo di diffondermi, perchè recentissimamente trattati in modo esauriente da U. Gerhardt (1926-1927). Il processo, prima di questo A., era stato – ma brevemente – accennato da Bertkau (1878), che lo aveva cólto, e incompletamente, in un unico caso. Il Gerhardt, ne ha potuto provocare, con quella perizia, che gli è abituale, cinque, in *S. thoracica Latr.*, in cui io invece, per mancanza di materiale, non ho fatto alcuna osservazione. Dirò, dunque, solo quanto ho potuto raccogliere di nuovo nelle mie specie.

Il ♂, non appena in presenza della ♀, tocca ripetutamente con le zampe anteriori e con i palpi, gli arti corrispondenti, nonchè il cefalotorace della compagna, nel modo descritto largamente dall'A. or citato. Se questa è disposta al còito, spinge, quasi sempre, l'estremità cefalica sotto il maschio (i due individui si pongono vicini e l'uno di fronte all'altro), e, mediante i cheliceri, gli dà un morso nella regione epigastrica, proprio sulle cosidette « impressioni chitinose ». Indi si allontanano di qualche millimetro, e all'invito, che il ♂ reitera subito, palpando gli arti della femmina con i suoi, essa solleva il cefalotorace, come ha minutamente descritto il Gerhardt, e lascia che il compagno faccia scivolare l'estremità anteriore del corpo (*pars cephalica*) sotto la sua. Il maschio, ora, allarga i cheliceri e ricerca con essi le « impressioni chitinose » dell'altro individuo. Non appena le abbia trovate, compie una caratteristica mossa, così fulminea, che non si può seguire nei suoi minuti particolari, ed attanagliando opportunamente le « impressioni » della femmina, l'afferra con il terzo paio di zampe e la rovescia indietro - talvolta addirittura la capovolge; allora, mantenendola in quella posizione, introduce i bulbi dei due palpi contemporaneamente, come hanno visto Bertkau e Gerhardt, nella vulva, trattenendoveli nel modo, descritto specialmente da quest'ultimo osservatore (1926-1927). La ♀ durante l'accoppiamento, che si compie in 7-15 minuti (Gerhardt nelle *S. thoracica*, trovate in Atene, l'ha visto protrarsi, in media, 20 minuti; laddove in una coppia, avuta ad Halle da Sòfia, durò per tre quarti d'ora) resta assolutamente immobile. Solo gli arti, che non poggiano sul terreno, mi hanno mostrato al binoculare, il leggero movimento, che fu trovato negli Artropodi da Weber e che, nei Ragni, mantenuti con le zampe sospese in modo particolare, è stato minutamente descritto da P. Gaubert (1892), il quale lo riporta al turgore, causato dall'onda sanguigna [1],

(1) Ritengo che a questa stessa causa debba ricondursi il movimento delle setole, notato da W. S. Bristowe, in alcuni Ragni in accoppiamento, e confermato da U. Gerhardt (1924, p. 510), in altri gruppi.

Il Gerhardt (1926) in *S. thoracica*, ha visto che dopo l'inserzione dell'organo copulatore, il ♂ cessa di serrare, con i cheliceri, la pelle della ♀, la quale resta tuttavia immobile fino alla fine della copulazione. Nelle mie specie, ciò non è avvenuto che una volta su dieci circa; invece il « morso nuziale » si è protratto di norma fino a quando i due individui si sono definitivamente allontanati uno dall'altro.

Tralasciando qui alcuni altri particolari, debbo fermarmi, per quanto brevemente, su un punto, che ritengo di una certa importanza.

Significato delle cosidette « impressioni chitinose ». - Con tale denominazione sono state indicate nella sottofamiglia *Scytodinae* « au-dessous des stigmates épigastriques, deux larges impressions un peu indurées, rougeâtres et arquées en croissants, et plus ou moins rapprochées de la ligne médiane » (E. Simon, 1892, vol. I, p. 274). Tali formazioni non sono, contrariamente a quanto è sembrato agli autori, costanti nelle *Scytodes*; precisamente esse appariscono, secondo le mie ricerche, con l'ultima muta, mediante la quale il Ragno acquista la maturità sessuale; quindi bisogna considerarle come caratteri sessuali secondari del genere.

Ambo i sessi ne sono forniti, ma nella ♀ sono molto più estese e profonde. L'osservazione di esse è facilissima: la cuticola di tutto l'addome è piuttosto molle mentre tali impressioni sono delle fossette a parete fortemente chitinosa; esse poi si mostrano tanto più profonde, per quanto più ci avviciniamo alla linea mediana del corpo dell'individuo. Il margine laterale interno di ciascuna si presenta ingrossato, lievemente sporgente, sì da rassomigliare ad una mezzaluna. Le due mezzelune pertanto si trovano vicinissime e si guardano con la loro parte più convessa. Gli uncini (*ungues chelarum*) del ♂, piccolissimi e mobili in un piano trasversale al suo torace e quindi al corpo della ♀, si adattano mirabilmente alle dette formazioni chitinose, e con facilità afferrano, stringendosi, i bordi laterali interni rilevati di esse; sicchè, durante il coito, mentre trattengono saldamente la femmina, non ne danneggiano affatto la pelle; a ciò non han posto attenzione nè il Bertkau, nè il Gerhardt; i quali dicono solo che il ♂ afferra la ♀ mordendole la cute addominale. Le dette fossette sono vicinissime all'organo sessuale femminile, sicchè il ♂, mantenendo ferma per mezzo di esse la compagna, può benissimo eseguire l'introduzione dell'organo copulatore del palpo nella fessura genitale. Nei casi in cui la ♀ è immatura, e quindi ancora sfornita delle fossette, il maschio, se pur raggiunge con i chelicheri il campo sessuale di essa, non trovando i punti di appiglio per i suoi uncini, finisce per rinunziare alle nozze. Qualora però sia troppo ardente, arriva a ferire la femmina, afferrandola per la cuticola; ma ciò non avviene che eccezionalmente.

Fra le riportate osservazioni, mi resta oscuro un particolare: la ♀, come si è detto, quasi sempre, prima dell'atto sessuale, morde il ♂ in corrispondenza delle sue « impressioni chitinose ». Però questo avviene anche,

e forse con maggior frequenza, quando essa non è disposta a farsi fecondare. Equivale forse, tale atto, ad un avvertimento, verso l'individuo dell'altro sesso?

Non credo facile interpretare cosiffatto comportamento, che è sfuggito ai precedenti Autori.

Dirò, in fine, che non ho mai dovuto lamentare la perdita di alcun maschio, perchè ucciso dalla femmina, nè prima nè dopo il coito.

Cure parentali. – Alcuni giorni (o settimane), dopo l'accoppiamento, la femmina tesse, se prima non l'aveva ancor fatto (ciò che avviene spesso in cattività) una rete a maglie irregolarissime, molto larghe, in un luogo, più che può, nascosto, ma sufficientemente spazioso e alto. Ai fili di essa si attacca, rimanendo quasi costantemente con la superficie dorsale in basso. Da 20 a 50 ore dopo, durante la notte, costruisce un bozzolo, quasi perfettamente sferico, fornito di esilissima parete bianca omogenea, formata di fili molto sottili, che costituiscono una larga maglia. Esso contiene una cinquantina di uova del tutto rotonde, di color perlaceo, lievemente tendente al gialliccio.

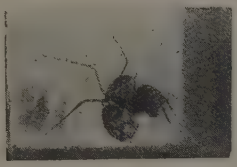
Devo qui dire che il bozzolo delle *Scytodinae* fu visto per la prima volta dal Lucas (1847). Dopo di lui, nessuno, che io sappia, ne ha descritto più. Anche W. Wagner (1894), che ha così a fondo studiato i *cocons* di molte specie di Ragni, lamenta di non poter dare alcuna notizia personale o di altri, eccetto il Lucas[1], sulle tele ovigere delle specie, appartenenti alla famiglia *Scytodinae* « malgré le haut degré d'intérêt, que présente ce groupe d'araignée » (p. 77). Il Gerhardt (1926) non ha potuto ottenere l'ovificazione delle *S. thoracica*, che mantenne prigioniere ad Halle a. S., ma che gli erano state inviate dalla Bulgaria.

D'accordo con quanto dice il Lucas[2], le uova non sono agglutinate insieme; ho anzi visto che lo sono soltanto nelle prime ore, che seguono alla deposizione: particolare, che io ho constatato nelle più svariate famiglie di Araneoidi. La femmina resta sospesa ai fili, mantenendo la faccia ventrale del corpo volta verso l'alto e poggiandovi sopra il bozzolo, che così viene a rimanere come incassato in una superficie lievemente curva, in quanto il diametro del bozzolo supera la lunghezza del cefalotorace e arriva fin quasi all'estremità posteriore dell'addome: d'altro canto, cefalotorace e addome non sono mantenuti sullo stesso piano, ma sono piegati lievemente ad angolo, il cui vertice corrisponde al peduncolo toraco-addominale (*petiolus*). La stabilità del bozzolo ovigero è così assicurata: la madre lo mantiene con i palpi (*pedes maxillares*) inarcati attorno alla superficie di esso, quasi abbrac-

(1) Il Lucas (1847) per vero ha dato una descrizione molto sommaria e superficialissima: la sua *S. thoracica* ha emesso soltanto nove uova; non gli è riuscito di nutrirla.

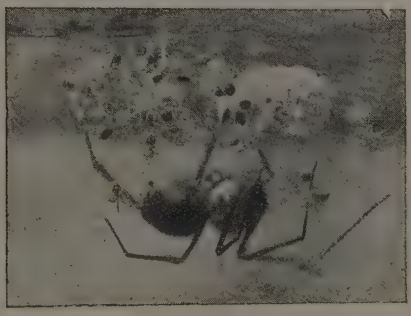
(2) Il Wagner (1894) fa dire il contrario al Lucas.

ciandolo. Inoltre, dalle filiere (*mamillae*) si diparte un mazzettino di fili sericei, che all'altro estremo aderisce al prezioso fardello. Di tanto in tanto, aiutandosi con il terzo paio di zampe, fa compiere una parziale rotazione alla pallottola serica. In tale contingenza, il movimento è affidato ai palpi: le *mamillae* non rompono i fili di sicurezza, ma vanno man mano attaccandoli più in giù del punto precedente. Anche quando la madre avverte un pericolo, *il bozzolo non viene mai afferrato con i cheliceri*, contrariamente



Fot. 1.

a quanto è stato detto (Lucas). Data difatti la estrema sottigliezza dell'involucro, ciò costituirebbe un serio pericolo per le uova. Se scacciamo dal reticolato la paziente covatrice, essa, con mossa rapidissima, sostituisce i fili, che legano il bozzolo alle *mamillae*, con altri più robusti, numerosi e



Fot. 2.

lunghi, inarca di più il cefalotorace, afferra il bozzolo con maggior cura fra i palpi, si solleva quanto può sulle zampe, e corre, *portando il bozzolo sotto il cefalotorace* a contatto con lo stesso. Se il peso è notevole (pochi giorni prima dello sgusciamento o dell'esito dei piccoli) essa adopera per camminare solo sei zampe, poichè il terzo paio viene adibito a formare una cintura di sicurezza al carico, per evitare che sfugga o tocchi il suolo (fot. 1). Come per tutti i Ragni, dalla deposizione allo sgusciamento passa un periodo vario, che nel mio allevamento è andato da 12 a 20 giorni. Frattanto la femmina non muta posizione; solo nella seconda metà dell'embriogenesi, adopera il terzo paio di zampe, per assicurare l'equilibrio del pesante fagottino. Eccezionalmente, di notte, attacca il bozzolo ai fili del reticolato e

vien giù in cerca di preda; ma, ad ogni allarme, risale velocemente e riprende il bozzolo. Privata del reticolato, non lo ricostituisce, dapprima, restando con il fardello sotto il cefalotorace, nel modo indicato sopra. Uno o due giorni avanti l'esodo dei piccoli, però, dovesse costarle sforzi inauditi, costruisce di nuovo la tela a larghe maglie, in modo che i nati possano trovarla ed attaccarvisi [1]. Avvenuto l'esodo, la madre abbandona il bozzolo e resta indifferente in mezzo ai piccoli (fot. 2); i quali, appena emessa la spoglia, si disperdono.

La stessa femmina può formare, dopo qualche mese, un nuovo bozzolo, con uova feconde, senza aver avuto altro contatto con il maschio.

Conclusioni. - Richiamo l'attenzione sul reperto, che le cosidette « impressioni chitinose », già note, sotto la *rima epigasteris*, nel gen. *Scytodes*, sono caratteri sessuali secondari, e hanno inoltre lo scopo di impedire il danneggiamento della cute addominale della femmina, durante l'accoppiamento, che ha luogo mentre il maschio la tiene immobilizzata, mediante gli uncini mandibolari. Il maschio, così, ha due organi dell'apparato boccale deputati alla funzione sessuale: i palpi e i cheliceri. La femmina invece (contro i precedenti AA.) per sostenere il bozzolo ovigero, adopera non solo i palpi (*mai* i cheliceri), ma anche le filiere, la superficie ventrale del corpo, e, come membri ausiliari, il terzo paio di zampe ambulatorie (anche nell'incedere con il bozzolo).

AUTORI CITATI

Bertkau Ph., « Arch. f. Naturg. », 44, I, 351 (1878); Gaubert P., « Ann. Sc. Nat., Zool. », XIII, 31 (1892); Gerhardt U., « Zeitschr. f. wiss. Biol. », Abt A. I, Hf 3 (1924); Id., ibidem, VI, Hf 1 (1926); Id., ibidem, VIII, Hf 1-2 (1927); Lucas H., « Ann. Soc. Ent. France » (2), V (1847); Monterosso B., questi « Rend. » , (6) VI, 171 (1927); Simon E., *Hist. Nat. Ar.*, Paris (1892); Wagner W., *L'industrie des Araignées*, St Pétersbourg (1894).

(1) In questo caso e in queste specie – come in altri gruppi - posso affermare *con assoluta certezza*, che la madre ha la possibilità di « prevedere », dirò meglio, di « presentire » l'evento della uscita dei piccoli. Su tale interessante particolare biologico sono in corso ricerche, in altro materiale.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 febbraio 1928 (Anno VI)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sugl' integrali algebrici semplici e doppi.* Nota IV [1] del Socio F. SEVERI.

15. Costruiamo ora l'integrale abeliano subordinato dall'integrale

$$L_1 = \int \frac{A dy - B dx}{f'_z}$$

sopra una qualunque curva algebrica (irriducibile) D, d'ordine δ, tracciata su f.

Per semplicità, supporremo D priva di punti multipli e situata genericamente rispetto agli assi, sicchè essa si proietterà sul piano $x\,y$, dal punto all'infinito di z, secondo una curva D', d'ordine δ, dotata di soli nodi. La D viene rappresentata monoidalmente da

$$z = \varphi(x, y) \quad , \quad g(x, y) = 0 ,$$

ove $g = 0$ è l'equazione di D'. Si può supporre, in base al teorema del resto, che sia $\varphi = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$, ove β è un'arbitraria aggiunta a D' d'ordine $l - 1$, soggetta alla sola condizione che il sistema delle aggiunte d'ordine l seghi su D', fuori dei nodi, una serie lineare (completa) contenente parzialmente la serie segata su D' dalle rette; α è poi un'aggiunta d'ordine l,

(1) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.

passante pel gruppo H staccato su D′ (fuori dei nodi) da $\beta = 0$ e segante ulteriormente D′ (fuori dei nodi) nelle proiezioni dei punti di D per cui $\zeta = 0$. Il gruppo H, attesa l'arbitrarietà di β, può inoltre supporsi costituito tutto da punti distinti (e semplici) di D′, diversi anche dai punti dove $g'_y = 0$ oppure dalle proiezioni dei punti di D dove $f'_\zeta = 0$. Deriva da ciò – e giova osservarlo pel seguito – che, in un punto di H, la $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\beta \alpha'_x - \alpha \beta'_x}{\beta^2}$ diviene infinita del 1° ordine o resta finita. Analoga conclusione vale per la $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. E gli eventuali poli di queste funzioni sono distinti dai punti $g = g'_y = 0$.

Premesso questo, dalla

$$f(x, y, \varphi) = g(x, y) = 0,$$

cui soddisfanno le coordinate del punto di D′ (o di D), si traggono le:

$$g'_x = f'_x + \varphi'_x f'_\zeta \ , \ g'_y = f'_y + \varphi'_y f'_\zeta \ , \ dy = -\frac{g'_\zeta}{g'_y} dx = -\frac{f'_x + f'_\zeta \varphi'_x}{f'_y + f'_\zeta \varphi'_y} dx,$$

e quindi L_1 riducesi, sulla curva D′ (o D), all'integrale abeliano

$$L_1 = -\int \frac{A f'_x + B f'_y + f'_\zeta (A\varphi'_x + B\varphi'_y)}{f'_\zeta (f'_y + \varphi'_y f'_\zeta)} dx = -\int \frac{A g'_x + B g'_y}{g'_y f'_\zeta} dx \ ,$$

ossia, in virtù della (1), ad

$$L_1 = \int \frac{C - A\varphi'_x - B\varphi'_y}{g'_y} dx \ .$$

Dimostreremo che L_1 è su D′ di 1ª specie. Dal n. 14 (Nota III) segue intanto che L_1 ha tutti i residui nulli su D′ (anche all'infinito) cioè che è di 1ª o di 2ª specie. Ne deriva che la funzione razionale, del punto di D′, $C - A\varphi'_x - B\varphi'_y$, deve annullarsi nei nodi di D′, giacchè in un nodo dove il numeratore di tale funzione non si annullasse, si avrebbero due punti logaritmici dell'integrale. Si potrà perciò scrivere su D′:

$$C - A\varphi'_x - B\varphi'_y = \frac{\lambda(x, y)}{\mu(x, y)} \ ,$$

ove λ, μ sono polinomi, di cui il 1° aggiunto a D′. Siccome poi la funzione $C - A\varphi'_x - B\varphi'_y$ non può, al finito, che esser finita o infinita del 1° ordine, come le φ'_x, φ'_y, e d'altra parte la seconda eventualità va esclusa, se no, negli eventuali poli del 1° ordine di $C - A\varphi'_x - B\varphi'_y$, che sono distinti

dagli zeri del denominatore g'_y, si avrebbero di nuovo punti logaritmici per l'integrale, così è giuocoforza concludere che μ non dipende da x, y. Pertanto $C - A\varphi'_x - B\varphi'_y$ riducesi al polinomio aggiunto $\lambda(x, y)$. E il grado di λ sarà $\leq \delta - 3$, altrimenti l'integrale avrebbe singolarità logaritmiche all'infinito. Si ha in conclusione il teorema:

Un integrale di differenziale semiesatto di 1ª specie, cioè un integrale del tipo (18), *dove* A, B, C *sieno aggiunte associate d'ordine* $m - 2$, *subordina un integrale abeliano di 1ª specie sopra o g n i curva algebrica della superficie.*

16. La proprietà precedente si può invertire e dà luogo a una notevole caratterizzazione dei differenziali semiesatti.

Consideriamo un'espressione differenziale qualunque, a coefficienti razionali, in dx, dy. La potremo scrivere $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$, ove A, B sono *funzioni razionali* del punto di f (non polinomi). Suppongasi che questa espressione differenziale subordini un differenziale abeliano di 1ª specie sopra ogni curva algebrica di f. Basterà anzi supporre che ciò si verifichi sulle sole sezioni piane della superficie.

Poichè per ipotesi $\int \frac{A\, dy}{f'_z}$ è un integrale abeliano di 1ª specie sopra ogni sezione $x = \text{cost.}$, la funzione A sarà del tipo $\frac{A_0}{\varphi(x)}$, ove φ è un polinomio in x ed $A_0 = 0$ una superficie aggiunta ad f, passante con una certa molteplicità per la retta all'infinito dei piani $x = \text{cost.}$ Ma se φ annullasi per $x = x_0$, deve per questo stesso valore annullarsi A_0, se no l'integrale diverrebbe identicamente infinito per $x = x_0$. Dunque A_0 è divisibile per φ, e in definitiva A riducesi ad un polinomio aggiunto d'ordine $m - 3 + s$ $(s \geq 0)$ in x, y, z ed $m - 3$ in x, z. Dovrà infine essere $s \leq 1$, altrimenti l'integrale diverrebbe identicamente infinito sul piano all'infinito, come si constata colla trasformazione quadratica $x = x'y', y = y', z = z'y'$. In conclusione $A = 0$ è un'aggiunta d'ordine $m - 2$ (al più); ed essa deve passare pel gruppo jacobiano del fascio $x = \text{cost.}$, se no l'integrale diverrebbe di 3ª specie su qualcuno dei piani $x = \text{cost.}$, tangenti ad f. Analoghe conclusioni per B.

Il differenziale abeliano sezione della data espressione differenziale con un piano $z = \text{cost}$ è (n. 15) $-\frac{A f'_x + B f'_y}{f'_y f'_z} dx$; epperò, se P è un punto comune ad $A = 0, f'_z = 0$, fuori della linea doppia e del gruppo jacobiano del fascio $x = \text{cost.}$, poichè, in P, è $f'_y \neq 0$, la B dovrà annullarsi in P, altrimenti sul piano $z = \text{cost.}$ passante per P, la funzione $\frac{A f'_x + B f'_y}{f'_y f'_z}$ avrebbe

un polo nel punto P, non di diramazione, e l'integrale abeliano corrispondente a quel differenziale avrebbe una singolarità logaritmica o polare.

Dunque $A = 0, B = 0$ sono due aggiunte di ordine $m - 2$ di una terna di aggiunte associate (n. 9, Nota III) e il differenziale considerato è un differenziale semiesatto di 1ª specie.

Condizione necessaria e sufficiente perchè un'espressione differenziale data su f, sia un differenziale semiesatto di 1ª specie, è che subordini su ogni curva algebrica della superficie (e basta anche sulle sezioni piane dei fasci $x = cost.$, $y = cost.$, $z = cost.$) un differenziale abeliano di 1ª specie.

Questa caratterizzazione dei differenziali semiesatti di 1ª specie pone senz'altro in luce che *i differenziali semiesatti di 1ª specie sono espressioni differenziali invarianti per le trasformazioni birazionali della superficie.*

17. L'integrale L $(= L_1 = L_2 = L_3)$ di un differenziale semiesatto di 1ª specie individua sopra ogni curva irriducibile D di f un gruppo canonico. Sia D variabile in un fascio Σ. La condizione necessaria e sufficiente affinchè quel gruppo canonico appartenga alla serie lineare (parziale, se la superficie è irregolare) staccata su D dal sistema aggiunto D', è che l'integrale L abbia periodi nulli ai *cicli invarianti* di D. Anzi per note proprietà degl'integrali abeliani riducibili [1], la proprietà si verifica anche se si sa soltanto che sono nulle le parti reali dei suddetti periodi. Pertanto, se le parti reali dei periodi di un integrale semiesatto L, ai cicli invarianti, non sono tutte nulle (il che accadrà sempre che il gruppo canonico corrispondente non sia segato da una D'), si potrà costruire un integrale picardiano di 1ª specie L' aventi le stesse parti reali dei periodi ai cicli invarianti (gl'integrali picardiani di 1ª specie sono tanti quante le parti reali dei loro periodi). La differenza $L - L'$ sarà allora un differenziale semiesatto di 1ª specie, coi periodi nulli ai cicli invarianti, cioè determinanti su D un gruppo canonico segato da una D'. Sicchè ogni integrale semiesatto può ottenersi combinando linearmente un integrale picardiano con un integrale semiesatto, il quale determini su D un gruppo canonico segato da una D'. Poichè gl'integrali semiesatti godenti di quest'ultima proprietà formano evidentemente un sistema lineare, che non contiene alcun integrale picardiano, si conclude che:

Il carattere q', introdotto geometricamente al n. 3 della Nota I, denota il numero dei differenziali semiesatti di 1ª specie indipendenti. La differenza $q' - q$, tra questo carattere e l'irregolarità q di f, denota il numero dei dif-

(1) Vedi le mie «Vorlesungen», p. 284. Su D si hanno due sistemi complementari regolari d'integrali riducibili. Quello individuato da $|D'|$ e quello individuato dagl'integrali di 1ª specie di Picard. Il primo sistema è *caratterizzato* dal fatto che i suoi integrali hanno periodi nulli ai cicli invarianti. Un integrale abeliano di 1ª specie di D, non può avere periodi tutti reali o tutti imaginari puri ai cicli invarianti, senza che quei periodi siano tutti nulli.

ferenziali semiesatti di 1ª specie indipendenti, che determinano sopra ogni curva algebrica D *di f (suscettibile di variare in un sistema continuo di grado > 0) un gruppo canonico, ivi staccato da una curva aggiunta* D′.

Abbiamo detto sopra *ogni* curva algebrica di f, perchè se la proprietà si verifica sopra una D particolare (variabile in un fascio lineare), si verifica sopra ogni altra curva E di f, sulla quale sia possibile di parlare di cicli invarianti (cioè che sia variabile in un sistema continuo di grado > 0). Diciamo infatti $L_1, L_2, \cdots, L_r$ $(r = q' - q)$ gl'integrali semiesatti di 1ª specie, indipendenti, che godono della proprietà segnalata sulla particolare D. Se tutti gl'integrali del sistema lineare $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_r L_r$ non godessero della proprietà stessa nei riguardi di E, esisterebbe un integrale $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r$ determinante su E un gruppo canonico non staccato da un'aggiunta E′; epperò esisterebbe un integrale di Picard L′, avente ai cicli invarianti di E le medesime parti reali dei periodi di $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r$ agli stessi cicli, sicchè $\lambda_1 L_1 + \cdot \quad \cdot + \lambda_r L_r - L'$ epperò L′ sarebbero integrali del sistema lineare che contiene $L_1, L_2, \cdots, L_r$; il che è assurdo.

18. Combinando il risultato del numero precedente con quello del n. 13 (Nota III) si vede che ad ogni integrale doppio di 1ª specie, senza periodi, resta coordinato uno ed un solo integrale semiesatto, che determini su una curva D un gruppo staccato da una curva D′ (s'intende che si parla sempre d'integrali semplici e doppi, determinati a meno di una costante moltiplicativa e di un'additiva), sicchè:

Il carattere q′ uguaglia altresì la somma dei numeri degl'integrali indipendenti doppi di 1ª specie, senza periodi, e degl'integrali picardiani indipendenti di 1ª specie.

19. Circa le curve di livello di un integrale semiesatto di 1ª specie $\frac{A\,dy - B\,dx}{f'_z}$, si possono ripetere le considerazioni della mia Nota Lincea del 1926 (2° sem., p. 522), giacchè esse poggiano solo sull'identità (1). Cioè, anche per gl'integrali semiesatti, vale il teorema che le curve di livello o posseggono soltanto I + 4 punti doppi (I invariante di Zeuthen–Segre) oppure i punti doppi sono distribuiti sopra curve algebriche, che appartengono a un fascio irrazionale o fanno parte di curve canoniche di f.

Ma quel che c'è di più notevole ancora è che *un integrale semiesatto di 1ª specie (come un integrale picardiano) è individuato (a meno di una costante moltiplicativa e di un'additiva) dall'insieme dei punti doppi delle sue curve di livello.* Questo teorema si troverà nella Memoria che pubblicherò prossimamente per sviluppare la Nota del 1926.

Vale altresì, nei riguardi di due differenziali semiesatti, l'identità di Picard, esprimente il loro determinante funzionale mediante un'aggiunta d'ordine $m - 4$.

20. Passiamo a considerare i *differenziali semiesatti di specie superiore*. Presa un'espressione differenziale $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$ con A, B polinomi di ordine l in x, y, z e posto $\Phi = \frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f'_z}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f'_z}\right)$, si ha per Φ la (13) del n. 11 (Nota III). Se $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$ è un differenziale esatto, dalla (13) segue che la superficie $Af'_x + Bf'_y = 0$ passa per Γ_z (comune a $f = 0, f'_z = 0$ fuori della linea doppia), onde, ripetendo il ragionamento del n. 9, si trova un terzo polinomio aggiunto C, d'ordine l, tale che su f è soddisfatta l'identità fondamentale (1), ove N è ora d'ordine $l - 1$. Da ciò si trae la (14) del n. 11, sicchè posto $Q = A'_x + B'_y + C'_z - N$, la Φ riducesi su f a $\frac{Q}{f'_z}$, e poichè Φ è ivi nulla, sarà $Q = Mf$, con M polinomio di ordine $l - 1 - m$ (M identicamente nullo, se $l \leqq m$). La condizione d'integrabilità dà dunque luogo alle relazioni:

$$(22) \qquad Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = Nf \quad , \quad N = A'_x + B'_y + C'_z - Mf .$$

Viceversa, se queste sussistono, dalla (14), che consegue dalla prima delle (22), scende che $\Phi = 0$ su f. Perciò *la condizione d'integrabilità per un differenziale* $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$, *con* A, B *polinomi aggiunti d'ordine* l, *equivale alle* (22).

Qualora sia soddisfatta soltanto la prima delle (22), il differenziale si chiamerà *semiesatto*. Valgono per un siffatto integrale tutte le conseguenze tratte dall'identità fondamentale, nelle quali non entri il valore di l. Così:

Condizione necessaria e sufficiente perchè $\frac{A dy - B dx}{f'_z}$ *sia semiesatto è che le aggiunte* $A = 0, B = 0$ *passino pei gruppi jacobiani dei fasci* $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, *e seghino ulteriormente* Γ_z *(sezione di* f *con* f'_z, *tolta la linea doppia), fuori dei punti cuspidali, sullo stesso gruppo di punti.*

Si hanno così tre aggiunte associate $A = 0, B = 0, C = 0$, che però non passano in generale per le rette all'infinito dei fasci $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$

Per un differenziale semiesatto valgono le proprietà indicate nel n. 12, nonchè le relazioni (17), ove però la superficie aggiunta Q ha ora l'ordine $l - 1$. Considerato l'integrale doppio

$$I = \iint \frac{Q}{f'_z}\, dx\, dy = \iint \frac{Q}{f'_x}\, dy\, dz = \iint \frac{Q}{f'_y}\, dz\, dx ,$$

a causa delle (17), esso è (secondo la terminologia del Lefschetz) un *integrale improprio di 2ª specie* e per giunta *senza periodi* (n. 13). La formula di Green permette ancora di concludere che il valore di I sopra una superficie *finita* Δ, che non incontri una almeno delle X, Y, Z, è uguale al valore dell'integrale semiesatto (18) al contorno di Δ; donde, come ai nn. 14, 15, si trae la conclusione che un integrale semiesatto di specie superiore subordina sopra una qualunque curva algebrica di f, che non sia all'infinito, un integrale abeliano finito per ogni punto al finito, ma che ha generalmente singolarità, polari e logaritmiche, all'infinito.

21. La precedente definizione di un differenziale semiesatto non ha carattere invariante. *Una definizione che ha invece carattere invariante per trasformazioni birazionali è la seguente:*

Sieno A, B, C tre funzioni razionali del punto di f, tra le quali interceda (su f) un'identità del tipo (1), la quale però non si riduca ad un legame banale fra le A, B, C. Cioè, dette $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ le sezioni di f colle $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$, fuori della linea doppia, A *non si annulli su* Γ_y, Γ_z *nè divenga infinita su* Γ_x e similmente per le B, C, ruotando le lettere. Condizioni queste alle quali soddisfanno i polinomi A, B, C considerati sopra. Costruite le espressioni differenziali

$$\frac{A dy - B dx}{f'_z} \quad , \quad \frac{B dz - C dy}{f'_x} \quad , \quad \frac{C dx - A dz}{f'_y} \quad ,$$

queste risultano uguali, e le definiremo come aspetti diversi di un medesimo differenziale semiesatto (a seconda della coppia di variabili, che si assumono come indipendenti).

Sia $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ un altro modello proiettivo della nostra superficie, dotato esso pure di singolarità ordinaria (linea doppia, ecc.) e genericamente situato rispetto agli assi. E sia

$$(23) \quad x = x(\xi, \eta, \zeta), \cdots \quad , \qquad (24) \quad \xi = \xi(x, y, z), \cdots ,$$

la trasformazione birazionale fra f ed F. Supponiamo inoltre che questa trasformazione sia generica, cioè che il sistema lineare semplice, tracciato su f, di cui F è l'imagine proiettiva, non abbia particolari legami colle A, B, C, colle curve $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ e colla curva all'infinito di f.

Viene identicamente:

$$A f'_x + B f'_y + C f'_z = \mathfrak{A} F'_\xi + \mathfrak{B} F'_\eta + \mathfrak{C} F'_\zeta \ ,$$

ove

$$\mathfrak{A} = A\xi'_x + B\xi'_y + C\xi'_z \quad , \quad \mathfrak{B} = A\eta'_x + B\eta'_y + C\eta'_z \quad , \quad \mathfrak{C} = A\zeta'_x + B\zeta'_y + C\zeta'_z \ ;$$

sicchè l'identità (1) si muta nella

$$\mathcal{A}F'_\xi + \mathcal{B}F'_\eta + \mathcal{C}F'_\zeta = 0 .$$

Le espressioni delle $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mostrano che queste funzioni soddisfanno, nei riguardi delle curve $\Gamma_\xi, \Gamma_\eta, \Gamma_\zeta$, segate su F, fuori della linea doppia, dalle $F'_\xi = 0$, $F'_\eta = 0$, $F'_\zeta = 0$, alle condizioni generali analoghe a quelle supposte per le A, B, C, nei riguardi delle $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$. L'ipotesi opposta conduce invero a quelle particolarità della trasformazione, che si sono escluse, assumendola generica.

Dall'identità fondamentale segue:

$$\mathcal{A} = \frac{A(\xi'_x f'_z - \xi'_z f'_x) - B(\xi'_z f'_y - \xi'_y f'_z)}{f'_z},$$

e profittando delle

$$\xi'_x = \frac{y'_\eta z'_\zeta - y'_\zeta z'_\eta}{\Delta} \quad , \quad \xi'_y = \frac{z'_\eta x'_\zeta - z'_\zeta x'_\eta}{\Delta} \quad , \quad \xi'_z = \frac{x'_\eta y'_\zeta - x'_\zeta y'_\eta}{\Delta},$$

ove $\Delta = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ (1), si trova:

$$\mathcal{A} = \frac{A(y'_\eta F'_\zeta - y'_\zeta F'_\eta) - B(x'_\eta F'_\zeta - x'_\zeta F'_\eta)}{\Delta f'_z} .$$

Analoghe espressioni valgono per $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Se ne trae:

$$\frac{Ady - Bdx}{f'_z} = \Delta \frac{\mathcal{A}d\eta - \mathcal{B}d\xi}{F'_\zeta},$$

e si conclude che *il differenziale semiesatto dato si muta in un differenziale semiesatto.*

L'invarianza è, in verità, stabilita per una trasformazione generica. Ma si prevede che valga per una trasformazione birazionale qualunque, almeno in quanto la si possa considerare come limite d'una generica.

(1) La sostituzione (23) dà luogo, fra gli spazi $S(x, y, z)$, $\Sigma(\xi, \eta, \zeta)$, a una trasformazione generalmente multipla. In Σ si ha una superficie doppia D dell'involuzione corrispondente ai punti di S, e una superficie di diramazione $\mathfrak{D}$, che corrisponde alla superficie doppia dell'involuzione di S, determinata dalla (24). Il determinante funzionale Δ si annulla sulla linea doppia di F e sulla curva sezione di F con D; e diviene infinito sulla curva imagine della linea doppia di f, sulla curva sezione di F con $\mathfrak{D}$ e sulle curve fondamentali (eccezionali nelle nostre ipotesi) che la trasformazione possiede sopra F.

22. Proviamo infine che *differenziali semiesatti esistono sopra ogni superficie.*

Basta mostrare che esistono quelli costruiti mediante polinomi aggiunti (n. 20). E perciò, data un'aggiunta $A = 0$, d'ordine l, che passi pel gruppo jacobiano J del fascio $x = \text{cost.}$, basta provare che, se l è abbastanza grande, esiste un'aggiunta $B = 0$, d'ordine l, passante pel gruppo jacobiano J_1, del fascio $y = \text{cost.}$, in guisa che le $A = 0$, $B = 0$ seghino sulla curva Γ_z, fuori dei punti cuspidali e dei gruppi J, J_1, lo stesso gruppo di punti.

Si osservi all'uopo che le superficie d'ordine l abbastanza grande, passanti pei punti d'appoggio di Γ_z sulla linea doppia, segano su Γ_z, che è priva di punti multipli, una serie lineare completa. Lo stesso può perciò dirsi [1] delle aggiunte d'ordine l, abbastanza alto ($\geqq \lambda$). Sicchè le aggiunte d'ordine $l \geqq \lambda$, che passano pel gruppo J, segano altrove su Γ_z una serie lineare completa. E poichè analoga conclusione vale per quelle che passano per J_1, ne segue l'asserto.

Matematica. — *Sul rotore dei tensori.* Nota [2] del Corrisp. U. Cisotti.

I. – Rotore di un tensore m^{plo}.

Sieno $X_{k_1 k_2 \cdots k_{m-1} k_m}$ le componenti covarianti di un tensore $\mathbf{X}$, riferito a n coordinate $x_1 x_2 \cdots x_n$ nella varietà avente per quadrato dell'elemento lineare:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

ed $\varepsilon^{h_1 h_2 \cdots h_n}$ le componenti contravarianti del tensore ε [3].

Designino al solito, $X_{k_1 k_2 \cdots k_m | i}$ le componenti covarianti del tensore derivato di $\mathbf{X}$; ponendo:

$$(1) \qquad R^{h_1 \cdots h_{n-2}}_{k_1 \cdots k_{m-1}} = \sum_{il}^{n} \varepsilon^{h_1 \cdots h_{n-2} il} X_{k_1 \cdots k_{n-1} l | i},$$

risulta definito, mediante le indicate componenti miste, un tensore $(m +$

(1) Vedi una Nota di Bertini e mia negli «Atti di Torino», 1908; e precisamente il teorema del n. 1 della mia lettera al prof. Bertini.

(2) Presentata nella seduta del 15 gennaio 1928.

(3) Cfr. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* [Roma, Stock, 1925], p. 181.

$+ n - 3)^{plo}$. Questo tensore $\mathbf{R}$ definirò *rotore del tensore* $\mathbf{X}$. Le sue componenti controvarianti sono:

$$(1') \qquad R^{h_1 \cdots h_{n-2} k_1 \cdots k_{m-1}} = \sum_{i,l}^{n} \varepsilon^{h_1 \cdots h_{n-2} i l} X^{k_1 \cdots k_{m-1}}_{l|i} ,$$

come si può verificare ricorrendo allé relazioni che legano componenti miste e componenti contravarianti di uno stesso tensore.

Per $n = 3$ e $m = 1$ si ha:

$$(2) \qquad R^h = \sum_{i,l}^{3} \varepsilon^{hil} X_{l|i} .$$

Sono le note espressioni [1] delle componenti contravarianti di un tensore semplice o vettore, in una varietà a tre dimensioni.

Per $n = 3$ e $m = 2$ si ottiene da (1):

$$(3) \qquad R^h_k = \sum_{i,l}^{3} \varepsilon^{hil} X_{kl|i} ;$$

si hanno le componenti miste del rotore di un tensore doppio $\mathbf{X}$ in una varietà a tre dimensioni.

2. – Altre espressioni del rotore.

Rammentiamo [2] che $\varepsilon^{h_1 \cdots h_n} = 0$ quando $h_1 h_2 \cdots h_n$ non sono tutte distinte e che $\varepsilon^{h_1 \cdots h_n} = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$, con $a = \|a_{ik}\| > 0$, quando $h_1 h_2 \cdots h_n$ sono tutte distinte, valendo il segno + oppure il segno — secondochè la permutazione $h_1 h_2 \cdots h_n$ è di classe pari oppure di classe dispari rispetto alla fondamentale $1, 2 \cdots n$.

Ciò premesso, si sviluppi la sommatoria del secondo membro di (1), tenendo presenti le ora richiamate proprietà del tensore ε; si ottiene:

$$R^{h_1 \cdots h_{n-2}}_{k_1 \cdots k_{m-1}} = \varepsilon^{h_1 \cdots h_{n-2} h_{n-1} h_n} X_{k_1 \cdots k_{m-1} h_n | h_{n-1}} +$$
$$+ \varepsilon^{h_1 \cdots h_{n-2} h_n h_{n-1}} X_{k_1 \cdots k_{m-1} h_{n-1} | h_n} .$$

Se c è un numero intero pari o dispari secondochè la permutazione $h_1 h_2 \cdots h_n$ è di classe pari o dispari, avendosi:

$$\varepsilon^{h_1 \cdots h_{n-2} h_{n-1} h_n} = -\varepsilon^{h_1 \cdots h_{n-2} h_n h_{n-1}} = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} ,$$

(1) Loc. cit., p. 184.
(2) Loc. cit., p. 180.

si ottiene in definitiva:

$$(4)\qquad R^{h_1\cdots h_{n-2}}_{k_1\cdots k_{m-1}} = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}}\left(X_{k_1\cdots k_{m-1}h_n|h_{n-1}} - X_{k_1\cdots k_{m-1}h_{n-1}|h_n}\right).$$

Applicando la derivazione covariante si ha [1]

$$X_{k_1\cdots k_{m-1}h_n|h_{n-1}} = \frac{\partial X_{k_1\cdots k_{m-1}h_n}}{\partial x_{h_{n-1}}} - \sum_1^{m-1}{}_r \sum_1^n{}_j X_{k_1\cdots k_{r-1}jk_{r+1}\cdots k_{m-1}h_n}\begin{Bmatrix} k_r & h_{n-1} \\ & j \end{Bmatrix} -$$

$$- \sum_1^n{}_j X_{k_1\cdots k_{m-1}j}\begin{Bmatrix} h_n & h_{n-1} \\ & j \end{Bmatrix},$$

e scambiando h_n con h_{n-1},

$$X_{k_1\cdots k_{m-1}h_{n-1}|h_n} = \frac{\partial X_{k_1\cdots k_{m-1}h_{n-1}}}{\partial x_{h_n}} - \sum_1^{m-1}{}_r \sum_1^n{}_j X_{k_1\cdots k_{r-1}jk_{r+1}\cdots k_{m-1}h_{n-1}}\begin{Bmatrix} k_r & h_n \\ & j \end{Bmatrix} -$$

$$- \sum_1^n{}_j X_{k_1\cdots k_{m-1}j}\begin{Bmatrix} h_{n-1} & h_n \\ & j \end{Bmatrix},$$

per cui (4) può scriversi per $m > 1$

$$(5)\qquad R^{h_1\cdots h_{n-2}}_{k_1\cdots k_{m-1}} = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial X_{k_1\cdots k_{m-1}h_n}}{\partial x_{h_{n-1}}} - \frac{\partial X_{k_1\cdots k_{m-1}h_{n-1}}}{\partial x_{h_n}}\right) -$$

$$- \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}} \sum_1^{m-1}{}_r \sum_1^n{}_j \left[X_{k_1\cdots k_{r-1}jk_{r+1}\cdots k_{m-1}h_n}\begin{Bmatrix} k_r & h_{n-1} \\ & j \end{Bmatrix} -\right.$$

$$\left. - X_{k_1\cdots k_{r-1}jk_{r+1}\cdots k_{m-1}h_{n-1}}\begin{Bmatrix} k_r & h_n \\ & j \end{Bmatrix}\right],$$

mentre per $m = 1$ si ha

$$(6)\qquad R^{h_1\cdots h_{n-2}} = \frac{(-1)^c}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial X_{h_n}}{\partial x_{h_{n-1}}} - \frac{\partial X_{h_{n-1}}}{\partial x_{h_n}}\right),$$

formula notevole che si presta al calcolo effettivo del rotore di un vettore e coincidente con altre ben note per $n = 3$ [2] e per $n = 2$ [3].

3. - Il rotore espresso mediante una divergenza.

È interessante rilevare come il tensore $\mathbf{X}$ si possa considerare la divergenza del tensore $\mathbf{Z}$ $(n-1)^{plo}$, di componenti contravarianti:

$$Z^{h_1\cdots h_{n-2}k_1\cdots k_{m-1}i} = \sum_1^n{}_l \varepsilon^{h_1\cdots h_{n-2}li} X_l^{k_1\cdots k_{m-1}}.$$

(1) Loc. cit., p. 168.

(2) Loc. cit., p. 185.

(3) Cfr. Finzi, *Moti liquidi spaziali vorticosi dipendenti da moti potenziali piani* [« Rend. del Circ. Mat. di Palermo », T. LI (1927), p. 4].

Infatti, la divergenza di tale tensore ha per componenti contravarianti [1]:

$$Y^{h_1 \cdots h_{n-2}\, k_1 \cdots k_{m-1}} = \sum_1^n{}_i \, Z^{h_1 \cdots h_{n-2}\, k_1 \cdots k_{m-1}\, i}_{|i}$$

e per la precedente, tenendo presente che il derivato del tensore ε è nullo [2],

$$Y^{h \cdots h_{n-2}\, k_1 \cdots k_{m-1}} = \sum_1^n{}_{il} \, \varepsilon^{h_1 \cdots h_{n-2}\, li} \, X^{k_1 \cdots k_{m-1}}_{l|i} \,,$$

e infine, per la (1'),

$$Y^{h_1 \cdots h_{n-2}\, k_1 \cdots k_{m-1}} = - R^{h_1 \cdots h_{n-2}\, k_1 \cdots k_{m-1}} .$$

4. – Caso euclideo. - Significato di rotore nullo.

Se la varietà è euclidea e $x_1\, x_2 \cdots x_n$ sono coordinate ortogonali, cioè:

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq k \,, \\ 1 & \text{se} \quad i = k \,, \end{cases}$$

avendo $a = 1$ ed essendo nulli i simboli di Christoffel, la (5) diviene:

$$R^{h_1 \cdots h_{n-2}}_{k_1 \cdots k_{m-1}} = (-1)^c \left(\frac{\partial X_{k_1 \cdots k_{m-1}\, h_n}}{\partial x_{h_{n-1}}} - \frac{\partial X_{k_1 \cdots k_{m-1}\, h_{n-1}}}{\partial x_{h_n}} \right) .$$

Da questa e per proprietà ben note risulta che *l'annullarsi del rotore è condizione caratteristica perchè il tensore* m^{plo} *di componenti* $X_{k_1 \cdots k_{m-1}\, k_m}$ *sia il derivato del tensore* $(m-1)^{plo}$ *di componenti* $X_{k_1 \cdots k_{m-1}}$.

(1) Cfr. la mia Nota, *Sulla divergenza dei tensori* [questi « Rend. », vol. VI, 2° sem., 1927, p. 81].

(2) Cfr. la mia Nota, *Sul carattere solenoidale del tensore di Ricci per le forme ternarie* [questi « Rend. », vol. VI. 2° sem., 1927, p. 367]. Il teorema, citato per forme ($n = 3$) ternarie vale anche per n qualunque.

Matematica. — *Maggiore determinazione della relazione intercedente fra il rango e il tipo di un gruppo.* Nota [1] del Corrispondente G. Scorza.

Sia H un gruppo (non abeliano, d'ordine finito) di tipo τ e G un suo sottogruppo fondamentale. Allora, se con τ' si indica il tipo di G o il numero -2, secondo che G non è od è abeliano, ho dimostrato recentemente che, per $\tau > 3$, è $\tau' \leq \tau - 6$; e da ciò ho dedotto che, indicato con r il rango di H, si ha, qualunque sia τ,

$$(1) \qquad r \leq \frac{\tau + 5}{6} \text{ [2]}.$$

Proseguendo in tale ordine di ricerche ho potuto riconoscere che, supposto $\tau > 3$, riesce $\tau' = \tau - 6$ quando, e solo quando, H sia di tipo 4, oppure di tipo 7 e rango 2; e che quindi la disuguaglianza (1) poteva essere sostituita dall'altra ancora più espressiva

$$(2) \qquad r \leq \frac{\tau + 7}{7}.$$

Oggetto di questa Nota è appunto l'esposizione di questi nuovi teoremi.

1. Si supponga che λ, λ' e λ'' abbiano per G i significati ad essi attribuiti nelle Note già citate e che sia $\tau > 3$ e $\tau' = \tau - 6$.

Essendo $\lambda' \geq 1$, $\tau' = \tau - 6$ la disuguaglianza $\lambda \geq \tau' + \lambda' + 2$ (I, n. 2) dà $\lambda \geq \tau - 3$; ma, essendo $\tau > 3$, è pure $\lambda \leq \tau - 2$ (II, n. 6), dunque λ è $\tau - 3$ o $\tau - 2$, e di sistemi fondamentali di H fuori di G non ve n'è che 5 o 4. Segue che non può esistere alcun sottogruppo fondamentale di H che contenga propriamente G, perchè un tal sottogruppo dovrebbe contenere almeno due sistemi fondamentali più che G e almeno quattro meno che H; e che quindi è necessariamente $\lambda' = 1$.

Dopo ciò la disuguaglianza $\tau' \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' + \lambda'' - 5)$ (I, n. 3) diviene $\tau - 6 \leq \frac{1}{2}(\lambda + \lambda'') - 3$, ossia $\lambda'' \geq 2\tau - \lambda - 6$; e questa, per $\lambda = \tau - 3$, dà $\lambda'' \geq \tau - 3$ e, per $\lambda = \tau - 2$, $\lambda'' \geq \tau - 4$. Ma d'altronde ha da essere $\lambda'' \leq \tau' + 3 = \tau - 3$ (I, n. 3), dunque per $\lambda = \tau - 3$ è $\lambda'' = \tau - 3$ e per $\lambda = \tau - 2$ è $\lambda'' = \tau - 4$, oppure $\lambda'' = \tau - 3$.

(1) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) G. Scorza, *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo.* Note I e II. (Questi « Rendiconti », sedute del 20 novembre e 4 dicembre 1927). Nel testo queste Note saranno richiamate semplicemente con I e II.

Raccogliendo le osservazioni fatte si vede che si presentano come possibili, per ora, tre alternative; e cioè

I) o si ha $\lambda = \tau - 3$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = \tau - 3$;
II) o si ha $\lambda = \tau - 2$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = \tau - 4$;
III) o si ha $\lambda = \tau - 2$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = \tau - 3$.

2. Dico in primo luogo, che:

Nell'alternativa I) *è* $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$ *e* $\tau = 4$.

Infatti, quando essa si verifica, è $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$; quindi, detto ρ il genere di G, poichè G è massimo, si ha $\tau - \lambda + 2 = 5 \geqq 2\rho - 1$ (I, n. 4). Ma allora è $\rho = 1$, indi $\lambda'' = 1$, $\tau = 4$ e $\lambda = 1$.

3. Dico, in secondo luogo, che:

L'alternativa III) *è da escludere.*

Infatti si supponga che essa si verifichi e siano J_0 e J i centrali di H e G rispettivamente.

Essendo $\lambda' = 1$ e $\lambda = \tau - 2$, dei $\tau + 2$ sistemi fondamentali di H, uno, e sia I, è contenuto in G e J; $\tau - 3$, e siano $I_1, I_2, \cdots, I_{\tau-3}$, sono esterni a J, ma contenuti in G, e quattro, diciamo $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$ e $I^{(4)}$, sono esterni a G. Dei $\tau + 2$ sottogruppi fondamentali di H quello corrispondente a G è, naturalmente, I; quelli corrispondenti ad I_j e $I^{(l)}$ ($j = 1, \cdots, \tau - 3$; $l = 1, \cdots, 4$) siano rispettivamente G_j e $G^{(l)}$.

Poichè $\lambda'' - 1 = \tau - 4$, fra i sottogruppi $G_1, \cdots, G_{\tau-3}$ ve ne sono $\tau - 4$, e non più, e siano $G_1, \cdots, G_{\tau-4}$, contenuti propriamente in G. D'altronde, essendo $\tau' = \tau - 6$, il numero, $\tau' + 2$, dei sottogruppi fondamentali di G viene ad essere $\tau - 4$, dunque $G_1, \cdots, G_{\tau-4}$ coincidono coi sottogruppi fondamentali di G.

Il gruppo $G_{\tau-3}$, per le ipotesi fatte, non è contenuto in G; ma l'intersezione di G e $G_{\tau-3}$ è un sottogruppo fondamentale di G, dunque essa coincide con uno dei gruppi $G_1, \cdots, G_{\tau-4}$; poniamo con $G_{\tau-4}$. Dopo ciò $G_{\tau-3}$, contenendo propriamente $G_{\tau-4}$, deve contenere almeno due sistemi fondamentali di H esterni a $G_{\tau-4}$, indi a G; quindi $G_{\tau-3}$ o contiene tutti e quattro i sistemi $I^{(l)}$, o ne contiene soltanto tre, o ne contiene soltanto due.

Ebbene facciamo vedere che tutte e tre queste conseguenze sono da respingere; dopo di che sarà dimostrato, come volevasi, che l'alternativa III) deve essere esclusa.

E infatti, se $G_{\tau-3}$ contenesse i quattro sistemi $I^{(l)}$, sarebbe $H = G + G_{\tau-3}$, e ciò non è possibile [1].

(1) G. Scorza, *I gruppi che possono pensarsi come somme di tre loro sottogruppi.* («Bollettino dell'Un. Mat. Ital.», dic. 1926).

Se $G_{\tau-3}$ contenesse soltanto tre dei sistemi $I^{(l)}$, poniamo $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ e $I^{(3)}$, sarebbe $H = G + G_{\tau-3} + G^{(4)}$ e $G^{(4)}$ conterrebbe l'intersezione di G e $G_{\tau-3}$[1]. Ora I sta in G e sta pure in $G_{\tau-3}$, perchè $I_{\tau-3}$ appartiene a G; dunque $G^{(4)}$ conterrebbe I e per conseguenza G conterrebbe $I^{(4)}$: mentre $I^{(4)}$ è per ipotesi, esterno a G.

Si supponga infine che $G_{\tau-3}$ contenga soltanto due dei sistemi $I^{(l)}$ e che essi siano $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$.

Dei sistemi I e $I^{(3)}$, I è interno a G e $G_{\tau-3}$, ma esterno a $G^{(3)}$, $I^{(3)}$ è esterno a G e $G_{\tau-3}$, ma interno a $G^{(3)}$, dunque ciascun elemento del prodotto $I\, I^{(3)}$ è esterno a G, $G_{\tau-3}$ e $G^{(3)}$, ossia appartiene ad $I^{(4)}$, e si ha $I\, I^{(3)} \leq I^{(4)}$, indi $I_{\tau-3}\, I\, I^{(3)} \leq I_{\tau-3}\, I^{(4)}$.

Ora $I_{\tau-3}$ è interno a G e $G_{\tau-3}$, ma esterno a $G^{(4)}$, ed $I^{(4)}$ è interno a $G^{(4)}$ ma esterno a G e $G_{\tau-3}$; dunque ciascun elemento del prodotto $I_{\tau-3}\, I^{(4)}$ è esterno a G, $G_{\tau-3}$, $G^{(4)}$, ossia appartiene ad $I^{(3)}$, e si ha $I_{\tau-3}\, I\, I^{(3)} \leq I^{(3)}$.

Segue che, se $i_{\tau-3}$, i, $i^{(3)}$ sono elementi comunque presi, il primo in $I_{\tau-3}$, il secondo in I e il terzo in $I^{(3)}$, esiste un elemento di $I^{(3)}$, e sia $i_1^{(3)}$, per il quale si ha $i_{\tau-3}\, i\, i^{(3)} = i_1^{(3)}$, ossia $i_{\tau-3}\, i = i_1^{(3)}\, i^{(3)-1}$; quindi $i_{\tau-3}\, i$ appartiene all'intersezione di G e $G^{(3)}$. Ma codesta intersezione è J_0, perchè, essendo $I^{(3)}$ esterno a $G_{\tau-3}$ ed a G — indi a $G_1, G_2, \cdots, G_{\tau-4} — G^{(3)}$ non può contenere nessuno dei sistemi $I, I_1, \cdots, I_{\tau-3}$; dunque $i_{\tau-3}\, i$ è un elemento di J_0.

Ora ciò è assurdo; ed invero da $i_{\tau-3}\, i = j_0$, con j_0 elemento di J_0, seguirebbe $i_{\tau-3} = j_0\, i^{-1}$ e $i_{\tau-3}$ sarebbe al pari di i e i^{-1}, un elemento di I.

4. Dico, in terzo luogo, che:

Se si presenta l'alternativa II) *è* $\tau = 7$ *ed* $r = 2$.

Infatti si supponga che essa si verifichi e si mantengano per $J_0, J, I, I_1, \cdots, I_{\tau-3}, I^{(1)}, \cdots, I^{(4)}, G_1, \cdots, G_{\tau-3}$ e $G^{(1)}, \cdots, G^{(4)}$ i significati del n.° precedente.

Poichè nelle ipotesi attuali è $\lambda'' - 1 = \tau - 5$, dei gruppi $G_1, \cdots, G_{\tau-3}$ quelli contenuti propriamente in G sono $\tau - 5$, e non più; quindi, se supponiamo che essi siano $G_1, \cdots, G_{\tau-5}$, ciascuno dei gruppi $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ non sarà contenuto in G, ma avrà per intersezione con G un gruppo che sarà sottogruppo fondamentale per esso e per G. Segue che esistono almeno due sistemi fondamentali di $G_{\tau-4}$ (di $G_{\tau-3}$) esterni a G, e quindi anche almeno due sistemi fondamentali di H esterni a G e contenuti in $G_{\tau-4}$ (in $G_{\tau-3}$). Ma si vede subito, come più sopra, che dei quattro sistemi $I^{(l)}$ non più di due possono appartenere a $G_{\tau-4}$ o $G_{\tau-3}$, dunque ciascuno di questi gruppi contiene due, e soltanto due, dei sistemi $I^{(l)}$.

(1) Cfr. Ia Nota or ora citata.

Siano $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$ quelli che stanno in $G_{\tau-4}$; dico che:

Quelli che stanno in $G_{\tau-3}$ *sono* $I^{(3)}$ *e* $I^{(4)}$.

Osservando che I è interno a G e $G_{\tau-4}$, ma esterno a $G^{(3)}$, mentre $I^{(3)}$ è interno a $G^{(3)}$, ma esterno a G e $G_{\tau-4}$, si riconosce che il prodotto $I\,I^{(3)}$ è esterno a G, $G_{\tau-4}$ e $G^{(3)}$; quindi si ha

$$I\,I^{(3)} \leqq I^{(4)} \quad \text{e} \quad I_{\tau-4}\,I\,I^{(3)} \leqq I_{\tau-4}\,I^{(4)}.$$

Per ragioni analoghe il prodotto $I_{\tau-4}\,I^{(4)}$ riesce esterno a G, $G_{\tau-4}$ e $G^{(4)}$; dunque è $I_{\tau-4}\,I^{(4)} \leqq I^{(3)}$ e, in definitiva, $I_{\tau-4}\,I\,I^{(3)} \leqq I^{(3)}$.

Di qui segue, come più sopra, che se $i_{\tau-4}$ e i sono elementi comunque scelti, il primo in $I_{\tau-4}$ e il secondo in I, il prodotto $i_{\tau-4}\,i$ è un elemento dell'intersezione di G e $G^{(3)}$.

Ora, per un ragionamento fatto, questa conseguenza porterebbe ad un assurdo se l'intersezione di G e $G^{(3)}$ fosse J_0; e tale intersezione sarebbe veramente J_0, se $I^{(3)}$, come è esterno a G (indi a $G_1, G_2, \cdots, G_{\tau-5}$) e $G_{\tau-4}$ fosse anche esterno a $G_{\tau-3}$, perchè allora $G^{(3)}$ non potrebbe contenere, di G, nè I, nè $I_1, \cdots$, nè $I_{\tau-3}$; dunque $I^{(3)}$ è interno a $G_{\tau-3}$. Allo stesso modo si vede che $G_{\tau-3}$ contiene $I^{(4)}$ e quindi l'asserzione fatta è dimostrata.

Da essa discende che $H = G + G_{\tau-4} + G_{\tau-3}$; per conseguenza G, $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ si tagliano a due a due in un medesimo gruppo Γ, che ha in ciascuno di essi l'indice 2 e in H l'indice 4, e $\frac{H}{\Gamma}$ è un gruppo quadrimonio.

Il gruppo Γ, che contiene I, $I_{\tau-4}$ e $I_{\tau-3}$, è un sottogruppo fondamentale tanto per G, quanto per $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$. Ora, fuori di Γ, $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ non contengono, ciascuno, che due sistemi fondamentali di H, quindi, *a fortiori*, che due proprî sistemi fondamentali; dunque (II, n. 5) $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ sono di tipo 1.

Da ciò e dalle uguaglianze

$$G_{\tau-4} = \Gamma + I^{(1)} + I^{(2)} \quad , \quad G_{\tau-3} = \Gamma + I^{(3)} + I^{(4)}$$

si deduce che dei tre sistemi fondamentali di $G_{\tau-4}$ due sono $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$, e di quelli di $G_{\tau-3}$ due sono $I^{(3)}$ e $I^{(4)}$.

Il centrale di $G_{\tau-4}$ sta in Γ, dunque in G. Esso contiene J_0 e $I_{\tau-4}$, ma non contiene alcun altro dei sistemi fondamentali di H contenuti in G, cioè nessuno dei sistemi $I, I_1, \cdots, I_{\tau-5}, I_{\tau-3}$, perchè, se uno di questi sistemi stesse nel detto centrale, G, oppure $G_1, \cdots$, oppure $G_{\tau-5}$, oppure $G_{\tau-3}$ dovrebbe contenere $G_{\tau-4}$; dunque il centrale di $G_{\tau-4}$ è $J_0 + I_{\tau-4}$.

Analogamente il centrale di $G_{\tau-3}$ è $J_0 + I_{\tau-3}$.

Ora, in un gruppo di tipo 1 i sistemi fondamentali hanno ordine eguale a quello del centrale e i sottogruppi fondamentali hanno ordine doppio di quello del centrale; dunque

$$\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-4}) = \text{ord}\,I^{(1)} = \text{ord}\,I^{(2)}$$

$$\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-3}) = \text{ord}\,I^{(3)} = \text{ord}\,I^{(4)}$$

e

$$\text{ord}\,\Gamma = 2\,\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-4}) = 2\,\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-3}).$$

Di qui segue, in primo luogo, che

$$\text{ord}\,I^{(1)} = \text{ord}\,I^{(2)} = \text{ord}\,I^{(3)} = \text{ord}\,I^{(4)},$$

$$\text{ord}\,I_{\tau-4} = \text{ord}\,I_{\tau-3};$$

in secondo luogo che Γ è esaurito dagli elementi di $J_0, I, I_{\tau-4}$ e $I_{\tau-3}$, perchè l'ordine di I non è inferiore a quello di J_0; e infine che l'ordine di I coincide addirittura con quello di J_0.

Dopo ciò Γ risulta la somma dei suoi tre sottogruppi proprî $J_0 + I = J$, $J_0 + I_{\tau-4}$ e $J_0 + I_{\tau-3}$; dunque l'ordine di Γ deve essere doppio dell'ordine di ciascuno di questi sottogruppi ed è

$$\text{ord}\,J_0 = \text{ord}\,I = \text{ord}\,I_{\tau-4} = \text{ord}\,I_{\tau-3}.$$

Si indichi con k l'ordine comune di $J_0, I, I_{\tau-4}$ e $I_{\tau-3}$. Allora l'ordine comune dei sistemi $I^{(i)}$ sarà $2k$, quello di Γ sarà $4k$, l'ordine comune di $G, G_{\tau-4}, G_{\tau-3}$ sarà $8k$ e infine quello di H sarà $16k$.

Ciò posto, da $G = J_0 + I + I_1 + \cdots + I_{\tau-3}$ si ricava che l'ordine di $I_1 + I_2 + \cdots + I_{\tau-5}$ è $4k$; d'altronde l'ordine di ciascuno dei sistemi $I_1, \cdots, I_{\tau-5}$ è multiplo di k, dunque il numero di questi sistemi è 2, 3 o 4, e corrispondentemente τ è 7, 8 o 9, e τ' è 1, 2 o 3. In ogni caso, essendo $\tau' \leqq 3$, i sottogruppi fondamentali di G risultano tutti abeliani e quelli diversi da Γ sono

$$J_0 + I + I_1 \quad , \quad J_0 + I + I_2, \cdots, J_0 + I + I_{\tau-5}.$$

Ora, ciascuno di questi sottogruppi, contenendo il centrale $J = J_0 + I$ di G, ha per ordine un multiplo di $2k$, dunque gli ordini di $I_1, \cdots, I_{\tau-5}$ debbono essere multipli addirittura di $2k$, e il numero di questi sistemi è necessariamente 2.

Si conclude che $\tau = 7$; che dei nove sottogruppi fondamentali di H tre sono di tipo 1 e sei abeliani, e che quindi è pure, come volevasi, $r = 2$.

5. Raccogliendo le osservazioni fatte sin qui, si ha che:

Se $\tau > 3$, *è* $\tau' = \tau - 6$ *quando, e solo quando,* H *è di tipo* 4, *oppure di tipo* 7 *e rango* 2 [1]; *di guisa che in ogni altro caso è* $\tau' \leq \tau - 7$.

Dopo ciò, basta riprendere il ragionamento del n. 9 della Nota II già citata e sostituire alle disuguaglianze

$$\tau_r \leq \tau - 6 \quad , \quad \tau_{r-1} \leq \tau_r - 6 \, , \cdots , \quad \tau_3 \leq \tau_4 - 6 \, ,$$

che ivi comparisono, quelle che discendono dal teorema ora enunciato, cioè

$$\tau_r \leq \tau - 7 \quad , \quad \tau_{r-1} \leq \tau_r - 7 \, , \cdots , \quad \tau_3 \leq \tau_4 - 7 \, ,$$

per avere, come volevasi,

$$-2 \leq \tau - 7r + 5 \quad , \quad \text{ossia} \quad r \leq \frac{\tau + 7}{7} .$$

Matematica. — *Sulle funzioni delle matrici.* Nota del Corrisp. G. Giorgi [2].

In questo momento in cui il calcolo delle matrici ha assunto singolare importanza per lo studio della meccanica atomica, credo utile far conoscere un metodo per definire le funzioni delle matrici in generale, del quale ho fatto applicazione nelle mie lezioni [3] e nelle mie ricerche di calcolo funzionale [4], ma che non ho ancora esposto dal punto di vista teorico.

1. Le matrici che considero, e che rappresenterò sempre con lettere greche maiuscole, sono i simboli delle trasformazioni lineari omogenee in n variabili, rappresentate mediante il quadro dei loro coefficienti, così

$$(1) \qquad \Phi = \begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{Vmatrix}$$

(1) La caratterizzazione dei gruppi di tipo 7 e rango 2, che qui si presentano, potrebbe essere ulteriormente precisata; si potrebbe far vedere, cioè, che per ciascun di essi il gruppo aggiunto (d'ordine 16) è (abeliano e) ad elementi tutti bilateri; ma su ciò crediamo inutile insistere.

(2) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.

(3) Corso di lezioni di Fisica-Matematica, tenute nella R. Università di Cagliari, nell'anno 1926-27. (Roma, Litografia Sampaolesi, 1927).

(4) *On the functional dependence of physical variables,* Comunicazione al Congresso Internazionale di Matematica di Toronto, agosto 1924; in corso di stampa nei « Proceedings » del Congresso.

Se le variabili da trasformare $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ s'interpetrano come componenti d'un vettore $\mathbf{X}$ nell' S_n, e le variabili trasformate come componenti d'un vettore $\mathbf{Y}$, e si scrive

$$\mathbf{Y} = \Phi\mathbf{X}, \tag{2}$$

la matrice Φ può essere considerata come la rappresentazione cartesiana di una *diadica* (omografia vettoriale) nel detto spazio; la quale è un operatore che ammette definizione intrinseca, quale affinità, o deformazione lineare omogenea, a origine fissa, dello spazio stesso. Quanto sto per dire si applica alle diadiche come alle matrici.

Ammetto che l'uguaglianza, la somma, il prodotto, e le operazioni elementari sulle matrici siano definite come d'ordinario [1]. In conseguenza restano definite elementarmente tutte le formazioni polinomiali e quelle razionali comunque composte con matrici e scalari [2]. Considero qui simboli $F(\Phi)$, espressioni analiticamente composte con Φ e con quantità scalari che non siano funzioni dei coefficienti di Φ. In mancanza di miglior vocabolo, le chiamerò *funzioni aritmetiche* di Φ, per distinguerle dalle espressioni dove intervengano altre matrici o vettori. Così $\log\Phi$, e^{Φ}, $\operatorname{sen}\Phi$ sono esempi di funzioni aritmetiche. Osservando che il calcolo delle matrici, e delle diadiche, e quello dei vettori, aumenterebbero molto la loro portata se fosse consentito far uso di questi simboli, mi sono proposto di definirne la significazione, in base alla condizione di mantenere le regole operatorie del calcolo scalare. Dimostro che ciò è possibile, e per una sola via.

2. Sia Φ una matrice non degenere e a invarianti tutti distinti: cioè la sua equazione secolare

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}-\rho & , & \varphi_{12} & , \cdots, & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & , & \varphi_{22}-\rho & , \cdots, & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & , & \varphi_{n2} & , \cdots, & \varphi_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

(1) Cioè in conformità dei lavori classici di Cayley, di Laurent, di Whitehead, di Pincherle e Amaldi, e di quelli recenti di Heisenberg, di Jordan, di M. Born, di Wiener, di Hilbert. Da alcuni di questi ultimi autori però mi distacco perchè intendo identificata con l'unità ordinaria la matrice che ha tutti gli elementi diagonali principali $= 1$, e nulli gli altri.

(2) Col nome di *scalari* intenderò le grandezze numeriche, per opposizione ai vettori e alle matrici.

abbia le radici tutte distinte e non nulle: donde segue che il determinante di Φ non è nullo. Allora è noto che nella stella vettoriale su cui la Φ opera esistono n raggi uniti (cioè che si mantengono fissi per effetto della trasformazione), linearmente indipendenti e distinti fra loro. La Φ, geometricamente, consiste in un sistema di allungamenti con coefficienti $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_n$, secondo quelle direzioni. Osservo allora che per un vettore orientato secondo uno di quegli assi, la Φ vale come un moltiplicatore ρ_i; similmente Φ^2 vale come ρ_i^2, e se $P(\Phi)$ è il simbolo d'un polinomio in Φ, risulta $P(\Phi)$ equivalente a $P(\rho)$. Se allora $F(\zeta)$ è un simbolo di funzione definito per $\zeta = \rho_i$, è naturale definire, sempre per quel particolare operando, $F(\Phi)$ come un moltiplicatore $F(\rho_i)$; e sarà l'unica definizione che permette di trattare $F(\Phi)$ con le regole del calcolo ordinario.

Se ora $\mathbf{X}$ è un vettore generico (cioè, in linguaggio algebrico, un gruppo di valori $x_1, x_2 \cdots x_n$), decomponiamolo in vettori componenti secondo gli assi uniti. Volendo mantenere la proprietà distributiva, per applicare $F(\Phi)$ al vettore $\mathbf{X}$, dobbiamo applicarlo a tutti quei singoli vettori componenti, nel modo or definito, e ricomporre i vettori così trasformati. Il risultato è $F(\Phi)\,\mathbf{X}$. Così resta definito $F(\Phi)$ come una matrice (o rispettivamente una diadica) che ha i medesimi raggi uniti di Φ, ma invece di avere gli invarianti $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$, ha gli invarianti $F(\rho_1)$, $F(\rho_2), \cdots, F(\rho_n)$. Ciò esige semplicemente che $F(\zeta)$ sia definito per $\zeta = \rho_1, \zeta = \rho_2, \cdots, \zeta = \rho_n$.

3. L'insieme di tutte le matrici $F(\Phi)$ ricavate così a partire da una medesima Φ, con diverse $F(\ )$, cioè l'insieme di tutte le funzioni aritmetiche di una medesima Φ, ha proprietà rimarchevoli. Forma gruppo nel senso di Lie, ed è anche sistema lineare, nel senso già usato da Marcolongo e Burali-Forti, perchè contiene tutte le combinazioni lineari, a coefficienti scalari, dei suoi elementi. Per esprimere questo, dirò che forma un *gruppo lineare* (1). Ma v'ha di più. Nei gruppi lineari che s'incontrano comunemente, così, p. es., nell'insieme di tutte le matrici che operano in un S_n, vale un'algebra con moltiplicazione non commutativa (2). Nel gruppo ora considerato, questa complicazione non si verifica: riflettendo alla significazione geometrica, si vede che tutte le $F(\Phi)$ dedotte da un'unica Φ, avendo in comune il sistema dei raggi uniti (quindi, algebricamente, il sistema dei covarianti fondamentali), e operando per mezzo di allungamenti secondo questi raggi, sono illimitatamente commutabili fra loro. Quindi entro quel

(1) La frase «gruppo lineare» è stata usata anche in altri significati, che mi sembrano però meno rispondenti alla sua struttura letterale.

(2) Cfr. Scorza, *Corpi numerici ed algebre* [Ed. Principato, Messina], e Whitehead, *Universal Algebra*, [Cambridge University Press], per la teoria generale di queste algebre non commutative.

gruppo lineare vale l'algebra ordinaria; cioè si può operare coi simboli $F(\Phi)$ con le stesse regole come se Φ fosse uno scalare [1]. Esprimerò questo fatto dicendo che il gruppo delle $F(\Phi)$ è *normale*; e dirò che esso è il gruppo associato a Φ e di cui Φ forma la base. È evidente che qualunque altra matrice $\Psi = F(\Phi)$ appartenente al gruppo, e che risulti con gli invarianti $F(\rho)$ tutti distinti, può essere presa come base del gruppo stesso.

4. La definizione di $F(\Phi)$ che ho dato in forma geometrica, intrinseca, si trasforma in enunciato algebrico, osservando che quando nell'S_n i raggi uniti di Φ si prendono come assi di riferimento, l'operazione Φ viene ad essere rappresentata dalla matrice di forma speciale

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} \rho_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{matrix} \right\|$$

e per conseguenza la $F(\Phi)$ è rappresentata da

$$\left\| \begin{matrix} F(\rho_1) & , & 0 & , & 0 \cdots 0 \\ 0 & , & F(\rho_2) & , & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , & 0 & , & 0 \cdots F(\rho_n) \end{matrix} \right\|.$$

Al cambiamento di assi corrisponde, analiticamente, l'operazione di trasformazione $\Psi(\quad)\Psi^{-1}$, dove Ψ è una matrice qualunque atta a portare gli assi antichi sui nuovi. Al fatto di riferire l'operatore ai nuovi assi corrisponde quello di porre Φ sotto la forma canonica

$$(4) \qquad \Phi = \Psi \left\| \begin{matrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{matrix} \right\| \Psi^{-1}$$

(1) Salvo solamente il diverso enunciato che acquista la condizione per l'annullamento di un prodotto. Basta però dare questo enunciato così: condizione necessaria è che qualcuno dei fattori sia degenere (di modulo nullo), per riconoscere che esso costituisce una generalizzazione, e non una deviazione da quello che vale pei prodotti numerici.

ciò che è sempre possibile in infiniti modi, nelle ipotesi fatte sulla natura di Φ. Allora la definizione algebrica di $F(\Phi)$ è questa

$$(5) \qquad \Phi = \Psi \begin{Vmatrix} F(\rho_1) & , & 0 & , \cdots , & 0 \\ 0 & , & F(\rho_2) & , \cdots , & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , & 0 & , \cdots , & F(\rho_n) \end{Vmatrix} \Psi^{-1}$$

e il confronto con la definizione geometrica mostra che qualunque sia la Ψ prescelta per fare la trasformazione in forma canonica, la $F(\Phi)$ risulta sempre la medesima.

In conclusione, sempre che Φ non sia degenere, e abbia gli invarianti $\rho_1 , \rho_2 , \cdots , \rho_n$ distinti, e che $F(\zeta)$ sia un simbolo di funzione definito per $\zeta = \rho_1 , \zeta = \rho_2 , \cdots , \zeta = \rho_n$, e che contenga parametri tutti scalari, e indipendenti dalle componenti di Φ, resta definito $F(\Phi)$; e tutte le $F(\Phi)$ dedotte da una medesima Φ sono illimitatamente commutabili fra loro; e i simboli $F(\Phi)$ possono venir trattati come se Φ fosse una quantità scalare.

5. La definizione va ora estesa al caso di Φ qualunque. Se due invarianti della Φ sono uguali fra loro, può nascere un piano di raggi tutti uniti, oppure un piano in cui vi è un raggio unito doppio (caso parabolico). Nel primo caso si scelgono due raggi distinti qualunque del piano speciale, per servirsene come raggi uniti fondamentali, e tutte le definizioni e deduzioni si applicano senza eccezione; la definizione algebrica, in particolare, non cambia nemmeno forma; tutte le $F(\Phi)$ che si deducono hanno allora anch'esse quel piano di raggi uniti. Nell'altro caso si ottiene la Φ parabolica come limite di una Φ che abbia due raggi uniti i quali si vanno avvicinando fino a confondersi fra loro nell'atto stesso che i due ρ corrispondenti tendono a uno stesso valore; e resta definita $F(\Phi)$, con la conservazione di rutte le proprietà di normalità pel gruppo che risulta. E il caso in cui più di due valori di ρ divengano uguali va trattato con ovvie estensioni ulteriori.

Più complessa si presenta la discussione del caso in cui Φ sia degenere, cioè abbia modulo nullo, pel fatto di avere uno o più invarianti nulli. Può avvenire allora che agli invarianti nulli corrispondano raggi uniti lungo i quali le dimensioni vengono annullate, mentre agli altri invarianti corrisponde un sottospazio che la Φ trasforma regolarmente in se stesso; e allora se $F(0)$ ha valore finito, le costruzioni fatte pei casi precedenti si applicano senza conseguenze nuove; se invece $F(\zeta)$ ha un polo per $\zeta = 0$, nasce una $F(\Phi)$ *a determinazione multipla*, cioè con costanti arbitrarie. L'ulteriore caso, in ordine di complicazione, è quello in cui per l'applicazione di Φ o di qualche sua potenza, qualche raggio regolare vada a coincidere

con quelli a moltiplicatore nullo; questo è il caso In cui esistono *radici* proprie delle potenze di Φ (nel senso di Pincherle e Amaldi), e può considerarsi come una combinazione del caso degenere col caso parabolico: la determinazione di $F(\Phi)$ si effettua allora sempre per combinazione delle costruzioni precedenti e di passaggi al limite, e può dar luogo a matrici con determinazione multipla o no. La normalità del gruppo delle $F(\Phi)$ permane in ogni caso.

È da notare che il caso in cui si genera un operatore a determinazione multipla può venir collegato con la ricerca (che più sopra abbiamo esclusa) della funzione inversa a F, cioè di trovare Φ in base a $F(\Phi)$ quando Φ ha gli invarianti tutti non nulli e distinti, mentre $F(\Phi)$ possiede più invarianti uguali.

6. Fin qui è stato implicitamente supposto che l'ordine n di Φ sia finito. Ma le matrici di ordine infinito sono quelle che più interessano le applicazioni: infinito numerabile, nelle teorie di Heisenberg e di Born sulla meccanica atomica; infinito continuo nella teoria degli operatori $F\left(\frac{d}{dt}\right)$ applicati alle funzioni fisiche.

Vi sono molte differenze fra il caso di n finito e quelli in cui n è infinito; e i teoremi del Pincherle le hanno poste in evidenza. Nondimeno la teoria degli $F(\Phi)$ anche negli spazi infiniti si lascia impostare sui principî generali esposti, tenendo questo per fermo che in ogni sottospazio unito (cioè che si trasformi in se stesso per effetto dell'applicazione di Φ), avente numero finito di dimensioni, la definizione di $F(\Phi)$ rimane quella data pel caso finito. L'ipotesi che Φ ammetta un sistema fondamentale di vettori $\mathbf{X}_s$ covarianti, cioè tale, che rispetto a ciascuno di essi la Φ si comporti come un moltiplicatore ρ_s, deve però essere posta esplicitamente, perchè potrebbe non avverarsi.

In quest'ipotesi (che si verifica in tutti i casi finora praticamente interessanti), sia $\mathbf{X}$ un vettore esprimibile linearmente mediante quei fondamentali, cioè atto a essere posto sotto la forma

$$\mathbf{X} = \sum A_s \mathbf{X}_s \tag{6}$$

dove il simbolo premesso a secondo membro può significare somma finita o infinita, o integrale, a seconda dei casi. Il principio enunciato conduce allora a questa definizione

$$F(\Phi)\mathbf{X} = \sum F(\rho_s) A_s \mathbf{X}_s \tag{7}$$

e si dirà che il primo membro ha un senso sempre che il secondo lo abbia: in questo punto si presentano le questioni di convergenza, che non esistono quando l'ordine è finito.

Inoltre, a differenza dal caso finito, **X** potrà ammettere molti sviluppi della forma (6); e dalla (7) conseguono allora altrettante valutazioni, di cui alcune eventualmente possono riuscire distinte. Per altra via si presentano quindi le valutazioni multiple; e possono introdurre infinità di costanti arbitrarie, ed anche funzioni arbitrarie. L'applicazione specifica che altrove ho fatto allo studio degli operatori $F\left(\frac{d}{dt}\right)$, considerati come matrici a ordine infinito nel campo delle funzioni fisiche, mostra i diversi casi che si possono presentare.

Resta ferma anche per le matrici di ordine infinito, la conclusione sulla normalità del gruppo delle $F(\Phi)$, e quindi sulla possibilità di operare su questi simboli secondo le regole del calcolo scalare.

7. Richiamo attenzione sulle formole per la calcolazione effettiva delle $F(\Phi)$ conforme alla presente teoria, che la dott.ssa E. Porcu-Tortrini ricava in una Nota, in questo stesso fascicolo; il prof. L. Fantappiè ne ha ricavate ancora altre, con un'ingegnosa applicazione dei suoi metodi funzionali, e ne farà oggetto di una pubblicazione prossima.

Meccanica. — *Sul peso delle strutture aeronautiche.* Nota del Corrispondente G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Sulla definizione della gravità normale* [1]. Nota [2] del Socio C. Somigliana.

La moderna geodesia ha ormai fissate le due costanti che determinano l'ellissoide di riferimento terrestre, ossia l'ellissoide che si ritiene più prossimo alla superficie reale della terra. Nell'Assemblea della Unione geodetica

(1) Il prof. Emilio Bianchi, Direttore dell'Osservatorio Astronomico di Brera, ha recentemente pubblicato una breve Nota nei «Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano», 1927 (*Osservazioni sulla Comunicazione di C. Somigliana*) nella quale propone di fissare come elementi fondamentali del campo gravitazionale normale o teorico: la gravità all'equatore, il semiasse maggiore e lo schiacciamento dell'ellissoide di riferimento. Io ero da vario tempo nello stesso ordine di idee e stavo appunto preparando questa Nota, in cui tali idee sono concretate e sviluppate, quando mi giunse, ben gradita, la pubblicazione del Bianchi. Perciò quanto in questa Nota è esposto e proposto deve considerarsi come conseguenza di una perfetta uniformità di vedute fra il prof. Bianchi e l'Autore.

Un concetto assai affine a quello del prof. Bianchi esprime anche il prof. E. Soler, Presidente della Commissione gravimetrica internazionale, in una lettera del 18 gennaio, nella quale mi propone di confrontare i valori della gravità dedotti dalla mia formola in forma finita, e colle costanti ora accettate, coi valori dati dalla formola di Helmert.

(2) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.

e geofisica internazionale tenutasi a Madrid nel 1924 per il semiasse maggiore a e per lo schiacciamento s furono fissati i valori [1]

$$a = 6378388 \text{ m.} \qquad s = \frac{1}{297}$$

e quindi per l'asse minore c il valore

$$c = 6356909 \text{ m.}$$

Un'altra costante sulla quale regna, in via generale, l'accordo, è la densità media k della terra, per cui ritiene [2]

$$k = 5.513$$

Ora, conosciute queste tre costanti, per un classico teorema di Stockes, il campo gravitazionale dell'ellissoide, supposto superficie di livello, è completamente determinato, sopra la superficie ed all'esterno di essa, indipendentemente quindi dalla distribuzione interna della massa.

Sembrerebbe quindi naturale, anzi, si potrebbe dire, necessario, di assumere questo campo gravitazionale, come *campo gravitazionale normale* o *teorico*, da prendersi come elemento di riferimento, onde studiare e ricercare le anomalie che la misura diretta della gravità potesse rivelare. Specialmente poi quando queste anomalie sono cercate allo scopo di dedurne eventuali deviazioni della superficie reale del geoide dalla forma ellissoidica normale. Vale a dire, sembrerebbe opportuno stabilire la definizione seguente:

La gravità normale è rappresentata in grandezza e direzione dal vettore gravitazionale del campo di forza appartenente all'ellissoide di riferimento che ha per semiassi e densità media i valori generalmente accettati per queste grandezze, quando tale ellissoide è considerato come superficie di livello.

Si è invece seguita un'altra via.

Clairaut, in base ad alcune ipotesi sulla costituzione interna della terra, aveva trovato una formola per esprimere la gravità sulla superficie dell'ellissoide in funzione della latitudine. Questa formola fu mantenuta, ma i coefficienti numerici di essa furono determinati da Helmert coll'applicazione del metodo dei minimi quadrati ad un numero grandissimo di valori della gravità effettivamente trovati colla misura diretta. Con ciò si pensò di avere una rappresentazione libera da qualunque ipotesi sulla costituzione interna, e la *gravità normale* fu definita in base alla formola così costruita. Nella « Encyclopedie der Math. Wiss. » (Bd. VI, 1 B, H. 2, *Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde*) Helmert, a proposito della sua formola, così scrive, (p. 90): *Die neuere Theorie beweist also letztere Formel nicht als eine*

(1) « Bulletin géodésique », n. 7, 1925, p. 542.
(2) « Encyclopedie der Math. Wiss. », Gravitation (Bd. V, H. I, s. 34).

Notwendigkeit auf Grund gewisser Annahme über die Gestalt und Massenverteilung der Erde, sondern nimmt sie als Tatsache und bringt sie nur in Zusammenhang mit der Figur und Massenverteilung, dergestalt, dass gewisse Schlüsse auf diese beiden, besonders die Figur der Erde, möglich werden.

L'Assemblea di Madrid ha confermato questo modo di vedere, ed ha definitivamente fissato come formola teorica della gravità superficiale alla latitudine λ la formola di Helmert (1901) [1]:

$$g = 978.030\ (1 + 0.005302\ \text{sen}^2\ \lambda - 0.000007\ \text{sen}^2\ 2\lambda).$$

Essa effettivamente può servire a rappresentare con grande precisione i valori della gravità sulla superficie della terra.

Però a proposito di questa formola, ed all'infuori di quanto è stato detto precedentemente, si può osservare che in essa, a cagione della sua origine in parte empirica, possono essere contenuti elementi provenienti dalla superficie *reale* terrestre, e quindi possa divenire parzialmente illusorio il confronto, fondato su di essa, fra la superficie terrestre e l'ellissoide di riferimento. Inoltre, la formola stessa non dice nulla per quanto riguarda il campo gravitazionale esterno, a meno che questo venga nuovamente definito, in base ad essa, con nuove determinazioni analitiche speciali. Per cui si può dire che allo stato attuale, col procedimento seguito, noi non sappiamo cosa sia la gravità teorica esternamente alla superficie della terra. Mentre d'altra parte è assai probabile che la navigazione aerea possa prossimamente rendere possibile la determinazione della gravità nella libera atmosfera, come la navigazione sottomarina, coll'uso dell'apparato Vening Meinesz, ha già reso preziosi servizi per la determinazione della gravità in mare.

Risulta quindi evidente l'opportunità di richiamare la teoria del campo gravitazionale esterno dall'ellissoide di rotazione, quale risulta, e si può costruire, in base al teorema di Stockes, e di stabilire con precisione quali eventuali differenze esistano fra la formola della gravità superficiale che deriva da quella teoria e la formola di Helmert.

A questo confronto è appunto dedicata la presente Nota ed un'altra che le farà seguito.

Prenderemo come punto di partenza una formola di Pizzetti, che è fondamentale nella teoria del campo gravitazionale ellissoidico, e sulla quale ho richiamato in varie occasioni l'attenzione dei geodeti [2]. Essa è la seguente:

$$(1) \qquad \frac{2g_e}{a} + \frac{g_p}{c} = 4\pi\gamma k - 2\omega^2$$

nella quale g_e, g_p indicano la gravità rispettivamente all'equatore ed al polo, γ è la costante di gravitazione ed ω la velocità angolare di rotazione ter-

(1) « Bull. géodésique », n. 7, 1925, p. 290.
(2) « Bull. géodésique », n. 11, 1926.

restre. A questa formola associeremo il teorema di Clairaut nella sua forma completa e rigorosa, pure valida nel nostro caso,

$$(2) \qquad \frac{g_p}{c} - \frac{g_e}{a} = 2\omega^2 C(i)$$

dove $C(i)$ rappresenta una serie procedente secondo le potenze pari intere della eccentricità, che ho chiamata *aggiunta*, definita dalla formola

$$i = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}.$$

Questa funzione $C(i)$, che ho proposto di chiamare *funzione di Clairaut*, quantunque per verità l'illustre matematico non abbia considerato che il primo termine del suo sviluppo, risulta essere il quoziente di due serie di potenze della i^2. Si ha cioè

$$C(i) = \frac{1}{4} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{2n}}{2n+3}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)\, i^{2n}}{(2n+3)(2n+5)}}.$$

Indicando con $C_0, C_1, C_2, \ldots$ i coefficienti dello sviluppo in serie di questa funzione, certamente regolare, cioè ponendo

$$(3) \qquad C(i) = C_0 + C_1 i^2 + C_2 i^4 + \cdots$$

si trova colle formole relative al quoziente di due serie

$$C_0 = \frac{5}{4}$$

e per $n = 1, 2, 3 \cdots$

$$(4) \quad C_n = \frac{3^{n+1}\, 5^{n+1}}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{3\cdot 5} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5\cdot 7} & \frac{1}{3\cdot 5} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(-1)\, n\,(n+1)}{(2n+3)(2n+5)} & \cdots & & & \frac{1}{3\cdot 5} & \frac{(-1)^n}{2n+3} \end{vmatrix}.$$

I primi coefficienti C_n si calcolano facilmente e si ha

$$(5) \qquad C(i) = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3\cdot 3}{5\cdot 7} i^2 - \frac{4\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 7} i^4 + \cdots\right).$$

Pei calcoli numerici che dobbiamo eseguire sono sufficienti questi tre termini della funzione di Clairaut.

Risolvendo le equazioni (1) (2) rispetto a g_e, g_p troviamo

$$(6) \qquad \begin{cases} 3g_e = 4\pi\gamma ka - 2\omega^2 a\,(C(i) + 1) \\ 3g_p = 4\pi\gamma kc + 2\omega^2 c\,(2C(i) - 1). \end{cases}$$

Mediante queste due formole noi possiamo calcolare i valori teorici della gravità all'equatore ed al polo, quando siano fissati, come noi supponiamo, i valori del semiasse maggiore a, dello schiacciamento s e della densità media k.

Conosciuti così i valori di g_e e g_p possiamo rappresentare la gravità g ad una latitudine qualunque φ mediante la formola da noi trovata nella Nota: *Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità* [1], cioè:

$$(7) \qquad g = \frac{jg_e \cos^2\varphi + g_p \operatorname{sen}^2\varphi}{\sqrt{j^2\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}} \qquad j = \frac{a}{c}$$

ed avere così i valori teorici della gravità ad una latitudine qualunque. Sviluppando in serie il secondo membro di questa formola ed arrestando lo sviluppo al terzo termine, potremo poi eseguire il confronto colla formola di Helmert, e dedurne le eventuali differenze.

Però conviene osservare che al valore della densità media noi non arriviamo con misure dirette, ma calcolandolo in base a valori osservati della gravità. Ed allora si presenta naturale ed opportuna l'idea di sostituire nelle considerazioni precedenti, e quindi anche nella definizione della gravità normale, al valore della densità media quello di *un valore della gravità* ad una data latitudine.

Applicando il teorema generalizzato di Clairaut da noi dimostrato nella Nota: *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità* [2] si possono in questo caso calcolare i valori di g_e, g_p in funzione di questo valore conosciuto della gravità, e sostituirli nella formola (7), come nel caso precedentemente considerato.

Il campo gravitazionale normale risulta così definito dai valori dell'asse maggiore a e dello schiacciamento s, e da un valore g della gravità ad una data latitudine φ qualsiasi.

Quando questo valore conosciuto della gravità è il valore g_e della gravità all'equatore, la definizione precedente coincide con quella proposta dal prof. Bianchi nella Nota ricordata da principio.

Darò i risultati numerici dei calcoli in una prossima Nota. Ma dirò subito che la nuova formola analoga a quella di Helmert, a cui si arriva col procedimento indicato, differisce pochissimo da quella ora accettata.

(1) «Rend. Acc. Lincei», 1° sem. 1927, p. 119.
(2) «Rend. Acc. Lincei», 1° sem. 1927, p. 11.

Tutto si riduce in ultima analisi ad una piccola diminuzione del valore della gravità al polo, che in grandezza supera di poco il millimetro.

Il vantaggio teorico raggiunto è invece grandissimo, poichè veniamo a disporre di un modello del campo gravitazionale che si può dire perfetto sotto ogni punto di vista, meccanico, analitico e geometrico, nel quale inoltre sono valide tutte quelle relazioni semplici ed eleganti che abbiamo incontrato nei nostri lavori precedenti.

Chimica. — *Equilibrio di riduzione del bisolfuro di tungsteno a mezzo dell'idrogeno* [1]. Nota [2] del Socio N. PARRAVANO e di G. MALQUORI.

Una ricerca analoga a quella riferita in precedenza per il bisolfuro di di molibdeno [3] abbiamo eseguito per quello di tungsteno e ne riportiamo qui i risultati.

Riche [4] e Defacqz [5] hanno mostrato che il bisolfuro di tungsteno si può ridurre a metallo per riscaldamento ad alta temperatura in corrente d'idrogeno, e Riche ha riottenuto il bisolfuro per azione dell'idrogeno solforato sul metallo arroventato.

La reazione: $WS_2 + 2H_2 \rightleftarrows W + 2H_2S$ può quindi verificarsi nei due sensi ed essa deve portare ad uno stato di equilibrio, caratterizzato per ogni temperatura dal rapporto costante $\frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$ ed indipendente dalla pressione.

La determinazione di questi rapporti costanti è stata eseguita con lo stesso metodo dinamico descritto nella Nota precedente.

Gli equilibri si stabiliscono molto più rapidamente partendo da idrogeno e solfuro, e questa perciò è stata la reazione che abbiamo sempre studiata. Solo per le temperature più elevate, alle quali la reazione inversa è abbastanza veloce, abbiamo controllato i risultati ottenuti da solfuro e idrogeno con quelli che si hanno da metallo e idrogeno solforato.

Nella tabella n. 1 sono riportati a ogni temperatura studiata, i valori del rapporto $\frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$ per diverse velocità di corrente gasosa.

I dati contrassegnati con asterisco sono quelli controllati con la reazione inversa.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.
(3) Questi «Rendiconti», [6], 7, 109 (1928).
(4) «Ann. Chim. Phys.» [3], 50, 26, (1857).
(5) «Ann. Chim. Phys.» [7], 22, 264, (1901).

Tabella I.

t° cent.	Velocità della corrente in litri ora	$\frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$
795°	0.29	0.00714
»	0.24	0.00727
»	0.18	0.01080
		0.01400 valore estrapolato
895°	0.43	0.00481
»	0.42	0.00523
»	0.15	0.02611
		0.02634 valore estrapolato
985°	0.53	0.00795
»	0.43	0.02030
»	0.19	0.03870
		0.04200 valore estrapolato
1065°	0.65	0.0414
»	0.22	0.0688
»	0.04	0.07306
		0.07400 valore estrapolato

Le fasi costituenti il corpo di fondo constano esclusivamente di W e WS_2 solidi; non esiste un'altra fase più povera di zolfo di WS_2.

Per accertarci di questo abbiamo studiato la riduzione isotermica a 1065°. Si è fatto cioè passare un volume determinato di idrogeno, a velocità nota e costante, sopra 2 grammi di bisolfuro riscaldati a quella temperatura, fino a completo esaurimento dello zolfo, e a brevi intervalli di tempo si è prelevato un campione del miscuglio gassoso, e si è determinato il rapporto $\frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$.

I valori ottenuti sono riportati nella tabella II.

Tabella II.

WS_2 gr. 2 S gr. 0.51.

Quantità di zolfo asportata dal corpo di fondo	Velocità in litri-ora	$\frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$
0.087	0.68	0.0401
0.115	»	0.0413
0.223	»	0.0399
0.280	»	0.0400
0.330	»	0.0389
0.410	»	0.0412
0.472	»	0.0325
0.510	»	0

La costanza dei valori dell'ultima colonna mostra che effettivamente non si forma una nuova fase solida più povera di zolfo di WS_2.

*
* *

Con i valori delle costanti dell'equilibrio di riduzione, e servendosi delle costanti di dissociazione dell'idrogeno solforato alle stesse temperature, sono state ricavate le tensioni di zolfo del bisolfuro di tungsteno, e da esse è stato calcolato Q mediante la formula approssimata di Nernst.

Questi dati sono riportati nella tabella III.

Tabella III.

t°	$\log \frac{P_{H_2S}}{P_{H_2}}$	$\log P_{S_2}$	Q
795°	— 1.854	— 6.938	73400
895_0	— 1.580	— 5.611	73500
985_0	— 1.377	— 4.603	73700
1065_0	— 1.131	— 4.642	73000
			Media 73400

Questi valori, confrontati con quelli avuti per il bisolfuro di molibdeno, mostrano che il bisolfuro di tungsteno è più riducibile di quello di molibdeno.

Le tensioni di zolfo sono infatti maggiori ed i valori di Q più bassi (Q per $WS_2 = 73400$ cal., per $MoS_2 = 79425$ cal.).

I composti ossigenati corrispondenti si comportano in modo analogo. Infatti si ha [1]:

$$\text{per } Mo + O_2 = MO_2 \rightarrowtail Q = 142.8 \text{ Cal.}$$

$$\text{per } W + O_2 = WO_2 \rightarrowtail Q = 131.4 \text{ »}$$

Mineralogia. — *Ricerche sul clorofosfato di piombo (piromorfite).* Nota del Socio F. Zambonini e di A. Ferrari.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Un eccezionale filone di porfirite augitica nelle dolomie triasiche dell'alta valle della Neva (Alpi Liguri).* Nota [2] del Corrisp. S. Franchi.

Dopo le fortunate scoperte di fossili liasici nei Calcescisti delle Alpi Cozie (ammoniti, belemniti, corallari), di fossili norici (*Worthenia solitaria*, *Avicula* cfr. *exilis*, *Loxonema*, *Eucrinus*, *Diploporæ*) nelle dolomie, chiaramente sottostanti in perfetta concordanza, in vari punti, e del Retico fossilifero in altri, ebbero inoppugnabilmente dimostrata l'età secondaria, essenzialmente giurese-liasica, della famosa « zona delle pietre verdi » di Bartoomeo Gastaldi, ritenuta invece prepaleozoica o arcaica da questo illustre geologo, da Martino Baretti e da alcuni loro seguaci [3], i geologi che studiavano il versante italiano delle Alpi Occidentali rivolsero la loro attenzinne alla ricerca

(1) Landolt, *Tabellen*, vol. II, 1525.

(2) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.

(3) Frà questi è da annoverarsi il compianto ex-collega e amico ing. Ettore Mattirolo, al quale sono dovuti estesi rilevamenti nelle Alpi Cozie e Graje e un bel lavoro con carta geologica sulle Valli di Lanzo, la quale, indipendentemente dalla errata cronologia, conserva un certo valore e un grande interesse: *Carta Geo-litologica delle Valli di Lanzo* colla collaborazione di V. Novarese, S. Franchi e A. Stella.

di filoni di rocce basiche, i quali potessero rappresentare il passaggio attraverso gli strati del Trias sottostante, delle numerosissime e talora estesissime masse eruttive di « pietre verdi » (serpentine, diabasi, eufotidi) comprese nei Calcescisti, delle quali alcune oltrepassanti la diecina di chilometri di estensione.

Ma le loro ricerche in questo senso, con loro grande stupore, riuscirono sempre vane, il che essi dovettero a più riprese dichiarare, non senza un po' di mortificazione, nei loro scritti.

Questo fatto inesplicabile, costituente un formidabile enigma, che dimostrava tanto misteriosa la via per cui i magmi basici sarebbero giunti agli strati liasici in mezzo ai quali ora li vediamo, avrebbe potuto ingenerare forti dubbi sulla età post-triasica dei Calcescisti e delle famose pietre verdi, se tale età non fosse sempre stata confermata da nuovi ritrovamenti di fossili nelle Alpi Cozie stesse e nelle Alpi Graje, e dalle osservazioni stratigrafiche, nonchè dal felice accordo che, colla nuova cronologia, si veniva a stabilire, per la loro continuità coi terreni secondari a *facies* cristallina oltre il confine svizzero, e colle deduzioni tratte dalle acute e logiche osservazioni tettoniche di Marcel Bertrand, al di là e lungo il confine franco-italiano [1].

Il filone di porfirite augitica, del quale dò ora notizia, è finora il solo che sia stato rinvenuto attraversare le rocce secondarie a *facies* ordinaria, in tutta la immensa estensione superficiale che esse hanno, nel giro delle Alpi Occidentali da noi esplorate [2].

Per questo io ho creduto opportuno annunciarne con questa breve Nota la esistenza, ed anche perchè lo stato di particolare freschezza della roccia, in confronto delle rocce della stessa famiglia che sono invece profondamente metamorfosate in rocce a glaucofane ed a lawsonite della maggior parte delle masse intercalate nei Calcescisti, potrà permettere interessanti considerazioni sulla età della sua intrusione, in probabile concomitanza con

(1) Queste osservazioni di M. Bertrand, pubblicate nel suo noto grande lavoro del 1894, supplirono alla mancanza di fossili nei Calcescisti del versante francese delle Alpi Cozie e Graje, dove sono state solo da me trovate delle belemniti, nella discesa dal Colle del Piccolo San Bernardo verso Seez, nei Calcescisti che sono la evidente prosecuzione di quelli con belemniti della strada nazionale, al di qua del rifugio, e del lago Verney.

(2) Sono invece frequenti, e in alcune regioni serpentinose e Lherzolitiche frequentissimi, filoni di spessori sempre ridotti, di eufotidi e di altre rocce gabbriche, di grenatiti, ecc., come nelle peridotiti del gruppo Monte Musiné-Monte Curto, e nelle masse serpentinose dei dintorni di Isoverde e di Varazze. Anzi, ad oriente di questo abitato, affiora lungo la costa per circa 1800 m., una grande e interessantissima massa di enfotiti massiccia e laminata, talora a grandi diallagi smaragdici, la quale manda apofisi filoniane nella grande massa di serpentina che le sta a contatto a levante e a nord.

Questa quasi assoluta mancanza di filoni nel Trias delle Alpi Marittime, è tanto più stupefacente data la grande frequenza di filoni di porfidi, di apliti e di porfiriti nel rispettivo Massiccio Cristallino, e nelle lontane formazioni gneissiche e diorito-kinzigitiche della Valle Sesia.

qualcuna delle grandiose dislocazioni, alle quali è stata certamente soggetta la ragione, come già io ho dichiarato e in parte dimostrato in precedenti Note.

Le dolomie nelle quali è incluso il filone di augite, nel versante N.O. del Pizzo della Croce, sopra Erli, hanno tutti i caratteri di quelle del Trias medio-superiore della regione, e tale età è appunto ad esse attribuita nella carta geologica al 100.000, che accompagna l' importante lavoro dell' ingegnere Zaccagna intitolato *Conformazione stratigrafica fra il torrente Neva ed il Pennavaira* (« Boll. R. Comitato Geol. », 1909).

Secondo questa carta le dolomie sembrerebbero sovrapposte agli scisti eocenici, che lo Zaccagna indica svilupparsi a partire dal Rio Barchetto lungo la Neva fino a Castelvecchio e a Zuccarello e quindi a Balestrino, con limiti tali che suggeriscono l' idea di un carreggiamento o almeno di un rovesciamento del Trias sull' Eocene.

Le mie osservazioni in questa regione non hanno potuto essere riprese dopo la campagna del 1894, al termine della quale io ho scoperto il filone di porfirite in questione; perciò non posso pronunziarmi sopra alcuni quesiti di altissimo interesse che mi sono allora presentati, di litologia, di stratigrafia e di tettonica, i quali sono naturalmente collegati con quelli della tettonica delle brecce poligeniche di età giurese, le quali hanno tanta parte nella costituzione del contrafforte Monte Galero-Monte Alpe, e presentano estesi affioramenti nei monti che coronano la pianura di Albenga [1].

Perciò io, notata la relativa grande freschezza della porfirite del filone, che ritengo di intrusione di molto posteriore al Giurese e probabilmente post-eocenica, mi limito ad avanzare la ipotesi che essa sia contemporanea a qualcuna delle grandi dislocazioni delle Alpi Occidentali posteriori all'Eocene superiore e anteriori al Tongriano, che sono quelle a cui sono collegati i klippen delle valli Argentina e Roia e le falde di ricoprimento del Colle di Tenda, nonchè i grandi carreggiamenti dell'Ubaye.

Questo filone rappresenterebbe quindi una delle più recenti manifestazioni eruttive delle Alpi Occidentali italiane e dell'Appennino Settentrionale.

Sono note le grandi masse di labradoriti di Vence, ad occidente di Nizza, dovute ad eruzioni di età miocenica superiore e in parte pliocenica, e quella del Capo d'Aggio, presso Monaco, di età più recente ancora (pliocenica), corrispondenti a dislocazioni diverse, che affettarono le Alpi Marittime in vari momenti del Terziario medio e superiore, sulla precisazione dei quali non esiste ancora un completo accordo tra i geologi [2].

(1) S. Franchi, *La serie secondaria capovolta e i grandi carreggiamenti nei monti di Albenga*. Questi « Rendiconti », vol. I, serie 6ª, febbraio 1925; *I terreni dal Priaboniano al Norico nei monti di Albenga*, id. id., seduta 4 novembre 1927.

(2) W. Kilian, *Sur la date de formation des nappes alpines franco-italiennes*. « C. R. S. de la Soc. Géol. de France », n. V, pp. 65-69 (séance du 21 mars 1921).

Zoologia. — *I corpuscoli del tuorlo e la loro coltura in ager.* Memoria del Corrisp. U. Pierantoni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra le coordinate geodetiche.* Nota di P. Nalli, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Per una varietà V_n ad n dimensioni che ammetta una metrica secondo Riemann, caratterizzata dall'espressione del quadrato dell'elemento lineare:

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx_j ,$$

si è presentato naturalmente il problema di vedere se essa è euclidea, se cioè è possibile, con un cambiamento di variabili, di ridurre il ds^2 ad avere coefficienti costanti, od, in altri termini che *le derivate parziali delle* a_{ij} *siano nulle in ogni punto della varietà.*

Si trova che, condizione necessaria e sufficiente perchè ciò accada, è che si annulli il tensore di Riemann.

Tale problema si può generalizzare.

Premettiamo una definizione.

Siano V_n e V'_n due varietà i cui punti siano messi in corrispondenza biunivoca e continua, V_m ($m \leq n$) una varietà contenuta nella prima, V'_m la corrispondente nella seconda.

Sia P un punto di V_m e P_1 un punto di V_n infinitamente vicino a P, P′ e P'_1 i corrispondenti in V'_m e V'_n: *se la differenza*

$$\overline{PP_1} - \overline{P'P'_1}$$

è un infinitesimo di ordine superiore al secondo rispetto a PP_1, diremo che le due varietà V_n e V'_n *si osculano lungo* (V_m, V'_m).

Riferite V_n e V'_n alle stesse variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

e

$$ds'^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ij} a'_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

sono le forme differenziali che fissano la metrica nelle due varietà, per la osculazione lungo (V_m, V'_m) è necessario e sufficiente che per ogni *n-pla* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ a cui corrisponde un punto di V_m in V_n (e quindi un punto di V'_m in V'_n) *si annullino le differenze* $a_{ij} - a'_{ij}$ *e le loro derivate parziali.* Come conseguenza, *se* $m > 0$, *tali differenze saranno costanti per le n-ple anzidette.*

È chiaro che la proprietà di essere osculatrici è per due varietà indipendente dal sistema di coordinate che si sceglie.

Quando $m = n$ e la V'_n è euclidea, cambiando le variabili in modo che le a'_{ij} risultino costanti, saranno costanti anche le a_{ij}, cioè anche la V_n, sarà euclidea.

Inversamente, due varietà euclidee V_n, V'_n si possono sempre mettere in corrispondenza in modo da risultare osculatrici lungo (V_n, V'_n).

Ne viene che il problema al quale abbiamo accennato al principio della presente Nota si può generalizzare nel seguente:
data una V_n *e fissata in essa una* V_m, *quando è possibile trovare una* V'_n *euclidea in modo che* V_n *e* V'_n *si osculino lungo* (V_m, V'_m)?

Si potrebbe porre un problema ancora più generale.

Posta la seguente definizione: *date due varietà* V_n, V'_n *che si osculano lungo* (V_m, V'_m), *si dirà che hanno lungo* (V_m, V'_m) *un contatto di ordine* $\geqq p$, *quando la differenza*

$$\overline{PP_1} - \overline{P'P'_1}$$

già considerata, *è un infinitesimo di ordine maggiore di p rispetto a* $\overline{PP_1}$ (per il che è necessario e sufficiente che per ogni *n-pla* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ a cui corrisponde un punto di V_m, si annullino le derivate parziali delle differenze $a_{ij} - a'_{ij}$ sino a quelle di ordine $p - 1$ incluse) si potrebbe chiedere *quando, data una* V_n *ed in essa una* V_m, *esista una* V'_n *euclidea avente con la* V_n, *lungo* (V_m, V'_m), *un contatto di ordine* $\geqq p$.

Ma in questa Nota ci limiteremo a supporre $p = 2$. In tal caso il problema si può enunciare così: *data una* V_n *ed in essa una* V_m, *esistono per la* V_n *sistemi di coordinate geodetiche in ogni punto di* V_m?

Si hanno i due casi estremi: $m = n$, $m = 0$.

Il primo è il problema dal quale siamo partiti: quando la V_n è euclidea?

Il secondo, come si sa, ammette infinite soluzioni: è il problema di fissare coordinate geodetiche in un punto.

Ma esso rimane risoluto qnando si risolve il problema per $m = 1$, caso che tratteremo diffusamente.

Per $m = 1$ la V_m è una linea L: si tratta di trovare per la V_n un sistema di coordinate geodetiche in ogni punto di L.

C'è in proposito un risultato stabilito dal Fermi, ma in realtà *il problema si può considerare risoluto con la introduzione della nozione di parallelismo. Perchè il problema di spostare un vettore in* V_n *per parallellismo lungo una linea* L, *aperta e senza punti multipli, è perfettamente equivalente al problema di trovare per* V_n *un sistema di coordinate geodetiche in ogni punto di* L.

Cominciamo col far vedere come *partendo dalla nozione di parallelismo si arrivi alle coordinate geodetiche.*

Per fissare le idee supponiamo $n = 3$.

In un estremo di L fissiamo tre vettori, tali che la direzione di uno qualunque di essi non appartenga alla giacitura determinata dalle direzioni degli altri due e che alla giacitura di due direzioni non appartenga la direzione della tangente ad L.

Spostando i tre vettori per parallelismo lungo L, in ogni punto di L. avremo tre direzioni d_1, d_2, d_3.

Fissiamo le superficie coordinate prendendo in ogni punto di L le tre superficie geodetiche determinate dalle tre giaciture $(d_2\, d_3)$, $(d_3\, d_1)$, (d_1, d_2).

In tal modo in ogni punto di L restano fissate tre linee geodetiche come linee coordinate, e si può supporre che nel ds^2 della V_3

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{1,3} a_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

le a_{ii} prendano tutte su L il valore 1, bastando in caso contrario fare un cambiamento di variabili del tipo

$$x_i = f_i(\bar{x}_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

che conserva le linee coordinate.

In questo particolare sistema di coordinate il vettore che nei punti di L ha le componenti controvarianti

$$1\ ,\ 0\ ,\ 0$$

è un vettore parallelo lungo L. Lo stesso dicasi dei vettori che hanno le componenti controvarianti $0, 1, 0$ e $0, 0, 1$. Ne viene (dalle equazioni differenziali del parallelismo) che se r è uno dei numeri $1, 2, 3$ valgono lungo la L le relazioni

$$(1) \qquad \sum_{l}^{1,3} \left\{ \begin{matrix} rl \\ i \end{matrix} \right\} dx_l = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Ma tenendo conto che sono geodetiche sulla superficie $x_h = \text{cost}$, passante per un punto P di L, linee che hanno in P il parametro $\lambda^h = 0$ e gli altri due λ^i, λ^j $(i, j \neq h)$ di rapporto arbitrario, si conclude che in ogni punto P di L è

$$(2) \qquad \left\{ \begin{matrix} ik \\ h \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (i, k \neq h).$$

In un punto di L dovendo essere soddisfatte le (1) e (2), si conclude facilmente, prendendo se occorre su L un conveniente arco in modo che in ogni suo punto sia $dx_l \neq 0$ $(l = 1, 2, 3)$ (arco che continueremo a chiamare con L), che si annullano tutti gli $\left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \; \begin{matrix} l \\ \end{matrix} \right\}$, e quindi in un punto di L sono nulle tutte le derivate parziali delle a_{ij}. Il sistema di coordinate che abbiamo fissato è dunque geodetico di ogni puuto di L.

Facilmente si vede come il risultato si estende ad una V_n qualunque.

Inversamente, partendo dalla nozione di coordinate geodetiche in ogni punto di una linea L, si arriva a quella di parallelismo.

Infatti, supponiamo che per una V_n sia stato fissato un sistema di coordinate geodetiche in ogni punto di una linea L. Allora su L saranno costanti le a_{ij} del ds^2. Un vettore che si sposta lungo L mantenendo costanti le sue componenti covarianti (o ciò che è lo stesso, controvarianti) si sposta lungo L per parallelismo, ed inversamente.

Dopo di che le proprietà del parallelismo relative alla conservazione di lunghezze, di angoli, diventano evidenti. Diventa anche evidente l'autoparallelismo delle geodetiche, perchè lo spostamento per parallelismo in V_n lungo una linea L si riduce allo spostamento nella V'_n euclidea, osculatrice a V_n lungo (L, L'), lungo la linea L'. E se L è geodetica in V_n, L' lo è in V'_n.

Si comprende poi come la nozione di parallelismo si possa estendere ad un tensore qualunque, dicendo che *un tensore si sposta per parallelismo lungo* L, *quando in un sistema di coordinate geodetiche in ogni punto di* L, *si mantengono costanti le sue componenti.*

Varranno naturalmente delle proprietà di conservazione di certi invarianti, dipendenti dal fatto che *lungo una linea* L *qualunque, il tensore* a_{ij} *si mantiene parallelo a se stesso.*

Concludendo: il risultato del Fermi (che cioè esistono sistemi di coordinate geodetiche in ogni punto di una linea L) non è che un modo di enunciare il risultato fondamentale del Levi-Civita (che cioè un vettore si può spostare per parallelismo lungo una linea L).

Matematica. — *Le matrici caratteristiche delle simmetrie sulle varietà abeliane reali.* Nota di S. CHERUBINO, presentata [1] dal Corrisp. G. SCORZA.

In due Note apparse recentemente in questi « Rendiconti » [2] ho messo in evidenza come i concetti di parità e di successione fondamentale di parità pei periodi simultanei degli integrali u_s di una V_p reale inerenti ad una sua simmetria S ed il carattere reale λ di questa S sono intimamente connessi fra loro e con la struttura delle matrici riemanniane legate alla varietà abeliana reale V_p.

Orbene, l'esistenza - recentemente segnalata dal Comessatti [3] - di varietà abeliane reali (necessariamente singolari) con simmetrie di diverso carattere reale lascia legittimamente pensare che lo sviluppo della teoria di tali varietà debba dipendere, in parte forse cospicua, dallo studio più approfondito di tali legami.

È ciò che viene iniziato in questa Nota con la introduzione della nozione di *matrici caratteristiche* (*minime, non minime, unimodulari*) per una simmetria su una V_p.

Questa nozione presenta subito il vantaggio, qui appresso rilevato, di far riottenere assai rapidamente un notevole risultato del Comessatti stesso [4], completandolo con la determinazione della totalità delle sostituzioni unimodulari trasformanti l'una nell'altra due simmetrie di egual carattere reale.

In pari tempo, si sono qui ottenute - sotto varie forme - le condizioni perchè due simmetrie di una stessa varietà abeliana reale appartengano alla stessa schiera o a schiere accoppiate.

1. Sia V_p una varietà abeliana reale ed S una sua simmetria. Detti $u_1 \cdots u_p$ p integrali semplici di prima specie di V_p *inerenti* ad S, questa si rappresenta con le relazioni [5]

$$(1) \qquad \bar{u}'_s = u_s \qquad (s = 1 \cdots p).$$

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) *Sulla nozione di parità e sul carattere reale delle varietà abeliane reali.* I. *Le matrici riemanniane sottonormali.* II. *Le matrici riemanniane realizzate.* Vol. VI, serie 6ª, 2° semestre, fasc. 8 e 9 (ottobre e novembre 1927). Richiamerò queste in seguito con Nota I e Nota II.

(3) *Sulle curve ellittiche reali.* (« Boll. Unione Mat. Ital. », Anno V, n. 2, aprile 1926).

(4) *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche.* (« Atti Ist. Veneto », 1925-1926, tomo LXXXV).

(5) Prescindo, qui e nel seguito, dalle costanti additive che sono inessenziali per le quistioni di cui sto occupandomi.

Scelti, comunque, $2p$ cicli primitivi C_k sulla riemanniana di V_p, ai parametri u_s sarà legata una *matrice di Riemann* (Scorza)

$$w \equiv \| w_{s1} \cdots w_{s2p} \|$$

e dalle (1) si dedurranno, al modo noto, delle relazioni come

$$(2) \qquad \overline{w}_{sr} = a_{r1} w_{s1} + \cdots + a_{r2p} w_{s2p} \quad (s = 1, \cdots, p) \; (r = 1, \cdots, 2p)$$

cosicchè le

$$(3) \qquad \overline{x}'_r = a_{r1} x_1 + \cdots + a_{r2p} x_{2p} \qquad (r = 1 \cdots 2p)$$

daranno un'antisostituzione riemanniana involutoria per w, che indicherò ancora con S. Con la stessa S sarà distinta la matrice intiera, di determinante unimodulare, $\| a_{rk} \|$.

L'equazione caratteristica della (3) ha le due radici $+1$ e -1, entrambe di molteplicità p e ad esse corrispondono, ordinatamente, due spazi razionali σ e σ^*, entrambi ∞^{p-1}.

Siano

$$m \equiv \| m_{s1} \cdots m_{s2p} \| \quad , \quad n \equiv \| n_{s1} \cdots n_{s2p} \| \qquad (s = 1 \cdots p)$$

due matrici di intieri che diano p punti indipendenti, rispettivamente di σ e di σ^*. A queste corrisponderanno p coppie di periodi simultanei pei parametri u_s:

$$\Omega_{sj} = \sum_r m_{jr} w_{sr} = \text{reale} \qquad {}^*\Omega_{sj} = \sum_r n_{jr} w_{sr} = \text{imaginario puro (o zero)}$$

$$(j, s = 1 \cdots p)$$

che dirò, rispettivamente, periodi *reali* (o diritti) e periodi *imaginarii puri* (o rovesciati) per gli u_s [1].

Si sa [2] che le matrici m ed n possono sempre scegliersi in modo che i periodi ora detti formino due *successioni fondamentali di parità*, ordinatamente *reale* e *imaginaria pura*, per la w quindi per gli u_s, cioè tali che ogni altro periodo reale (imaginario puro) simultaneo per gli u_s abbia, coi suoi intieri caratteristici, la stessa parità di una linea di m (di n).

Si potrà anzi addirittura supporre [3] che le matrici m ed n abbiano i minori di ordine massimo tutti primi fra loro, con che, oltre ad ottenersi

(1) Abbandono la notazione di periodi *diritti* o *rovesciati* (di ordine p) che qui non ha più ragione di esser mantenuta e la sostituisco con quella di periodi reali o imaginarii puri. Cfr. le Note I e II, e le mie Memorie I e II sulle varietà abeliane reali. (« Giorn. di Matem. », vol. LX e LXI, 1922 e 1923)

(2) Cfr. Mem. II, n. 5.

(3) Cfr. Nota I, n. 1.

due successioni fondamentali di parità come ora detto, si ottengono anche due *basi minime* [1], una per ciascuno dei due spazi razionali σ e σ^*.

Una matrice quadrata come $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, cioè che abbia $2p$ righe di cui le prime p sono quelle di m e le ultime p quelle di n, la dirò una *matrice caratteristica* di S, qualora m ed n diano due successioni fondamentali di parità. La dirò *matrice caratteristica minima*, se m ed n danno anche due basi minime di σ e σ^*.

Osservisi che, in ogni caso, si ha

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} m \\ -n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & o \\ o & -I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

dove con I si è indicata la matrice identica, di ordine p.

È facile ottenere che [2]:

a) Le matrici caratteristiche minime inerenti ad una stessa simmetria S, *sugli stessi cicli, si ottengono tutte da una qualunque moltiplicando a sinistra per tutte le possibili matrici unimodulari composte mediante due altre di ordine* p. *Ad ogni matrice caratteristica minima di* S *corrisponde una di queste matrici di ordine* $2p$ *ed una sola.*

Ne segue che:

b) tutte le matrici caratteristiche minime di S, *sugli stessi cicli, sono fra loro equivalenti e (quindi) hanno determinanti di eguale valore assoluto (non nullo).*

Equivalenti qui vuol dire che si ottengono l'una dall'altra moltiplicando per una matrice unimodulare.

2. Se $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ è una matrice caratteristica, minima o non, per S, il carattere reale λ di S indica [3] il massimo numero delle linee di m che hanno ugual parità con altrettante linee di n. Ne segue immediatamente che:

a) il determinante di una matrice caratteristica, minima o non, di una simmetria S *di carattere reale* λ *è sempre un numero (intiero) non nullo divisibile per* 2^λ.

Inoltre [4]

b) ciascuna delle matrici rettangolari m, n *di una matrice caratteristica minima* $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ *per* S *fa parte di (almeno) un determinante unimodulare di ordine* $2p$.

(1) Cfr. Scorza, *Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane.* [« Rend. », Palermo, t. XLII, (1918-1919) § 1].

(2) Proposizione in sostanza, nota: Cfr. Scorza (loc. cit., n. 1 β).

(3) Cfr. Nota I, n. 2.

(4) Cfr. Nota II, n. 1.

3. Ecco alcune proposizioni semplici, ma fondamentali:

a) due simmetrie appartengono alla stessa schiera allora e solo allora che gli integrali ad esse inerenti si ottengano gli uni dagli altri con combinazioni lineari a coefficienti reali. Cioè a dire quando ad esse siano inerenti gli stessi parametri [1];

b) perchè due simmetrie siano accoppiate [2] *occorre e basta che gli integrali inerenti all'una siano combinazioni lineari a coefficienti imaginarii puri degli integrali inerenti all'altra;*

c) con un cambiamento di cicli, in altri pure primitivi, ogni matrice caratteristica per S *si trasforma in una matrice equivalente, ancora caratteristica per la simmetria* S *e (quindi) il valore assoluto del determinante corrispondente resta invariato;*

d) le matrici caratteristiche di una simmetria S *e la stessa matrice* S *non dipendono dalla scelta dei parametri, ma soltanto da quella dei cicli;*

e) perchè due simmetrie S *ed* S′ *di una* V_p *stiano nella stessa schiera, occorre e basta che, sugli stessi cicli, una matrice m (una matrice n) per* S *coincida con una matrice m′ (una matrice n′) per* S′. *Dopo di che, ogni matrice caratteristica per* S *su quei cicli coinciderà con una matrice caratteristica per* S′, *su quegli stessi cicli;*

f) perchè due simmetrie S *ed* S′ *di una* V_p *siano accoppiate, occorre e basta che, sugli stessi cicli, una matrice m (una matrice n) per* S *coincida con una matrice n′ (una matrice m′) per* S′. *Dopo di che, ogni matrice caratteristica per* S *su quei cicli coinciderà con una matrice caratteristica per* S′, *sugli stessi cicli, salvo l'inversione delle prime p righe con le ultime p.*

Le due ultime proposizioni si possono anche enunciare dicendo che:

g) se due antinvoluzioni riemanniane corrispondenti a due simmetrie sugli stessi cicli hanno uno spazio fondamentale a comune, avranno a comune anche l'altro spazio fondamentale, e le due simmetrie sono della stessa schiera, ovvero sono accoppiate, secondo che gli spazi fondamentali coincidenti sono oppur no relativi alla stessa radice $+1$ *o* -1 *delle equazioni caratteristiche delle due involuzioni.*

Aggiungo qui soltanto un cenno di dimostrazione per queste proprietà:

La *a)* segue senz'altro da una proposizione già nota [3].

La *d)* si riconosce facilmente scrivendo le (1)-(2) nella forma trasformata che si ottiene passando dagli integrali u_s ai nuovi v_s, mentre i cicli C_r restano fermi: si verifica infatti che gli intieri a_{rk} della (2) restano invariati.

Nel corso della dimostrazione di questa *d)*, si dimostrano anche la *b)* e la *c)*.

(1) Ibid., n. 4, *a*).
(2) Ibid., n. 4, *d*).
(3) Cfr. Nota II, n. 4, *f*).

E poichè, nella ipotesi della *e)*, i periodi simultanei reali (imaginarii puri) per i v_s inerenti ad S′ si esprimono come combinazioni lineari dei periodi simultanei reali (od imaginarii puri) per gli u_s inerenti ad S, con gli stessi coefficienti con cui i v_s si esprimono negli u_s, segue rapidamente che questi coefficienti sono reali, onde, causa la *a)*, resta verificata la *e)*.

Analogamente per la *f)*.

4. La *c)* può essere completata osservando che:

a) un cambiamento di cicli in altri pure primitivi, porta le matrici caratteristiche minime e non minime per S, *ordinatamente in matrici caratteristiche minime e non minime (per la stessa* S, *sui nuovi cicli).*

Ciò dipende dal fatto che se T è una matrice quadrata, di ordine $2p$, unimodulare, è tale anche la sua inversa T^{-1} e che le due relazioni

$$m \cdot T = m' \quad ; \quad m = m' \cdot T^{-1}$$

sussistono contemporaneamente. Ne segue che coincidono i massimi comuni divisori dei minori di ordine massimo (anzi di qualsiasi ordine) per m ed m', e quindi che se m è base minima per σ, la m' sarà base minima per σ', spazio razionale trasformato di σ col cambiamento di cicli definito dalla T.

Se ora si suppone che i cicli C_k siano pseudonormali (Comessatti), si riconosce subito che *una matrice caratteristica minima* per S è quella che ha i primi p elementi e gli ultimi $p - \lambda$ della diagonale principale eguali ad uno ed i λ intermedii eguali a -2; mentre tutti gli altri elementi sono nulli, eccetto quelli di posto $p + j$ della colonna j^{ma}, per $j = 1, \cdots, \lambda$, che sono eguali a $+1$.

Il determinante di una tal matrice ha valore $(-2)^{\lambda}$; e poichè i cicli pseudonormali sono anch'essi primitivi, dal numero precedente segue senza altro che:

b) i determinanti delle matrici caratteristiche minime di ogni rimmetria S *di carattere reale* λ, (quindi anche di quelle della stessa schiera di S o ad essa accoppiate) *su cicli primitivi qualsiansi, hanno tutti lo stesso valore assoluto* 2^{λ}.

5. Nella matrice m vi sono λ righe, e non più, aventi la stessa parità di altrettante righe di m: si può sempre ritenere che queste righe siano le prime λ, tanto in m, che in n.

Pongasi, perciò:

$$n_{sk} = m_{sk} - 2\, g_{sk} \qquad (s = 1 \cdots \lambda \quad ; \quad k = 1 \cdots 2p)$$

e si indichi con P_{λ} la matrice quadrata di ordine $2p$ che differisce da quella identica per avere eguali a $-\frac{1}{2}$ gli elementi di posto $p + 1, \cdots, p + \lambda$

della diagonale principale ed eguali ad $\frac{1}{2}$ quelli di posto $p + j$ nella colonna j^{ma}, per $j = 1, \cdots, \lambda$.

Si avrà $|P_\lambda| = (-2)^{-\lambda}$, cosicchè le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix} = P_\lambda \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \tag{5}$$

risultano (intiere ed) unimodulari: le chiamo *matrici caratteristiche unimodulari* di S.

È utile anche osservare che, se si ha $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ e T è una matrice unimodulare, due righe qualunque della matrice $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ sono o non sono di ugual parità secondo che lo sono quelle corrispondenti, cioè dello stesso posto, nella matrice $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$.

Cosicchè potrà anche porsi $P_\lambda \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ g' \\ n' \end{pmatrix}$.

Perciò la proposizione *a*) del numero precedente è valevole anche per le matrici caratteristiche unimodulari.

6. Siano ora S ed S′ due simmetrie di una V_p. Dalla (4), valevole per S e per S′, segue che

$$\left(\begin{array}{c|c} I & o \\ \hline o & -I \end{array}\right) = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} \cdot S' \cdot \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}^{-1} \tag{6}$$

da cui, ponendo

$$T = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \tag{7}$$

si ottiene $T S T^{-1} = S'$.

Se ora S ed S′ sono di egual carattere reale λ, dalla (7), tenendo presente la (5), si deduce che

$$T = \begin{pmatrix} m' \\ g' \\ n' \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix} \tag{8}$$

e che T risulta unimodulare.

Viceversa, se S ed S′ sono equivalenti, cioè se si ha una T unimodulare tale che $T\,S\,T^{-1} = S'$, poichè si ha

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} \cdot S' = \begin{pmatrix} m' \\ -n' \end{pmatrix}$$

riesce anche

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} T \cdot S = \begin{pmatrix} m' \\ -n' \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} m \\ -n \end{pmatrix}$$

dove $m = m' \cdot T$, $n = n' \cdot T$. Quindi $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} \cdot T$ è una matrice caratteristica, minima o non per S secondo che lo sia $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$, per la simmetria S′.

Si riottiene dunque la (7) che, essendo T unimodulare, e scegliendo minima la $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ assicura (n. 4, *b*)) che S ed S′ sono di egual carattere reale.

D'altra parte, dalla (7), posto $T\,S\,T^{-1} = S''$, si deducono le (6) con S″ al posto di S′. Cosicchè risulta

$$S'' = S' = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} I & o \\ \hline o & -I \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}.$$

Raccogliendo, si può enunciare che:

a) affinchè due simmetrie siano equivalenti, occorre e basta che abbiano lo stesso carattere reale (1) *e le sostituzioni unimodulari che trasformano l'una nell'altra sono tutte e sole quelle che hanno per matrice il prodotto dell'inversa di una matrice caratteristica minima (o unimodulare) dell'una per una matrice analoga dell'altra.*

E si è anche ottenuto che ogni T che trasforma S in S′ porta le matrici caratteristiche di S in quelle di S′, conservando inalterata la loro proprietà di essere o non essere minime, non minime od unimodulari.

(1) Fin qui il risultato di Comessatti citato in principio.

Matematica. — *Calcolo delle funzioni qualunque di matrici di second'ordine.* Nota di ERNESTA PORCU-TORTRINI, presentata [1] dal Corrisp. G. GIORGI.

Considerata una matrice di second'ordine

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|$$

la quale è il simbolo operatorio di una trasformazione lineare omogenea generale in due variabili, e, indicato con δ il determinante della matrice e con ϑ e ϑ^{-1} le radici (supposte distinte) dell'equazione secolare relativa alla matrice ridotta unimodulare $\frac{\Phi}{\sqrt{\delta}}$, ho ricavato [2] l'espressione della potenza n^{ma} di Φ sotto la forma

$$(1)\quad \Phi^n = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\left(\dfrac{a}{\sqrt{\delta}} - \vartheta^{-1}\right)\vartheta^n + \left(\vartheta - \dfrac{a}{\sqrt{\delta}}\right)\vartheta^{-n}}{\vartheta - \vartheta^{-1}}\sqrt{\delta^n} & \dfrac{b\vartheta^n - b\vartheta^{-n}}{\vartheta - \vartheta^{-1}}\sqrt{\delta^{n-1}} \\ \dfrac{c\vartheta^n - c\vartheta^{-n}}{\vartheta - \vartheta^{-1}}\sqrt{\delta^{n-1}} & \dfrac{\left(\dfrac{d}{\sqrt{\delta}} - \vartheta^{-1}\right)\vartheta^n + \left(\vartheta - \dfrac{d}{\sqrt{\delta}}\right)\vartheta^{-n}}{\vartheta - \vartheta^{-1}}\sqrt{\delta^n} \end{matrix} \right\| .$$

Quest'espressione si può esplicitare facendo intervenire direttamente le radici ρ_1, ρ_2 dell'equazione secolare della matrice data

$$\left| \begin{matrix} a - \rho & b \\ c & d - \rho \end{matrix} \right| = 0$$

cioè

$$\rho^2 - (a + d)\rho + \delta = 0 .$$

Tenendo conto che $\vartheta = \frac{\rho_1}{\sqrt{\delta}}$, $\vartheta^{-1} = \frac{\sqrt{\delta}}{\rho_1}$ e quindi $= \frac{\rho_2}{\sqrt{\delta}}$,

si ottiene

$$(2)\quad \Phi^n = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \left\| \begin{matrix} (a - \rho_2)\rho_1^n + (\rho_1 - a)\rho_2^n & b(\rho_1^n - \rho_2^n) \\ c(\rho_1^n - \rho_2^n) & (d - \rho_2)\rho_1^n + (\rho_1 - d)\rho_2^n \end{matrix} \right\| .$$

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) *Terzo procedimento pel calcolo delle potenze delle matrici di second'ordine*, « Atti della Pont. Acc. delle Scienze. Nuovi Lincei », anno LXXX, Sessione VII, 19 giugno 1927, pp. 348-353.

Si ricorderà che secondo le convenzioni usuali del calcolo delle matrici, il divisore $(\rho_1 - \rho_2)$ applicato a tutta la matrice, equivale allo stesso divisore applicato a ognuno dei quattro termini che compongono la matrice stessa.

Ora, l'espressione scritta è lineare omogenea in ρ_1'' , ρ_2''. Per conseguenza se si deve fare $A\Phi^n$ si ottiene il risultato scrivendo A in tutti i termini come coefficiente di ρ_1'' e di ρ_2''. E se si deve fare una somma di termini consimili, ricordando che la somma di più matrici si ottiene sommando i termini omologhi e osservando che l'espressione scritta di Φ^n contiene ρ_1'' e ρ_2'' linearmente ed omogeneamente in tutti i termini, il risultato si avrà similmente scrivendo la somma di altrettanti termini del tipo $A_n \rho_1''$ e $A_n \rho_2''$ al posto di ρ_1'' e ρ_2''. Per conseguenza, se $P(\Phi)$ è il simbolo di un polinomio qualunque formato con Φ, vale la formula

$$(3)\quad P(\Phi) = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \begin{Vmatrix} (a - \rho_2) P(\rho_1) + (\rho_1 - a) P(\rho_2) & b [P(\rho_1) - P(\rho_2)] \\ c [P(\rho_1) - P(\rho_2)] & (d - \rho_2) P(\rho_1) + (\rho_1 - d) P(\rho_2) \end{Vmatrix}.$$

Questa matrice $P(\Phi)$ così ottenuta coincide con quella che si ottiene eseguendo su Φ le operazioni di moltiplicazione e di somma indicate dal polinomio $P(\Phi)$ e interpretate secondo le usuali convenzioni del calcolo delle matrici, e coincide evidentemente anche con quelle che si ottengono applicando a questo caso particolare la definizione che G. Giorgi dà per una funzione di una matrice in generale [1].

Sia ora $f(x)$ un simbolo di funzione qualunque purchè abbia senso e sia definito in un campo che comprenda i valori $x = \rho_1$, $x = \rho_2$.

È noto che si può sempre esprimere $f(x)$ come serie, cioè come limite di somma di polinomi. D'altra parte, tanto le espressioni che si ricavano applicando la formula ottenuta, quanto la definizione generale accennata, sono continue, cioè ammettono la commutabilità col segno di limite, almeno nei punti di continuità di $f(x)$. Allora siamo autorizzati a scrivere questa formula assolutamente generale

$$(4)\quad f(\Phi) = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \begin{Vmatrix} (a - \rho_2) f(\rho_1) + (\rho_1 - a) f(\rho_2) & b [f(\rho_1) - f(\rho_2)] \\ c [f(\rho_1) - f(\rho_2)] & (d - \rho_2) f(\rho_1) - (\rho_1 - d) f(\rho_2) \end{Vmatrix},$$

con la sicurezza che il risultato coincide con la definizione di G. Giorgi e che per conseguenza tutti i simboli $f(\Phi)$ dedotti da una medesima Φ possono essere trattati con le regole dell'algebra ordinaria come se Φ fosse un numero anzichè una matrice.

Indipendentemente da questo confronto la prova della compatibilità della formula (4) assunta come definizione col principio di permanenza delle

(1) Vedi la Nota di G. Giorgi in questo fascicolo.

forme, si potrebbe ottenere verificando che $f(\Phi)$ coincide con Φ quando $f(x) = x$, e che sta in accordo con le ordinarie definizioni di addizione, moltiplicazione, divisione di matrici e che qualunque siano i simboli $f_1(x)$ e $f_2(x)$, risulta $f_1[f_2(\Phi)]$ ugualmente tanto con l'eseguire su Φ l'operazione f_2 poi sul risultato l'operazione f_1 applicando la formula, quanto con lo scrivere nella formula stessa $f_1[f_2(\rho_1)]$ e $f_1[f_2(\rho_2)]$ in luogo di $f(\rho_1)$ e $f(\rho_2)$ rispettivamente.

Nelle premesse abbiamo escluso il caso che le radici dell'equazione secolare siano coincidenti: quindi sono rimaste escluse le Φ paraboliche.

Una formula applicabile al caso parabolico si può ottenere facilmente con un passaggio al limite. Scriviamo $\rho_2 = \rho$, $\rho_1 = \rho + \varepsilon$, e sia ε una quantità che si farà tendere a zero. Avremo

$$f(\Phi) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{Vmatrix} (a-\rho) f(\rho+\varepsilon) + (\rho+\varepsilon-a) f(\rho) & h[f(\rho+\varepsilon) - f(\rho)] \\ c[f(\rho+\varepsilon) - f(\rho)] & (d-\rho) f(\rho+\varepsilon) + (\rho+\varepsilon-d) f(\rho) \end{Vmatrix}.$$

Scrivendo ε come divisore di ogni termine invece di tenerlo in evidenza e passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$f(\Phi \text{ parabolica}) = \begin{Vmatrix} f(\rho) + (a-\rho) f'(\rho) & h f'(\rho) \\ c f'(\rho) & f(\rho) + (d-\rho) f'(\rho) \end{Vmatrix},$$

e il problema di scrivere le espressioni esplicite di una funzione qualunque di una matrice di second'ordine è così risoluto in generale.

Matematica. — *Il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito finito.* Nota I di A. J. McConnell, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. In questa Nota discuteremo la variazione di un vettore quando gli si fa subire un trasporto parallelo, secondo il Levi-Civita, lungo un circuito chiuso in uno spazio di N dimensioni. Otterremo una espressione di questa variazione sotto forma di un integrale doppio, che darà condizioni affinchè il risultato sia zero. Avremo così anche l'approssimazione nota per la corrispondente differenza nel caso di un circuito infinitesimale [2]. Ci serviremo della notazione seguente: una lettera minuscola ripetuta si sommerà da 1 a N, e una sola di tali lettere si intenderà suscettibile di assumere un qualsiasi valore da 1 a N.

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus* (1927), p. 186-198. Tietze, *Ueber Parallelverschiebung in Riemann'schen Raümen*, « Math. Zeitschrift », 16 (1923), pp. 308-317.

2. Sia C un circuito chiuso, che contiene un punto prefissato O. Sia A_o^r un vettore assegnato nel punto O. Diamogli uno spostamento parallelo lungo la curva C. Essendo A_o^{*r} il valore finale del vettore, quando esso ha percosso C, vogliamo discutere la differenza vettoriale

$$\Delta A_o^r = A_o^{*r} - A_o^r. \tag{1}$$

Prendiamo una qualsiasi superficie a 2 dimensioni, che contenga la curva C, e prendiamo in questa superficie il sistema seguente di coordinate. Definiamo una famiglia di curve, uscente da O, che dipendono da un parametro θ, e sia ρ un parametro per ciascuna di queste curve, riducentesi al valore o per il punto O. Allora le equazioni della nostra superficie sono della forma

$$x^r = x^r(\rho, \theta), \tag{2}$$

le x^r essendo le coordinate del nostro spazio di N dimensioni. Si suppongono finite e continue le funzioni $x^r(\rho, \theta)$ e le loro derivate fino al secondo ordine, ed anche differenti da zero i determinanti funzionali $\frac{\partial(x^r, x^s)}{\partial(\rho, \theta)}$ in tutti i punti della superficie, salvo che in O. In O, le $\frac{\partial x^r}{\partial \theta}$ sono zero per tutti i valori di θ. Vari θ da o a $\Delta\theta$ quando il punto, x^r, descrive la curva C. L'equazione di C sarà della forma

$$\rho = f(\theta) \quad , \quad o \leqslant \theta \leqslant \Delta\theta \quad ; \quad f(o) = f(\Delta\theta) = o; \tag{3}$$

ma, affinchè le variabili ρ, θ ritornino ai valori o, o, bisogna completare le (3) coll'equazione

$$\rho = o \quad , \quad \Delta\theta \geqslant \theta \geqslant o. \tag{3'}$$

Scegliamo le coordinate ρ, θ in modo che il senso di descrizione del circuito, C, sia lo stesso di quello della rotazione dinotata da $\frac{\partial x^r}{\partial \rho} \to \frac{\partial x^r}{\partial \theta}$, e indichiamo con Γ la regione della superficie interna a C.

Evidentemente, se avessimo una qualunque funzione, definita e continua rispetto alle variabili ρ, θ, sarebbe anche definita e continua rispetto alle coordinate, x^r, salvo forse nel punto O. In O, la funzione potrebbe avere un'infinità di valori, corrispondenti ai valori (3') di ρ, θ.

3. In uno spazio affine, le equazioni del parallelismo d'un vettore contravariante, A^r, lungo una curva di parametro t, sono

$$\frac{dA^r}{dt} + \Gamma^r_{mn} A^m \frac{dx^n}{dt} = o, \tag{4}$$

dove le Γ^r_{mn} sono funzioni delle coordinate, x^r, che ammettano prime derivate finite e continue. Le equazioni analoghe di parallelismo nel caso d'un vettore covariante, B_r, sono

$$\frac{dB_r}{dt} - \Gamma^m_{rn} B_m \frac{dx^n}{dt} = 0. \tag{4'}$$

Adotteremo la notazione,

$$\frac{\delta A^r}{\delta t} = \frac{dA^r}{dt} + \Gamma^r_{mn} A^m \frac{dx^n}{dt} \quad , \quad \frac{\delta B_r}{\delta t} = \frac{dB_r}{dt} - \Gamma^m_{rn} B_m \frac{dx^n}{dt}. \tag{5}$$

Queste quantità sono, di fatto, vettori, e così le equazioni di parallelismo si scrivono nella forma vettorale

$$\frac{\delta A^r}{\delta t} = 0 \quad , \quad \frac{\delta B_r}{\delta t} = 0. \tag{6}$$

Abbiamo, subito, l'equazione

$$\frac{d}{dt}(A^r B_r) = A^r \frac{\delta B_r}{\delta t} + \frac{\delta A^r}{\delta t} B_r. \tag{7}$$

Ciò fatto, definiamo il vettore A^r in tutta la regione Γ come segue. Prima, diamo al vettore A^r_0 in O uno spostamento parallelo lungo la curva C, e poi diamo a questi vettori, così definiti, uno spostamento parallelo lungo le curve, $\theta = \text{cost.}$, dal circuito C al punto O. Dunque, essendo t il parametro della curva C, i vettori A^r soddisfano le equazioni

$$\frac{\delta A^r}{\delta t} = 0 \quad , \quad \frac{\delta A^r}{\delta \rho} = 0. \tag{8}$$

A causa delle condizioni cui soddisfano le Γ^r_{mn}, i vettori A^r sono funzioni continue delle variabili ρ, θ, e possiedono derivate continue fino al secondo ordine. Nel punto O, vi sono un'infinità di valori, i valori degli A^r per $\rho = 0 \quad , \quad 0 \leqq \theta \leqq \Delta\theta$.

Ciò posto, prendiamo un vettore covariante, $\overset{\circ}{B}_r$, in O, e diamogli uno spostamento parallelo lungo le curve, $\theta = \text{cost.}$, dal punto O al circuito C. I vettori, B_r, soddisfano le equazioni

$$\frac{\delta B_r}{\delta \rho} = 0, \tag{9}$$

e essi sono anche funzioni continue di ρ, θ, e possiedono derivate continue fino al secondo ordine.

Abbiamo quindi, per le (8),

$$(B_r \Delta A^r)_o = \underset{o}{B_r} (A^{*r}_o - A^r_o) = \int_C \frac{d}{dt} (A^r B_r)\, dt = \int_C \left(A^r \frac{\delta B_r}{\delta t} + \frac{\delta A^r}{\delta t} B_r \right) dt$$

$$= \int_C A^r \frac{\delta B_r}{\delta \rho}\, dt = \int_C A^r \left(\frac{\delta B_r}{\delta \rho}\, d\rho + \frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta}\, d\theta \right).$$

Ora, per tutti i valori di θ, nel punto O,

$$\frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta} = 0 \quad , \quad \rho = 0.$$

Dunque

$$(B_r \Delta A^r)_o = \int_O A^r \left(\frac{\delta B_r}{\delta \rho}\, d\rho + \frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta}\, d\theta \right),$$

dove questo ultimo integrale si prende per tutti i valori (3) e (3') di ρ, θ. D'altra parte, per il teorema del Green,

$$\int_O \left(A^r \frac{\delta B_r}{\delta \rho}\, d\rho + A^r \frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta}\, d\theta \right) = \iint \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(A^r \frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta} \right) - \frac{\partial}{\varepsilon \theta} \left(A^r \frac{\delta B_r}{\delta \rho} \right) \right] d\rho\, d\theta.$$

Avuto riguardo alla (7) [in cui si ponga una prima volta $t = \rho$, e una seconda volta $t = \theta$], l'integrale doppio può anche essere scritto:

$$\iint \left[\left(\frac{\delta A^r}{\delta \rho} \frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta} + A^r \frac{\delta^2 B_r}{\delta \rho\, \varepsilon \theta} \right) - \left(\frac{\delta A^r}{\varepsilon \theta} \frac{\delta B_r}{\delta \rho} + A^r \frac{\delta^2 B_r}{\varepsilon \theta\, \delta \rho} \right) \right] d\rho\, d\theta$$

con che finalmente, tenendo conto che le A^r e le B^r soddisfano le equazioni (8) e (9), risulta

$$\int_O \left(A^r \frac{\delta B_r}{\delta \rho}\, d\rho + A^r \frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta}\, d\theta \right) = \iint A^r \left(\frac{\delta^2 B_r}{\delta \rho\, \varepsilon \theta} - \frac{\delta^2 B_r}{\varepsilon \theta\, \delta \rho} \right) d\rho\, d\theta.$$

Allora,

$$\frac{\delta^2 B_r}{\delta \rho\, \varepsilon \theta} = \frac{\delta}{\delta \rho} \left(\frac{\delta B_r}{\varepsilon \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial B_r}{\varepsilon \theta} - \Gamma^m_{rn} B_m \frac{\partial x^n}{\partial \theta} \right) - \Gamma^s_{rm} \left(\frac{\partial B_s}{\partial \theta} - \Gamma^t_{sn} B_t \frac{\partial x^n}{\partial \theta} \right) \frac{\partial x^m}{\partial \rho},$$

e dunque

$$\frac{\delta^2 B_r}{\delta \rho\, \varepsilon \theta} - \frac{\delta^2 B_r}{\varepsilon \theta\, \delta \rho} = - R^s_{\cdot rmn} B_s \frac{\partial x^m}{\partial \rho} \frac{\partial x^n}{\partial \theta}, \tag{10}$$

dove

$$R^s_{\cdot rmn} = \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma^s_{rn} - \frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^s_{rm} + \Gamma^s_{pm} \Gamma^p_{rn} - \Gamma^s_{pn} \Gamma^p_{rm}. \tag{11}$$

$R^s_{\cdot rmn}$ si chiama il tensore di Riemann-Christoffel. Risulta

$$(12)\quad (B_r\,\Delta A^r)_0 = -\iint R^r_{\cdot smn}\,B_r A^s \frac{\partial x^m}{\partial \rho}\frac{\partial x^n}{\partial \theta}\,d\rho\,d\theta = -\frac{1}{2}\iint R^r_{\cdot smn}\,B_r A^s \frac{\partial (x^m, x^n)}{\partial (\rho, \theta)}\,d\rho\,d\theta .$$

Immaginiamo ora di passare ad un altro sistema di coordinate, u, v scelto in modo che i determinanti funzionali $\frac{\partial (x^m, x^n)}{\partial (u, v)}$ non s'annullino in nessun punto della superficie, e anche che il senso di descrizione di C sia lo stesso di quello determinato dalla rotazione $\frac{\partial x^r}{\partial u} \to \frac{\partial x^r}{\partial v}$. Per ciascun punto, x^r, della superficie, si avrà una e soltanto una coppia di valori u, v, e le quantità, A^r, saranno discontinue nel punto O. Prendiamo A^r_0 come determinazione del vettore, A^r, in O. In conseguenza di (12) si avrà

$$(13)\quad \begin{cases} (B_r\,\Delta A^r)_0 = -\frac{1}{2}\iint_\Gamma R^r_{\cdot smn}\,B_r A^s \frac{\partial (x^m, x^n)}{\partial (u, v)}\,du\,dv \\ \qquad\qquad = -\iint_\Gamma R^r_{\cdot smn}\,B_r A^s \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\,du\,dv , \end{cases}$$

e, finalmente, applicando il teorema del valor medio,

$$(14)\quad (B_r\,\Delta A^r)_0 = -\left[R^r_{\cdot smn}\,B_r A^s \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_M \iint_\Gamma du\,dv$$

dove M è un certo punto dentro Γ.

Affinchè $(B_r\,\Delta A^r)_0$ s'annulli, basta che il tensore, $R^r_{\cdot smn}$, sia zero nel punto M. Diamo allora al vettore $\underset{0}{B_r}$ N determinazioni indipendenti, $\underset{0}{B^{(h)}_r}$. Ogni vettore covariante, $\underset{0}{B_r}$, è rappresentabile, in O, sotto la forma

$$\underset{0}{B_r} = \sum_h^N a_{(h)}\,\underset{0}{B^{(h)}_r} .$$

Ma, se si suppone che tutti i vettori $B^{(h)}_r$ subiscano uno spostamento parallelo, se ne inferisce

$$B_r = \sum_h^N a_{(h)}\,B^{(h)}_r ,$$

in ogni punto di Γ, le $a_{(h)}$ essendo costanti. Ora

$$(B^{(h)}_r\,\Delta A^r)_0 = -\left[R^r_{\cdot smn}\,B^{(h)}_r A^s \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_{M_{(h)}} \cdot \iint_\Gamma du\,dv ,$$

sicchè

$$(15) \qquad \left[R^r_{.smn}\, B_r\, A^s \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_M = \sum_b^N a_{(b)} \left[R^r_{.smn}\, B^{(b)}_r\, A^s \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_{M_{(b)}},$$

da cui, abbiamo il risultato seguente:

Affinchè ΔA^r_o *sia zero, è sufficiente che il tensore di Riemann-Christoffel s'annulli in certi* N *punti dentro* Γ.

Variamo ora i vettori, A^r_o. Possiamo applicare lo stesso argomento alle A^r, il che dà:

Affinchè sia zero la variazione d'un vettore qualunque, a cui si dia uno spostamento parallelo lungo C, *basta che il tensore di Riemann-Christoffel s'annulli in certi* N^2 *punti dentro* Γ.

Per conseguire un'approssimazione valida nel caso d'un circuito infinitesimale, supponiamo che le variazioni di u e v (nel campo racchiuso da C), siano minori d'un numero positivo, δ, che prendiamo come un infinitesimo del primo ordine. Allora, se A^r_P è il valore di A^r al punto P dentro Γ, avremo

$$|A^r_P - A^r_o| \leqq \int_o^P \left|\Gamma^r_{mn} A^m \left(\frac{\partial x^n}{\partial u}du + \frac{\partial x^n}{\partial v}dv\right)\right| < L\int_o^P (|du| + |dv|),$$

L essendo un certo numero positivo. Ma, evidentemente,

$$\int_o^P (|du| + |dv|) \leqq 4\delta,$$

e perciò

$$(16) \qquad |A^r_P - A^r_o| < 4L\cdot\delta.$$

Inoltre

$$\iint_\Gamma du\,dv = O(\delta^2)$$

e

$$\left[R^r_{.smn}\, B_r \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_P = \left[R^r_{.smn}\, B_r \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_o + O(\delta).$$

Dunque

$$(B_r \Delta A^r)_o = -\left[R^r_{.smn}\, B_r\, A^s \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_o \iint_\Gamma du\,dv + O(\delta^3),$$

o, finalmente, poichè $\underset{o}{B_r}$ è un vettore qualunque,

$$(17) \qquad \Delta A^r_o = -\left[R^r_{.smn}\, A^s \frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^n}{\partial v}\right]_o \iint du\,dv + O(\delta^3).$$

Matematica. — *Sur un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait.* Nota di N. Lusin e W. Sierpinski, presentata [1] dal Corrisp. L. Tonelli.

L'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait a été démontré par N. Lusin [2]. Le but de cette Note est de donner une démostration d'existence d'un tel ensemble, basée sur une idée différente, notamment sur la théorie des ensembles analytiques.

Soit E un ensemble (A) (analytique) linéaire non mesurable (B). On a, comme on sait, la formule .

$$(1) \qquad CE = \sum_{\xi < \Omega} E_\xi ,$$

où E_ξ ($\xi < \Omega$) sont des ensembles mesurables (B), $E_\xi < E_\eta$ pour $\xi < \eta$, et où la décomposition (1) jouit de la propriété (P) suivante:

(P) Si H est un ensemble mesurable (B), et si $H < CE$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $H < E_\alpha$ [3].

L'ensemble E, et parsuite aussi l'ensemble CE étant non mesurables (B), il existe une infinité non dénombrable de termes de la série (1) qui ne sont pas contenus dans la somme de tous les termes précédents. De chacun de ces termes choisissons un point n'appartenant à aucun de termes précédents: l'ensemble N ainsi obtenu sera évidemment non dénombrable (de puissance $\aleph_1$) et les ensembles NE_ξ seront au plus dénombrables, pour $\xi < \Omega$.

Nous prouverons que *l'ensemble* N *est de première catégorie sur tout ensemble parfait.*

Soit, en effet, P un ensemble parfait et supposons que l'ensemble N n'est pas de première catégorie sur P. Il existe alors, comme on sait, une portion P_0 de P, telle que N est sur P_0 partout de deuxième catégorie. L'ensemble $CE > N$ sera donc, à plus forte raison, partout de deuxième catégorie sur P_0. L'ensemble CE, en tant que complémentaire d'un ensem-

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) *Fundamenta Mathematicae* t. II (1921), p. 155. En 1914 («C. R.» t. 158, p. 1259) N. Lusin a démontré le même, en utilisant l'hypothèse du continu.

(3) N. Lusin et W. Sierpinski, «Bull. Acad. Cracovie», 1918, p. 39 ss.; aussi «Journ. de Math.», t. II (1923), pp. 56-60.

ble (A), satisfaisant à la condition de Baire [1], il en résulte que l'ensemble E est de première catégorie sur P_0, et nous pouvons poser

$$P_0 E = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots, \tag{2}$$

où Q_n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) sont des ensembles non denses sur P_0. Les fermetures $\overline{Q}_n = Q_n + Q'_n$ des ensembles Q_n sont donc aussi non denses sur P_0: leurs somme

$$S = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 + \overline{Q}_3 + \cdots \tag{3}$$

sera donc de première catégorie sur P_0. Or, l'ensemble (3) étant évidemment un F_σ, $P_0 - S$ est un G_δ, et il résulte de (2) et (3) que $P_0 E < S$, ce qui donne $P_0 - S < CE$. D'après la propriété (P) il existe donc un indice $\alpha < \Omega$, tel que $P_0 - S < E_\alpha$. Or, l'ensemble NE_α est, comme nous savons, au plus dénombrable: l'ensemble $N(P_0 - S) < NE_\alpha$ est donc au plus dénombrable. L'ensemble $NP_0 S < S$ étant (d'après la propriété de l'ensemble (3)) de première catégorie sur P_0, il en résulte que l'ensemble $NP_0 = NP_0 S + N(P_0 - S)$ est de première catégorie sur P_0, ce qui prouve que N est de première catégorie sur P_0, contrairement à l'hypothèse.

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble N est de première catégorie sur tout ensemble parfait, c. q. f. d.

Matematica. — *Ancora sulle condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere e di un certo ordine anche in senso precisato.* Nota di S. Minetti, presentata dal Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla crescenza delle funzioni intere di genere finito.* Memoria di S. Minetti, presentata dal Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Journ de Math. », t. II (1923), p. 68 ss.; aussi *Fund. Math.*, t. VII, p. 153 et t. X, p. 26.

Calcolo funzionale. — *I funzionali lineari delle funzioni di due variabili complesse*[1]. Nota I, di L. FANTAPPIÈ, presentata[2] dal Socio F. SEVERI.

1. Consideriamo una determinazione $\overline{F}$ di un funzionale analitico (in senso stretto) $F[y(t_1, t_2)]$, univocamente determinata e regolare in un intorno (r) della funzione[3]

$$(1) \qquad y_0(t_1, t_2) = \frac{1}{(t_1 - \alpha_0)(t_2 - \beta_0)}$$

essendo α_0 e β_0 numeri finiti e r abbastanza piccolo, perchè i due cerchi C_1 e C_2, tracciati sulle due sfere complesse t_1 e t_2 rispettivamente, coi centri in α_0 e β_0 e raggio sferico r, lascino all'esterno i punti $t_1 = \infty$, $t_2 = \infty$.

Se accade che, comunque presa una coppia di funzioni y_1, y_2 in questo intorno, è sempre

$$(2) \qquad \overline{F}[y_1(t_1, t_2) + y_2(t_1, t_2)] = \overline{F}[y_1(t_1, t_2)] + \overline{F}[y_2(t_1, t_2)]$$

diremo che questa determinazione $\overline{F}$ del funzionale F è *lineare* nel campo considerato. Osserviamo che la proprietà (2), che indicheremo come *proprietà distributiva* dell'operazione funzionale $\overline{F}$ rispetto alla somma, vale evidentemente anche per una *somma di un numero qualunque di termini, purchè finito*; di più, data l'analiticità del funzionale, sarà anche, più generalmente

$$(3) \qquad \overline{F}[ay_1(t_1, t_2) + by_2(t_1, t_2)] = a\overline{F}[y_1(t_1, t_2)] + b\overline{F}[y_2(t_1, t_2)]$$

con a e b numeri complessi qualunque.

(1) Questa Nota fa seguito all'altra, *I funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse*, a cui rimandiamo per la terminologia; cfr. questi «Rend.», vol. V, s. 6ª, 1° sem., aprile 1927.

(2) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(3) Premettiamo che, a parziale modificazione del n. 2 della Nota precedente, chiameremo *distanza sferica* di due punti della varietà M_4, cioè di due coppie t_1, t_2 e u_1, u_2 di numeri complessi, il numero positivo o nullo $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, se è r_1 la distanza sferica di t_1 da u_1, r_2 quella di t_2 da u_2; r è nullo solo se le due coppie di numeri complessi, cioè i due punti di M_4, coincidono. Conseguentemente, data una funzione $y_0(t_1, t_2)$ e un numero $r > 0$ abbastanza piccolo, e chiamata $A(r)$ la regione (a 4 dimensioni) dei punti di M_4, che hanno da tutti i punti delle varietà singolari di y_0 una distanza sferica $\geq r$, cioè l'insieme delle coppie t_1, t_2 che hanno una distanza sferica $\geq r$ da tutte le coppie singolari per la y_0, *chiameremo intorno* (r) *di* y_0 *l'insieme di tutte le funzioni* $y(t_1, t_2)$ *olomorfe nella regione* $A(r)$.

2. Se $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$ è una funzione dell'intorno (r) di y_0, non eccezionale per la linea $y = y(t_1, t_2; \varepsilon)$, la funzione $f(\varepsilon) = \overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$ sarà olomorfa in un conveniente intorno di $\varepsilon = \varepsilon_0$, e quindi sarà $\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} f(\varepsilon) = f(\varepsilon_0)$, cioè

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)] = \overline{F}\left[\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} y(t_1, t_2; \varepsilon)\right]. \tag{4}$$

D'altra parte, anche la $\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = \varepsilon_0}$ apparterrà all'intorno (r) di y_0, e se essa non è eccezionale per la linea analitica

$$\bar{y}(t_1, t_2; \alpha) = \frac{y(t_1, t_2; \varepsilon_0 + \alpha) - y(t_1, t_2; \varepsilon_0)}{\alpha} \tag{5}$$

da cui si ottiene per $\alpha = 0$, avremo per la proprietà (4),

$$\lim_{\alpha \to 0} \overline{F}_{t_1 t_2}[\bar{y}\, t_1, t_2; \alpha)] = \overline{F}\left[\left(\frac{\partial y(t_1, t_2; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = \varepsilon_0}\right]$$

cioè, per la linearità di $\overline{F}$,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon_0 + \alpha)] - \overline{F}[y(t_1, t_2; \varepsilon_0)]}{\alpha} = \tag{6}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon_{\varepsilon = \varepsilon_0}} \overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)] = \overline{F}\left[\left(\frac{\partial y(t_1, t_2; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = \varepsilon_0}\right].$$

Per tutti i valori ε_0 di ε, per cui la $\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = \varepsilon_0}$ non è eccezionale per la linea (5), e per cui la $y(t_1, t_2; \varepsilon)$, si mantiene nell'intorno (r) di y_0 dove la determinazione $\overline{F}$ è regolare e lineare, *si può dunque derivare, rapporto al parametro* ε, *sotto il segno di funzionale lineare.*

3. Applichiamo, in particolare, il funzionale $\overline{F}$ [1] alla funzione

$$y(t_1, t_2) = \frac{1}{(t_1 - \alpha)(t_2 - \beta)} \tag{7}$$

che, per α interno al cerchio C_1, β interno a C_2, è certamente nell'intorno (r) di y_0. Per ogni coppia di valori di α e β, avremo una funzione y e quindi un valore di $\overline{F}$, e questa funzione di α e β che così otteniamo

$$v(\alpha, \beta) = \overline{F}_{t_1 t_2}\left[\frac{1}{(t_1 - \alpha)(t_2 - \beta)}\right] \tag{8}$$

(1) Useremo questa locuzione per indicare, più brevemente, la «determinazione $\overline{F}$ del funzionale F, univoca e regolare nell'intorno (r) di y_0».

sarà una *funzione olomorfa per* α *entro* C_1 *e* β *entro* C_2. La chiameremo la *funzione indicatrice del funzionale lineare* $\overline{F}$.

Essendo verificate le condizioni del numero precedente, avremo sempre, per qualunque r e s interi, e α, β interni a questi cerchi

$$\frac{\partial^{r+s} v(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^r \partial\beta^s} = \overline{F}_{t_1 t_2}\left[\frac{\partial^{r+s}}{\partial\alpha^r \partial\beta^s}\frac{1}{(t_1-\alpha)(t_2-\beta)}\right] = r!\, s!\, \overline{F}_{t_1 t_2}\left[\frac{1}{(t_1-\alpha)^{r+1}(t_2-\beta)^{s+1}}\right]$$

da cui possiamo ricavare il valore assunto da $\overline{F}$, per le funzioni del tipo

$$(9) \qquad \frac{a}{(t_1-\alpha)^{r+1}(t_2-\beta)^{s+1}} \quad ; \quad r, s = 0, 1, 2, \cdots$$

espresso per la $v(\alpha,\beta)$, cioè

$$(10) \qquad \overline{F}\left[\frac{a}{(t_1-\alpha)^{r+1}(t_2-\beta)^{s+1}}\right] = \frac{a}{r!\, s!}\frac{\partial^{r+s} v(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^r \partial\beta^s}.$$

Esprimendo questa derivata colla formula integrale di Cauchy, avremo anche

$$(11) \quad \overline{F}\left[\frac{a}{(t_1-\alpha)^{r+1}(t_2-\beta)^{s+1}}\right] = \frac{a}{(2\pi i)^2}\int_{C_1'}\int_{C_2'}\frac{v(t_1,t_2)}{(t_1-\alpha)^{r+1}(t_2-\beta)^{s+1}}\,dt_1\,dt_2$$

ove C_1' e C_2' sono due circoli interni a C_1 e C_2 rispettivamente (si possono prendere vicini a questi quanto si vuole), che contengono alla loro volta nell'interno i punti α, β rispettivamente.

Più generalmente, anche quando $y(t_1, t_2)$ è una somma di termini del tipo (9), in numero finito,

$$(12) \qquad y(t_1,t_2) = \sum \frac{a_{rs,pq}}{(t_1-\alpha_p)^{r+1}(t_2-\beta_q)^{s+1}}$$

avremo, per la linearità del funzionale, e per la (11)

$$\overline{F}[y(t_1,t_2)] = \sum \frac{a_{rs,pq}}{(2\pi i)^2}\int_{C_1'}\int_{C_2'}\frac{v(t_1,t_2)}{(t_1-\alpha_p)^{r+1}(t_2-\beta_q)^{s+1}}\,dt_1\,dt_2$$

in cui C_1' *e* C_2', *interni a* C_1 *e* C_2, *contengono tutti i punti* α_p *e* β_q *rispettivamente, dimodochè la* $y(t_1,t_2)$ *è olomorfa per* t_1 *esterno a* C_1' *o su* C_1' *e* t_2 *esterno a* C_2' *o su* C_2'. Da quest'ultima formula, tenendo conto dell'espressione (12), si ha infine, per le funzioni y di questo tipo,

$$(13) \qquad \overline{F}[y(t_1,t_2)] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1'}\int_{C_2'} v(t_1,t_2)\, y(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

4. Cerchiamo ora di esprimere, coll'aiuto dell'indicatrice v, il valore del funzionale $\overline{F}$ anche per qualunque altra funzione $y(t_1, t_2)$ *dell'intorno* (r) *di* y_0. Essendo la $y(t_1, t_2)$ olomorfa per t_1, t_2 esterni o sui cerchi C_1, C_2 rispettivamente, potremo sempre trovare due altri circoli C_1', C_2', interni ai precedenti, tali che la y sia ancora olomorfa per t_1 esterno a C_1' o su C_1' e t_2 esterno a C_2' o su C_2'. Posto

$$y_1(t_1, t_2) = y(t_1, t_2) - \varepsilon y_0(t_1, t_2) \tag{14}$$

congiungiamo poi la y alla y_0 mediante la linea analitica

$$y(t_1, t_2; \varepsilon) = e^{\varepsilon} y_0(t_1, t_2) + y_1(t_1', t_2') \tag{15}$$

ove

$$t_1' = \frac{t_1 - \alpha_0}{\varepsilon} + \alpha_0 \quad , \quad t_2' = \frac{t_2 - \beta_0}{\varepsilon} + \beta_0 . \tag{16}$$

Per $\varepsilon = 1$, avremo $y(t_1, t_2; 1) = y(t_1, t_2)$, mentre per $\varepsilon = 0$, essendo $t_1' = t_2' = \infty$ e y_1 regolare all'∞, cioè $y_1(\infty, \infty) = 0$, sarà $y(t_1, t_2; 0) = y_0(t_1, t_2)$. D'altra parte, per $|\varepsilon| < 1$, anzi per $|\varepsilon| < h$, ove h è un numero conveniente > 1, le funzioni della linea (15) restano tutte nell'intorno (r) di y_0, in cui $\overline{F}$ è regolare, anzi, quando ε tende a 0, queste funzioni $y(t_1, t_2; \varepsilon)$ appartengono a intorni via via più ristretti di y_0.

Inoltre, essendo $y_1(t_1, t_2)$ olomorfa all'esterno dei cerchi C_1', C_2', a cui corrispondono sui piani complessi t_1, t_2 due altri cerchi $\overline{C}_1', \overline{C}_2'$ contenenti α_0 e β_0 rispettivamente, potremo determinare in questi piani due cerchi C_1'', C_2'' con centri in α_0 e β_0, e tangenti esternamente a $\overline{C}_1', \overline{C}_2'$; la $y_1(t_1, t_2)$ sarà pure regolare all'esterno di questi cerchi e si potrà quindi rappresentare con una serie doppia di Laurent

$$y_1(t_1, t_2) = \sum_0^{\infty}{}_{rs} \frac{a_{rs}}{(t_1 - \alpha_0)^{r+1} (t_2 - \beta_0)^{s+1}} \tag{17}$$

uniformemente convergenti all'esterno dei cerchi C_1'', C_2''. Dalla (15) avremo allora, eseguendo la sostituzione (16)

$$y(t_1, t_2; \varepsilon) = e^{\varepsilon} y_0(t_1, t_2) + \sum_0^{\infty}{}_{rs} \frac{a_{rs} \varepsilon^{r+s+2}}{(t_1 - \alpha_0)^{r+1} (t_2 - \beta_0)^{s+1}} \tag{18}$$

e questa serie sarà pure uniformemente convergente per t_1' e t_2' fuori di C_1'' e C_2'', cioè per t_1 e t_2 fuori dei cerchi $C_1''(\varepsilon), C_2''(\varepsilon)$, di centri α_0 e β_0 che si ottengono da C_1'', C_2'' riducendone i raggi nel rapporto $|\varepsilon|$, quindi, in particolare, anche fuori di C_1'', C_2'' se $|\varepsilon| \leq 1$. Per t_1, t_2 in questi campi

e $|\varepsilon| \leq 1$, avremo la derivata $\frac{\partial^n y(t_1, t_2; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}$ derivando la serie di potenze termine a termine, e per $\varepsilon = 0$, avremo infine

$$(19) \quad \left(\frac{\partial^n y}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{1}{(t_1 - \alpha_0)(t_2 - \beta_0)} + n! \sum \frac{a_{rs}}{(t_1 - \alpha_0)^{r+1} (t_2 - \beta_0)^{s+1}}$$

ove la somma va estesa a tutte le coppie di indici r, s (interi positivi o nulli), per cui $r + s + 2 = n$, cioè a $n - 1$ termini (per $n = 1, 2$, questa somma non compare, e l'espressione (19) si riduce al solo 1° termine). Di più la funzione $\left(\frac{\partial^n y}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}$ non è eccezionale per la linea

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial^{n-1} y}{\partial \varepsilon^{n-1}} - \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial \varepsilon^{n-1}}\right)_{\varepsilon=0}\right\}$$

da cui si ottiene per $\varepsilon = 0$, e ciò qualunque sia n; essendo quindi soddisfatte tutte le condizioni di cui al n. 2, si avrà

$$(20) \quad \left\{\frac{d^n}{d\varepsilon^n} \overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)]\right\}_{\varepsilon=0} = \overline{F}\left[\left(\frac{\partial^n y(t_1, t_2; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}\right]$$

e poichè la $\left(\frac{\partial^n y}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}$ risulta, per la (19), del tipo (12), potremo applicare la formula (13), cioè

$$(21) \quad \left\{\frac{d^n}{d\varepsilon^n} \overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)]\right\}_{\varepsilon=0} = f^{(n)}(0) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1'} \int_{C_2'} v(t_1, t_2) \left(\frac{\partial^n y(t_1, t_2; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} dt_1\, dt_2$$

ove abbiamo indicato con $f(\varepsilon)$ il valore di $\overline{F}$ sulla linea iniziale (18), cioè

$$(22) \quad f(\varepsilon) = \overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$$

funzione olomorfa di ε, per $|\varepsilon| < h$.

5. Per determinare il valore di $f(\varepsilon)$ entro questo cerchio, in particolare $f(1) = \overline{F}[y(t_1, t_2)]$, poniamo

$$(23) \quad k(\varepsilon) = f(\varepsilon) - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1'} \int_{C_2'} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2; \varepsilon)\, dt_1\, dt_2 .$$

Per $|\varepsilon| < h$, $f(\varepsilon)$ è olomorfa, la $y(t_1, t_2; \varepsilon)$ è pure olomorfa per t_1, t_2 fuori di C_1', C_2' o su questi cerchi, quindi anche l'integrale doppio e la funzione $k(\varepsilon)$ risultano funzioni olomorfe di ε nel cerchio $|\varepsilon| < h$. Sviluppiamo allora la funzione $k(\varepsilon)$ in serie di potenze entro questo cerchio;

dovremo perciò calcolare il valore di $k(\varepsilon)$ e delle sue derivate per $\varepsilon = 0$. Ma derivando sotto il segno di $\iint$, come è permesso, si ha

$$k^{(n)}(\varepsilon) = f^{(n)}(\varepsilon) - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1'} \int_{C_2'} v(t_1, t_2) \frac{\partial^n y(t_1, t_2; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n} dt_1 dt_2$$

e per $\varepsilon = 0$, segue dalle (21) $k^{(n)}(0) = 0$. D'altra parte per $\varepsilon = 0$, la $y(t_1, t_2, 0) = y_0(t_1, t_2)$ è pure del tipo (12), a cui è applicabile la formula integrale (13), e quindi anche

$$k(0) = f(0) - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1'} \int_{C_2'} v(t_1, t_2)\, y_0(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = 0.$$

Dunque, in conclusione, la funzione analitica $k(\varepsilon)$, definita dalla (23), è identicamente nulla, cioè, per $|\varepsilon| < h$

$$(24)\quad f(\varepsilon) = \overline{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1'} \int_{C_2'} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2; \varepsilon)\, dt_1\, dt_2.$$

In particolare, per $\varepsilon = 1$, si ha

$$(25)\qquad \overline{F}[y(t_1, t_2)] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1'} \int_{C_2'} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

formula fondamentale che ci dà il valore del funzionale lineare $\overline{F}[y(t_1, t_2)]$ *per qualunque funzione* $y(t_1, t_2)$ *dell'intorno* (r) *della funzione* y_0, *definita al n. 1 [formola (1)], in cui* $\overline{F}$ *è regolare, quando si conosca l'indicatrice* v *del funzionale.* Nella (25) il campo d'integrazione è costituito dal ciclo chiuso, a due dimensioni, delle coppie di punti dei cerchi C_1' e C_2', interni a C_1 e C_2, e tali che la $y(t_1, t_2)$ è olomorfa quando t_1 è fuori o sopra C_1' e t_2 è fuori o sopra C_2'.

6. Se si considera un funzionale lineare $\overline{F}$, regolare nell'intorno (r) di una funzione y_0, singolare per $t_1 = \infty$, o $t_2 = \infty$, p. es., $y_0 = 1$, o $y_0 = t_1^r t_2^s$, con r, s interi $\geqq 0$, le considerazioni precedenti dovrebbero un po' modificarsi, ma si arriva sempre alla stessa formula finale (25).

Consideriamo infatti la funzione

$$(26)\qquad w(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} v\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) = \overline{F}_{t_1 t_2}\left[\frac{1}{(1 - t_1\alpha)(1 - t_2\beta)}\right].$$

Essendo la $v(\alpha, \beta)$ regolare entro i due cerchi C_1, C_2 delle sfere complesse α, β, aventi i centri nei punti all'∞, e raggio r, la funzione $w(\alpha, \beta)$ ora definita, che chiameremo anche *indicatrice simmetrica* del fun-

zionale $\bar{F}$, sarà regolare nell'intorno di $\alpha = 0$, $\beta = 0$, entro i due cerchi $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ diametralmente opposti di C_1, C_2. Nota la $w(\alpha, \beta)$, da essa si ricava subito l'indicatrice ordinaria $v(\alpha, \beta)$, che chiameremo anche, quando può sorgere confusione, *indicatrice emisimmetrica*, mediante la formula

$$v(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} w\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right). \tag{27}$$

Essendo soddisfatte le condizioni del n. 2, avremo, derivando la (26) rapporto ad α, e β,

$$\frac{\partial^{r+s} w(\alpha, \beta)}{\partial\alpha^r \partial\beta^s} = r!\, s!\, \bar{F}_{t_1 t_2}\left[\frac{t_1^r t_2^s}{(1 - t_1\alpha)^{r+1}(1 - t_2\beta)^{s+1}}\right]$$

e per $\alpha = \beta = 0$

$$\bar{F}\left[t_1^r t_2^s\right] = \frac{1}{r!\, s!}\left(\frac{\partial^{r+s} w(\alpha, \beta)}{\partial\alpha^r \partial\beta^s}\right)_{\alpha=\beta=0}. \tag{28}$$

Ma è

$$\frac{1}{r!\, s!}\left(\frac{\partial^{r+s} w(\alpha, \beta)}{\partial\alpha^r \partial\beta^s}\right)_{\alpha=\beta=0} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\bar{C}_1'}\int_{\bar{C}_2'} \frac{w(u_1, u_2)}{u_1^{r+1} u_2^{s+1}}\, du_1\, du_2$$

ove $\bar{C}_1'$, $\bar{C}_2'$ sono due cerchi, con centro nell'origine, interni a $\bar{C}_1$ e $\bar{C}_2$ rispettivamente; cambiando le variabili d'integrazione $u_1 = \frac{1}{t_1}$, $u_2 = \frac{1}{t_2}$, $du_1 = -\frac{1}{t_1^2}\, dt_1$, $du_2 = -\frac{1}{t_2^2}\, dt_2$ e indicando con C_1', C_2' i cerchi trasformati di $\bar{C}_1'$, $\bar{C}_2'$ (interni a C_1, C_2 avremo

$$\frac{1}{r!\, s!}\left(\frac{\partial^{r+s} w(\alpha, \beta)}{\partial\alpha^r \partial\beta^s}\right)_{\alpha=\beta=0} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1'}\int_{C_2'} \frac{1}{t_1 t_2} w\left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}\right) \cdot t_1^r t_2^s\, dt_1\, dt_2$$

cioè per le (27) e (28)

$$\bar{F}\left[t_1^r t_2^s\right] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1'}\int_{C_2'} v(t_1, t_2) \cdot t_1^r t_2^s\, dt_1\, dt_2 \tag{29}$$

che è la stessa formula (25), applicata al caso di funzioni del tipo $y = t_1^r t_2^s$, poichè anche nella (29) C_1' e C_2' sono due cerchi interni a C_1 e C_2 (contenenti nel loro interno i punti $t_1 = \infty$, $t_2 = \infty$), tali che la y è olomorfa fuori di essi.

7. Più generalmente, la (25) varrà ancora per tutte le funzioni $y(t_1, t_2)$ che sono combinazioni lineari di funzioni di questo tipo, cioè per tutti i *polinomi* in t_1 e t_2. Infine, per dimostrare la validità della (25) per tutte le funzioni $y(t_1, t_2)$ dell'intorno (r) di $y_0 = 1$, cioè per tutte le funzioni

olomorfe per t_1 fuori di C_1 o su C_1 e t_2 fuori di C_2 o su C_2 (cioè entro i due cerchi $-C_1$, $-C_2$, aventi per centro lo zero e raggio sferico $\pi - r$), basterà seguire lo stesso procedimento del n. 4 adoperando però, invece della sostituzione (16), la sostituzione $t'_1 = \varepsilon t_1$, $t'_2 = \varepsilon t_2$, e invece dello sviluppo (17) in serie doppia di Laurent, lo sviluppo in serie doppia di potenze di t_1 e t_2.

In conclusione, possiamo dunque dire che *tutte le volte che si ha un funzionale lineare* $\overline{F}$, *regolare in un intorno* (r) *abbastanza ristretto di una funzione* $y_0(t_1, t_2)$, *che abbia per varietà singolari solo due rette parallele agli assi,* $t_1 = \alpha_0$, $t_2 = \beta_0$, *a distanza finita o infinita* [1], *il valore del funzionale* $\overline{F}$ *per qualunque altra funzione* $y(t_1, t_2)$, *di questo intorno, si può sempre calcolare mediante la formula fondamentale* (25), *una volta nota la funzione indicatrice* $v(\alpha, \beta)$ *del funzionale.*

Non soltanto dunque il funzionale lineare individua perfettamente, mediante la (8), la sua *funzione indicatrice*, ma questa, a sua volta, determina completamente, mediante la (25), il funzionale stesso.

Meccanica. — *Limiti superiori del cimento dinamico.* Nota di G. Krall, presentata [2] dal Socio T. Levi-Civita.

Informandosi al criterio del Beltrami, di assumere l'energia potenziale unitaria delle forze elastiche come più sicuro indice del cimento cui è sottoposta la coesione molecolare di un corpo, il prof. Levi-Civita ha stabilito [3] un limite superiore assoluto per il complessivo ammontare P della energia suddetta, onde desumere da questa un valore medio, di cui la nozione, per verifiche approssimate almeno, può avere importanza invero notevole.

Egli ha dimostrato infatti, valendosi degli elementi del calcolo variazionale, che, ove si indichi con P_s il valore di P corrispondente allo stato di equilibrio delle forze che cimentano il sistema, con E l'energia totale allo stato iniziale del moto, il limite superiore assoluto P_d è dato dalla relazione

$$(1) \qquad P_d = 2P_s + E + 2\sqrt{(P_s + E)P_s}\,.$$

(1) Veramente noi abbiamo considerato solo i casi in cui le due rette singolari sono ambedue a distanza finita o ambedue all'∞; è evidente però che, contemperando i ragionamenti del n. 4 con quelli di questo numero si arriva a dimostrare la formula (25) anche nei casi misti, in cui una sola delle due rette è al finito.

Per l'estensione dell'intorno (r) di y_0, osserviamo che, nelle nostre ipotesi, si suppone sempre r minore delle distanze sferiche (che siano diverse da o) di α_0 e β_0 dal punto ∞.

(2) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(3) T. Levi-Civita, *Sul massimo cimento dinamico nei sistemi elastici.* «Nuovo Cimento», serie 5, vol. II, 1901.

Percui, detto V il volume del corpo, ove si ponga

$$\overline{\pi_d} = \frac{P_d}{V},$$

la stabilità resta assicurata, in media s'intende, tosto che sia soddisfatta la condizione

$$\overline{\pi_d} \leq k\pi_0,$$

π_0 essendo un limite di sicurezza, specifico per ogni materiale, k un fattore di riduzione (dunque al più eguale all'unità) da desumere con criteri adeguati, in base alla configurazione geometrica del corpo.

Cercando ulteriori sviluppi del criterio ora richiamato, cominciamo col dedurre qui in primo luogo la (1) attraverso al metodo delle piccole oscillazioni. Come vedremo, oltre a caratterizzare in tal guisa le circostanze per le quali il limite P_d è effettivamente raggiunto, assegneremo un limite P_d' meno alto, la conoscenza del quale non è del tutto priva di qualche interesse.

Notiamo ancora, onde giustificare la pubblicazione della presente ricerca, ch'essa costituisce un anticipo necessario, o quasi, alla trattazione di analoga quistione per i sistemi cosidetti *dissipativi*.

§ 2. Premesse e richiami. - Consideriamo un sistema *olonomo* ad N gradi di libertà, di cui il potenziale elastico W, l'energia cinetica T, per *atti di moto* prossimi alla configurazione naturale C_0, sieno definite, ad un certo istante t, in coordinate normali φ_ρ, $\rho = 1, 2, \cdots N$; dalle due forme

$$(2) \qquad W = -\frac{1}{2}\sum_1^N{}_\rho \sigma_\rho^2 \varphi_\rho^2 \quad , \quad T = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_\rho \dot{\varphi}_\rho^2 .$$

Indicate allora con $X^{(\rho)}$ le forze sollecitanti il sistema, sarà

$$(3) \qquad U = \sum_1^N{}_\rho X^{(\rho)} \varphi_\rho$$

il lavoro compiuto dalle forze nel passaggio del corpo dalla C_0 ($\varphi_\rho = 0$ per $\rho = 1, 2, \cdots N$;) a quella relativa all'istante considerato.

Le equazioni di Lagrange diventano quindi

$$(4) \qquad \ddot{\varphi}_\rho + \sigma_\rho^2 \varphi_\rho = X^{(\rho)}, \qquad (\rho = 1, 2, \cdots N;)$$

e la soluzione del problema, essendo per esse immediata l'integrazione, resta così conseguita.

In particolare, ed è questo il caso che ci occupa, ove le $X^{(\rho)}$ sieno costanti nel tempo, otteniamo per l'integrale generale della (4) l'espressione

$$(5) \qquad \varphi_\rho = (A_\rho - a_\rho)\cos\sigma_\rho t + B_\rho \operatorname{sen}\sigma_\rho t + a_\rho ,$$

essendo A_ρ e B_ρ delle costanti arbitrarie I, da determinare in funzione delle circostanze iniziali del moto, a_ρ un integrale particolare dato da

$$a_\rho = \frac{X^{(\rho)}}{\sigma_\rho^2},$$

caratterizzante lo spostamento, contato su φ_ρ, prodotto dal carico $X^{(\rho)}$ agente in condizioni statiche.

§ 3. Posizione del problema e sua risoluzione. - Con tali intese, rilevando che, per definizioni ben note, l'energia elastica complessiva P è data dalla W cambiata di segno, la nostra ricerca resta circoscritta alla determinazione del limite superiore della funzione

$$P = -W = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_\rho \sigma_\rho^2 \varphi_\rho^2$$

con le φ_ρ determinate dalla (5).

Poichè ogni termine di P è manifestamente positivo, potremo senz'altro porre

$$P_{max} \leq \frac{1}{2}\sum_1^N{}_\rho \sigma_\rho^2 |\varphi_\rho|_{max}^2 = P'_d$$

e quindi, avendosi per le regole elementari del calcolo,

$$|\varphi_\rho|_{max} = a_\rho \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{A_\rho^2 - 2a_\rho A_\rho + B_\rho^2}{a_\rho^2}} \right\},$$

$$(6) \qquad P_{max} \leq \frac{1}{2}\sum_1^N{}_\rho \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{A_\rho^2 - 2a_\rho A_\rho + B_\rho^2}{a_\rho^2}} \right\}^2 a_\rho^2 \sigma_\rho^2 = P'_d.$$

§ 4. Osservazione. – Onde conseguire una forma più espressiva per la (6), rileviamo che, se con P_o, T_o ed U_o si indicano i valori di P, T ed U all'inizio del moto, ove questo abbia luogo nell'istante $t = 0$, si avrà, con le determinazioni (5) di φ_ρ,

$$P_o = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_\rho A_\rho^2 \sigma_\rho^2 \quad , \quad T_o = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_\rho B_\rho^2 \sigma_\rho^2 \quad , \quad U_o = \sum_1^N{}_\rho A_\rho a_\rho \sigma_\rho^2$$

e quindi, per l'energia iniziale E (costante durante il moto),

$$(7) \qquad E = P_o + T_o - U_o = \sum_1^N{}_\rho E^{(\rho)},$$

con

$$E^{(\rho)} = \frac{A_\rho^2 - 2a_\rho A_\rho + B_\rho^2}{2}\sigma_\rho^2.$$

Infine, poichè per l'energia elastica P_s si ha uno sviluppo del tipo

$$P_s = \sum_1^N{}_\rho P_s^{(\rho)}, \tag{8}$$

con

$$P_s^{(\rho)} = \frac{1}{2} a_\rho^2 \sigma_\rho^2,$$

potremo anche scrivere, al posto dell'espressione precedente per $|\varphi_\rho|_{max}$,

$$|\varphi_\rho|_{max} = \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E^{(\rho)}}{P_s^{(\rho)}}} \right\} a_\rho ,$$

e quindi per P_{max},

$$P_{max} \leqq \frac{1}{2} \sum_1^N{}_\rho \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E^{(\rho)}}{P_s^{(\rho)}}} \right\}^2 a_\rho^2 \sigma_\rho^2 = \sum_1^N{}_\rho \left\{ 2 P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)} + 2 \sqrt{P_s^{(\rho)} \left(P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)} \right)} \right\}. \tag{6a}$$

Come si vede, ogni qualvolta sia nota la *distribuzione spettrale* (1) della energia P_s ed E, il limite P_{max} è effettivamente calcolabile. Accontentandosi però di un limite superiore anche più alto, pur di rendere comoda la valutazione e soddisfare l'esigenza posta da una eventuale indeterminazione della suddetta ripartizione della E e P_s, notiamo che, avendosi in generale, secondo una ben nota formola (detta di Schwarz, benchè risalga a Cauchy)

$$\left\{ \sum_1^N{}_\rho \alpha_\rho \beta_\rho \right\}^2 \leqq \sum_1^N{}_\rho \alpha_\rho^2 \sum_1^N{}_\rho \beta_\rho^2 ,$$

α_ρ e β_ρ essendo delle costanti qualunque, sarà con ovvie posizioni,

$$\sum_1^N{}_\rho \sqrt{P_s^{(\rho)} \left(P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)} \right)} \leqq \sqrt{\sum_1^N{}_\rho P_s^{(\rho)}} \cdot \sqrt{\sum_1^N{}_\rho \left(P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)} \right)}$$

ovvero, per le (7) e (8),

$$\sum_1^N{}_\rho \sqrt{P_s^{(\rho)} \left(P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)} \right)} \leqq \sqrt{P_s \left(P_s + E \right)}.$$

Pertanto, al posto del limite (6a) otteniamo anche,

$$P_{max} \leqq 2 P_s + E + 2 \sqrt{P_s (P_s + E)} = P_d . \tag{9}$$

§ 5. Condizioni percui P raggiunge il massimo. - Per quanto riguarda l'effettivo raggiungimento del limite (P_d') osserviamo, che dovranno esser simultaneamente soddisfatte le condizioni necessarie di massimo, $\varphi_\rho = 0$,

(1) Vale a dire, con locuzione tolta all'ottica fisica, ove sieno note le parti $P_s^{(\rho)}$ ed $E^{(\rho)}$ di P_s ed E, distribuite su ogni coordinata φ_ρ.

per ogni termine $\sigma_\rho^2 \varphi_\rho^2$ della serie per P, il che implica, come risulta in modo immediato, che sia, per uno stesso valore T di t e per ogni valore di ρ,

$$\operatorname{tg} \sigma_\rho T = \frac{B_\rho}{A_\rho - a_\rho} \qquad (\rho = 1, 2 \cdots N;)$$

ovvero anche,

$$(10) \qquad \frac{1}{\sigma_\rho} \operatorname{arctg} \frac{B_\rho}{A_\rho - a_\rho} = \frac{1}{\sigma_\tau} \operatorname{arctg} \frac{B_\tau}{A_\tau - a_\tau} \quad (\text{per } \rho = \text{oppure} \neq \text{da } \tau).$$

Infine, perchè sia raggiunto il limite assoluto (9), valendo nella formola di Schwarz il segno di eguaglianza sempre, e soltanto quando sussista un costante rapporto di proporzionalità μ tra le α e le β, ne scende che, oltre alle (10) dovranno valere le relazioni

$$\frac{P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)}}{P_s^{(\rho)}} = \mu \qquad (\rho = 1, 2, \cdots N;).$$

Che le condizioni suindicate sieno immediatamente soddisfatte nel caso in cui sieno identicamente nulli tutti i coefficenti A_ρ e B_ρ salvo quelli relativi ad una vibrazione soltanto, è chiaro. Perciò è lecito affermare, che sarà sempre raggiunto il limite superiore (9) per l'energia elastica complessiva, quando l'energia iniziale è riversata tutta su una coordinata normale soltanto, ed il moto avviene quindi, secondo una, ed una sola, vibrazione.

§ 6. Estensione ai sistemi continui. - Passando ad estendere le considerazioni sin qui fatte ai sistemi continui, ci basti rilevare che per questi, i metodi pocanzi richiamati pei sistemi ad un numero finito di gradi di libertà, possono senz'altro estendersi (con le debite precauzioni) per modo che i risultati qui raggiunti rimangano validi nella generalità dei casi.

Infatti, avendosi per un sistema continuo, con le notazioni usuali, per l'energia P, la forza viva T, ed il lavoro U compiuto dalle forze nel passaggio dalla configurazione naturale a quella spettante all'istante generico di cui si tratta, le espressioni

$$P = -\frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_{ik} \int_S \Phi_{ik} e^{ik} \, dS \quad , \quad T = \sum_{1}^{3}{}_{i} \int_S \mu \, \dot{u}_i^2 \, dS \quad , \quad U = \sum_{1}^{3}{}_{i} \int_S \mu \, X_i u^i \, dS ,$$

si potrà sempre costruire una trasformazione a coefficenti u_ρ^i, dipendenti dalle sole coordinate x^i, del tipo

$$u^i = \sum_{1}^{\infty}{}_{\rho} u_\rho^i \varphi_\rho ,$$

tale che si abbia, in conformità con le (2),

$$P = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty}{}_{\rho} \sigma_\rho^2 \varphi_\rho^2 \quad , \quad T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty}{}_{\rho} \dot{\varphi}_\rho^2 \quad , \quad U = \sum_{1}^{\infty}{}_{\rho} X^{(\rho)} \varphi_\rho .$$

Raggiunto un tale intento, la prosecuzione del calcolo sullo schema indicato, dimostra valida la (9) (ed anche, naturalmente con le debite riserve, la (6*a*) per $N \to \infty$), nell'ambito dei sistemi continui, come già ebbe a rilevare il prof. Levi-Civita, per via diretta, sulla scorta dell'algoritmo variazionale, appunto con riferimento ad essi.

§ 7. Confronto tra i limiti P_d e P'_d di P. - Per dare un'idea dell'ordine relativo di grandezza dei due limiti testè trovati, consideriamo il caso in cui sia, all'inizio del moto, l'energia totale E tutta riversata su una vibrazione soltanto, ad esempio la τ^{ima}, cioè si abbia $E = E^{(\tau)}$, $E^{(\rho)} = 0$ per $\rho \neq \tau$. L'energia P_s poi, sia ripartita in modo qualunque su tutte le φ_ρ, sia però *nullo* il termine $P_s^{(\tau)}$.

Posto che sia $E = kP_s$ (k = numero), dalla (6*a*) ricaviamo $P'_d = (4 + k)P_s$, dalla (9) invece, $P_d = \{2 + k + 2\sqrt{(k+1)}\}P_s$. Ponendo in particolare $k = 3$, risulta $P'_d = 0{,}777 \cdots P_d$.

Meccanica. — *Sul parallelismo di Levi-Civita e sopra certe possibili estensioni.* Nota di P. Nalli, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Una forma normale invariante della seconda variazione.* Nota di L. Berwald, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla equivalenza dei tensori.* Nota di A. Masotti, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idrodinamica. — *Intorno al teorema di Kutta e Joukowski.* Nota di P. Straneo, presentata [1] dal Corrisp. G. Loria.

I. Oggetto della Nota. - Come è noto il paradosso di D'Arlembert nel caso del moto piano, vale a dire per un solido cilindrico indefinito, immerso in un fluido *perfetto* in moto stazionario, piano, irrotazionale e che a distanza infinita si riduce ad una *traslazione* di velocità c, sussiste indipendentemente dalla forma della sezione del cilindro, quindi in particolare anche quando il profilo di quella sezione possieda delle cuspidi.

Il teorema di Kutta e Joukowski è sempre stato considerato come l'elemento essenziale per l'estensione di considerazioni analoghe al caso del moto ancora stazionario, piano, irrotazionale e di velocità traslatoria c a distanza infinita, ma dotato inoltre di *circolazione* C.

Si dimostra in questo caso che nella direzione della velocità traslatoria continua a sussistere il risultato della nullità della spinta sul cilindro, e quindi in certo modo il paradosso di D'Alembert; mentre che nella direzione normale a tale velocità, risulta esistere una forza eguale a $-\rho c C$ diretta in senso normale alla traslazione del fluido all'infinito.

Tutto ciò è sempre stato fin qui considerato come *indipendente dal profilo della sezione del cilindro.*

Si comprende quindi facilmente quanto abbia sorpreso la comunicazione fatta dal prof. Cisotti [2] di aver trovata *una notevole eccezione* al teorema di Kutta e Joukowski nel caso che il solido sia costituito da una lamina piana, di inclinazione β sulla direzione all'infinito della corrente traslatoria, essendo allora la spinta non più diretta normalmente alla traslazione del fluido all'infinito, ma normalmente alla lamina, e non più di importo $-\rho c C$, ma $-\rho c C \cos\beta$.

Sussistendo effettivamente tale eccezione, essa andrebbe assai oltre a cotesto teorema, perchè implicherebbe necessariamente anche l'esistenza di una spinta sul cilindro nella direzione della corrente traslatoria all'infinito e in un verso dipendente dal senso della circolazione, spinta che sarebbe in inconciliabile contrasto con tutti i precedenti della meccanica dei fluidi perfetti.

Il dr. Finzi [3] poi riferisce come il prof. Prandtl abbia espresso privatamente dubbi circa l'attendibilità del risultato di Cisotti, motivandoli special-

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.
(2) Questi «Rendiconti», Vol. V, p. 16.
(3) » » » » » 666.

mente col fatto dell'apparizione della suddetta spinta nel senso traslatorio; ma dopo di ciò lo stesso Finzi tenta di risolvere la difficoltà *interpretando energeticamente* l'eccezione in questione.

L'interesse dell'argomento e l'autorità degli scienziati che hanno espresso opinioni discordi, mi ha indotto a esaminare a fondo la questione e a esporre in questa Nota le mie conclusioni.

Risulterà che l'apparire della presunta eccezione dipende esclusivamente dal modo di interpretare il fenomeno idrodinamico nella regione dell'irregolarità, cioè sui bordi della lamina, dove, come è notissimo, la velocità viene a essere infinita. Ma impostando opportunamente fin da principio tutta la questione, risulterà pure che si potranno eliminare tutte le ambiguità formali che possono in qualche modo influire sulla scelta di quell'interpretazione; così che se ne imporrà una sola, alla quale non corrisponderà più alcuna eccezione del teorema di Kutta e Joukowski.

Infine, con riferimento alla Nota di Finzi, osserverò che quella stessa analisi, considerata solo un poco più conseguentemente dal punto di vista fisico, anzichè interpretare l'eccezione, ne conferma l'insussistenza.

II. Brevi considerazioni sui precedenti della questione. – Il problema che ci interessa è stato trattato elegantemente da Cisotti seguendo il consueto criterio di valersi di un'opportuna trasformazione conforme.

Egli calcola nel piano della variabile complessa χ normale alla lamina piana di lunghezza $2l$ e di larghezza infinita, dapprima la distribuzione di una corrente traslatoria di velocità c all'infinito e poi la distribuzione di una corrente circolatoria di circolazione C, partendo dalle consuete e note distribuzioni in un piano ζ, normale ad un cilindro infinito di sezione circolare, con centro *zero* e raggio *uno*. A tale uopo impiega la trasformazione:

$$(1) \qquad \chi = le^{i\beta}\left\{\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)\right\}$$

che egli aveva già utilizzata nella trattazione di vari problemi idrodinamici. Essa notoriamente trasforma i punti della circonferenza di raggio *uno* del piano delle ζ nei punti di un *doppio* segmento di lunghezza $2l$ e di inclinazione β con una mutua speciale corrispondenza dipendente da β, che, nel caso della corrente traslatoria ha un notevolissimo significato fisico.

Sovrapponendo le due distribuzioni si giunge all'espressione di una corrente traslo-circolatoria in tutto il piano delle χ, e quindi in particolare anche al contorno della lamina. Da quest'espressione in forma complessa si passa all'espressione dei valori assoluti della corrente sulla lamina e da questa a quella delle pressioni.

Entrambi questi valori divengono infiniti agli estremi del segmento, cioè sui bordi della lamina. Ciò nondimeno l'autore passa al calcolo delle

spinte elementari, supponendole senz'altro sempre *normali alla lamina*, non solo all'interno delle due faccie, ciò che è evidentemente esatto, ma anche *ai bordi*, ciò che è senza dubbio discutibile, e determina così, per integrazione, la spinta totale col risultato ricordato in principio.

III. Nuova impostazione della questione. – Osserviamo che la formula di trasformazione (1) trasforma le circonferenze concentriche sul piano delle ζ esterne a quelle di raggio unitario in ellissi omofocali sul piano delle z esterne al doppio segmento il quale appunto rappresenta la prima e più eccentrica di esse.

In particolare alla circoferenza su ζ di raggio eguale ad $1 + \delta$ per δ piccolo, corrisponde su z un'ellissi molto schiacciata e quindi nello spazio un solido cilindrico indefinito di sezione ellittica che tenderà a divenire identico alla lama di lunghezza $2\,l$ quando faremo tendere a *zero* la δ.

Proponiamoci quindi di evitare qualsiasi dubbio circa *le velocità*, *le pressioni* e poscia circa *la direzione delle spinte* coll'accorgimento di considerare, dapprima i loro valori *regolari* sul solido cilindrico a sezione ellittica, e di passare poi al limite.

Nel far ciò seguiremo il più parallelamente possibile l'elegante analisi di Cisotti.

Partiremo dalle espressioni in forma complessa della velocità della corrente traslatoria $\bar{w}_\zeta$ e circolatoria $\hat{w}_\zeta$ nel piano delle ζ, non più intorno alla circonferenza di raggio unitario ma intorno a quella di raggio $1 + \delta$ che sono notoriamente:

$$\bar{w}_\zeta = c' \left(1 - \frac{(1+\delta)^2}{\zeta^2}\right) \quad \text{e} \quad \hat{w}_\zeta = \frac{C}{i\,2\pi} \frac{1}{\zeta}, \tag{2}$$

le quali, mediante la trasformazione (1) forniscono le analoghe espressioni nel piano delle z:

$$\bar{w}_z = c \frac{\zeta^2 - (1+\delta)^2}{\zeta^2 - e^{2i\beta}} \quad \text{e} \quad \hat{w}_z = \frac{C}{i\pi l} e^{-i\beta} \frac{1}{\dfrac{\zeta}{e^{i\beta}} - \dfrac{e^{i\beta}}{\zeta}}. \tag{4}$$

L'espressione della velocità della corrente traslo-circolatoria sarà quindi:

$$w_z = \bar{w}_z + \hat{w}_z = \left\{ c\,(\zeta^2 - [1+\delta]^2) + \frac{C}{i\pi l} \right\} \frac{e^{-i\beta}}{\dfrac{\zeta}{e^{i\beta}} - \dfrac{e^{i\beta}}{\zeta}}. \tag{6}$$

Sui punti del cilindro ellittico cui corrisponde $\zeta = (1+\delta)\,e^{i\sigma}$ si ha, per l'espressione della trasformazione:

$$z_{cil} = l e^{i\beta} \left\{ \cos\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{(1+\delta)\,e^{i\sigma}}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{(1+\delta)\,e^{i\sigma}} \right) \right\}, \tag{7}$$

e per quella della velocità:

$$(8) \qquad w_{cil} = \left\{ c\,(1+\delta)^2 \operatorname{sen}\sigma - \frac{C\,(1+\delta)}{\pi l} \right\} \frac{1}{4} \frac{i e^{i\beta}}{(1+\delta)^2 \dfrac{e^{i\sigma}}{e^{i\beta}} - \dfrac{e^{i\beta}}{e^{i\sigma}}},$$

per cui passando, come d'ordinario, al quadrato delle velocità assolute V^2_{cil} si ottiene:

$$(9) \quad V^2_{cil} = \left\{ c(1+\delta)^2 \operatorname{sen}\sigma - \frac{C\,(1+\delta)}{\pi l} \right\}^2 \frac{1}{\dfrac{1}{4}\left[1 - (1+\delta)^4 + 4\operatorname{sen}^2(\sigma-\beta)\right]},$$

espressioni che, come tutte le precedenti, divengono identiche alle corrispondenti di Cisotti per $\delta = 0$, come è naturale.

IV. Calcolo delle spinte. - Calcolate, come è ovvio, le presssioni moltiplicando i precedenti quadrati delle velocità per la metà della densità ρ e cambiando il segno, giungeremo alle spinte elementari moltiplicando ancora coteste pressioni per un elemento generico $d\gamma$ della superficie del cilindro.

Si ha con facili trasformazioni per un elemento di larghezza unitaria:

$$d\gamma = |dz| = \frac{1}{2} l \sqrt{\left[(1+\delta)^2 + \frac{1}{(1+\delta)^2} - 2 + 4\operatorname{sen}^2(\sigma-\beta)\right]}\,|d\sigma|.$$

Ma siccome gli elementi del nostro cilindro non sono tutti egualmente orientati, come erano quelli della lamina, per avere la spinta totale secondo una data direzione, dovremo, prima dell'integrazione, moltiplicare coteste spinte elementari per il coseno dell'angolo fra la direzione data e la normale all'elemento. Proponendoci in particolare di dedurre le spinte nella direzione delle x e nella direzione delle y, dovremo moltiplicare le spinte elementari rispettivamente per $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$, indicando con φ l'angolo della direzione della normale coll'asse delle x nel piano complesso delle z.

Ma come è notissimo in tal punto è:

$$\cos\varphi = \frac{\text{parte reale di } dz}{|dz|} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\text{parte immaginaria di } dz}{|dz|}.$$

Esprimendo quindi dz sul cilindro per mezzo della (7), separando le parti reale e immaginaria e calcolando $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$, si otterranno un po' laboriosamente, ma senza difficoltà le espressioni generali delle spinte elementari rispettivamente nelle direzioni delle x (direzione della corrente traslatoria all'infinito) e delle y (direzione normale):

$$-\frac{1}{2}\rho V^2 |dz| \cos\varphi = \rho \left\{ c(1+\delta)^2 \operatorname{sen}\sigma - \frac{C(1+\delta)}{\pi l} \right\}^2 l \frac{(+)\cos\beta \operatorname{sen}(\sigma-\beta) + (-)\operatorname{sen}\beta\cos(\sigma-}{1-(1+\delta)^4 + 4\operatorname{sen}^2(\sigma-\beta)}$$

$$-\frac{1}{2}\rho V^2 |dz| \operatorname{sen}\varphi = \rho \left\{ \quad \text{come sopra} \quad \right\}^2 l \frac{(-)\cos\beta\cos(\sigma-\beta) + (+)\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\sigma-}{\text{come sopra}}$$

ove per brevità si è posto:

$$(+) = 1 = \delta + \frac{1}{1+\delta} \quad \text{e} \quad (-) = 1 + \delta - \frac{1}{1+\delta}.$$

Ragioni di simmetria, assai analoghe a quelle riscontrate da Cisotti, facilitano anche nel nostro caso le integrazioni; infatti i numeratori delle due frazioni a destra, quando σ passa da β a $\beta + \pi$ e successivamente da $\beta + \pi$ a $\beta + 2\pi$. passano tutti per gli stessi valori positivi e negativi successivamente, mentre il denominatore passa, collo stesso periodo, solamente per valori collo stesso segno. Ne segue che gli integrali di quelle frazioni anche se moltiplicati per qualche altra funzione periodica ripassante per gli stessi valori per σ tra β e $\beta + \pi$ e poi tra $\beta + \pi$ e $\beta + 2\pi$, (p. es. $\operatorname{sen}^2 \sigma$), hanno sempre il valore zero.

Spariscono così dal calcolo finale che ci interessa tutti i termini che contengono il fattore costante $\frac{C^2 (1+\delta)^2}{\pi^2 l^2}$ e quello periodico $c^2 (1+\delta)^4 \operatorname{sen}^2 \sigma$ provenienti dallo sviluppo della quantità fra le parentesi $\{\ \}$.

Rimangono soli i termini coi fattori $-2c(1+\delta)^3 \operatorname{sen} \sigma \frac{C}{\pi l}$ e quindi per le spinte le espressioni:

$$\frac{2\rho c C}{\pi}\left[\{(1+\delta)^4 + (1+\delta)^2\}\cos\beta \int \frac{\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}(\sigma-\beta)\,d\sigma}{[1-(1+\delta)^4 + 4\operatorname{sen}^2(\sigma-\beta)]} + \right.$$

$$\left. + \{(1+\delta)^4 - (1+\delta)^2\}\operatorname{sen}\beta \int \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos(\sigma-\beta)\,d\sigma}{[\text{come sopra}]}\right]$$

e

$$\frac{2\rho c C}{\pi}\left[\{(1+\delta)^4 - (1+\delta)^2\}\cos\beta \int \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos(\sigma-\beta)\,d\sigma}{[\text{come sopra}]} - \right.$$

$$\left. - \{(1+\delta)^4 + (1+\delta)^2\}\operatorname{sen}\beta \int \frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta\,d\sigma}{[\text{come sopra}]}.\right.$$

Ma il primo e il quarto integrale sono eguali a $\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}\beta}{(1+\delta)^4 + (1+\delta)^2}$ e gli altri due a $-\frac{\pi}{2}\frac{\cos\beta}{(1+\delta)^4 - (1+\delta)^2}$; perciò la prima spinta (secondo l'asse delle x) risulta sempre nulla e la seconda (secondo l'asse delle y) eguale $-\rho c C$ *indipendentemente dal valore particolare di* δ; la qual cosa ci dispensa dal passaggio al limite che ci eravamo proposto.

Il teorema di Kutta e Joukowski risulta quindi pienamente confermato anche nel caso della lamina, corrispondente appunto a $\delta = 0$.

V. Discussione dei risultati differenti. - Ho già accennato di ritenere che la causa del divario fra le conclusioni di Cisotti e quelle di Kutta

Joukowski stia essenzialmente nell'aver Cisotti supposte normali alla lamina le spinte ai bordi, o in altri termini, nell'aver trascurate le spinte che potremmo dire *di costa*, dovute alle pressioni infinite esercitatesi sui bordi infinitamente sottili della lamina; spinte che possono venire *a priori* considerate eguali ed opposte *solamente* nel caso di quella simmetria della corrente, che si verifica esclusivamente quando sia nulla una delle quantità c o C, cioè quando si abbia, o sola rotazione, o sola traslazione.

Rimarrebbe ora a vedere come mai Finzi abbia potuto credere di aver trovato un' *interpretazione energetica* alla suddetta eccezione.

Io ritengo che ciò provenga da un' inesatta interpretazione fisica di qualche punto del procedimento formale impiegato.

Finzi, isolando le zone di irregolarità della corrente sulla lamina con due piccole circonferenze ω, calcola l'espressione della variazione nel tempo dell'energia cinetica T della massa fluida contenuta in tutto lo spazio escluse le sole suddette piccole zone di singolarità.

Ne conclude una dissipazione di potenza $\frac{dT}{dE} = \sum \int_{\omega} p d\psi$, che ritiene debba essere (almeno in generale) non nulla, divenendo p infinito all' interno di ω e non essendo ω linea di flusso.

Io ritengo che a questa conclusione si possa formalmente venire solo quando nell' interno di ω e quindi sui bordi della lamina si verificassero effettivi assorbimenti di energia, di tipo assolutamente *incompatibile col semplice flusso di un fluido perfetto,* sia pur di velocità infinita in una regione infinitesima.

Dopo ciò Finzi calcola per il campo di velocità di Cisotti il valore di quella somma dei due integrali in $\rho c^2 C \cos\beta \operatorname{sen}\beta$, e conclude per un'analoga dissipazione di potenza.

A questo punto, secondo me, sarebbe invece stato più opportuno concludere che, *a meno di non ammettere una dissipazione di energia assolutamente inconciliabile col concetto di fluido perfetto fino allora sempre mantenuto,* nel calcolo di Cisotti doveva esser stata dimenticata la spinta $-\rho c C \cos\beta \operatorname{sen}\beta$ nel senso della direzione della corrente, e quindi una spinta $-\rho c C \operatorname{sen}\beta$ nel piano della lamina, la quale ultima composta colla spinta $-\rho c C \cos\beta$ normale alla lamina già trovata da Cisotti, forniva appunto, in intensità, direzione e verso, la spinta $-\rho c C$ di Kutta e Joukowski.

Astrofisica. — *Contributo alla teoria balistica delle stelle variabili.* Nota di C. Cannata, presentata dal Corrisp. M. La Rosa.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Velocità molecolari, stati d'eccitazione e probabilità di transizione in un gas degenere.* Nota II di E. Persico, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

1. In una Nota precedente [2] abbiamo trovato le formule che danno, per un gas degenere, la distribuzione della forza viva tra le molecole e la distribuzione delle molecole nei vari stati quantici. In questa Nota ci proponiamo di applicare le formule trovate ai due casi estremi di degenerazione piccola e di degenerazione completa, e infine ci serviremo di quelle formule per trovare come vada modificata la legge di Einstein per la probabilità di transizione da uno stato quantico all'altro.

2. Esaminiamo dapprima il caso del gas pochissimo degenere, supponiamo cioè $A_j \ll 1$. In questo caso la funzione F si può sviluppare in una serie i cui primi due termini sono

$$F(A_j) = A_j\left(1 - \frac{2^{2/3}}{A_j}\right). \tag{1}$$

Dalla (5, I) tenendo presenti le (3, I), facendo la posizione (1, I) e ponendo inoltre

$$\sum_1^\infty{}_j\, e^{-\frac{\omega_j}{kT} - 4\pi\nu_j} = S_1 \quad , \quad \sum_1^\infty{}_j\, e^{-2\frac{\omega_j}{kT} - 4\pi\nu_j} = S_2$$

si ha

$$a = AS_1\left(1 - \frac{A}{2^{3/2}}\frac{S_2}{S_1}\right) \tag{2}$$

che ci dà in prima approssimazione $A = \frac{a}{S_1}$ e in seconda approssimazione (sostituendo questo valore nel secondo termine della (2)

$$A = \frac{a}{S_1}\left(1 + \frac{a}{2^{3/2}}\frac{S_2}{S_1^2}\right).$$

(1) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.

(2) Questi «Rendiconti», vol. VII, 1928, p. 137. I riferimenti a formule di questa Nota saranno contrassegnati con I.

Sostituendo queste espressioni nella (5, I) e nella (8, I) e trascurando sempre i termini in a^2 rispetto all'unità, si ha

$$(3) \qquad n_j = \frac{n}{S_1}\left[1 + \frac{a}{2^{1/2}\,S_1}\left(\frac{S_2}{S^1} - e^{-\frac{\omega_j}{kT}}\right)\right] e^{-\frac{\omega_j}{kT} - 4\pi\omega_j}$$

$$(4) \qquad n(L)\,dL = \frac{8\pi}{\sqrt{2}}\frac{m^{3/2}}{h^3}\sqrt{L}\,dL\,a\left[1 + a\frac{S_2}{S_1^2}\left(2^{-3/2} - e^{-\frac{L}{kT}}\right)\right] e^{-\frac{L}{kT}}.$$

Queste espressioni differiscono da quelle classiche solo per la presenza del fattore posto tra parentesi quadre.

Nella (3) tale fattore è > 1 per

$$e^{-\frac{L}{kT}} > \frac{S_2}{S_1} \quad \text{cioè per} \quad \omega_j > -kT \lg \frac{S_2}{S_1}$$

e < 1 nel caso contrario. Risulta quindi aumentato il numero delle molecole trovantesi negli stati di eccitazione per i quali l'energia è maggiore di $-kT \lg \frac{S_2}{S_1}$ e diminuito il numero delle altre.

Nella (4) il fattore tra [ ] è > 1 per

$$e^{-\frac{\omega_j}{kT}} < 2^{-3/2} \quad \text{cioè per} \quad L > \frac{3}{2}kT \lg 2\,.$$

Risulta quindi aumentato, rispetto alla teoria di Maxwell e Boltzmann, il numero delle molecole aventi forza viva maggiore di $1.04\,kT$ e diminuito il numero di quelle di forza viva minore.

3. Esaminiamo ora l'altro caso estremo, quello di un gas completamente degenere; il caso cioè in cui A (e quindi le A_j) è assai grande rispetto a 1. L'espressione asintotica della funzione F è allora

$$F(A_j) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(\lg A_j)^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\lg A - \frac{\omega_j}{kT}\right)^{3/2}.$$

La (7, I) dà quindi

$$a = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sum_j \left(\lg A - \frac{\omega_j}{kT}\right)^{3/2} e^{-4\pi\omega_j}.$$

Tenendo presente che le ω_j sono in valore assoluto limitate, si riconosce che per A abbastanza grande si può trascurare $\frac{\omega_j}{kT}$ rispetto a $\lg A$: si ha allora

$$a = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(\lg A)^{3/2} e^{-4\pi\omega_j}.$$

La (5, I) dà, con la stessa approssimazione

$$n_j = \frac{n}{a} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\lg A)^{3/2} e^{-4\pi v_j}$$

che combinata con la precedente fornisce

$$n_j = n \frac{e^{-4\pi v_j}}{\sum_j e^{-4\pi v_j}} .$$

Questa formula ci dice che le molecole si ripartiscono nei vari stati di eccitazione unicamente in base al loro volume e indipendentemente dell'energia dei singoli stati.

4. Accenniamo infine brevemente alla modificazione delle probabilità di transizione da uno stato all'altro. Considerando l'equilibrio tra gli atomi e la radiazione nera, e chiamando ρ_ν la densità di questa nella frequenza ν, A_j^k la probabilità di transizione spontanea dallo stato j, (di energia più elevata) allo stato k, e $B_j^k \rho_\nu$, $B_k^j \rho_\nu$ le probabilità per i passaggi $j \to k$ e $k \to j$ provocati dalla radiazione, Einstein (« Phys. Zeits. », 1927) trova in modo semplicissimo le relazioni

$$B_j^k = B_k^j \quad , \quad \frac{A_j^k}{B_k^j} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} .$$

Eseguendo lo stesso ragionamento ma partendo dalla (5, I) anzichè dalla classica legge per cui n_j è proporzionale a $e^{-\frac{\omega_j}{kT}}$, si trovano invece le formule più complicate

$$\frac{B_j^k}{B_k^j} = \frac{F(A_k) A_j e^{4\pi (v_j - v_k)}}{F(A_j) A_k}$$

$$\frac{A_j^k}{B_k^j} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{F(A_k)}{F(A_j)} e^{4\pi (v_j - v_k)}$$

le quali, contenendo n sia esplicitamente che implicitamente (attraverso A_j e A_k) e sprimono l'influenza che ha sui fenomeni di transizione di un atomo la presenza degli altri, ai quali esso è legato per il misterioso tramite del principio di Pauli.

Fisica. — *Su un nuovo modello di igrometro a condensazione.* Nota del dott. L. Martinozzi, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Policroismo e orientazione degli joni nei cristalli di terre rare* [1]. Nota di R. Brunetti, presentata [2] dal Socio Q. Majorana.

1. È noto che i cristalli di terre rare presentano policroismo d'assorbimento; i loro spettri d'assorbimento sono cioè diversi a seconda della direzione in cui il fascio luminoso li traversa e secondo la direzione di polarizzazione della radiazione incidente. La lettura del classico lavoro di Henri Becquerel [3] sull'argomento e l'esame diretto di alcuni sali cristallini fornitimi dai professori L. Rolla e L. Fernandes mi hanno convinta che *il policroismo di sali cristallizzati di terre rare mette in evidenza l'orientazione di un asse connesso con la struttura degli joni rispetto alle direzioni di simmetria dell'edificio cristallino.*

Delle righe d'assorbimento degli joni trivalenti delle terre rare in composto solido o in soluzione sono responsabili gli elettroni degli anelli incompleti N (443), N (444) [4] che, sotto l'azione eccitatrice della radiazione esterna, passano dallo stato quantico fondamentale, o da stato quantico vicino al fondamentale, a uno stato energetico superiore. Queste righe sono dunque da trattare coi criteri stessi con cui vengono considerate quelle assorbite da atomi o joni gassosi.

Le radiazioni monocromatiche che partono da un atomo o jone gassoso sottratto ad azioni esterne (e le radiazioni che essi assorbono) sono sempre polarizzate [5]: o linearmente con vibrazione parallela all'asse del momento totale dell'atomo o jone (numero quantico interno j, salto $\Delta j = 0$), oppure circolarmente con rotazione del vettore luminoso verso destra o verso sinistra nel piano ortogonale a questo (salto $\Delta j = \pm 1$). Le frequenze nei tre casi sono naturalmente diverse. Solo la distribuzione caotica degli atomi o joni del gas impedisce di rivelare questo stato di polarizzazione iniziale della radiazione.

Ma se interviene una causa orientante esterna (ad es., campo magnetico uniforme) allora lo stato di polarizzazione iniziale della radiazione, che questa volta è riferita alla direzione delle linee di forza del campo (numero quantico di campo m, passaggi $\Delta m = 0$ e $\Delta m = \pm 1$) è liberamente rivelabile all'esterno.

(1) Lavoro eseguito nei Laboratori di Fisica delle Università di Bologna e Firenze.

(2) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(3) « Ann. de Chimie et Phys. », VI, XIV, 170, 1888; vedere anche Dufet, « Bull. Soc. Franç. de Min. », XXIV, 373, 1901.

(4) Ladenburg, « Naturw., 8, 5, 1920.

(5) Hund, *Linienspektren und Periodisches System der Elemente*, 1927, Berlin.

In questo senso possiamo dire che in generale un gas, sottoposto all'azione di un campo esterno (elettrico o magnetico) simmetrico rispetto a un asse, è policroico, perchè presenta spettri differenti nella direzione trasversale e nella longitudinale alla sua linea di simmetria e in ambe le direzioni mutano le frequenze delle radiazioni visibili con analizzatori diversi dello stato di polarizzazione delle onde emesse o eventualmente assorbite.

Perchè il policroismo dei cristalli, di cui si tratta, valga a dimostrare l'orientazione degli joni che sono ai vertici del reticolo cristallino, è necessario rilevare presso di essi fenomeni di polarizzazione delle radiazioni analoghi a quelli che si conoscono per le radiazioni emesse o assorbite da un gas in campo magnetico o elettrico, simmetrici rispetto a un asse, anche se non uniformi.

2. In effetto presso solfato pentaidrato di praseodimio [1] (cristalli monoclini aghiformi) osservato trasversalmente all'asse principale del cristallo, in luce polarizzata secondo due direzioni ortogonali (parallela e normale all'asse principale) si trovano le radiazioni ($\lambda_\perp$, $\lambda_\parallel$) elencate nella tabella I.

TABELLA I. – *Spettro d'assorbimento del solfato pentaidrato di praseodimio.*

Osservazione trasversale all'asse a temperatura ambiente			Osservazione trasversale all'asse a temperatura dell'aria liquida	
$\lambda_\parallel$	$\lambda_\perp$		$\lambda_\parallel$	$\lambda_\perp$
5991			5997	
	5975			5979
5931			5938	
	5903			5908
				5901
5892		I gruppo	5892	
	5877			5877
				5862
5785			5785	
	5748			5748
			5727	
	5222	II gruppo	5240	
5211			5211	5224
	4841			4846
4824		III gruppo	4826	30
				24
	4815			4815
				4809

(1) GROTH, «Chemische Kristallographie», Bd. II.

Segue: TABELLA I.

Osservazione trasversale all'asse

a temperatura ambiente			a temperatura dell'aria liquida	
$\lambda_{\parallel}$	$\lambda_{\perp}$		$\lambda_{\parallel}$	$\lambda_{\perp}$
4725			*4735*	
	4719			*4728*
	4604			*4707*
				4703
4693			*4696*	
			4688	
	4675	IV gruppo		*4677*
				4658
	4653			*4650*
			4621	
			4597	
			4589	

Segue un V gruppo nel violetto molto complesso e difficilmente leggibile (1).

Quando si ruota il cristallo rispetto al polarizzatore le righe dello spettro parallelo compaiono fra quelle dell'ortogonale e il contrasto di ognuna di esse è diminuito. Per osservazione lungo l'asse principale compaiono generalmente solo le $\lambda_{\perp}$ anche quando si sopprime il polarizzatore. Se qualche traccia rimane delle $\lambda_{\parallel}$ questo è dovuto a imperfezioni del dispositivo. Infatti diminuendo lo spessore si riesce a indebolire più energicamente le traccie delle $\lambda_{\parallel}$, che non le $\lambda_{\perp}$ presenti.

A tempertura prossima a quella dell'aria liquida si ripetono i medesimi fenomeni di polarizzazione, per quanto i rapporti di intensità di alcune righe vengano alterati e numerose radiazioni subiscano spostamento verso il rosso. Solo qualche riga appare comune ai due spettri particolarmente a temperatura dell'aria liquida (λ 4728 A). Non si è potuto stabilire fin qui se effettivamente la radiazione citata sia depolarizzata, o le spetti particolare direzione di polarizzazione lineare, o infine sia risolubile in due radiazioni distinte polarizzate ortogonalmente fra loro come le altre.

3. Con bromato di neomidio a temperatura ambiente (lamine di 0.2 mm. circa di spessore) si ottengono i resultati della tabelletta II nella regione gialla dello spettro.

(1) Le radiazioni scritte in corsivo sono le più intense.

TABELLA II. - *Regione gialla dello spettro d'assorbimento di bromato di neodimio a temperatura ambiente.*

Osservazione trasversale all'asse		Osservazione longitudinale	
$\lambda_{\parallel}$	$\lambda_{\perp}$	$\lambda_{\perp}$	
5791			
5779			
	5754	5754	
	5741	5741	
5723		(5723)	traccia

Le righe 5791 e 5779 A dello spettro parallelo all'asse, per quanto intense come le 5754 e 5751 A, sono completamente scomparse dallo spettro longitudinale ed è rimasta solo una debole traccia della 5723 A.

Nelle altre regioni spettrali a temperatura ambiente l'effetto appare meno netto; a temperatura dell'aria liquida è tuttavia il più delle volte riconoscibile che le radiazioni normali all'asse principale del cristallo non coincidono con le parallele o per lo meno presentano aspetto diverso. Sottili in uno dei due spettri, sono nell'altro larghe e simmetricamente disposte rispetto alle precedenti, che ad esse corrispondono.

Per l'analogia d'aspetto citerò anche alcune radiazioni della regione azzurra dello spettro di solfato ottoidrato di praseodimio. Esse appaiono raggruppate in tripletti o quadrupletti, i quali, per polarizzazione e disposizione, se non per l'intensità relativa delle righe, riportano la mente in modo singolare al classico aspetto dell'effetto Zeeman trasversale. Non voglio naturalmente con questa locuzione impegnare l'interpretazione delle osservazioni, ma solo descriverle con un'immagine famigliare e viva.

Se il cristallo di bromato di neodimio è osservato allo stato naturale (circa 1 mm. di spessore) appare un altro multipletto di radiazioni assai fini e definite, intrecciate colle precedenti e diversamente polarizzate ($\lambda_{\parallel}$ 5710, 5733, 5765, 5898 A, $\lambda_{\perp}$ 5733, 5763). A prima vista si direbbe che esso si comporta come il multipletto di cui abbiamo già parlato e che compare isolato con spessori fini del cristallo, ma non potrei dare la cosa come certa a causa delle difficoltà di esame su campioni cristallini imperfetti.

4. Nonostante le riserve fatte a proposito delle mie osservazioni e i loro resultati, non pare dubbio che negli spettri degli joni trivalenti delle terre rare che fanno parte di un cristallo dotato di simmetria esistono:

a) frequenze corrispondenti a vibrazioni lineari in direzione prossima a quella dell'asse principale del cristallo;

b) frequenze, in generale distinte dalle precedenti, le cui vibrazioni hanno luogo nel piano prossimamente ortogonale all'asse principale e in esso sono sempre decomponibili in due vibrazioni di uguale intensità normali fra loro.

Le frequenze capaci di essere assorbite secondo onde polarizzate circolarmente, quando il fascio luminoso traversi il cristallo nell'opportuna direzione, debbono trovarsi fra quelle del secondo tipo.

Disgraziatamente i cristalli biassici di cui unicamente per ora dispongo, non si prestano a eseguire direttamente quest'ultima parte della ricerca coi metodi classici; e d'altra parte non pare che essa possa avere esito positivo nemmeno con cristalli monoassici osservati longitudinalmente.

Presso i cristalli monoassici Henri Becquerel [1] distinse uno spettro ordinario e uno straordinario. Essi presentano secondo questo autore qualche radiazione a comune, ma alcune particolarmente intense nello straordinario, altre presenti solo nell'ordinario. Queste ultime corrispondono a vibrazioni normali all'asse e sono osservabili anche senza analizzatore guardando il cristallo nella direzione longitudinale; le prime invece corrispondono a vibrazioni parallele all'asse.

Pare quindi, anche senza esame diretto, che la distinzione delle radiazioni, da me introdotta a proposito dei cristalli biassici osservati, sia da ripetere pei monoassici studiati dal Becquerel, la comunanza di alcune delle radiazioni fra i due spettri dipendendo principalmente dalle condizioni sperimentali (spessore eccessivo delle lamine, luce che traversa il cristallo non parallela, ecc.).

Ora nè Henri Becquerel, nè Jean Becquerel, durante i suoi studi sui fenomeni magneto-ottici dei cristalli naturali monoassici contenenti terre rare, hanno osservato nulla che giustifichi l'ipotesi che l'eventuale e probabile polarizzazione circolare delle radiazioni ortogonali all'asse sia « definita » nel cristallo non sottoposto a campo esterno e però facilmente rilevabile.

In effetto, in condizioni normali, il carattere dell'assorbimento jonico secondo onde polarizzate circolarmente in un senso determinato (destrogiro o levogiro) può esser mascherato nei cristalli anche uniassici dalla presenza di joni in uguali stati energetici iniziale e finale disposti in senso inverso. Sappiamo che in un campo elettrico simmetrico rispetto a un asse i passaggi di stato quantico $m \rightarrow m - 1$ e $m \rightarrow -(m - 1)$ corrispondono a due onde circolari, una levogira e una destrogira di ugual frequenza.

Ma dalle stesse osservazioni condotte da Jean Becquerel [2] si deduce che alcune radiazioni dello spettro ordinario dei cristalli monoassici (vibrazione nel piano normale all'asse cristallografico) quando il cristallo è introdotto in campo magnetico con l'asse parallelo alle linee di forza si vedono *anche trasversalmente al campo scisse in un semplice « doppietto » simmetrico di vibrazioni circolari, una destrogira e una levogira.* Questo è quanto si può aspettare in base alla teoria elementare dell'effetto Zeeman da un oscilla-

(1) Loc. cit.

(2) « Le Radium », 4, 49-107-328, 1927; 5, 5-227, 1908; vedere anche H. Du Bois et G. J. Elias, « Ann. de Phys. », 27, 233, 1908.

tore circolare doppio, cioè costituito da un rotatore destrogiro e da uno levogiro, quando esso sia collocato in campo magnetico col piano di rotazione normale alle linee di forza del campo. Le righe dello spettro parallelo sono invece in generale decomposte in doppietti asimmetrici, ovvero subiscono uno spostamento notevole.

5. La disposizione dei vettori luminosi in un piano ortogonale a una direzione prefissata e queste ultime considerazioni sono favorevoli alla supposizione che le radiazioni del tipo *b*) abbiano capacità di essere assorbite nella direzione longitudinale per onde polarizzate circolarmente. Questo fatto e l'esistenza constatata di radiazioni polarizzate linearmente autorizzano a credere che gli joni assumono nell' interno del reticolo cristallino un orientamento spesso semplice; nei cristalli monoassici l'asse di orientamento dello jone coinciderebbe con la direzione dell'asse cristallografico e cioè parallelamente a questo sono disposti o l'asse del momento totale dello jone o quello relativo a un campo intramolecolare: nei cristalli biassici osservati si può ritenere che esistano joni i quali posseggono la stessa orientazione rispetto all'asse principale, senza per ora escludere la possibilità di altre orientazioni.

Questa orientazione non è in ogni caso da prendere in senso assoluto a causa dei movimenti termici degli joni in seno al reticolo cristallino. P. Debye [1] ricorre all' ipotesi di un' energia molecolare di orientamento, la cui natura egli lascia indeterminata, allo scopo di giustificare per via termodinamica la correzione apportata dal Weiss alla legge di Curie per la suscettività magnetica delle sostanze paramagnetiche. Quest'energia domina, insieme all'agitazione termica, l'orientazione molecolare all'atto della magnetizzazione.

La presenza di un' energia molecolare di orientazione pare ovvia nei cristalli a causa dell'edificio di cui le molecole fanno parte. Le conclusioni della presente ricerca portano una ulteriore prova della sua esistenza e dicono in più che l'orientazione è propria non soltanto della molecola come unità elementare, ma delle singole parti di essa, in particolare del suo catione, nell' insieme dell'edificio cristallino.

Il che è in accordo con il fatto che le suscettività magnetiche degli anioni sono in generale trascurabili rispetto a quelle dei cationi degli elementi paramagnetici come le terre rare [2], e però sul termine correttivo della legge di Curie-Weiss deve prevalere l'energia di orientamento propria di questi ultimi.

Le osservazioni sul policroismo dei cristalli di sali di terre rare potranno altresì offrire la chiave per l'interpretazione dei complicati spettri

(1) « Phys. ZS », 27-67, 1926; P. Cabrera, « Journ. de Phys. et le Radium », VI, VII, 257, 1927.

(2) H. Decher, « Ann. de Phys. 79, 324, 1926.

d'assorbimento degli joni colorati delle terre rare quando si conosca l'origine e la natura dell'energia orientante.

Per ora si può solo dire che se x è un numero quantico relativo all'orientamento dello jone ($x = j$ oppure $x = m$) le radiazioni polarizzate rettilineamente corrispondono al salto $\Delta x = 0$, quelle polarizzate circolarmente a $\Delta x = \pm 1$, coincidendo le radiazioni $x \rightarrow (x-1)$ e $-x \rightarrow -(x-1)$.

Quest'ultimo fatto, la direzione stessa di orientazione e alcune osservazioni spettroscopiche relative alle variazioni degli spettri dei sali delle terre rare in diverse condizioni, fanno pensare alla presenza di un campo intramolecolare, simmetrico nel senso cristallografico rispetto a un asse coincidente con una delle direzioni di simmetria cristallina, e di natura elettrica; il che è in accordo con le più recenti vedute sulla natura del campo intramolecolare [1] introdotto dal Weiss per spiegare la correzione alla legge di Curie scritta per le sostanze paramagnetiche.

Mi riserbo tornare sull'argomento se le ricerche preliminari riferite nella presente Nota potranno essere estese e completate.

Fisica. — *Influenza della carica elettrica sulla conduttività di una pellicola metallica.* Nota di M. Pierucci, presentata dal Corrisp. L. Puccianti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *Sul regime anemologico del Golfo della Spezia.* Nota del dr. R. Bilancini, presentata [2] dal Socio L. Palazzo.

In questa Nota sono riassunti alcuni dei risultati di una ricerca anemologica da me condotta [3] basandomi sull'esame di quasi 1000 lanci di palloni piloti; lanci eseguiti durante il quadriennio 1914–1917, alle 8^h del mattino, nella Stazione Aerologica di Varignano, sul Golfo della Spezia e precisamente alla estremità della penisoletta che lo limita a ovest. Le coordinate della Stazione sono approssimativamente 44° 4′ lat. N, 2° 37′ long. W Roma; la sua altezza sul mare è di m. 30. Il periodo di anni esaminato è il più completo e il più omogeneo delle osservazioni raccolte a Varignano, verificandosi negli altri molte considerevoli lacune.

La indagine è stata estesa solo fino alla quota di 3600 m., essendo troppo scarso il numero delle osservazioni che si riferiscono ad altezze

(1) Weiss et Foex, *Le Magnetisme*, p. 166, 1926, Paris.
(2) Nella seduta del 5 febbraio 1928.
(3) Lavoro eseguito all'Ufficio Presagi della R. Aeronautica.

TABELLA I. — *Frequenze relative.*

(100 osservazioni per quota).

Quote	Inverno								Primavera							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Suolo	35	2	1	7	4	4	5	42	34	3	4	8	6	7	5	33
300	68	14	4	2	3	3	2	4	47	12	7	8	7	5	5	9
450	34	30	8	10	3	4	10	1	25	24	7	15	7	8	6	8
600	19	31	3	12	6	7	9	13	16	21	10	20	11	7	7	8
900	13	25	7	6	7	15	17	10	8	19	12	19	12	12	8	10
1050	15	20	10	4	6	13	19	13	12	15	13	17	10	14	9	10
1200	15	14	15	3	7	14	19	13	8	19	12	14	10	14	12	11
1500	14	15	12	7	1	16	13	22	11	13	18	11	9	17	10	11
1650	18	16	13	4	4	13	15	17	13	12	17	10	9	15	11	13
1800	19	18	14	4	6	11	10	18	17	11	15	12	7	14	12	12
2100	22	19	13	7	2	11	10	16	18	13	13	8	10	11	10	17
2550	17	20	9	5	6	10	12	21	20	19	10	8	7	8	12	16
3000	24	13	10	–	8	6	14	25	22	17	8	7	4	7	14	21
3600	21	14	7	11	4	2	12	29	22	17	6	6	2	6	18	23

Quote	Estate								Autunno							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Suolo	49	3	4	11	8	5	2	18	48	2	1	5	5	5	3	31
300	42	14	8	13	6	5	3	9	67	11	3	2	2	4	4	7
450	16	21	12	19	7	9	5	11	32	32	7	6	5	4	7	7
600	10	16	8	31	8	11	8	8	11	33	9	13	5	8	12	9
900	6	14	7	26	14	18	7	8	11	21	10	14	10	7	13	14
1050	9	12	8	22	17	18	8	6	10	18	11	16	11	9	11	14
1200	11	13	7	15	14	23	9	8	12	19	9	15	11	9	12	13
1500	10	12	14	9	10	20	17	8	19	15	12	13	6	11	10	14
1650	11	16	8	9	10	19	17	10	20	19	12	9	7	10	11	12
1800	13	14	10	9	9	17	17	11	18	16	14	8	8	9	13	14
2100	17	12	10	4	8	17	19	13	22	14	12	5	7	9	18	13
2550	16	14	8	2	6	11	27	16	29	16	6	6	7	10	13	13
3000	15	11	9	2	2	13	26	22	28	11	9	3	7	9	12	21
3600	23	9	5	3	1	10	32	17	21	15	5	4	4	7	15	29

superiori. Le grandezze anemologiche considerate sono: le frequenze, le velocità medie, le direzioni medie, le intensità medie e anche, sommariamente, le rotazioni in altezza.

Per ciò che riguarda le frequenze (v. tabella I) si nota subito, al suolo, in tutte le stagioni, forte prevalenza dei venti di N e NW [1] e frequenza quasi insignificante di tutti gli altri. Questo predominio, più netto nelle stagioni *fredde* d'inverno e d'autunno (frequenza complessiva: circa il 78 °/₀ della totalità), meno spiccato nelle *calde* d'estate e primavera (67 °/₀), è evidentemente dovuto alla influenza della brezza di terra.

Passando dal suolo all'altezza di 300 m. si ha, invariabilmente, brusca caduta della frequenza del maestro e netto predominio della tramontana. Anche per questo vento la prevalenza è più spiccata in inverno (68 °/₀ della totalità) e in autunno (67 °/₀), meno in primavera (47 °/₀) e in estate (42 °/°). Tra gli altri venti si può notare il greco (circa 12 °/₀) e, in estate, lo scirocco (13 °/₀).

Dai 300 m. fin verso i 900 si osserva, nelle stagioni fredde, prevalenza dei venti del I quadrante (specie NE), che però va facendosi sempre meno netta. Nelle stagioni più calde, il predominio, che all'inizio è pure del I quadrante (NE), passa poi al II, assai decisamente in estate, specie per effetto della cresciuta influenza dello scirocco (31 °/₀ a 600 m.), meno spiccatamente, ma sempre per la stessa causa, in primavera; in questa stagione, come pure in autunno, si osserva a 900 m. una forte uniformità di distribuzione.

Intorno a 600 m. si inizia uno strato, che si estende fin verso i 1600, il quale potrebbe chiamarsi di *contrasto* fra le correnti settentrionali e le meridionali. Quelle prevalgono nelle stagioni fredde, queste nelle calde; e la prevalenza è tanto più spiccata, quanto più netto è il carattere di stagione fredda o calda del periodo che si considera. Così d'inverno la prevalenza resta, per quanto un po' attenuata rispetto alle prime quote, ai venti settentrionali (I e IV quadrante, segnatamente NE, N e NW; anche i venti di W hanno una certa frequenza intorno ai 1000 m.); d'estate è per i meridionali (II e III quadrante, specie SE alle prime quote, poi SW e anche W). Nelle stagioni di transizione di primavera e d'autunno il contrasto produce una forte uniformità di distribuzione; si ha una debolissima ed incerta prevalenza dei venti meridionali in primavera (SE, SW, ma anche NE, E) e, in autunno, una debole prevalenza dei settentrionali, che poi si rafforza (I quadrante, NE, N).

Dai 1800 m. in su si nota sempre il passaggio del predominio al IV quadrante, come ben si poteva prevedere da noti risultati di carattere

(1) Per ragioni di opportunità si sono considerate solo otto direzioni, riducendo le sedici dei registri alle otto principali coll'aggregare a ogni direzione la precedente (cioè a N la NNW, a NE la NNE, ecc.).

generale. In questo strato, come già nelle prime quote, prevalgono i venti settentrionali, più nettamente nelle stagioni fredde, meno nelle calde.

Se i venti si distinguono in orientali ed occidentali, si nota che questi prevalgono al suolo e alle maggiori quote; da 300 a 600 m. si affermano invece i primi. Per le altre quote non si ha in generale un comportamento nettamente definito.

La velocità media V fu calcolata per l'insieme dei venti indipendentemente dalla loro direzione; qualche riserva deve essere fatta pei valori ottenuti alle ultime quote, sia per la scarsezza dei dati, sia per il fatto ben noto che essi tendono ad essere più bassi del reale. Si sono calcolati anche i gradienti G di velocità, per 100 m. e positivamente per un aumento verso l'alto. I risultati sono raccolti nella tabella II.

TABELLA II. — *Velocità medie (in m/sec.).*

Quote	Inverno		Primavera		Estate		Autunno		Quadriennio	
	V	G	V	G	V	G	V	G	V	G
Suolo	3.3		2.9		2.6		3.0		2.9	
		0.37		0.23		0.10		0.23		0.20
300	4.4		3.6		2.9		3.7		3.5	
		0.13		0.33		0.13		0.27		0.27
450	4.6		4.1		3.1		4.1		3.9	
		0.20		0.20		0.20		0		0.13
600	4 9		4.4		3.4		4.1		4 1	
		0.10		0		0.03		— 0.03		0.03
900	5.2		4.4		3.5		4.0		4.2	
		— 0.07		0.13		0.07		— 0.13		0
1050	5.1		4.6		3.6		3.8		4.2	
		0		0		0.07		0.07		0.07
1200	5.1		4.6		3.7		3.9		4.3	
		— 0.03		0.17		0.07		0.10		0.03
1500	5.0		5.1		3.9		4.2		4.4	
		0.33		0.13		0.20		0.27		0.27
1650	5.5		5.3		4.2		4.6		4.8	
		0.13		0		0.20		0.13		0.07
1800	5.7		5.3		4.5		4.8		4.9	
		0.17		0.17		0.17		0.20		0.17
2100	6.2		5.8		5 0		5.4		5.4	
		0.04		0.09		0.07		— 0.02		0.11
2550	6.4		6.2		5.3		5.3		5.9	
		— 0.04		0.09		0.18		0.04		0.09
3000	6.2		6.6		6.1		5.5		6.3	
		0.15		0.10		0.15		0.13		0.10
3600	7.1		7.3		7.0		6.3		6.9	

Si nota generalmente che la velocità va aumentando verso l'alto; il fenomeno è più spiccato in estate, un po' meno in primavera in cui si hanno vari strati di stasi, meno ancora in autunno e in inverno, in cui si notano (intorno ai 1000 e anche ai 2500 m.) degli strati nei quali la velocità decresce, sebbene di poco.

L'inizio delle prime zone di decremento in inverno e in autunno e della prima zona di stasi in primavera sembra che si possa mettere in

relazione con l'altezza a cui cessa la influenza della brezza di terra. Così però non avviene per l'estate, nella quale, del resto, la brezza ha minore importanza. Gli strati di decremento o di stasi che si osservano ad altezze superiori non sono di facile spiegazione, e non si è creduto opportuno soffermarvisi, data la minor sicurezza dei valori della velocità.

Paragonando la grandezza della velocità media fra le diverse stagioni, si trova che generalmente essa è, a parità di quota, massima in inverno, minima in estate; quella relativa alla primavera è quasi uguale alla autunnale alle prime quote, ma la va superando man mano che ci si innalza. Alle maggiori altezze le cose vanno diversamente, ma anche qui non bisogna dimenticare la minor certezza delle cifre.

Passiamo a considerare la direzione e la intensità medie dei venti alle varie quote, che furono calcolate in base alla formula di Lambert, partendo dalle frequenze relative [1].

Nelle due stagioni fredde la intensità media ha andamento simile: un massimo assai spiccato (0.75) a 300 m., poi un minimo intorno a 1200 (0.18 in inverno, 0.09 in autunno); indi un generale aumento che la porta a circa 0.40 a 3600 m.

La direzione media in inverno ruota verso destra (cioè come le sfere dell'orologio) dal suolo (NNW) fino a 450 m. (NNE); poi torna indietro oscillando con ampiezze sempre minori intorno a una direzione prossima a NNW. In autunno si ha una rotazione verso destra fra il suolo (NNW) e 1000 m. (ENE), seguita da una rotazione verso sinistra che porta alle ultime quote a NNW.

In primavera la intensità decresce fortemente dal suolo (0.31) a 1600 m. (0.03); si inizia poi un continuo aumento (0.44 a 3600). La direzione media ruota a destra dal suolo (NNW) a 900 m. (ESE); in corrispondenza ai minimi valori della intensità è, come è naturale, incerta; dopo i 1600 m. piega con qualche oscillazione verso NNW.

In estate infine la intensità media, assai piccola al suolo (0.13), ha un massimo a 300 m. (0.42), poi discende oscillando fino a 1500 (0.10); di qui si inizia il solito aumento (0.46 a 3600). La direzione media ruota regolarmente a destra: essa è NNW al suolo, NNE a 300, ENE a 450, ESE a 600, SSE a 900, SSW a 1200, SW a 1500, W a 1650, WNW a 1800; poi si mantiene a NW.

Per ciò che riguarda le rotazioni dei venti in altezza, furono dedotti soltanto alcuni risultati d'insieme. Anzichè considerare globalmente lo strato che va dal suolo a 3600 m., sembrò opportuno dividerlo in tre: uno da 300 m. a 900 (trascurando il suolo), il secondo da 1050 a 1800 e l'ultimo da 2100 m. in su. Le rotazioni furono distinte in *destre, sinistre, nulle*

(1) Il valore dell'intensità media dato dalla formula fu diviso per la somma (100) delle frequenze, talchè il massimo teoricamente possibile per la intensità è 1.

(direzione del vento praticamente immutabile) e *miste* (o non classificabili).

Nel primo strato si nota sempre, d'accordo con fatti noti, netta prevalenza delle rotazioni destre (in qualunque stagione esse superano sempre il 50 % della totalità). Le altre rotazioni non si presentano con frequenze molto importanti. Le rotazioni sinistre sono in primavera più scarse e le nulle più frequenti che in ogni altra stagione; questo si verifica anche per gli strati successivi.

Nel secondo strato le rotazioni destre ancora predominano con frequenze intorno al 40 %; le sinistre presentano una certa importanza in autunno (23 %); le nulle sono notevolmente accresciute rispetto al primo strato (circa 30 %) e le miste sono diminuite, tranne che in primavera (20 %).

Passando al terzo strato, si nota anzitutto una spiccata diminuzione delle rotazioni destre, uno spiccato aumento delle sinistre; anche le rotazioni nulle aumentano, tranne che in inverno in cui restano stazionarie; le miste diminuiscono. In qualunque stagione, e specialmente in inverno, c'è poca differenza fra le frequenze delle rotazioni destre, sinistre e nulle, mentre le miste si presentano sempre con frequenze molto piccole (intorno al 10 %). Escludendo l'inverno, si ha sempre predominio delle rotazioni nulle, un po' più spiccato in primavera (38 %).

In generale si può affermare che, in qualunque stagione, le rotazioni destre vanno diminuendo con l'altezza; così pure avviene per le miste, mentre le sinistre e le nulle vanno aumentando.

Chimica. — *Dissociazione termica del nitrato di cadmio.* Nota di G. Malquori [1], presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Si può riuscire ad ottenere nitrato di cadmio anidro, disidratando il tetraidrato a mezzo dell'acido nitrico (d = 1.52).

Secondo una notizia esistente nella letteratura [3], questo sale fonderebbe verso i 360° con scomposizione.

Le misure da me eseguite dimostrano invece che esso si scompone a 325°, e che il prodotto della scomposizione è l'ossido. Nella demolizione termica del nitrato di cadmio non si originano pertanto sali basici.

Le misure di tensione corrispondenti all'equilibrio:

$$2\,Cd(NO_3)_2 \rightleftarrows 2\,CdO + 4\,NO_2 + O_2$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.
(3) Wassiljew, «I. Russ. Ges.», *42*, 562 (1910).

hanno dato i risultati seguenti:

t°	Pressione in mm. Hg.
200°	6.3
220°	14.5
240°	31.6
266°	100.0
280°	178.0
293°	316.0
305°	504.7
315°	757.3

I dettagli sui metodi seguiti per accertare questi valori saranno pubblicati altrove. Basterà qui ricordare che la reazione di scomposizione è perfettamente reversibile e che si è potuto provare che in condizioni di equilibrio esistono due fasi solide soltanto: $Cd(NO_3)_2$ e CdO.

Questo è stato messo in evidenza dal fatto che estraendo gas dall'ambiente di reazione, si ristabiliscono sempre gli stessi valori di tensione.

Dai valori sopra riportati si ricava, per estrapolazione, 318° come temperatura alla quale si raggiunge la tensione di una atmosfera, in buon accordo con il valore di 325° dedotto dalle curve di riscaldamento.

Questi dati possono essere utilizzati per il calcolo del calore di scomposizione del sale secondo l'equazione scritta precedentemente.

L'applicazione della formula ridotta di Nernst porta a:

$$\log (p^4_{NO_2} \cdot p_{O_2}) = \frac{-2Q}{4.571\,T} + \Sigma\nu \cdot 1.75 \log T + \Sigma\nu c$$

Nel nostro caso: $\Sigma\nu = 5$ e $\Sigma\nu c = 16$, assumendo 3.3 e 2.8 come costanti chimiche del biossido d'azoto e dell'ossigeno, per cui:

$$\log (p^4_{NO_2} \cdot p_{O_2}) = \frac{-2Q}{4.571\,T} + 8.75 \log T + 16$$

Se prendiamo a considerare la temperatura alla quale la reazione raggiunge la tensione di un'atmosfera avremo:

$$\log (p^4_{NO_2} \cdot p_{O_2}) = \log \frac{4^4}{5^5}$$

da cui si ricava:

$$\frac{Q}{4.571\,T} = 4.41 \log T + 8.5$$

Introducendo il valore di T che si ottiene, come è stato già rammentato, per estrapolazione, risulta:

$$Q = 55881 \text{ cal}.$$

Chimica. — *Sugli spettri d'assorbimento di alcuni coloranti indigoidi.* Memoria di P. Piutti, presentata dal Socio A. Piutti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *La Datolite di Toggiano.* Memoria di E. Grill, presentata dal Socio F. Millosevich.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Ulteriori osservazioni su ratti alimentati con dieta insufficiente aproteinica, acarboidrosica, iperlipinica. Importanza dell'emuntorio intestinale nella resistenza al digiuno* [1]. Nota IV di A. Galamini, presentata [2] dal Corrisp. S. Baglioni.

I. Ricerche precedenti [3] mostrarono che l'alcool diminuisce la resistenza ad una dieta iperlipinica subcarboidrosica subproteinica. Il ratto XV, che ingerì alcool, diminuì di peso fino alla perdita del 46 % e poi morì: l'altro, XVII, che non ne prese, dopo avere perduto il 40 % del peso iniziale per 21 giorni mantenne pressochè invariato il proprio peso, poi in 10 giorni diminuì fino alla perdita del 43 % del peso iniziale e morì.

Per studiare ulteriormente il fenomeno si sono ripetute le ricerche in ratti ai quali, invece di somministrare sempre, oltre al grasso i sali e il succo di limone, gr. 0.2 di lievito di birra, che solo nella dieta conteneva sostanze proteiche, se ne dettero quantità successivamente minori. A differenza delle ricerche precedenti, si somministrò da prima lardo e poi strutto, mescolato con carta bibula nelle proporzioni di gr. 8 a 1.

I risultati furono i seguenti:

Ratto K_{II} del peso iniziale di gr. 243 ♂.

1° periodo: tenuto in laboratorio e alimentato con una dieta completa, in 5 giorni diminuì di 3 gr. e ingerì cibo in quantità corrispondente a ca 0.3 calorie per gr. di peso e per giorno. Ingerì cc. 6 di acqua. Emise urine cc. 15 e feci gr. 0.850.

2° periodo: dal 2 al 22-5-27: fu alimentato con lardo con aggiunta di gr. 0.2 di lievito di birra e di gocce 30 di alcool a 95 %, pari a calorie 2.72. Diminuì di 36 gr. da 241 a 205, pari al 14.9 % e a gr. 0.00709 per gr. di peso e per giorno. Ingerì cibo in proporzione di calorie 0.1892 per gr. di peso e per giorno. Bevve in media acqua cc. 14. Emise in media urine poche gocce: feci gr. 0.245.

3° periodo: dal 25-5-27 all'11-6-27. Ingerì strutto e alcool, gocce 30: lievito di birra gr. 0.16 fino al 30-5-27: gr. 0.12 fino al 6-6-27, gr. 0.05 in seguito. Diminuì di gr. 54, da gr. 205 a 151, cioè del 26,3 %, riferendosi al peso iniziale di questo periodo del 37.3 %, riferendosi al peso iniziale delle esperienze. Per giorno e per gr. la perdita

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 5 febbraio 1928.
(3) S. Baglioni e A. Galamini «Atti R. Acc. Lincei», vol. V, 1927.

del peso fu di gr. 0.054. Il cibo fu ingerito in proporzione di calorie 0.1222 per gr. di peso e per giorno. Acqua cc. 14.5. Urine poche gocce: feci gr. 0.39.

4° periodo: dall'11-6 al 1-7-27. Diminuì di gr. 38 da gr. 151 a 113 fino alla perdita complessiva del 53 % del peso e poi morì. La perdita per gr. di peso e per giorno fu di gr. 0.0125. Le calorie ingerite per gr. di peso e giorno furono 0.11. Acqua cc. 13. Urine poche gocce: feci gr. 0.260.

Ratto K_1 ♂.

1° periodo: alimentato con dieta completa dal 27-4 al 2-5-27. Crebbe da gr. 204 a 209. Ingerì in media cibo corrispondente a calorie 0.36 per gr. e per giorno. Acqua ingerita cc. 6. Urine cc. 15: feci gr. 0.850.

2° periodo: fu alimentato con lardo. Dal 2 al 22-5-28 diminuì da gr. 209 a 170 e cioè del 18.6 %, pari a gr. 0.0086 per gr. di peso e per giorno. Ingerì alimenti corrispondenti a calorie 0.207 per gr. e per giorno. Acqua cc. 13.4. Urine poche gocce: feci gr. 0.245.

3° periodo: dal 23-5 all'11-6. Fu alimentato con strutto. Diminuì da gr. 170 a 130 pari a gr. 0.0123 per gr. e per giorno. Calorie ingerite per gr. di peso e giorno 0.178. Acqua cc. 88. Urine poche gocce: feci gr. 0.480.

4° periodo: dall'11-6 al 15-7. Diminuì da 130 a 100 pari a gr. 0.00766 per gr. e per giorno. La perdita del peso fu complessivamente del 52.1 %. Calorie ingerite per gr. 0.13. Acqua cc. 11. Urine poche gocce: feci gr. 0.297.

Bisogna osservare che negli ultimi 10 giorni di questo periodo il peso del ratto rimase pressochè invariato intorno ai 100 gr., facendo pensare che si fosse raggiunto un periodo di sosta, simile a quello osservato nel ratto n. XVII. Si somministrarono allora al ratto gocce 30 di alcool a 95 % in aggiunta alla dieta giornaliera.

5° periodo: dal 15-7 al 21-8. Diminuì da gr. 100 a 75.3 e poi morì. La perdita per gr. di peso e per giorno fu di gr. 0.0077: quella complessiva del 64 %. Le calorie ingerite per gr. e per giorno furono 0.206. Acqua cc. 9.65. Urine piccola quantità: feci gr. 0.36.

In complesso, il ratto che ingerì alcool fin dall'inizio, in 60 giorni perdette il 53 % del peso e morì: l'altro raggiunse tale perdita del suo peso 6 giorni più tardi: poi mantenne pressochè invariato il proprio per 10 giorni: poi, infine, prendendo alcool, sopravvisse altri 21 giorni fino alla perdita del 64 % del peso iniziale. Questi risultati confermarono l'azione sfavorevole dell'alcool aggiunto ad una dieta iperlipinica. Però tale azione apparve meno intensa quando l'alcool fu somministrato tardivamente, dopo la perdita del 53 % del peso, forse in rapporto col fatto che, coll'aggiunta dell'alcool, nel V periodo del ratto K_1, aumentarono le calorie ingerite giornalmente per gr. di peso: 0.206 invece delle 0.73 del IV periodo. L'alcool ingerito interruppe il periodo di stasi nella perdita del peso, durato 10 giorni: consentì però all'animale di sopravvivere ancora 21 giorni, perdendo per gr. e per giorno gr. 0.0077, cioè non più che nel IV periodo.

In base a questi risultati si volle studiare quale azione la sostanza avrebbe esercitato, se somministrata in un periodo intermedio dell'inanizione parziale con strutto.

Le ricerche furono fatte su due ratti albini, ad uno dei quali si dette alcool fin dall'inizio delle esperienze: all'altro dopo la perdita del 25 % del peso iniziale.

I risultati furono:

Ratto R_1 ♂.

Fu alimentato con carta, strutto, mescolati nelle proporzioni suddette con aggiunta di alcool al 95 %, gocce 30, di sali di Osborne gr. 0.05, lievito di birra gr. 0.03, cavolo gr. 1.

1° periodo: dal 27–8 al 9–9. Decrebbe da gr. 169.5 a 120.5, perdendo gr. 0.0211 per gr. e per giorno. Ingerì calorie per gr. di peso e per giorno 0.131. Acqua cc. 20. Urine cc. 9: feci gr. 0.272.

2° periodo: da 9–9 a 24–9. Decrebbe da gr. 120.3 a 100.3, perdendo gr. 0.0118 per gr. di peso e per giorno. Calonie id. 0.247. Acqua cc. 14. Urine cc. 6: feci gr. 0.5.

3° periodo: da 24–9 a 28–9. Decrebbe da gr. 100 a 82.3 perdendo gr. 0.049 per gr. di peso e per giorno. La perdita complessiva del peso, alla morte, fu del 51 %. Calorie id. 0.227. Acqua cc. 7. Urine cc. 5: feci gr. 0.31.

Ratto R_2 ♂.

Fu alimentato come il precedente senz'alcool nel 1° periodo: con aggiunta di 39 gocce di alcool al 95 % negli altri due.

1° periodo: da 27–8–27 a 12–9–27. Decrebbe da gr. 162.5 a 120.8 pari a gr. 0.0187 per gr. di peso e per giorno. Ingerì calorie 0.121 per gr. di peso e per giorno. Acqua cc. 13. Urine cc. 3: feci gr. 0.4.

2° periodo: da 12–9 a 22–9–27. Decrebbe da 120 a 109.3, e cioè di gr. 0.013 per gr. di peso e per giorno. Calorie id. 0.18. Acqua cc. 13. Urine cc. 3: feci gr. 0.4.

3° periodo: da 22–9 a 28–9–27. Decrebbe da 109.3 gr. a 93 gr., pari a gr. 0.026 per giorno e per gr. di peso. La diminuzione complessiva del peso fu del 48.9 % quando l'animate morì. Calorie id. 0.201. Acqua cc. 9.75. Urine cc. 4.37: feci gr. 0.37.

Anche i risultati dei ratti R_1 e R_2 parlano per un'azione sfavorevole esercitata dall'alcool. In essi si è osservata la perdita graduale del peso fino alla morte, senza accenno ad un periodo di stasi, osservato nel ratto XVII e, per 10 giorni, nel ratto K_1 prima che prendesse l'alcool. Paragonando il contegno del ratto K_1 con quello dei ratti XV, K_2 R_1 R_2 si può concludere che l'alcool ha esercitato la sua azione sfavorevole in modo più evidente quando fu somministrato all'inizio dell'esperienza o dopo la perdita del 25 % del peso iniziale che non quando fu somministrato tardivamente, dopo la perdita del 50 % ca del peso.

II. I dati esposti consentono di fare anche un'osservazione sui fattori, che determinano la morte per inanizione parziale o totale. I ratti XV e XVII, che ingerirono soltanto strutto sono sopravvissuti fino alla perdite del 43–46 % del peso: gli altri, K_1, K_2 R_1 R_2, che ingerirono strutto con carta sono morti dopo avere perduto rispettivamente il 64 %, 53 %, 51 %, 48.9 % del peso iniziale. Nei primi, negli ultimi giorni di vita e spesso durante il corso delle esperienze, si osservarono feci diarroiche: nei secondi le feci furono sempre ben composte normali. La regolarità delle funzioni intestinali ha agito, aumentando la resistenza degli animali all'inanizione parziale. Sembra perciò giusto pensare che la morte non dipenda soltanto dalla perdita di circa il 40 % del peso e dalla distruzione di una determinata quota

di sostanze proteiche, ma anche da fenomeni d'intossicazione resi meno intensi da un emuntorio intestinale più attivo. Nei ratti, che ingerirono carta, oltre che durare più tempo l'eliminazione dell'azoto, fu probabilmente maggiore che nei ratti, che ingerirono solo strutto, pel fatto che maggiore dovette essere nei primi il lavorio del tubo gastroenterico. Non si può d'altro canto affermare in modo assoluto che la carta non sia stata in parte digerita, contribuendo ad aumentare la quantità degli alimenti assorbiti e a diminuire lo stato di acidosi, che si provoca colla ingestione di soli grassi. Però non sembra che la carta sia elaborata dai succhi digestivi e in ogni modo, se lo fosse, la sua azione, come alimento, sembra debba essere stata modesta. I pesi medi *pro die* delle feci dei ratti K_1, K_2; R_1: R_2, quando ingerirono strutto, furono rispettivamente gr. 0.37, 0.35, 0.4, 0.423: quelli della carta, che avrebbe dovuto essere eliminata se non fosse stata in alcun modo scissa di gr. 0.28, 0.22, 0.23, 0.21. Le feci pesarono in più in media rispettivamente di gr. 0.09, 0.13, 0.17, 0.213. Se si sottraggono queste cifre dal valore medio, ammesso costante, di gr. 0.25 delle feci emesse dai ratti, quando non ingerivano carta, si ottengono i valori 0.16, 0.12, 0.08, 0.037, che potrebbero rappresentare le quantità medie di cellulosa utilizzate giornalmente, corrispondenti a circa calorie 0.72, 0.54, 0.36, 0.16. L'azione benefica della carta trova infine conferma nei risultati di un ratto adulto maschio del peso iniziale di gr. 238, che fu alimentato da prima per 8 giorni con sola carta e poi, poichè rifiutava d'ingerirla, per altri 17 giorni, fino alla morte, con carta e strutto a parti uguali, come si può desumere dai dati sotto riportati, insieme con quelli del ratto K_1 e con quelli di un ratto adulto, maschio del peso di gr. 152, sottoposto a digiuno completo:

K 1 alim. con carta e strutto nel rapporto di 1/8	Ratto alim. con carta e strutto a parti uguali	Ratto a digiuno completo
dopo 11 giorni perdita dell'11.4 %	dopo 11 giorni perdita del 30 %	dopo 10 giorni perdita del 37 % ed è morto
dopo 22 giorni 19.1 %	dopo 24 giorni 53.3 %	—
dopo 47 giorni 42.6 %	—	—
dopo 65 giorni 50 %	—	—
dopo 112 giorni 64.1 %	—	—

Biologia. — *Modificazioni del condrioma e del lacunoma nelle cellule intestinali di « Gambusia holbrooki » durante le diverse fasi dell'attività funzionale e durante il digiuno* [1]. Nota preventiva di M. Tirelli, presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

Nell'epitelio intestinale delle Gambusie, durante la digestione e l'assorbimento, si possono esattamente riconoscere nella morfologia generale degli elementi le fasi già descritte dall'Arcangeli [3] per la mucosa intestinale di *Box salpa*. Io però distinguo nettamente soltanto tre fasi invece delle cinque descritte dall'Arcangeli, fasi caratterizzate oltre che dalla forma e dimensioni della cellula *in toto* e del nucleo, anche dal diverso aspetto del condrioma e dall'assenza o dalla presenza del lacunoma. Lo studio di questi due elementi cellulari è stato preso da me in particolare considerazione.

Nella *prima fase, o di riposo*, le cellule sono rettangolari, limiti cellulari a contatto reciproco, protoplasma omogeneo, cuticola spessa.

Nuclei e plasma assumono un giusto tono di colorazione. Il condrioma è costituito da tipici filamenti (condrioconti) disposti in due ciuffi alle estremità distale e prossimale della cellula. Qualche filamento può persino estendersi dall'una all'altra estremità, raggiungendo così delle lunghezze assai considerevoli.

Nella *seconda fase o di attività cellulare* (*assimilazione*, secondo la nomenclatura dell'Arcangeli) le cellule sono assai allungate, sembrano quasi stirate nel senso longitudinale, acquistano in complesso la forma di un lungo cono affilato, con l'apice volto basalmente; si vengono in tal modo a costituire dei notevoli spazi intercellulari. Qualche volta l'allungamento è così spinto che la cellula basalmente diventa addirittura filiforme e può raggiungere quasi il doppio della lunghezza che normalmente ha nella fase di riposo.

Anche il nucleo si allunga, adattandosi in un certo modo alla nuova forma assunta dalla cellula tutta. Le cellule diminuiscono di volume, perchè il grande allungamento non compensa l'assottigliamento che si ha in senso trasversale.

Il condrioma assume una nuova disposizione caratteristica. I lunghi filamenti si spezzettano in granuli minuti, che si distribuiscono uniforme-

(1) Ricerche eseguite, su consiglio del prof. Umberto D'Ancona, all'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma e alla R. Stazione Bacologica Sperimentale di Padova.

(2) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(3) Arcangeli A., *I cambiamenti dell'epitelio intestinale del Box salpa durante l'assorbimento.* « Arch. It. Anat. Embr. », vol. V, 1906, p. 150.

mente in tutto il citoplasma, mentre abbiamo visto che nella precedente fase i condrioconti erano addensati alle due estremità. Il citoplasma ed il nucleo sono assai più intensamente colorabili che nelle altre fasi, il citoplasma ha inoltre un aspetto granuloso.

Nella *terza fase o di ricostituzione* la cellula si accorcia di nuovo (pur rimanendo notevolmente più lunga che nella fase di riposo), il citoplasma torna di nuovo omogeneo ed appare meno colorabile, così pure il nucleo, gli spazi intercellulari sono limitati fra i terzi basali delle cellule.

Il condrioma si va ricostituendo in filamenti. Esso è relativamente più scarso che nelle altre due fasi, ed addensato specialmente nella metà distale, tra l'orlo cuticolare ed il nucleo. Vi sono dei granuli allungati, dei corti bastoncini, ed alle volte si possono notare due granuli accoppiati nel senso della loro maggiore lunghezza.

Basalmente al nucleo e molto vicino ad esso, sempre però separatone da uno straterello di citoplasma, si trova un sistema di lacune ovoidali, ellittiche o semplicemente allungate, a contenuto perfettamente ialino, senza essere limitate da membrane apparenti, ma circondate soltanto, con una linea ben netta, dal citoplasma omogeneo. Tali lacune non comunicano tra di loro, nè hanno rapporti con la membrana cellulare, esse sono inoltre più facilmente osservabili nelle cellule situate presso l'apice delle *plicae mucosae*. Si tratta tipicamente di quella formazione che Corti ha chiamato lacunoma [1].

Dopo un digiuno prolungato le cellule dell'epitelio intestinale appaiono intensamente vacuolizzate, il citoplasma assume l'apparenza di una vera e propria schiuma, i nuclei sono respinti basalmente. Non si può giudicare se avviene o no atrofia cellulare a causa dell'artificioso aumento di volume subito dalle cellule per la descritta vacuolizzazione.

Nel digiuno scompaiono inoltre i limiti cellulari, e si hanno altri fenomeni simili a quelli descritti già da D'Ancona per l'epitelio intestinale delle anguille [2].

Il condrioma si presenta minutamente spezzettato in granuli anche più piccoli di quelli presenti nella fase di attività cellulare, ed è particolarmente addensato in uno straterello immediatamente sottostante all'orlo cuticolare (che nel digiuno non scompare) e basalmente attorno ai nuclei. Qualche granulo si osserva nelle sottili trabecole citoplasmatiche che limitano i vacuoli, mai entro i vacuoli.

Per spiegare il comportamento del condrioma in rapporto con le diverse fasi funzionali delle cellule, io penso che, durante la fase di assimilazione, o meglio, come ho già detto, di attività cellulare, si abbia una

(1) Corti A., *Studi di morfologia cellulare. – Lacunoma, apparato interno del Golgi (trofospongio), condrioma, idiosoma.* « Ric. di Morfol. », vol. VIII, 1924.

(2) D'Ancona U., *Effetti del lungo digiuno sull'apparato digerente dell'anguilla* (Mem. II). « R. Comit. Talass. », Mem. CXXIII, 1926; *Studi sull' inanizione. I. L'azione del lungo digiuno sulle cellule e sui tessuti.* « American Jour. Anat. », vol. XXXIX, 1927, p. 135.

notevole perdita di acqua, perdita dimostrata dalla aumentata colorabilità del citoplasma e del nucleo, dal diminuito volume cellulare e nucleare, dalla formazione degli spazi intercellulari che probabilmente sono pieni di liquido, spremuto, almeno in parte, dalle cellule. Tale perdita di acqua non si deve considerare come un fenomeno a sè, ma probabilmente come un effetto di cambiamenti di reazione, sia pur lievi, del contenuto intestinale, e dei liquidi che bagnano le cellule.

Lo spezzettamento del condrioma si potrebbe anche ritenere come effetto di uno sforzo puramente meccanico, causato dal cambiamento di forma della cellula tutta che verrebbe ad agire turbando un preesistente equilibrio elastico di un colloide gelificato; ma più soddisfacente e più rispondente ai fatti osservati credo che sia la prima spiegazione. Parecchi AA. moderni infatti (Levi [1], Lewis [2] ed altri) che hanno studiato il comportamento del condrioma in vivo nelle culture dei tessuti, notano che i filamenti condriomali, quando la cellula perde acqua, diventano più rifrangenti, e si risolvono quindi in granuli; mentre tornano a ricostituirsi i filamenti quando la cellula lentamente assorbe acqua di nuovo. Anche lo spezzettamento che si nota nel digiuno è probabilmente dovuto ad una perdita di acqua da parte dei colloidi protoplasmatici. Ed infatti tale perdita è stata già notata indipendentemente dagli effetti che può avere sul condrioma.

È noto inoltre come nel digiuno si produca un notevole stato di acidosi nell'organismo, e forse anche ciò ha influenza sullo spezzettamento del condrioma.

Riguardo alla costituzione del condrioma, io credo che questi suoi cambiamenti morfologici, in stretto rapporto con l'acqua assorbita o perduta dalle cellule, vengano sempre più a convalidare l'ipotesi che debba trattarsi di « una qualità di citoplasma gelificato ».

Riguardo al suo significato bisogna tener presenti due fatti:

1° – Il condrioma è stato ormai riconosciuto, si può dire, in tutte le cellule di tutti gli organismi, e non solo, ma si è visto che in ogni cellula permane in qualsiasi stato di attività essa si trovi. È ormai sorpassato il periodo in cui si credeva che il condrioma si trasformasse in secreti, escreti, grasso od altri prodotti cellulari, o servisse a generare le mio-, neuro- e condrofibrille. Finchè la cellula vive si può essere sicuri che il condrioma, pur sotto aspetti morfologici un poco differenti, esiste sempre.

Alterazioni del condrioma, sino alla suo scomparsa, si osservano solo in cellule che, per cause fisiologiche normali (corneificazione ad es.) od anormali (condizioni fisiche o chimiche non adatte nelle culture dei tessuti)

(1) Levi G., *Nuovi studi sulle cellule coltivate in vitro. Attività biologiche. Intima struttura, caratteri morfologici specifici.* « Arch. It. Anat. Embr. », vol. X, n. 1, 1919, pp. 168-195.

(2) Lewis Wareen H. and Lewis Margaret R., *Behavior of cells in tissues cultures.* « Cowdry, General Cytology », Chicago, 1924.

o per cause patologiche (ad esempio nel giallume dei bachi da seta, secondo Paillot [1]) sono assai prossime alla morte.

2° – D'altra parte, come abbiamo visto, il condrioma va soggetto a notevoli cambiamenti morfologici, secondo appunto le diverse fasi funzionali delle cellule. Il primo argomento ci porta logicamente ad ammettere la essenzialità del condrioma per la vita delle cellule, ed infatti sarebbe assurdo che fosse sempre presente nelle cellule una formazione inutile ad esse o puramente passiva. Che si interpreti fisicamente il condrioma come un colloide gelificato, ciò non menoma affatto l'importanza che esso può avere nella vita e nei fenomeni della cellula.

Il significato del condrioma non viene quindi modificato dai concetti che si possono avere sulla sua costituzione fisica. Io credo che il condrioma sia una « qualità di citoplasma gelificato », ma credo anche che questa qualità di citoplasma sia necessaria alla cellula. Io penso dunque che, data la essenzialità della presenza del condrioma per la cellula (chiaramente indicata dalla costante esistenza di tale elemento in ogni cellula ed in ogni momento della sua vita) e dati i cambiamenti morfologici che presenta il condrioma in rapporto con le diverse fasi metaboliche delle cellule stesse, coordinando opportunamente questi due fatti, si debba ammettere per il condrioma il significato di « una qualità di citoplasma gelificato che ha strettissimi rapporti col metabolismo generale della cellula ». E parlo di « metabolismo generale » perchè le modificazioni del condrioma non appaiono legate soltanto ai diversi momenti richiesti dalla funzione specifica delle cellule (assorbimento nelle cellule intestinali) ma anche a condizioni metaboliche che nulla hanno a che fare con questa funzione specifica (digiuno).

Per ciò che riguarda il significato da attribuire al lacunoma, esso non mi si è rivelato come una formazione sempre presente, quindi non si può giudicare, per dir così, come un costituente essenziale della cellula. Esso subisce, è vero, delle modificazioni, prende parte quindi all'attività della cellula, manca però la prova che questa parte sia attiva ed essenziale. Tale prova (che abbiamo visto invece esistere per il condrioma) sarebbe la presenza costante di questa particolare formazione nella cellula, ciò che invece non è.

Io credo quindi che il lacunoma si debba considerare non causa attiva ed essenziale di fenomeni cellulari, ma piuttosto come un effetto di attività cellulari, o di bisogni momentanei della cellula.

Nella fase di assimilazione abbiamo visto come la cellula della mucosa intestinale, probabilmente in seguito a cambiamenti di reazione o semplici oscillazioni del Ph, perda acqua. Nella fase di ricostituzione essa assorbe acqua di nuovo. Il citoplasma ed il nucleo perdono quella particolare ed

(1) Paillot M., *Sur les altérations citoplasmiques et nucleaires au cours de l'évolution de la grasserie du Ver à Soie.* « C. R. Ac. Sc. », t. CLXXX, 1925, p. 1139.

intensa colorabilità che avevano nella fase precedente. Gli spazi intercellulari si riducono, sino a sparire nella fase di riposo. Il liquido che contenevano viene in parte riassorbito dalle cellule. Queste aumentano di volume rispetto alla fase di attività. Il condrioma, da granulare ritorna filamentoso, ed abbiamo già detto che nelle culture di tessuti tale fatto è stato osservato quando la cellula assume acqua dall'ambiente. Io credo che il *lacunoma*, presente soltanto in questa determinata fase di *ricostituzione cellulare*, debba interpretarsi come un deposito di acqua, un serbatoio dal quale la cellula si rifornisce di questo liquido sostanziale. Naturalmente non si tratta di acqua pura, ma di colloidi ad alto grado di dispersione, di sol e forse anche di cristalloidi fortemente diluiti, che vengono a poco a poco assorbiti dai colloidi cellulari a grado di dispersione meno elevato e più densi.

Quando si è ristabilito l'equilibrio cellulare, quando la cellula non ha più bisogno di acqua, ed è satura, per così dire, il condrioma è tornato filamentoso, il citoplasma ed il nucleo sono normalmente colorabili, il citoplasma è omogeneo. Il lacunoma allora sparisce, è stato assorbito dalla cellula. I sol citoplasmatici si sono convenientemente diluiti, il gel condriomale si è imbibito, i granuli si sono riuniti e si sono riformati i condrioconti; il deposito di colloidi assai dispersi e diluiti, ma costituzionalmente omogenei con i restanti colloidi cellulari più densi, si è esaurito in questa ricostituzione idrofila della cellula, e non si riformerà che quando l'elemento ne avrà bisogno di nuovo.

Istologia. — *Sulla esistenza di particolari cellule interstiziali nel connettivo dell'utero di topo.* Nota preliminare [1] di M. Benazzi, presentata [2] dal Socio E. Giacomini.

La letteratura riguardante la struttura dell'utero della nostra specie e dei mammiferi in generale, sia durante il riposo funzionale, sia nei periodi in cui si svolgono i fenomeni del calore (o della mestruazione) e della gravidanza, è divenuta ormai assai ricca; e specialmente nell'ultimo decennio numerosi ricercatori hanno rivolto la loro attenzione allo studio degli elementi interstiziali del connettivo uterino. Tuttavia nell'esame dell'utero dei topi (ho studiato le due specie comuni di laboratorio del genere *Mus*, *decumanus* e *musculus*, e in modo speciale la prima) in riposo ed in gravidanza, ho constatato la presenza di peculiari accumuli cellulari che non mi pare abbiano fino ad ora richiamata l'attenzione degli studiosi. Riservandomi un più ampio e compiuto esame istologico ed istogenetico

(1) Ricerche eseguite nel Laboratorio di Anatomia Comparata della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

in un prossimo lavoro, mi limito nella presente nota a descrivere brevemente i caratteri di questi elementi interstiziali, che non dubito di ritenere nettamente differenziabili da quelli precedentemente descritti dagli autori.

Com' è noto l' utero non gravido dei topi presenta, procedendo dall'esterno, i seguenti strati: uno strato muscolare liscio longitudinale che non costituisce una tunica ad anello completo in quanto, in corrispondenza del mesometrio, è interrotto e si solleva, quasi adeso, sul connettivo mesometriale; uno strato di fibre muscolari circolari, separate dal longitudinale da un evidente strato connettivo; infine lo strato mucoso a corion abbastanza spesso e munito di epitelio cilindrico semplice, delimitante la cavità uterina che appare nelle sezioni trasverse quale fessura a pareti parallele.

In corrispondenza della regione mesometriale il connettivo intermuscolare si allarga in una formazione a sezione triangolare (chiamata da P. Gérard cono o triangolo intermuscolare) che si continua col connettivo del mesometrio.

Questa regione è, si può dire, costituita da un ammasso di connettivo a tipo collageno nel quale decorrono i vasi ed i nervi provenienti dal mesometrio.

Nel connettivo intermuscolare, e specialmente nella regione mesometriale, ho constatata la presenza di grossi accumuli di cellule aventi caratteri affatto particolari; facilmente differenziabili, con qualsiasi metodo di fissazione o colorazione, dalle cellule connettivali tipiche. Tali cellule nell' utero a riposo e nel loro aspetto più caratteristico hanno una forma rotondeggiante od ovoidale a contorno più o meno regolare, con diametro medio di μ 15; in certi casi sono allungate e possono divenire anche fusiformi. Sono sempre munite di un nucleo rotondeggiante, posto in generale verso la periferia della cellula; il protoplasma è carico di granulazioni assai grossolane, di dimensioni varie. di colore giallastro, così abbondanti da mascherare completamente la sostanza fondamentale del citoplasma e da far assumere a tutto l'elemento una colorazione facilmente evidente. Ove queste cellule sono più numerose (triangolo intermuscolare) formano grossi accumuli, che per il colore giallastro si distinguono anche ad occhio nudo nelle sezioni non ancora colorate. Sulla natura del contenuto di tali elementi le indagini microchimiche che ho compiuto non mi permettono per ora di trarre alcuna conclusione; come ho accennato, appaiono evidentissimi usando i più diversi liquidi fissatori: bicromato di potassio, bicloruro di mercurio, miscele cromo-osmische, alcool, formalina.

Nell'utero in riposo, oltrechè nella zona mesometriale, ove, come ho detto, formano un grosso accumulo, queste cellule si trovano sparse anche nel connettivo intermuscolare, scomparendo però quasi completamente nella zona atimesometriale, e se ne trovano pure in numero discreto alla base del corion mucoso a contatto coll' anello muscolare interno, specialmente nella zona mesometriale. È da notare che esse non sono distribuite per

tutta la lunghezza delle due corna uterine, ma si trovano solo in certe zone, mancando completamente nei tratti intermedi: assai istruttive al proposito le sezioni longitudinali dell'utero.

Presenti sempre nell'utero in riposo della femmina pubere, tali cellule mancano ancora in giovani topoline di un mese e di un mese e mezzo di età, nelle quali per altro l'utero presenta già le differenziazioni strutturali dell'adulto, e l'ovaia numerosi follicoli in uno stadio avanzato di sviluppo, non esistendo però ancora alcun corpo luteo. Esse si conservano durante la gravidanza, riducendosi però ad un numero limitatissimo, nel connettivo intermuscolare del peduncolo mesometriale; e sono presenti nell'utero di puerpere sacrificate poche ore dopo il parto.

In femmine sacrificate parecchi giorni dopo il parto (fino ad un mese e mezzo) e non riaccoppiate, questi elementi sono assai numerosi e formano accumuli veramente imponenti e ben visibili ad occhio nudo nella regione mesometriale; essi mostrano inoltre un' aspetto un po' diverso dal consueto, in quanto tendono a perdere la propria individualità per fondersi quasi in una specie di accumulo sinciziale, carico come al solito delle grosse ed abbondanti gocciole giallastre.

I caratteri così tipici di queste cellule, sempre presenti nell'utero adulto, abbondantissime nell' utero in riposo e assai ridotte nella gravidanza, permettono di differenziarle facilmente dalle formazioni interstiziali descritte precedentemente dagli AA.: Ghiandola miometriale di Ancel e Bouin, cellule giganti del Minot, formazioni queste presenti solo nel periodo della gravidanza; e pur nettamente da quelle interstiziali studiate, fra gli altri da Fornero, Bozzolo, Seppilli; cellule cariche di granulazioni lipoidee, di glicogeno, ecc.

Mi riservo in un prossimo lavoro di trattare con più ampiezza di questa interessante formazione.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Di Legge legge la commemorazione del defunto Socio V. Cerulli, che verrà stampata integralmente nel fascicolo delle Commemorazioni dei « Rendiconti ».

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. Stella presenta una tavola di sezioni geologiche della Val d'Aosta insieme con un suo opuscolo dal titolo « La Valle d'Aosta e i Geologhi ».

Il Corrisp. Martelli presenta il volume « La trazione elettrica sulle Ferrovie Italiane », edito recentemente dall'Amministrazione delle Ferrovie dello Stato e ne illustra largamente il contenuto.

L'Accademico Segretario aggiunto prof. Lo Surdo presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando in ispecial modo l'opuscolo del Socio Sabbatani, « La cura del morbo gallico nelle lezioni di Luca Ghini », i due grossi volumi dell'Archivio per le Scienze Mediche, contenenti gli scritti in onore del Socio B. Morpurgo, il vol. II della « Storia della Medicina » di D. Barduzzi; l'opuscolo « Idrografia, Anofelismo e Malaricità dell'isola dell'Asinara (Sardegna) » di C. Fermi, « Análisis Matemático » di U. Broggi; un fascicolo del catalogo stellare edito dalla Specola Vaticana per opera del Socio Hagen; « La Vallata del Giuba » edito a cura del Governo della Somalia italiana.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. Stella legge anche a nome del Socio Millosevich la relazione con la quale si propone la stampa della memoria del dr. G. Lincio « Ricerche litologiche e mineralogiche sul gruppo del Grand Gimont ». L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONI DI PLICHI SUGGELLATI

L'Accademico Segretario aggiunto prof. Lo Surdo presenta un plico suggellato del sig. dr. Guido Cremonese, inviato perchè venga conservato negli Archivi dell'Accademia.

CONCORSI A PREMI

L'Accademico Segretario aggiunto prof. Lo Surdo legge gli elenchi dei concorrenti a vari Premi scaduti il 31 dicembre 1927.

Concorrono al Premio Reale per la Fisiologia Normale e Patologia: Baglioni Silvestro – Camis Mario – Foà Carlo – Locatelli Piera – Quagliarello Gaetano; al Premio Battista Grassi: Alessandrini Giulio – Fabris Ugo – Garofoli Filiberto – Sella Mario; al Premio della Compagnia di Assicurazione di Milano: F. Cantelli; al Premio del Ministero della Marina: Piatti Vincenzo – Sconzo Giovanni; al Premio L. Bigotti: Del Valle Giorgio – Giandotti Mario; al Premio G. Ragnoli: Vidoni Giuseppe.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 febbraio 1928

ABROMAVICH C. E. — The morphology and distribution of the rosettes on the foetal placenta of the pig (Repr. from the « Anatomical Record ». Vol. XXXIII, pp. 69–72). Philadelphia, 1926. 8°.

ADLER S. e PEROTTI R. — Sull'impiego del carbone e di alcuni suoi preparati negli speciali riguardi fitopatologici (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927). Pisa, 1927, 8°, pp. 1–49.

ANDREWS E. A. — Aut–mounds as to temperature and sunshine (Repr. from the « Journal of Morphology and Physiology ». Vol. 44, 1927). Philadelphia, 1927. 8°, pp. 1–20.

Archivio di Scienze mediche. Scritti in onore di Benedetto Morpurgo. Voll. I, II. Torino, 1927. 8°, pp. I–XXXII, 1–496, 1–413.

BARDUZZI D. — Manuale di Storia della medicina. Vol. II. Torino, 1927. 8°, p., pp. 1–299.

BEERS C. D. — Encystment and the Life Cycle in the Ciliate Didinium Nasutum (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Science ». Vol. XI, pp. 523–528). s. l., 1925. 8°.

BEERS C. D. — Factors involved in Encystment in the Ciliate Didinium Nasutum (Repr. from the « Journal of Morphology and Physiology ». Vol. 42. pp. 1–21; 43, pp. 499-520). Philadelphia, 1926. 8°.

BEERS C. D. — The Life–Cycle in the Ciliate, Didinium Nasutum, with reference to Encystment (Repr. from the « Journal of Morphology and Physiology » Volume 42). Philadelphia, 1926. 8°, pagine 1–21.

BEERS C. D. — The Relation between hydrogenion Concentration and Encystment in Didinium Nasutum. (Repr. from the « Journal of Morphology and Phisiology ». Vol. 44, pp. 23–28). Philadelphia, 1927. 8°.

BERRY E. W. — The Flora of the Esmeralda Formation in Western Nevada. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washingthon, 1927. 8°, pp. 1–15.

BINDI E. e PEROTTI R. — Contribuzioni alla conoscenza dei fermenti dell'uva « Colombana ». (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927). Pisa, 1927. 8°, pp. 1–10.

BRENNECKE E. — Die Aufgaben und Arbeiten des geodätischen Instituts in Potsdam in der Zeit nach dem Weltkriege (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Verm–Wesen ». Jahrg. 1927, Heft 23, 24). Stuttgart, 1927. 8°, pp. 1–37.

BROGGI H. — Análisis Matemático. Vol. II. La Plata, 1927. 8°, pp. 1–211.

CABREIRA M. A. — Schèmes algébriques des dates des phases lunaires et de l'horaire des marées relatives. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences » t. 185). Paris, 1927. 4°, pp. 1–2.

CUSHMAN J. A. — Foraminifera of the Genus Siphonina and related Genera. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1–15.

DE ANGELIS D'OSSAT G. — I materiali da costruzione dell'Umbria. (Estratto da « L'Industria Mineraria ». Anno I, nn. 9-10). Roma, 1927. 4°, pp. 1–3.

DE ANGELIS D'OSSAT G. — Marmi neri venati dell'Italia Centrale. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XLVI, fasc. II, pp. 193–200). Roma, 1927, 8°.

De Caris C. F. — A genetic Study of *Paramecium Caudatum* in Pure Lines through an Interval of Experimentally Induced Monster Formation. (Repr. from the « Journal of Experimental Zoölogy ». Vol. 49. pp. 133–145). S. l., 1927. 8°.

Fermi C. — Idrografia, anofelismo e malaricità dell' Isola dell'Asinara (Sardegna). Sassari, 1924. 8°, pp. 1–54.

Fermi C. — Il risorgimento agricolo, industriale e demografico della Sardegna e la malaria. (Estr. dal « Rinnovamento Medico – La Mariologia ». N. 1). Napoli, 1927. 8°, pp. 1–13.

Fermi C. — La malaria in Sardegna, cause e rimedi. (Estr. da « Studi Sassaresi ». Vol. III, fasc. III). Sassari, 1925. 8°, pp. 1–31.

Fermi C. — Sulla Zooprofilassi antimalarica (Estr. dal « Rinnovamento Medico - La Mariologia ». N. 1, 1927). Napoli, 1927. 8°, pp. 1–15.

Folsam J. W. — Insects of the Subclass Apterygota from Central America and the West Indies (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1–16.

Garcia G. — Teoría general de la flexión de las vigas. Lima, 1927. 8°, pp. 1–21.

(Giuba). — La Vallata del Giuba. Monografia delle regioni della Somalia. N. 3 e tavole XXXI. Torino, 1927. 8°, pp. 1–213.

Granata E. — Sul clima di Pozzuoli. Pozzuoli, 1927. 8°, s. p.

Hess F. L. and Foshag W. F. — Crystalline Carnotite from Utah. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1–6.

Hopkins D. L. — The Effect of Hydrogenion Concentration on Locomotion and other Life-Processes in *Amoeba Proteus*. (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Volume XII, pp. 311–315. S. l., 1926. 8°.

Hulpien H. R. and Hopkins D. L. — Observations on the Life-History of *Amoeba Proteus*. (Repr. from « Biological Bulletin ». Vol. LII, pp. 411–417). s. l., 1927. 8°.

Jennings H. S. — Biology and Experimentation. (Repr. from « Science ». Volume LXIV. pp. 97–105). s. l., 1926. 8°.

Jennings H. S. — Diverse Doctrines of Evolution, their Relation to the Practice of Science and of Life. (Repr. from « Science ». Vol. LXV, pp. 19–25). s. l., 1927. 8°.

Jennings H. S. — Public Health Progress and Race Progress. Are they incompatible? (Repr. from. « Science ». Volume LXVI, pp. 45–50). s. l., 1927. 8°.

Jennings H. S. — The Biological Basis of the Family. s. l., 1927. 4°, pp. 1–6.

Lobatschevskiis N. I. — In memoriam N. I. Lobatschevskiis. Vol. II. Glavnayca 1927. 8°, pp. 1–201.

Lockyer M. A and Mayor D. — The Degree of Darkness during the Total Solar Eclipse of. 1927 june 29. (Repr. from the « Montly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. LXXXVIII, pp. 97–100). s. l., 1927. 8°.

Mast S. O. — Reversal, in photic orientation in Volvox and the nature of photic stimulation (Sonderabd. aus « Zeitschrift für vergleichende Physiologie ». Band V, heft. IV, pp. 730–738). Berlin, 1927. 8°.

Mastelli F. e Perotti R. — Studi microbiologici sui terreni della bassa Maremma di Val di Cecina. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927. Pisa, 1927. 8°, pp. 1–42.

Metcalf M. M. — Research in Colleges and Professional Schools II. (Repr. from « Science ». Vol. LXV. pp. 338–342). s. l., 1927. 8°.

Michaelsen W. — Oligochäten aus Yünnan, gesammelt von Prof. F. Silvestri. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici », Vol. XXI, pp. 84-90). Spoleto, 1927. 8°.

Myers E. C. — Relation of Density of Population and certain other Factors to Survival and Reproduction in different Biotypes of *Paramecium Caudatum* (Repr. from the « Journal of Experimental Zoology ». Vol. 49). s. l., 1927. 8°, pp. 1–43.

Nadler J. E. — Effects of Temperature on Length of vestigial Wing of *Drosophila Virilis*. (Repr. from « Genetics ». Volume XI, pp. 584-589). Baltimore, 1926. 8°.

Perotti R. e Verona O. — La rogna del cotogno (Pirus cydonia, L.). Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa »). Anno 1927. Pisa, 1927. 8°, pp. 1-6.

Perotti R. — Note fitopatologiche per gli anni 1925-27. Pisa, 1927. 8°, pp. 1-18.

Perotti R. — Patologia di concimazioni « ad alta dose » particolarmente di nitrato. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927). Pisa, 1927. 8° pp. 1-21.

Perotti R. — Tecnica di biologia vegetale applicata all'agricoltura. Roma, 1928. 8°, pp. 1-16.

Perotti R. e Bonaventura G. — Attacchi di « *Botrytis cinerea*; Pers. » su infruttescenze di ricino. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-10.

Priesner H. — Neue und wenig bekannte Thysanopteren, gesammelt in Westafrica von Prof. Dr. F. Silvestri. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore Agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 61-83). Spoleto, 1928. 8°.

Annual Report on the Working of the Museum Department during 1926-27. Malta, 1927. 4°, pp. 1-15.

Sabbatani L. — La cura del morbo gallico nelle lezioni di Luca Ghini. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Tomo LXXXVII). Venezia, 1927. 8°, pp. 1-109.

Silvestri F. — Descrizioni di due nuove specie di Isoptera dell'Africa. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore Agrario di Portici ». Vol. XXI, pp. 91-95). Spoleto, 1927. 8°.

La trazione elettrica sulle ferrovie italiane. Napoli, 1927. 8°, pp. 1-194.

Verona O. — Intorno al progresso di ammonizzazione nei terreni a reazione acida. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-10.

Verona O. — Sui bacilli radicali del *Senecio vulgaris*, L. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927). Pisa, 1927. 8°. pp. 1-10.

Verona O. — *Urocystis occulta* (Wallr.) su frumento. (Estr. dal « Bollettino Agrario del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Anno 1927. Pisa, 1927. 8°, pp. 1-5.

Weatherby J. H. — The function of the Contractile Vacuole in *Paramecium Caudatum*; with special Reference to the Excretion of Nitrogenous Campounds. (Repr. from « Biological Bulletin ». Volume LII, pp. 209-218). s. l., 1927. 8°.

Zirkle C. — Some Numerical Results of Selection upon Polyhybrids. (Repr. from « Genetics ». Vol. XI, pp. 531-583). Harvard, 1926. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 febbraio 1928 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee.* Nota [1] del Corrisp. U. Cisotti.

Nel Corso di Meccanica Superiore che sto svolgendo nella R. Università di Milano ho avuto occasione di trattare un capitolo di Calcolo Tensoriale che può interessare le applicazioni, in particolare la Teoria dell'Elasticità che è oggetto del Corso. Tutto è quindi limitato a tre dimensioni e allo spazio intuitivo o euclideo, sebbene i concetti esposti siano alcuni senz'altro validi, altri estensibili, per varietà ad un qualunque numero di dimensioni, anche non euclidee.

L'argomento che presento è stato ispirato dalle suddette lezioni, che l'ing. dott. A. Masotti sta diligentemente raccogliendo; egli stesso ha esteso a varietà anche non euclidee il concetto che è scopo di questa Nota e ne darà conto successivamente all'Accademia.

1. Siano y_ν $(\nu = 1, \cdots, n)$ le coordinate *cartesiane* di un generico punto di una varietà euclidea a n dimensioni; esse attribuiscono al quadrato dell'elemento lineare l'espressione

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_1^n{}_\nu \, dy_\nu^2 .$$

(1) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.

Introduciamo anche delle coordinate *generali* x_i $(i = 1, \cdots, n)$, legate alle y_ν da n relazioni indipendenti (cioè con determinante funzionale non nullo); è noto che la (1), col riferimento alle coordinate generali, diviene:

$$(2) \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

dove

$$(3) \qquad a_{ik} = a_{ki} = \sum_{\nu}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} ,$$

con $a = \| a_{ik} \| > 0$; risultano nulli i simboli di Riemann relativi alla forma (2), perchè essa è euclidea.

Indichiamo con $Y_{\nu_1 \cdots \nu_m}$ le componenti *cartesiane* di un tensore m^{plo} **T** quando esso è riferito alla ennupla cartesiana; riferendo lo stesso tensore **T** alle coordinate generali risulteranno

$$(4) \qquad X_{i_1 \cdots i_m} = \sum_{\nu_1 \cdots \nu_m}^{n} Y_{\nu_1 \cdots \nu_m} \frac{\partial y_{\nu_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{\nu_m}}{\partial x_{i_m}}$$

le sue componenti covarianti, legate a quelle cartesiane da queste note relazioni di covarianza.

Sia **T'** il tensore $(m + 1)^{plo}$ derivato di **T**, che ha per componenti cartesiane

$$(5) \qquad Y_{\nu_1 \cdots \nu_m | \nu} = \frac{\partial Y_{\nu_1 \cdots \nu_m}}{\partial y_\nu} ,$$

e per componenti covarianti, con riferimento alle coordinate generali,

$$(6) \qquad X_{i_1 \cdots i_m | i} = \sum_{\nu_1 \cdots \nu_m \nu}^{n} Y_{\nu_1 \cdots \nu_m | \nu} \frac{\partial y_{\nu_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{\nu_m}}{\partial x_{i_m}} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} ,$$

si può constatare che *i primi membri*, in armonia con la notazione usata, *sono effettivamente le derivate covarianti delle* $X_{i_1 \cdots i_m}$.

2. Diremo che *il tensore* **T** *è costante quando, riferito a coordinate cartesiane, esso ha costanti le sue componenti cartesiane* $Y_{\nu_1 \cdots \nu_m}$; queste quantità essendo allora indipendenti dalle coordinate cartesiane risulta che

$$\frac{\partial Y_{\nu_1 \cdots \nu_m}}{\partial y_\nu} = 0 .$$

Per le (5) questa relazione esprime che il tensore derivato **T'** ha componenti cartesiane nulle, cioè *è nullo*; dalle (6) scende che sono nulle anche

le componenti covarianti rispetto alle coordinate generali. Dunque *se un tensore è costante il suo derivato è nullo.*

Queste conclusioni sono indipendenti dalla speciale rappresentazione (covariante) del tensore **T** di cui ci siamo valsi; vi si sarebbe pervenuti egualmente usando la rappresentazione contravariante o una delle $m - 1$ rappresentazioni miste.

3. Esempi. — *a) Il tensore fondamentale.* — Designiamo con questo nome il tensore doppio le cui componenti cartesiane sono contenute nella tabella seguente:

$$\begin{matrix} 1 , & 0 , \cdots , & 0 , \\ 0 , & 1 , \cdots , & 0 , \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot , \\ 0 , & 0 , \cdots , & 1 ; \end{matrix}$$

negli elementi della prima, seconda, $\cdots$, *n-esima* riga si riconoscono le componenti cartesiane degli n versori fondamentali dell'ennupla cartesiana di riferimento; queste componenti si possono indicare tutte col simbolo $\delta_{\mu\nu}$ intendendo ch'esso rappresenti l'unità o lo zero a seconda che μ ν sono eguali o distinti. Il tensore fondamentale è un tensore costante, le cui componenti covarianti con riferimento alle coordinate generali sono fornite dalle (4) e risultano, in virtù delle (3), così espresse:

$$X_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = a_{ik} ;$$

dunque *le componenti covarianti del tensore fondamentale sono i coefficienti della forma* (2); poichè trattasi di un tensore costante, il suo tensore derivato è nullo, cioè sono nulle le derivate covarianti dei coefficienti stessi (teorema di Ricci [1]).

b) Il tensore ε. — Un altro tensore costante è il tensore ennuplo che ha per componenti cartesiane $\delta_{\nu_1 \cdots \nu_n}$, rappresentando questi simboli lo zero se gli indici non sono tutti distinti e, nel caso opposto, l'unità positiva o negativa a seconda che la classe della permutazione $\nu_1, \cdots \nu_n$ è pari o dispari rispetto alla fondamentale $1 \cdots n$. Con riferimento alle coordinate generali le componenti covarianti saranno, in virtù della (4),

$$(7) \qquad \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = \sum_{1}^{n}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} \delta_{\nu_1 \cdots \nu_n} \frac{\partial y_{\nu_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{\nu_n}}{\partial x_{i_n}} .$$

(1) V. Levi-Civita, *Lezioni di Calcolo Differenziale Assoluto* [redatte da E. Persico; Roma, Stock, 1925], p. 169.

È facile dedurre che queste componenti sono nulle se gli indici non sono tutti distinti e, nel caso opposto, sono eguali a $\pm \sqrt{a}$, valendo il segno + o — a seconda che la classe della permutazione $i_1 \cdots i_n$ è pari o dispari [1].

Anche questo tensore, che chiamasi *tensore* ε, essendo costante ha per derivato il tensore nullo.

Matematica. — *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata.* Nota del Corrisp. L. Tonelli.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Si osservi che, essendo $\delta_{\nu_1 \cdots \nu_n} = 0$ se gli indici non sono tutti distinti, si può estendere la somma che figura nel secondo membro della (7) alle sole permutazioni degli indici $1 \cdots n$, ciò che sarà indicato col simbolo S; detta γ la classe della generica permutazione $\nu_1 \cdots \nu_n$ si può scrivere che $\delta_{\nu_1 \cdots \nu_n} = (-1)^\gamma$ e quindi che

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = S_{\nu_1 \cdots \nu_n} (-1)^\gamma \frac{\partial y_{\nu_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{\nu_n}}{\partial x_{i_n}} .$$

Si riconosce ora nel secondo membro lo sviluppo del determinante

$$D = \frac{\partial (y_1, \cdots, y_n)}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})} .$$

Se gli indici $i_1 \cdots i_n$ non sono tutti distinti il determinante D ha almeno una coppia di righe eguali ed è nullo; tali sono le corrispondenti componenti del tensore ε.

Se gli indici $i_1 \cdots i_n$ sono distinti il determinante D è lo jacobiano delle y rispetto alle x,

$$J = \left\| \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \right\| \neq 0 ,$$

preso col suo segno se la classe c della permutazione $i_1 \cdots i_n$ è pari, col segno opposto se c è dispari; si può dunque scrivere che $D = (-1)^c J$. Ora dalla (3) scende che il determinante a è il quadrato per colonne del determinante $J : a = J^2$, ossia $J = \pm \sqrt{a}$; se la piramide delle tangenti alle linee coordinate in un punto è orientata come l'ennupla cartesiana è il segno positivo che deve scegliersi, sicchè $J = \sqrt{a}$ ed infine:

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = (-1)^c \sqrt{a} , \qquad \text{c. v. d.}$$

Meccanica. — *Sul peso delle strutture aeronautiche.* Nota [1] del Corrisp. G. A. Crocco.

L'impostazione delle strutture aeronautiche è dominata dal criterio del *minimo peso*, ed è quindi necessario poterne eseguire una calcolazione preventiva sia pure approssimata senza che occorra precisarne il disegno nè svolgere tutti i calcoli dettati dalla Scienza delle costruzioni.

Questa nota si propone appunto di indicare a questo scopo una relazione approssimata valevole per qualsiasi struttura staticamente determinata entro il quadro di alcune ipotesi. In note successive ne sarà esposta l'applicazione alle strutture aeronautiche.

Il peso di una struttura dipende da quattro fattori principali: la natura del materiale, il tipo e le dimensioni, la distribuzione dei carichi, il margine di sicurezza.

Cominciamo dall'esaminare il primo di questi fattori e perciò supponiamo la struttura caricata ai nodi da forze costituenti un sistema in equilibrio e tali da cimentarla a sollecitazioni semplici di tensione o di compressione.

Sia, allora, k il massimo carico unitario cui è capace di resistere la materia a tensione; δ il peso specifico di tale materia; e sia S_r il valore assoluto della sollecitazione di vettura su una'asta generica tesa di lunghezza s e di sezione ω.

Si avrà $S_r = k\omega$; e quindi il peso dell'asta considerata sarà dato da

$$(1) \qquad d = \delta\omega s = \frac{\delta}{k} \cdot S_r s .$$

Per potere ottenere una relazione identica per aste soggette a compressione occorre eliminare su di esse l'influenza del così detto *carico di punta*, eliminazione per altro necessaria se la struttura deve rispondere al criterio del *minimo peso*.

Perciò supporremo di non poter fare assegnamento sull'incastro ai nodi, in modo che il valore del carico massimo sopportabile corrisponda al primo caso di Eulero; e porremo questo valore eguale a quello che si avrebbe per semplice compressione. Detto E il modulo d'elasticità del materiale, I il momento d'inerzia *minimo* della sezione dell'asta compressa, e

(1) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.

ritenendo che la massima resistenza della fibra alla compressione unitaria sia eguale a quella alla tensione, dovremo avere in questo caso

$$S_r = \pi^2 \frac{EI}{s^2} = k\omega . \tag{2}$$

Posto $I = \omega\rho^2$, ove ρ è il raggio d'inerzia minimo dell'ellisse centrale d'inerzia, la eguaglianza precedente si traduce nella *condizione*:

$$\frac{s}{\rho} = \pi\sqrt{\frac{E}{k}} \tag{3}$$

Se si adottano pertanto nelle aste compresse sezioni tali che il rapporto tra la *lunghezza* dell'asta e il minimo *raggio* d'inerzia delle sezioni soddisfi alla relazione (3), la eguaglianza (2) sarà rispettata anche per le aste compresse e si potrà adottare anche per queste l'espressione (1) che ne fornisce il minimo peso possibile.

Potremo allora sommare i prodotti come (1) ottenendo il peso totale della struttura:

$$P = K\sum S_r s ;$$

ove abbiamo posto il simbolo K al posto del rapporto $\frac{\delta}{k}$, ritenuto *comune* a tutte le aste del sistema.

Ciò conduce a enunciare la seguente proposizione, valevole entro i limiti delle ipotesi per qualsiasi struttura resistente:

Il peso minimo di una struttura reticolare staticamente determinata si ottiene moltiplicando per un coefficiente numerico dipendente dalle qualità del materiale la somma dei prodotti delle sollecitazioni di rottura delle aste per le relative lunghezze tra i nodi (1).

Esprimendo gli sforzi in tonnellate il coefficiente K risulta eguale a 0.1 per un buon acciaio e discende sino a 0.07 per il duralluminio.

Supponiamo ora, per avvicinarci alle condizioni della pratica, di ridurci ad una struttura reticolare piana che immagineremo costituita da due correnti e da un traliccio, e assoggettata a forze parallele nel suo piano.

Indichiamo coll'indice m: l'asta di traliccio di lunghezza d che va da un nodo m al nodo $m+1$; la campata di lunghezza l che quei due nodi determinano in piani paralleli alla direzione delle forze; l'asta di contorno di lunghezza C opposta al nodo m; ed infine la distanza h fra il nodo e l'asta di corrente.

(1) Questa proposizione, che non ha pretesa di novità, è stata da me così enunciata ed applicata nel mio Corso «Teoria e costruzione dei dirigibili» del 1927.

Se ora M_m è il momento flettente relativo al nodo m, si avrà per l'equilibrio alla rotazione intorno al nodo m:

$$M_m = h_m C_m$$

ove C_m è la sollecitazione dell'asta di contorno.

La somma dei prodotti delle lunghezze delle aste per le relative sollecitazioni diverrà quindi per le aste di contorno:

$$\sum_1^{\infty} C_m c_m = \sum_1^{n} \frac{M_m c_m}{h_m}.$$

Questa espressione rigorosa non raggiunge tuttavia lo scopo, richiedendo il disegno preciso della struttura. Giova ricercare una espressione approssimata ma libera da questo vincolo.

Perciò supporremo che, come avviene in pratica, la struttura sia a correnti quasi paralleli, cioè tali da potere ritenere eguale ad *uno* il coseno dell'angolo compreso, e con direzione approssimatamente perpendicolare a quella delle forze agenti. In tal caso h_m si confonderà con l'altezza del trave in corrispondenza del nodo m; e la lunghezza c_m si confonderà con la somma delle lunghezze delle due campate adiacenti al nodo, l_m e $l_m + 1$: tra le quali campate M_m figura come momento flettente medio nel *diagramma dei momenti flettenti*. Ne segue che ciascun termine della sommatoria rappresenterà l'area del diagramma dei momenti flettenti compresa fra il nodo $m - 1$ e il nodo $m + 1$.

D'altra parte estendendo la sommatoria anche al corrente inferiore, l'area elementare corrispondente a ciascuna campata viene ad essere ripetuta due volte, cosicchè in definitivo si avrà

$$\sum_1^{n} C_m c_m = 2 \sum \frac{Ml}{h}$$

ove M è preso sempre in valore assoluto.

Come si vede non è possibile svincolarsi dalla configurazione esterna del trave, rappresentata dalle altezze h; ma si può prescindere dal precisare il disegno della struttura se le quantità M, l, h, si considerano come variabili continue seguenti un andamento imposto a priori dalla natura del problema.

Se ora l'altezza del trave fosse costante ed eguale ad h_o l'espressione della sommatoria suddetta assumerebbe immediatamenre un preciso significato poichè essa risulterebbe eguale, a meno del comune divisore h_o, alla *doppia area del diagramma dei valori assoluti dei momenti flettenti*. Ma poichè h è generalmente variabile, bisognerà prima operare la riduzione dei momenti

a una base costante, h_0, in modo da ottenere un nuovo diagramma M' [1] tale che si abbia

$$\frac{M}{h} = \frac{M'}{h_0}$$

ed allora la sommatoria risulterà eguale, a meno del divisore comune h_0, alla doppia area del diagramma dei momenti flettenti *ridotti*.

Potremo ottenere, scegliendo opportunamente la base di riduzione, che l'area relativa ai momenti M' sia eguale a quella relativa agli M; e in tal caso h_0 si dirà *altezza media della struttura*.

Non è agevole ricavare una espressione rigorosa e generica della somma dai prodotti relativi al traliccio. D'altra parte, come si vedrà, l'altezza della struttura entra solo indirettamente nel valore di questa somma. Preferiamo perciò riferirci al caso di una struttura a correnti parallele e campate eguali per la quale si ricava una formula rigorosa che estenderemo per approssimazione ai casi concreti della pratica.

Sia pertanto α_m l'angolo che la diagonale m^{esima} di un'asta di traliccio, delimitante la campata l_m, fa colla direzione delle forze supposta perpendicolare a quella dei correnti: e sia T_m lo sforzo di taglio relativo al nodo m, comprendendovi la forza agente sul nodo medesimo. Se D è lo sforzo in valore assoluto sopportato dalla diagonale, si avrà per la ipotesi fatta:

$$D_m \cos \alpha_m = T_m ;$$

e poichè d'altra parte, detta d la lunghezza della diagonale, è altresì

$$d_m \sin \alpha_m = l_m$$

avremo, come termine della sommatoria,

$$D_m d_m = \frac{T_m l_m}{\sin \alpha_m \cos \alpha_m}.$$

Se le campate sono eguali si ricava allora subito

$$\sum \frac{T_m l_m}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \sum T_m l_m$$

dove $\sum T_m l_m$ rappresenta l'*area del diagramma delle forze taglianti*, prese in volore assoluto.

(1) Perciò, tracciata a piedi del diagramma M la curva delle h e una retta di altezza arbitraria h_0, si proietteranno da punti arbitrari le altezze M ed h determinando le nuove ordinate M' come quarte proporzionali tra h, M ed h_0.

Il minimo valore della sommatoria si ottiene allora quando è massimo il valore di $\sin 2\alpha$, cioè per $\alpha = 45°$ ed è:

$$\sum D_m d_m = 2 \sum T l :$$

dove potremo, come nel caso dei momenti rappresentare T come funzione continua e calcolare preventivamente l'area del diagramma senza prefissare nè l'altezza del trave, nè la campata.

In generale, se i due correnti non divergono di un grande angolo, si potrà sempre adottare la formula precedente, purchè le campate si tengano diseguali e le diagonali conservino l'inclinazione costante di 45°. In questo caso la formula pecca *per eccesso*, giacchè i correnti concorrono nel reggere il taglio; ma vi è compenso con la formula relativa ai correnti, la quale peccava *per difetto*.

Il valore *due* del coefficiente è il minimo che si riscontri per questo tipo di traliccio: esso valore sale a $2\sqrt{2}$ per un traliccio a diagonali e montanti e può divenire più elevato se non si rispettano le più favorevoli disposizioni.

Cosicchè possiamo enunciare la seguente proposizione che riunisce i risultati ottenuti per i correnti e per il traliccio, e che è valevole *entro i limiti delle ipotesi*.

La somma dei prodotti indici del peso di una struttura piana staticamente determinata e soggetta a forze parallele in equilibrio è uguale alla doppia area del diagramma dei valori assoluti dei momenti flettenti relativi a tali forze divisa per l'altezza media della struttura; più - nel caso della migliore disposizione del traliccio - la doppia area del diagramma dei valori assoluti delle forze taglianti.

Questa proposizione, che è rigorosa per il trave a correnti paralleli, vale nei casi della pratica con buona approssimazione.

Vogliamo ora considerare il cimento di *torsione*, che specialmente si verifica nelle ali degli aeroplani.

Dobbiamo perciò esaminare un tipo di struttura capace di resistere alla torsione, e ricercarne il minimo peso.

La struttura più semplice è quella prismatica a sezione quadrata. I quattro correnti sono intralicciati con diagonali di alterna obliquità e che quindi alternativamente lavorino a compressione e tensione. Inoltre i vertici ove esse concorrono si suppongono comuni a due facce ed hanno riscontro nei vertici del corrente diagonalmente opposto; mentre i vertici degli altri due correnti diagonalmente opposti sono spostati di una campata.

In tali condizioni, eseguendo un taglio in una campata con un piano parallelo a quello di sollecitazione, i quattro correnti non danno forze concorrenti alla torsione, che è assorbita soltanto dalle quattro proiezioni sul piano delle due compressioni e delle due tensioni delle diagonali.

Se h è in quel punto l'altezza della struttura, α l'angolo delle diagonali di lunghezza d col piano di sollecitazione, M_t il momento torcente relativo al piano secante, D la sollecitazione generica in valore assoluto in una diagonale ed l la campata si avrà:

$$4\,D\cos\alpha\,\frac{h}{2} = M_t$$

e poichè è $d\sin\alpha = l$, sarà

$$4\,dD = \frac{2\,M_t\,l}{\sin\alpha\cos\alpha\,h}$$

che sarà minimo per $\alpha = 45°$ e fornirà per tutte le diagonali

$$\sum dD = 4\sum\frac{M_t\,l}{h}.$$

Se quindi supponiamo di disegnare il diagramma dei momenti torcenti, come abbiamo disegnato quello dei momenti flettenti, e di ricavare da esso il diagramma M'_t dei *momenti torcenti ridotti* ad unica base h_0, la quantità sotto sommatoria nel secondo membro sarà eguale a $\sum M'_t\,l$ cioè all'area del diagramma dei momenti torcenti ridotti divisa per la base di riduzione. Anche qui h_0 può essere scelta in modo da costituire l'altezza media della struttura.

Ora basterà osservare che essendo le diagonali due a due concorrenti cimentati a sollecitazioni di diverso segno, in ciascuno dei nodi si avrà una forza risultante nel piano dei momenti e sarà zero pertanto la sollecitazione dei correnti, i quali non entreranno affatto in lavoro in questo tipo di trave (1).

Cosicchè l'espressione data rappresenterà la totalità della somma dei prodotti indici del peso: e si potrà enunciare la seguente proposizione, valevole entro i limiti delle ipotesi:

La somma dei prodotti indici del peso di una struttura staticamente determinata e soggetta a torsione è eguale - nella più favorevole disposizione del traliccio - alla quadrupla area del diagramma dei momenti torcenti divisa per l'altezza media della struttura.

Il peso di una struttura soggetta a flessione e torsione si ottiene dunque sommando i prodotti indici così ottenuti e moltiplicandoli per il coefficiente K caratteristico del materiale che si adopera. Occorrerà solo tener presente se le due sollecitazioni sono coesistenti o alternative. In questo secondo caso si assumerà per il traliccio il peso maggiore.

(1) Occorrerà immaginare uniti da un'asta due nodi diagonalmente opposti per ottenere che realmente possano venir soppressi i correnti pur conservando la rigidezza del sistema alla torsione. In tal caso il trave risulterà di una catena di tetraedri equilateri uniti tra loro per gli spigoli: e sarà capace di trasmettere la torsione, come una serie di giunti cordanici.

Fisica. — *Sulle caratteristiche dei triodi a tensioni di griglia saturanti.* Nota del Socio A. Lo Surdo [1].

In una nota pubblicata recentemente ho mostrato che una valvola termoionica saturata, usata come filtro in un circuito nel quale agisce una f. e. m. pulsante, attenua fortemente le pulsazioni dell'intensità della corrente. Se la corrente di saturazione della valvola fosse indipendente dalla differenza di potenziale fra placca e filamento, la corrente filtrata dovrebbe essere costante; essa invece pulsa poichè nella fase di saturazione la corrente continua a variare lievemente, e le sue variazioni entro ampi limiti si mantengono proporzionali a quelle della differenza di potenziale fra placca e filamento.

La variazione della corrente di saturazione sembra dipendere essenzialmente dall'azione del campo elettrico sul filamento e sugli elettroni nelle immediate vicinanze di questo: ho pensato perciò di ricercare ciò che avviene quando il filamento è riparato dalle forti variazioni del campo elettrico. Mi sono servito di un triodo: il filamento e la griglia venivano collegati insieme attraverso ad una pila la cui f. e. m. era sufficientemente elevata per produrre la saturazione fra questi due elettrodi. Il sistema filamento-griglia (con tensione costante di saturazione) e placca veniva adoperato come valvola rettificatrice.

Di questo sistema rettificatore ho determinato le caratteristiche, che sono in sostanza le caratteristiche di placca di un triodo a tensione di griglia costante e saturante, con la stessa disposizione adoperata in altra occasione [2]. La grande batteria di piccoli accumulatori veniva usata per la tensione di placca, ed un certo numero di pile secche, del tipo di quelle usate in radiotelefonia per tensioni anodiche [3], servivano per le tensioni di griglia.

La fig. 1 rappresenta l'andamento della corrente in funzione della tensione di placca per valori molto grandi della tensione, in modo che la corrente di placca si può considerare nella fase di saturazione. Queste caratteristiche sono state ottenute con una lampada Marconi [4]; sulle ascisse sono rappresentate le differenze di potenziale fra griglia e placca e sulle ordinate le corrispondenti intensità della corrente nel circuito di placca. Le tensioni costanti di griglia sono segnate su ciascuna caratteristica.

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1927.
(2) « Rend. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem. 1927, p. 327.
(3) Ho adoperato 12 batterie anodiche « Superpila » da circa 90 volta l'una.
(4) Tipo MT6, N. 150, 400 Watt.

Dalla figura si rileva che nella fase di saturazione, l'intensità della corrente di placca cresce proporzionalmente alla differenza di potenziale fra placca e griglia, analogamente a quanto avviene nelle valvole rettificatrici [1]. L'incremento della corrente di saturazione è qui però notevolmente più piccolo di quello che si ha nelle valvole rettificatrici ordinarie.

Nella fig. 1 il tratto AB rappresenta la caratteristica della stessa lampada usata come una rettificatrice ordinaria: a questo scopo griglia e placca venivano collegate insieme in corto circuito e costituivano l'anodo

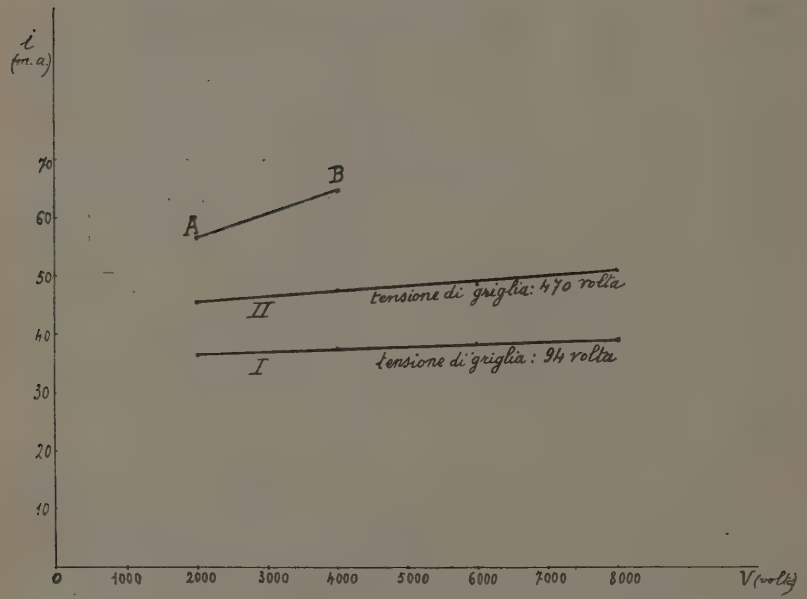


Fig. 1.

della valvola mentre da catodo serviva il solo filamento. L'intensità della corrente di accensione del filamento era la stessa per le tre caratteristiche [2].

In questa lampada costruita per basse tensioni di griglia la differenza di potenziale fra griglia e filamento venne spinta fino a 4000 volta; ma non era possibile superare questa tensione senza gravi inconvenienti. E la caratteristica AB della valvola ridotta rettificatrice non potè quindi essere estesa a tensioni più elevate di 4000 volta.

(1) «Rendiconti R. Acc. Lincei», vol. V, 1° sem. 1927, p. 327.

(2) 7,28 amp.

L'incremento $\alpha = \frac{k}{j} = \frac{\delta i}{\delta V}$ della corrente di saturazione unitaria, in ampère per l'aumento di un volta della differenza di potenziale fra anodo e catodo, è di 87.10^{-6} quando la lampada è usata come rettificatrice ordinaria (v. fig. 1, AB), cioè coll'anodo costituito da griglia e placca riunite insieme; mentre se il sistema rettificatore viene costituito dalla stessa lampada, nelle stesse condizioni di accensione, ma usata come un triodo con la tensione di griglia saturante di 470 volta, la costante α prende un valore molto più piccolo e cioè 17.10^{-6}, (fig. 1, II), che è poco meno della quinta parte [1].

La parte della caratteristica che rappresenta l'andamento della corrente di placca con tensioni di placca più basse di quella minima necessaria a stabilire quello stato che, per analogia allo stato corrispondente della valvola rettificatrice, ho chiamato di saturazione, è di notevole interesse.

La forma è in generale quella che si vede nella fig. 2, dove sono tracciate le caratteristiche di un triodo Philips (tipo Z 14, N° 777), con le tensioni di griglia costanti di 92, 270 e 450 volta [2].

Al crescere della tensione di placca la corrente di placca cresce inizialmente fino a raggiungere un massimo a circa 20–25 volta, massimo che sembra indipendente dalla tensione di griglia; poi la corrente di placca diminuisce fino a raggiungere un minimo, che può anche corrispondere, come si vede dalla curva alla tensione di griglia di 450 volta, ad una corrente di senso inverso al normale. Il valore minimo della corrente di placca si ha con una differenza di potenziale che dipende dalla tensione di griglia.

Infine la corrente cresce rapidamente, e quando la tensione di placca è sufficientemente più alta di quella di griglia si inizia lo stato di saturazione descritto avanti.

Questa è in sostanza la caratteristica del Dynatron di A. W. Hull [3]:

L'andamento caratteristico della corrente di placca si spiega coll'emissione secondaria di elettroni da parte della placca sotto l'azione del bombardamento elettronico.

Quando la tensione di placca è minore della tensione di griglia gli elettroni che si trovano nello spazio compreso fra griglia e placca sono

(1) Le caratteristiche relative alle tensioni di griglia comprese fra 450 e 1034 volta non sono state segnate perchè molto vicine alla II. La caratteristica I è stata ottenuta con la tensione di griglia di 94 volta, che è minore di quella minima saturante: in queste condizioni α risulta 16.10^{-6}.

(2) Queste ultime due saturanti.

(3) «Proceedings of the Institute of Radio Engineers», vol. VI, 1918, p. 5; vol. X, 1922, p. 320.

sollecitati verso la griglia; quelli che provengono dal filamento urtano quindi sulla placca colla velocità corrispondente alla tensione di placca, poichè questa rappresenta la differenza fra la differenza di potenziale filamento griglia che crea un campo dal quale gli elettroni sono spinti verso la placca, e la differenza di potenziale griglia-placca che stabilisce un campo di senso contrario, che tende quindi a far ritornare gli elettroni verso la griglia. Gli elettroni che provengono dal filamento non possono però venir ricacciati sulla griglia, poichè la differenza di potenziale che essi devono superare fra

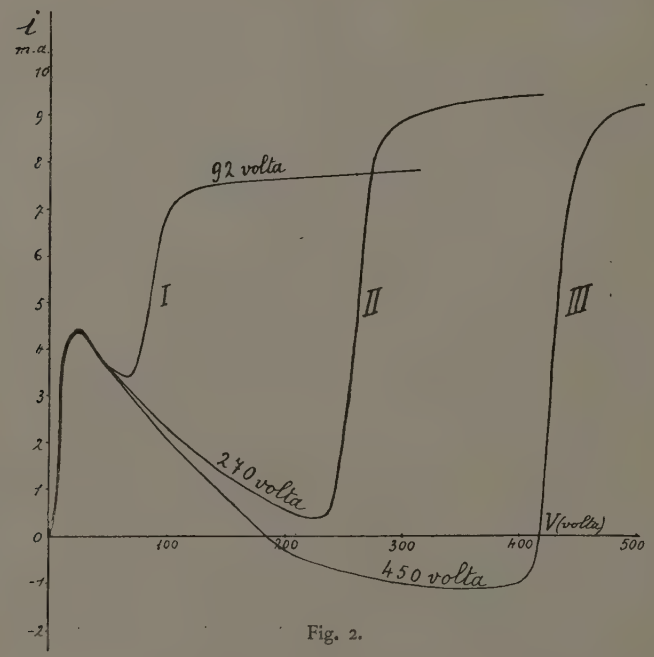


Fig. 2.

griglia e placca è minore di quella di griglia corrispondente alla velocità che essi hanno acquistata prima di entrare nel campo placca-griglia.

Aumentando la tensione di placca essi cadono sulla placca con velocità crescente. E quando la tensione raggiunge il valore minimo necessario, la placca emette elettroni i quali vengono a trovarsi in un campo che li sollecita verso la griglia, dove essi perciò cadono, compensando così in parte o in tutto la corrente di placca dovuta alle cariche degli elettroni emessi dal filamento che cadono sulla placca. Aumentando la tensione di placca, aumenta la velocità degli elettroni che bombardano la placca ed allora au-

menta l'emissione secondaria di elettroni e diminuisce quindi la corrente di placca come si vede dal ramo discendente delle curve: in queste condizioni il circuito di placca–griglia si comporta come se avesse una resistenza negativa.

Quando la velocità degli elettroni che bombardano la placca è sufficientemente elevata, la emissione elettronica secondaria della placca supera l'assorbimento elettronico e la corrente cambia segno.

Se poi la tensione di placca supera opportunamente quella di griglia, gli elettroni dell'emissione secondaria, spinti dal campo, che in queste condizioni è cambiato di segno, ritornano tutti sulla placca; quindi in queste condizioni, come avviene sempre del resto nella valvola rettificatrice ordinaria, l'emissione secondaria non ha alcun effetto sulla corrente di placca.

Chimica. — *Ricerche sul fosfato e sul clorofosfato di piombo (piromorfite).* Nota [1] del Socio F. Zambonini e di A. Ferrari.

Nel 1899, R. Abegg e G. Bodländer, nella loro importante Memoria sulla elettroaffinità, nuovo principio della sistematica chimica [2], dopo aver reso evidente la possibilità di costruire cationi complessi, risultanti da un ione singolo e da una parte neutra, applicarono le loro vedute alla interpretazione della costituzione di alcuni composti notevoli. E ritennero probabilissimo che la boracite fosse da considerare risultante dal catione complesso $[Mg \cdot Mg_3B_8O_{15}]^{++}$ e dall'anione Cl_2--, sicuro addirittura che l'apatite contenga il catione complesso $[Ca \cdot 3Ca_3P_2O_8]^{++}$ e che i composti di $HgCy_2$ con sali mercurici, poco prima descritti dal Prussia [3], sieno da ritenere come cationi complessi, con lo ione singolo Hg e la parte neutra $HgCy_2$.

Le idee di Abegg e Bodländer erano degne della maggiore considerazione, e, alcuni anni dopo la immatura scomparsa dei due distinti studiosi, il Borelli [4] dimostrò che la interpretazione da loro data ai composti di Prussia era effettivamente giusta.

(1) Presentata nella seduta del 5 febbraio 1928.
(2) «Z. anorg. Ch.», *20*, 480 (1899).
(3) «Gazz.», *28*, II, 113 (1898).
(4) «Gazz.», *39*, I, 455 (1909).

Quanto all'apatite, il Werner [1] collocò i minerali dell'intiero gruppo apatite tra i composti di intrusione con sali ossigenati, derivabili dai sali di essol $\left[\text{Me} \begin{pmatrix} \text{HO} \\ \text{HO} \end{pmatrix} \text{Me} \right]_3 X_2$, nei quali l'idrogeno è sostituito da PO_3Me, AsO_3Me, VO_3Me, sicchè la formula generale del gruppo sarebbe, per il Werner, la seguente:

$$\left[\text{Me} \begin{pmatrix} \text{ORO}_3\text{Me} \\ \cdot\cdot \\ \text{ORO}_3\text{Me} \end{pmatrix}_3 \text{Me} \right] X_2 .$$

Questa formula, evidentemente, non è che una modificazione di quella proposta da Abegg e Bodländer, nel senso di dare una struttura al gruppo $3Ca_3P_2O_8$, e di inquadrare le apatiti in una categoria molto importante di composti, in modo da ubbidire ai principî fondamentali delle teorie werneriane.

La formula delle apatiti risulta, comunque, quella di un alogenuro di un gruppo molto complesso, e pertanto sarebbe da aspettarsi che l'alogeno avesse un ufficio importante nella determinazione della struttura cristallina.

A vero dire, il Werner nella sua ricordata Memoria del 1907, di importanza fondamentale, non ha mancato di osservare essere necessario « für die neuen Konstitutionsformeln beweiskräftiges experimentelles Material zu sammeln », il che, almeno per quanto io so, non si è fatto per le apatiti. Al contrario, uno di noi (F. Zambonini) ha avuto occasione, già da tempo, di osservare dei fatti che parlerebbero piuttosto contro la formula di Abegg–Bodländer e di Werner.

Ed invero, fino dal 1915 [2] è stata dimostrata in modo che non si potrebbe desiderare più sicuro, l'esistenza di cloroapatiti sintetiche che contengono assai meno cloro di quanto richiede la formlua classica $3Ca_3P_2O_8 \cdot CaCl_2$, il che ci dice chiaramente, che la composizione delle apatiti può non essere sempre fissa, come generalmente si pensa [3]. Ora, è evidente che la costanza del rapporto fosfato: alogenuro è condizione fondamentale per la formula di Abegg-Bodländer e di Werner.

Un altro fatto notevole fu mostrato da uno di noi, sempre nel 1915, quello, cioè, che l'ortofosfato di piombo cristallizza in prismi esagonali, e presenta, perciò, la possibilità di relazioni cristallografiche col clorofosfato $3Pb_3P_2O_8 \cdot PbCl_2$ (piromorfite). Non fu possibile, disgraziatamente, di otte-

(1) « Berichte », 40, 4441 (1907). *Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie*, per es. 3ª ed., p. 214, 5ª ed. (curata da P. Pfeiffer) p. 209.

(2) F. Zambonini, *Sulle soluzioni solide dei composti di calcio, stronzio e bario con quelli delle « terre rare »* ecc. « Rivista ital. di min. e crist. », *45*, 103 e seg. (1915).

(3) Cfr. in proposito, per. es. Amadori, « Gazz. », *49*, 38 (1919).

nere dei cristalli di fosfato di piombo con faccette terminali, sicchè non si potè determinare se e fino a qual punto si avesse una somiglianza nelle costanti cristallografiche, ma le relazioni strutturali tra fosfato e clorofosfato risultarono assai intime in base alla differenza poco considerevole constatata negli indici di rifrazione dei due composti. Ora è evidente, che una concordanza di struttura cristallina tra il fosfato ed il clorofosfato di piombo rende assai poco verosimile, pər quest'ultimo, la formula di Werner

$$\left[Pb \left(\begin{matrix} OPO_3Pb \\ \diagdown\!\diagup Pb \\ OPO_3Pb \end{matrix} \right)_3^{\cdot} \right] Cl_2$$

e conduce, piuttosto, a pensare che nella piromorfite la struttura cristallina sia determinata, in modo preminente, dal fosfato di piombo, e che il cloruro di questo metallo abbia, invece, un ufficio del tutto subordinato, quale sarebbe, per esempio, quello di occupare, sia pure in modo determinato, i vuoti che rimangono nella struttura del $Pb_3P_2O_8$.

Il problema posto dalle osservazioni che precedono, e che presenta un interesse non piccolo, sia per saggiare, almeno in un caso particolare, il grado di attendibilità che presentano le formule dedotte soltanto da ipotesi molto geniali ed attraenti, sia per la miglior conoscenza del gruppo apatite, poteva risolversi, per quel che si riferisce allo stato solido, cristallino (che è, del resto, l'unico che abbia una importanza reale, quando si tratta di sostanze come le apatiti, che non si possono portare in soluzione senza subire profonde trasformazioni), comparando la struttura cristallina del fosfato di piombo, determinata röntgenograficamente, con quella della piromorfite.

Noi abbiamo eseguito per tutte e due le sostanze il röntgenogramma del cristallo rotante secondo le faccie del prisma $\{10\bar{1}0\}$ e quello dato dalle polveri. Di piromorfite si adoperarono dei cristallini di Braubach; di fosfato di piombo dei nitidi e sottili cristallini, preparati già da tempo da uno di noi.

Nelle tabelle che seguono sono riuniti i risultati ottenuti, avvertendo che, per semplicità, nei fotogrammi dei cristallini rotanti il calcolo è stato limitato ai punti situati sull'asse orizzontale dei fotogrammi stessi, punti che corrispondono a faccie parallele all'asse principale.

TABELLA I.

Cristallo rotante di piromorfite secondo la faccia $(10\bar{1}0)$
(anticatodo di ferro).

$\frac{\Theta}{2}$ osserv.	Intensità	sen $\frac{\Theta'(1)}{2}$	K	$d = \frac{n\lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\Theta'}{2}}$	$h_1\ h_2 \cdot h_3$	$a = d\sqrt{1.333\,(h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2 + \frac{h_3^2}{(c/a)^2}}$
11.5	d	0.1995	β	4.390	20.0	10.14
12.8	mf	0.2220	α	4.360	20.0	10.06
17.7	d	0.3040	β	2.880	30.0	9.97
19.6	ff	0.3355	α	2.885	30.0	9.99
24.2	m	0.410	β	2.140	40.0	9.88
26.7	mf	0.4495	α	2.150	40.0	9.93
27.8	md	0.4666	β	1.885	41.0	9.97
29.5	m	0.4925	α	1.962	32.0	9.87
31.1	f	0.5165	α	1.870	41.0	9.90
36.7	md	0.598	α	1.616	42.0	9.87
39.0	md	0.630	α	1.535	51.0	9.87
45.5	d	0.714	β	1.228	44.0	9.82
47.7	dd	0.740	α	1.306	61.0	9.89
51.5	mf	0.783	α	1.235	44.0	9.88
58.2	mf	0.849	α	1.139	71.0	9.92
68.0	m	0.927	α	1.042	72.0	9.85

Il valore medio della costante reticolare della piromorfite calcolato dalla posizione delle linee dovute alla radiazione $K_{\alpha_{Fe}}$ è 9.91 Å.

(1) I valori Θ osservati sono stati corretti mediante la formula di Pauli espressa dalla relazione:

$$\Theta' = \Theta - \frac{r}{2}(1 + \cos\Theta)$$

dove Θ è l'angolo osservato, Θ' quello corretto ed r il raggio del cilindretto impiegato come preparato. Questa formula ammette il preparato opaco e la riflessione completamente superficiale.

TABELLA II.

Cristallo rotante di fosfato di piombo secondo lu faccia $\{10\bar{1}0\}$
(anticadoto di ferro).

$\frac{\theta}{2}$ osserv.	Intensità	K	sen $\frac{\theta'}{2}$	$d = \frac{n\lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta'}{2}}$	$h_1\ h_2\ h_3$	$a = d\sqrt{1.133\,(h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2 + \frac{h_3^2}{(c/a)^2}}$
12.2	d	β	0.2112	4.150	2 0 0	9.58
13.3	m	α	0.2300	4.200	2 0 0	9.70
18.2	d	β	0.3120	2.810	3 0 0	9.73
20.2	f	α	0.3455	2.800	3 0 0	9.70
24.7	d	α	0.4185	2.093	4 0 0	9.67
27.5	mf	α	0.4620	2.092	4 0 0	9.67
30.2	d	α	0.5035	1.920	3 2 0	9.66
32.0	mf	α	0.530	1.823	4 1 0	9.65
35.8	d	α	0.585	1.498	5 1 0	9.63
37.8	d	α	0.613	1.576	4 2 0	9.63
40.3	mf	α	0.657	1.495	5 1 0	9.62
46.8	d	β	0.730	1.200	4 4 0	9.60
49.7	d	α	0.763	1.267	6 1 0	9.59
53.7	m	α	0.807	1.197	4 4 0	9.58
61.2	m	α	0.877	1.102	7 1 0	9.60
68.4	md	α	0.930	1.039	8 0 0	9.60

Il valore medio della costante reticolare del fosfato di piombo calcolato dalla posizione delle linee dovute alla radiazione $K\alpha_{Fe}$ è 9.65 Å.

È da osservare che mentre col fosfato di piombo si sono ottenuti dei fotogrammi con linee sottili e netti, la piromorfite di Braubach ha dato linee più grosse e meno nitide, essendosi adoperati cristalli più spessi e con superficie riflettenti meno ben conformate.

L'ordinamento dei due precedenti fotogrammi ci dà soltanto il lato di base delle celle rispettive; per poterne calcolare il volume è necessario conoscere il rapporto assiale, che per la piromorfite è noto dalle indagini cristallografiche eseguite sui cristalli naturali ed artificiali $(a : c = 1 : 0.736)$[1].

(1) GROTH, *Chem. Krystall.* Leipzig, 1906, I, p. 826.

Confronto dei fotogrammi col metodo

FOSFATO DI PIOMBO

θ osservato	Intensità osservata	$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ corretto	$d = \frac{n\lambda}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\text{(corr.)}}$	$h_1\ h_2\ h_3$	
40.3	f	0.338	2.860	12.1	9
41.8	d	0.350	2.760	30.0	9
—	—	—	—	—	
58.8	m	0.485	1.993	40.1	9
60.4	md	0.497	1.945	13.2	9
61.8	m	0.508	1.903	12.3	9
63.5	mf	0.521	1.855	23.1	9
65.6	—	0.536	1.800	30.3 40.2	9 9
—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	
81.0	m	0.645	1.497	30.4	9
82.7	mf	0.657	1.470	33.2	9
96.0	m	0.740	1.305	60.2	9
98.5	m	0.756	1.278	30.5 51.3	9 9
101.1	m	0.763	1.258	25.2 16.1	9 9
107.0	m	0.810	1.194	35.0	9
111.5	md	0.825	1.172	10.6 25.3	9 9
115.0	m	0.842	1.149	11.6 15.4 26.1	9 9 9
117.0	md	0.830	1.137	35.2	9
121.5	md	0.872	1.109	26.2 60.4	9 9

PIROMORFITE

to	Intensità osservata	$\text{sen}\frac{\theta}{2}$ corretto	$d = \frac{n\lambda}{2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\,(\text{corr.})}$	$h_1\ h_2 \cdot h_3$	a
	f	0.317	3.050	12.1	10.20
	—	—	—	—	—
	m	0.412	2.345	13.1	10.24
	mf	0.456	2.120	40.1	10.20
	m	0.469	2.060	13.2	10.26
	m	0.482	2.003	12.3	10.19
	m	0.493	1.960	23.1	10.22
	mf	0.508	1.905	30.3 40.2	10.18
	md	0.580	1.666	24.0	10.18
	md	0.593	1.630	24.1	10.19
	mf	0.613	1.577	30.4	10.16
	mf	0.626	1.544	33.2	10.165
	mf	0.711	1.360	60.2	10.12
	mf	0.726	1.331	30.5 51.3	10.15 10 12
	mf	0.736	1.314	25.2 16.1	10.13 10 11
	m	0.769	1.258	35.0	10.165
	d	0.785	1.232	10.6 25.3	10.140 10.200
	mf	0.809	1.195	11.6 15.4 26.1	10.03 10.06 10.09
	m	0.820	1.179	35.2	10.06
	m	0.8375	1.154	26.2 60.4	10.10 10.16

Il rapporto assiale si può dedurre abbastanza bene dal fotogramma ottenuto col metodo di Debye. Però, l'ordinamento di questo fotogramma è particolarmente difficile ed incerto nel nostro caso, a causa delle dimensioni assai grandi della cella, perchè le linee che compaiono nel fotogramma corrispondono a faccie ad indici alti, il cui numero è così grande, che l'attribuzione degli indici alle singole linee riesce facile, ma non sicura.

Tuttavia, dall'ordinamento dei due fotogrammi di Debye del fosfato di piombo e della piromorfite e dal loro confronto, si deduce che il rapporto assiale dei due reticoli è quasi eguale, e che ben si accorda con quello determinato in base alle misure angolari nei cristalli di piromorfite: $a : c = 1 : 0.736$ [1].

Dalle medie dei valori della costante reticolare calcolata dai diagrammi di Debye si ottengono le seguenti costanti reticolari:

fosfato di piombo $a = 9.67$ Å piromorfite $a = 10.135$ Å

Dai fotogrammi ottenuti col metodo del cristallo rotante si ottennero invece, rispettivamente, i valori $a = 9.65$ Å e $a = 9.91$ Å.

Mentre per il fosfato di piombo i due valori di a non differiscono che di 0.02 Å, nella piromorfite si ha un notevole scarto, dovuto al fatto, che col cristallo rotante la piromorfite ha dato, come abbiamo veduto, linee più grosse e meno nitide.

Facendo le medie dei valori dedotti con i due metodi, possiamo assumere le seguenti costanti:

fosfato di piombo $a = 9.66$ Å piromorfite $a = 10.03$ Å

Assumendo per le due celle il rapporto assiale $a : c = 1 : 0.736$, si calcolano per la terza parte del prisma esagonale avente per lato di base a, i volumi:

fosfato di piombo $V = 578$ Å^3 piromorfite $V = 638$ Å^3

Le densità corrispondenti, nella ipotesi che nei volumi così calcolati sieno contenuti, rispettivamente, $3Pb_3(PO_4)_2$ e $PbCl_2 \cdot 3Pb_3(PO_4)_2$ risultano:

per il *fosfato di piombo* 7.03 per la *piromorfite* 7.06

Il secondo valore si accorda molto bene con quelli sperimentali, che oscillano fra 7.01 e 7.1 [2]. Per il fosfato di piombo manca nella bibliografia un valore attendibile, ed abbiamo, perciò, eseguito una determinazione picno-

(1) Se si confrontano le due tabelle, si osserva che una sola delle linee, e debole, del röntgenogramma del fosfato di piombo non si ritrova nella piromorfite: invece, tre di quello di quest'ultima non compaiono nel fosfato di piombo.

(2) GROTH, loc. cit., p. 826.

metrica, la quale ci ha dato 7.011 (a + 20° C rispetto all'acqua della stessa temperatura): anche questo valore si accorda assai bene con quello dedotto dalla struttura, e conferma l'esattezza della ipotesi fatta intorno al numero delle molecole contenute nella cella unitaria.

È difficile, naturalmente, lo stabilire in qual modo avvenga l'introduzione del cloruro di piombo nel reticolo del fosfato, non conoscendo, noi, la struttura di quest'ultimo.

È importante, però, l'osservare che l'incremento di volume corrispondente all'entrata nella cella elementare del fosfato di piombo di una molecola di $PbCl_2$ è di 60 Å, mentre il volume di una molecola di cloruro di piombo, ritenuto eguale alla somma dei singoli volumi degli ioni assimilati a sfere, risulta di 58.93 Å, in ottimo accordo con l'incremento di volume effettivamente osservato.

Così stando le cose, si può pensare che gli ioni del cloruro di piombo si inseriscano negli interspazi della struttura del fosfato di piombo, risultandone, così, un edificio nel quale $PbCl_2$ non avrebbe una propria individualità. Il rapporto stechiometrico 3 Fosfato : 1 Cloruro corrisponderebbe appunto alla saturazione degli interspazi, e non rimarrebbe esclusa la possibilità di esistenza di piromorfiti con minore contenuto in $PbCl_2$, che appare, per altro, poco probabile, dopo le ricerche analitiche di Amadori e Viterbi sulla piromorfite naturale e l'analisi termica di Amadori del sistema $Pb_3(PO_4)_2$ — $PbCl_2$. Se si pensa, poi, che la formula della piromorfite è stata da tempo interpretata nel modo seguente: $(PO_4)_3Pb_4(PbCl)$, il passaggio dal fosfato di piombo alla piromorfite avrebbe luogo per sostituzione nel primo di un ione $Pb^{\cdot\cdot}$ bivalente con due gruppi monovaleni $(PbCl)$. Anche in questa ipotesi si avrebbe l'incremento di volume di 58.93 Å, corrispondente a quello osservato, e risulterebbe esclusa, per la piromorfite, in accordo con le ricerche ora ricordate, l'esistenza di cristalli con rapporto Forfato : Cloruro diverso da quello costante 3 : 1.

Ad ogni modo, si accetti l'una o l'altra ipotesi, rimane accertata la quasi identità fondamentale di struttura cristallina dell'ortofosfato di piombo e della piromorfite, il che è in evidente contrasto con la formula delle apatiti di Abegg e Bodländer e di Werner, che considera questi minerali come alogenuri di un catione complesso.

Zoologia. — *Il diverso corredo cromosomico delle cellule dei Metazoi in rapporto al sesso e la differenza di categoria degli « Individui misti » e dei « Gameti puri » in « Criptochilum echini »*. Nota del Corrisp. A. Russo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Ancora sulle condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere e di un certo ordine anche in senso precisato.* Nota III di S. Minetti, presentata [1] dal Corrisp. G. Giorgi.

§ 1. - In questa III Nota stabilirò le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera $f(x)$ sia di genere finito p e di « ordine precisato » $[\rho, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\mu]$ [2].

Mi riferisco in tutto a quanto ho già esposto nelle mie due precedenti Note sullo stesso soggetto [3], e mi limiterò per puro amore di brevità, nelle dimostrazioni relative, al caso di $\mu = 1$; considererò in altre parole un « ordine precisato » $[\rho, \rho_1]$.

Osservo innanzi tutto che anche qui è d'uopo distinguere il caso di un genere p non superiore all'ordine ρ, ordine rispetto ad n, da quello di un genere superiore a ρ.

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) Rilevo qui che le considerazioni svolte nella nota II (a questa precedente) circa le formule $r_n^\rho > n(\log n)^{-\rho_1-\varepsilon}$ (p. 38) e $r_n^\rho < n(\log n)^{-\rho_1+\varepsilon+1}$ (p. 38), formule che rispettivamente vanno contradistinte con i numeri (3) e (4) si riferiscono ad un $\rho_1 < 0$. Nei prossimi lavori tratterò distesamente degli ordini precisati $[\rho, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_p]$ in relazione agli ordini $(\rho, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_p)$ di Lindelöf.

(3) Ricordo in particolare che $\underline{\omega}$ sta ad indicare la radice di $f(x)$ più prossima all'origine.

Nel primo di detti due casi nulla si ha da innovare rispetto alla condizione

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M_r}{r^{\rho+\varepsilon}} = 0 \tag{A}$$

ed è evidente.

In quanto poi all'altra condizione da sostituire alla

$$\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{\rho} (\log \omega)^{\rho_1 + \varepsilon}} \tag{1}$$

convergente o divergente secondo che $|\varepsilon|$ essendo qualunque è rispettivamente $\varepsilon > 0$ od $\varepsilon < 0$, notiamo intanto che

$$\sum_{\omega}^{\leq t} \frac{1}{\omega^{\rho} (\log \omega)^{\rho_1 + \varepsilon}} = \sum_{\omega}^{\leq t} \left\{ - \frac{\rho (\log r - \log \omega) + 1}{r^{\rho} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} \right\}_{\omega}^{\infty} = \tag{2}$$

$$= \rho^2 \sum_{\omega}^{\leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{(\log r - \log \omega)}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} dr + \rho (\rho_1 + \varepsilon) \sum_{\omega}^{\leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{(\log r - \log \omega)}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}} dr +$$

$$+ (\rho_1 + \varepsilon) \sum_{\omega}^{\leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}} = \rho^2 \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} \sum_{\omega}^{\leq \min(t, r)} \log \frac{r}{\omega} +$$

$$+ \rho (\rho_1 + \varepsilon) \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}} \sum_{\omega}^{\leq \min(t, r)} \log \frac{r}{\omega} + (\rho_1 + \varepsilon) \sum_{\omega}^{\leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}}$$

e quindi

$$\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{\rho} (\log \omega)^{\rho_1 + \varepsilon}} \geqq \sum_{\omega}^{\leq t} \frac{1}{\omega^{\rho} (\log \omega)^{\rho_1 + \varepsilon}} \geqq \rho^2 \int_{\omega}^{t} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} \sum_{\omega}^{\leq r} \log \frac{r}{\omega} + \tag{3}$$

$$+ \rho (\rho_1 + \varepsilon) \int_{\omega}^{t} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}} \sum_{\omega}^{\leq r} \log \frac{r}{\omega} + (\rho_1 + \varepsilon) \sum_{\omega}^{\leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}} =$$

$$= \rho^2 \int_{\omega}^{t} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} dr + \rho (\rho_1 + \varepsilon) \int_{\omega}^{t} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}} dr +$$

$$+ (\rho_1 + \varepsilon) \sum_{\omega}^{\leq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon + 1}} .$$

Dalle (3) si conchiude intanto che dalla convergenza della (1) ne deriva la convergenza dell'integrale

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1} (\log r)^{\rho_1 + \varepsilon}} dr . \tag{B}$$

Si osservi poi che è

$$(4)\qquad \sum_{\omega}^{\leqq t} \frac{1}{\omega^{\rho}(\log\omega)^{\rho_1+\varepsilon}} = \sum_{\omega}^{\leqq t} \left\{ -\frac{1}{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon}} \right\}_{\omega}^{\infty} =$$

$$= \sum_{\omega}^{\leqq t} (\rho_1+\varepsilon) \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon+1}} + \sum_{\omega}^{\leqq t} \rho \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon}} >$$

$$> (\rho+\rho_1+\varepsilon) \sum_{\omega}^{\leqq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{(\rho+1)}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon+1}}$$

e che si può scrivere

$$(5)\qquad \sum_{\omega}^{\leqq t} \frac{1}{\omega^{\rho}(\log\omega)^{\rho_1+\varepsilon}} \leqq \rho^2 \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon}} \sum_{\omega}^{\leqq r} \log\frac{r}{\omega} +$$

$$+ \rho(\rho_1+\varepsilon) \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon+1}} \sum_{\omega}^{\leqq r} \log\frac{r}{\omega} + (\rho_1+\varepsilon) \sum_{\omega}^{\leqq t} \int_{\omega}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon+1}}$$

e quindi in virtù delle (4)

$$\sum_{\omega}^{\leqq t} \frac{1}{\omega^{\rho}(\log\omega)^{\rho_1+\varepsilon}} \leqq \rho^2 \int_{\omega}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon}}\,dr + \rho(\rho_1+\varepsilon) \int_{\omega}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon-1}}\,dr +$$

$$+ \frac{\rho_1+\varepsilon}{\rho+\rho_1+\varepsilon} \sum_{\omega}^{\leqq t} \frac{1}{\omega^{\rho}(\log\omega)^{\rho_1+\varepsilon}}$$

e perciò

$$(6)\qquad \frac{\rho}{\rho+\rho_1+\varepsilon} \sum_{\omega}^{\leqq t} \frac{1}{\omega^{\rho}(\log\omega)^{\rho_1+\varepsilon}} \leqq \rho^2 \int_{\omega}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon}}\,dr +$$

$$+ \rho(\rho_1+\varepsilon) \int_{\omega}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1+\varepsilon+1}}\,dr .$$

Si conchiude pertanto che viceversa dalla convergenza dell'integrale (B) ne consegue la convergenza della (1).

Noto poi anche qui che all'altra condizione

$$(7)\qquad \sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{\rho}(\log\omega)^{\rho_1-\varepsilon}} \text{ divergente}$$

può analogamente sostituirsi la

$$(8)\qquad \int_{\omega}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1-\varepsilon}} \text{ divergente}$$

perchè infatti ripetendo i ragionamenti testè svolti ma assumendo stavolta al posto di $+\varepsilon$, $-\varepsilon$ potrebbe analogamente conchiudersi che la serie (7) e l'integrale (8) sono contemporaneamente convergenti o divergenti.

Riassumo pertanto qui in forma conclusiva e definitiva le condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera abbia un certo genere (finito) ed un certo « ordine precisato ».

« Teorema. – La funzione intera $f(x)$ ha l'ordine precisato $[\rho, \rho_1,$ « $\rho_2, \cdots, \rho_\mu]$ ed il genere non superiore a ρ se, e soltanto se, sono veri- « ficate le condizioni

$$(\alpha) \qquad \int_w^\infty \frac{\mathfrak{M}_r}{r^{\rho+1}(\log r)^{\rho_1}\cdots(\log r)^{\rho_\mu+\varepsilon}}\,dr$$

« convergente o divergente secondo che $|\varepsilon|$ essendo qualunque è rispetti- « vamente $\varepsilon > 0$ od $\varepsilon < 0$;

$$(\beta) \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^{\rho+\sigma}} = 0$$

« con $\sigma > 0$, qualunque.

« Se poi l'integrale (α) è convergente per $\varepsilon = 0$ e la (β) è pure sod- « disfatta per $\sigma = 0$ allora la $f(x)$ è di ordine ρ per eccesso, altrimenti per « difetto e viceversa.

« Ove poi il genere superasse ρ, alla (β) va sostituita l'altra

$$(\beta') \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^{\rho+\sigma}} = 0$$

« e la $f(x)$ sarà di ordine precisato $[\rho, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\mu]$ per eccesso o per « difetto secondo che la sola condizione (α) sia o non sia verificata per « $\varepsilon = 0$ ».

Per l'ultima parte del Teorema che si riferisce cioè al caso di un genere superiore all'ordine, rileverò infatti come le due dimostrazioni che conducono alle due condizioni (α) e (β') sono e si stabiliscono dirò così in modo perfettamente indipendente; e che si abbassa naturalmente, anche qui, l'esponente del denominatore della (β') rispetto a quello che, per la corrispondente condizione, assumeva il Landau [1] appunto perchè qui si considerano simultaneamente il genere e l'ordine, e quest'ultimo inferiore al primo, mentre che il Landau limitava le sue considerazioni esclusiva- mente al genere, giungendo alle condizioni necessarie e sufficienti perchè una $f(x)$ intera avesse un genere $\leq K$, con K intero positivo dato.

(1) Vedi J. Hadamard ed E. Landau, *Sulle funzioni intere di genere finito.* « Rend. R. Accademia dei Lincei, Classe di Scienze, ecc. », vol. VI, serie 6ª, II sem., fasc. 1, 2 luglio 1927.

§ 2. – Il Teorema testè enunciato oltre alla sua importanza intrinseca del tutto fondamentale, permette tra l'altro l'investigazione completa ed esauriente delle circostanze nelle quali può prodursi il caso di eccezione di Boutroux–Lindelöf gettando la più completa luce su tale importante fatto analitico come del resto vedremo nei prossimi annunciati lavori.

Matematica. — *Sulla equivalenza dei tensori.* Nota di A. Masotti, presentata[1] dal Corrisp. U. Cisotti.

Mi onoro di presentare all'Accademia un procedimento elementare che conduce in modo semplice alla nozione di trasporto per equivalenza di un tensore lungo una linea in una varietà qualunque ad n dimensioni e ne mette in luce il lato intuitivo. Da esso scende, chiaro e immediato, il concetto di tensore costante, come risulterà da una prossima Comunicazione.

1. Sia **V** un vettore funzione dei punti di una regione C dello spazio ordinario; sia L una linea tracciata entro C; il vettore **V** è *costante lungo la linea* L se lo sono le sue componenti cartesiane Y_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ con riferimento ad una qualunque terna cartesiana ortogonale $O(y_1, y_2, y_3)$; ciò si esprime scrivendo che

$$dY_\nu = 0 \qquad \text{lungo L}; \qquad (\nu = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Con riferimento ad un sistema di coordinate generali x_i $(i = 1, 2, 3)$, legate alle y dalle tre relazioni indipendenti

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3), \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

siano X_i $(i = 1, 2, 3)$ le componenti covarianti di **V**. Avendosi che

$$Y_\nu = \sum_i^3 X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{3}$$

le (1) divengono:

$$\sum_i^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} dX_i + X_i \, d \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} \right) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Ora si trova che[2]

$$d \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} = - \sum_{jh}^3 \left\{ \begin{matrix} h & j \\ i & \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial y_\nu} dx_j, \tag{5}$$

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) Si ha, infatti,

$$d \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} = \sum_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} \right) dx_j = \sum_j^3 dx_j \sum_\lambda^3 \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\lambda \partial y_\nu} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_j}; \tag{a}$$

sicchè la (4) diviene

$$\sum_{i}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} dX_i - \sum_{ijh}^{3} \left\{ \begin{matrix} h\,j \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial y_\nu} X_i \, dx_j = 0 ,$$

indi, scambiando nella somma tripla gli indici i, h e mettendo poi in evidenza la somma rispetto ad i:

$$(6) \qquad \sum_{i}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} \left[dX_i - \sum_{jh}^{3} \left\{ \begin{matrix} i\,j \\ h \end{matrix} \right\} X_h \, dx_j \right] = 0 , \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Queste tre equazioni sono lineari ed omogenee nelle tre quantità tra [ ]; il determinante dei coefficienti, che è lo jacobiano delle x rispetto alle y, è diverso da zero in virtù della supposta indipendenza delle (2); esse richiedono pertanto che sia, lungo L,

$$(7) \qquad dX_i - \sum_{jh}^{3} \left\{ \begin{matrix} i\,j \\ h \end{matrix} \right\} X_h \, dx_j = 0 , \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Sono queste le equazioni che traducono le (1) in coordinate generali, ed esprimono perciò che il vettore di componenti covarianti X_i è costante lungo L. Esse possono assumersi (per $j, h, i = 1, 2, \cdots, n$) per definire la costanza di un vettore lungo una linea in una varietà qualunque ad n dimensioni: sono allora introdotte semplicemente le *equazioni di parallelismo* (o, meglio, *di equivalenza*) di Levi-Civita [1].

ora si osservi che

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_\nu} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_\nu} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \sum_{h}^{3} \frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x_h \partial x_j} \frac{\partial x_h}{\partial y_\nu} ,$$

per cui

$$(b) \qquad \sum_{\mu}^{3} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_\nu} \sum_{\mu}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} - \sum_{h}^{3} \frac{\partial x_h}{\partial y_\nu} \sum_{\mu}^{3} \frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x_h \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} = - \sum_{h}^{3} \left\{ \begin{matrix} h\,j \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial y_\nu} ,$$

l'ultimo passaggio essendo giustificato: 1° dall'osservazione che

$$\sum_{\mu}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 , & \text{se } i = j , \\ 0 , & \text{se } i \neq j , \end{cases}$$

e in ambo i casi è una costante; 2° dall'espressione seguente dei simboli di Christoffel di seconda specie:

$$(c) \qquad \left\{ \begin{matrix} h\,j \\ i \end{matrix} \right\} = \sum_{\mu}^{3} \frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x_h \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} .$$

Dalle (a) e (b) scende senz'altro la (5).

(1) Levi-Civita, *Lezioni di Calcolo Differenziale Assoluto* [redatte da E. Persico; Roma, Stock, 1925], pp. 118 e sgg., 156 e sgg.; v. anche la Memoria fondamentale dello stesso Autore sulla *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana* [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XLII (1917), pp. 173-205].

2. Lo stesso criterio può servire per istituire la nozione di equivalenza per tensori qualunque. Mi riferirò, per semplicità di scrittura, ad un tensore doppio.

Sia **T** un tensore doppio funzione dei punti di una regione C dello spazio ordinario; sia L una linea tracciata entro C; il tensore **T** è *costante lungo la linea* L se lo sono le sue componenti cartesiane $Y^{\nu}_{\mu}(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ con riferimento ad una qualunque terna cartesiana ortogonale $O(y_1, y_2, y_3)$, cioè se

$$dY^{\nu}_{\mu} = 0 \quad \text{lungo L}; \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)\ [1]. \tag{8}$$

Siano X^k_i le componenti miste di **T** rispetto alle coordinate generali $x_i\,(i = 1, 2, 3)$; avendosi

$$Y^{\nu}_{\mu} = \sum_{ik}^{3} X^k_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \tag{9}$$

la (8) diviene

$$\sum_{ik}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} dX^k_i + X^k_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} d\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} + X^k_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} d\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \right) = 0. \tag{10}$$

Ma essendo [2]

$$d\frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} = -\sum_{jh}^{3} \left\{ \begin{matrix} h\ j \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial y_\mu} dx_j \quad , \quad d\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = \sum_{jh}^{3} \left\{ \begin{matrix} k\ j \\ h \end{matrix} \right\} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_h} dx_j,$$

(1) V. Cisotti, *Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee* [Nota presentata all'Accademia in questa stessa seduta], § 2.

(2) La prima scende dalla (5); la seconda si ottiene dalla

$$d\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = \sum_{j}^{3} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j\, \partial x_k} dx_j$$

sostituendovi le espressioni seguenti delle derivate seconde delle y

$$\frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j\, \partial x_k} = \sum_{h}^{3} \left\{ \begin{matrix} k\ j \\ h \end{matrix} \right\} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_h}$$

che sono ottenute dalle (*c*) di una Nota precedente.

(2) Il determinante dei coefficienti (di nono ordine) è composto dagli elementi

$$\xi_{rs} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} r = 3(\mu - 1) + \nu, \\ s = 3(i - 1) + k; \end{cases}$$

un teorema dovuto a Kronecker [riportato, ad es., da Netto, *Kombinatorik* («Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften», I A 2), § 22] ne fornisce il valore:

$$\| \xi_{rs} \| = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \right\|^3 \left\| \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \right\|^3 = 1.$$

la (10) diviene

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} dX_i^k - \sum_{1}^{3}{}_{ikjh} \left\{ \begin{matrix} h & j \\ i & \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} X_i^k \, dx_j + \sum_{1}^{3}{}_{ikjh} \left\{ \begin{matrix} k & j \\ h & \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_h} X_i^k \, dx_j = 0.$$

Scambiando nella seconda somma gli indici i, h; nella terza gli indici k, h; mettendo poi in evidenza la somma rispetto a i, k si ottiene

$$(11) \quad \sum_{1}^{3}{}_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \left[dX_i^k - \sum_{1}^{3}{}_{jh} \left\{ \begin{matrix} i & j \\ h & \end{matrix} \right\} X_h^k \, dx_j + \sum_{1}^{3}{}_{jh} \left\{ \begin{matrix} h & j \\ k & \end{matrix} \right\} X_i^h \, dx_j \right] = 0, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3);$$

da queste si deducono, come dianzi [2], le relazioni

$$(12) \qquad dX_i^k - \sum_{1}^{3}{}_{jh} \left\{ \begin{matrix} i & j \\ h & \end{matrix} \right\} X_h^k \, dx_j + \sum_{1}^{3}{}_{jh} \left\{ \begin{matrix} h & j \\ k & \end{matrix} \right\} X_i^h \, dx_j = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Queste equazioni traducono le (8) in coordinate generali ed esprimono quindi che il tensore doppio di componenti miste X_i^k è costante lungo L. Esse possono assumersi (per $j, h, i, k = 1, 2, \cdots, n$) per definire la costanza di un tensore doppio lungo una linea in una varietà qualunque ad n dimensioni; sono allora introdotte semplicemente le *equazioni di equivalenza* di un tensore doppio [1].

3. Come alle (7) si può dare la forma

$$(13) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{j} X_{ij} \, dx_j = 0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

che fa intervenire le derivate covarianti delle X_i, così le (12) possono scriversi [2]

$$(14) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{j} X_{i\,j}^k \, dx_j = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

(1) Lo Schouten, nella Memoria *Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung, die einer Differentialgeometrie zu Grunde gelegt werden können* [« Mathematische Zeitschrift », 1922: 13. Bd., pp. 56-81; 15. Bd., p. 168], indi nel trattato *Der Ricci-Kalkül. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* [Berlin, Springer, 1924; 2. Abs., §§ 1-7], ha sviluppato la teoria generale dei *trasporti lineari* (*linearen Uebertragungen*) in una varietà ad n dimensioni, assegnando a ciascuno la corrispondente legge di differenziazione delle componenti di un tensore qualunque. Ogni trasporto lineare è caratterizzato da *tre* tensori tripli il cui annullarsi è proprio di uno speciale trasporto lineare: il *trasporto riemanniano* (*Riemannsche Uebertragung*); le (12) si riferiscono appunto a quest'ultimo e sono pertanto deducibili anche con le regole dello Schouten (v. loc. ult. cit., p. 65). V. anche Juvet, *Introduction au Calcul Tensoriel et au Calcul Différentiel Absolu* [Paris, Blancard, 1922], pp. 82-83.

(2) V. (per l'espressione che compete alle derivate covarianti) Levi-Civita, *Lezioni* cit., Cap. VI, form. [3], [4] e [5].

Più generalmente le *equazioni di equivalenza* per un tensore emmuplo **T**, di componenti $X^{k_1\cdots k_q}_{i_1\cdots i_p}$ (con $p+q=m$), lungo una linea L di una varietà qualunque ad n dimensioni, sono:

$$(15)\qquad \sum_1^n{}_j X^{k_1\cdots k_q}_{i_1\cdots i_p/j}\,dx_j = 0\,, \qquad (i_1,\cdots,i_p\,;\ k_1,\cdots,k_q = 1,2,\cdots,n),$$

oppure, introducendo i parametri $\lambda j = dx_j/d\mathrm{L}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ della tangente positiva alla linea L,

$$(16)\qquad \sum_1^n{}_j X^{k_1\cdots k_q}_{i_1\cdots i_p/j}\,\lambda j = 0\,, \quad (i_1,\cdots,i_p\,;\ k_1,\cdots,k_q = 1,2,\cdots,n)\ ^{(1)}.$$

I primi membri delle (16) hanno un importante significato: essi sono le componenti miste di un nuovo tensore emmuplo cui spetta, in base alla introdotta nozione di equivalenza, la denominazione di *derivato di* **T** *nella direzione s* definita dai parametri λj [2]. Le (16) esprimono quindi che nei punti di L è nullo il tensore derivato di **T** nella direzione della tangente alla linea stessa.

Si osservi infine che dalle (16) scende che

$$(17)\qquad \left\| X^{k_1\cdots k_q}_{i_1\cdots i_p/j} \right\| = 0\,,$$

scrittura che vuole esprimere l'annullarsi di tutti i minori di ordine n che si possono estrarre dalla matrice con n colonne ed n^m righe che figura al primo membro [3].

(1) V. Juvet, loc. cit., pp. 88-89.

(2) La derivazione secondo una direzione di un vettore superficiale è studiata nella mia Nota *Sulla derivazione di un vettore superficiale* [in corso di pubblicazione negli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei »].

(3) Se trattasi di un vettore $m = 1$ e quindi il primo membro della (17) è un determinante di ordine n. Quale significato geometrico abbia la (17) nel caso di un vettore superficiale ho indicato nel § 4 della Nota citata.

Matematica. — *Una forma normale invariante della seconda variazione.* Nota di L. Berwald, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Nella presente Nota è stabilita una forma normale della seconda variazione dell'arco, invariante per trasformazioni puntuali, e valida per una metrica ad n dimensioni sia quadratica, sia generale. Da questa forma normale si deduce poi il sistema delle equazioni per lo scostamento geodetico, stabilito per altra via dal prof. T. Levi-Civita nel caso della metrica quadratica [2].

1. Sia

$$(1) \qquad ds = \sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k} \equiv F(x, dx) \quad [3] \qquad (ds^2 \text{ definito positivo})$$

l'elemento lineare di una varietà riemanniana ad n dimensioni V_n.

Le equazioni

$$(2) \qquad x^i = x^i(s) \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots n \; ; \; s_1 \leqq s \leqq s_2)$$

rappresentino un arco geodetico B, cioè un tratto di un'estremale dell'integrale

$$(3) \qquad s = \int_{t_0}^{t} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt .$$

Ora si ponga $\frac{dx^i}{ds} = x'^i$ e si introducano come variabili nella F le x, x' invece delle $x, \frac{dx}{dt}$, sicchè si ha identicamente

$$(4) \qquad F(x, x') = 1 .$$

Se poi si passa dall'arco geodetico B ad una linea vicinissima avente gli stessi estremi:

$$(5) \qquad y^i = x^i(s) + \varepsilon\xi^i(s) \quad , \quad (\xi^i(s_1) = \xi^i(s_2) = 0 \; ; \; i = 1, 2, \cdots n),$$

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) T. Levi-Civita, *Sur l'écart géodésique*, « Math. Ann. », 97 (1926), pp. 291–320. Vedasi anche T. Boggio, *Sullo scostamento geodetico*, « Rend. Acc. Lincei », (6) 4 (1926), pp. 255–261.

(3) $g_{ik}\,dx^i\,dx^k$ sta per $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,dx^i\,dx^k$. Pure nel seguito le sommatorie sono omesse (secondo l'Einstein).

la prima variazione dell'integrale (3) è nulla, perchè B è un arco d'estremale. *Per la seconda variazione si trova la seguente forma normale invariante* (1).

$$(6)\qquad \boxed{\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i\, \partial x'^k} \left\{ (D\xi)^i (D\xi)^k - K^i_{h\cdot lm}\, x'^h x'^l \xi^k \xi^m \right\} ds\,.}$$

Nella (6) le $(D\xi)^i$ sono le derivate invarianti delle componenti ξ^i del vettore (ξ) secondo l'arco di B:

$$(7)\qquad (D\xi)^i = \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}\, x'^k \xi^l\,,$$

e nella (7) le $\Gamma^i_{kl} = \left\{ \begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right\}$ denotano i simboli di Christoffel (di seconda specie) relativi all'elemento lineare (1). Le $K^i_{h\cdot lm} = \{ hi\,, lm \}$ sono i simboli di Riemann di seconda specie della V_n.

2. Ora si consideri l'integrale nel secondo membro della (6) come l'integrale fondamentale di un problema di variazione nella variabile indipendente s, le variabili dipendenti essendo $\xi^i\,, \frac{d\xi^i}{ds}$.

Le equazioni di Eulero corrispondenti sono

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i\, \partial x'^k} \left((D^2\xi)^i + K^i_{h\cdot lm}\, x'^h x'^l \xi^m \right) = 0\,, \qquad (k = 1\,, 2\,, \cdots n)\,.$$

(1) Per la deduzione di questa forma normale si sostituiscono nella

$$\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\, \partial x^k}\, \xi^i \xi^k + 2\, \frac{\partial^2 F}{\partial x^i\, \partial x'^k}\, \xi^i \xi'^k + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i\, \partial x'^k}\, \xi'^i \xi'^k \right) ds$$

al posto delle $\xi'^i = \frac{d\xi^i}{ds}$ le derivate invarianti $(D\xi)^i$. Così risulta dopo alcune semplificazioni

$$\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i\, \partial x'^k} (D\xi)^i (D\xi)^k + 2\, \frac{\partial F}{\partial x^l}\, \Gamma^l_{ik}\, \xi^i (D\xi)^k + \frac{\partial F}{\partial x^l} \left(\frac{\partial \Gamma^l_{pk}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{im}\, \Gamma^m_{pk} \right) x'^p \xi^i \xi^k \right\} ds\,.$$

Ma l'arco B essendo geodetico si ha

$$2\, \frac{\partial F}{\partial x^l}\, \Gamma^l_{ik}\, \xi^i (D\xi)^k + \frac{\partial F}{\partial x^l} \left(\frac{\partial \Gamma^l_{pk}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{im}\, \Gamma^m_{pk} \right) x'^p \xi^i \xi^k = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x'^l}\, \Gamma^l_{ik}\, \xi^i \xi^k \right) - \\ - \frac{\partial F}{\partial x'^l}\, K^l_{k\cdot ih}\, x'^h \xi'^i \xi^k\,;$$

ed inoltre è

$$\frac{\partial F}{\partial x'^l}\, K^l_{k\cdot ih} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^k\, \partial x'^l}\, K^l_{q\cdot hi}\, x'^q\,.$$

Siccome gli estremi dell'arco B restano fissi ne segue senza difficoltà l'espressione (6). Il calcolo or ora accennato resta valido anche per gli spazi metrici generali (n. 4).

Qui le $(D^2\xi)^i$ stanno per le seconde derivate invarianti delle ξ^i secondo l'arco di B:

$$(9) \qquad (D^2\xi)^i = \frac{d}{ds}(D\xi)^i + \Gamma^i_{kl}\, x'^k (D\xi)^l .$$

Esprimendo, nelle (8), le $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^k}$ per mezzo delle g_{ik} e delle x'^i e portando gli indici dal basso in alto mediante il sistema g^{ik} reciproco del sistema g_{ik} si giunge finalmente *alle equazioni differenziali di Levi-Civita per lo scostamento geodetico*

$$(10) \qquad \boxed{\begin{gathered}(D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{ds}x'^r + K^r_{h.lm}\, x'^h x'^l \xi^m = 0 , \qquad (r = 1, 2, \cdots n) \\ \lambda = \frac{d}{ds}\left(\xi^p \frac{\partial F}{\partial x'^p}\right),\end{gathered}}$$

equivalenti colle (8).

La nuova deduzione qui data delle equazioni differenziali (10) fa immediatamente conoscere la loro connessione colla seconda variazione.

3. La forma normale invariante (6) della variazione seconda può essere trasformata in modo da apparire quale generalizzazione della forma normale nota per $n = 2$ [1]. Analogamente, dalle equazioni (10), si può dedurre un'equazione differenziale la cui forma è una diretta generalizzazione dell'equazione di Jacobi.

A tale scopo ci conviene introdurre al posto delle componenti ξ^i la grandezza l del vettore (ξ) ed i parametri v^i della sua direzione, ed inoltre l'angolo α dei vettori (x') e (ξ) e la curvatura riemanniana K della V_n relativamente alla giacitura $[(x'), (\xi)]$. Se poi si sceglie

$$(11) \qquad \omega = l \operatorname{sen}\alpha ,$$

per nuova variabile dipendente, la (6) viene trasformata nella forma seguente:

$$(6^*) \qquad \boxed{\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{s_1}^{s_2} \left(\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 - \left\{ K + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 - g_{ik}(Dv)^i (Dv)^k \right] \right\} \omega^2 \right) ds .}$$

(1) Tale forma normale è stata stabilita da A. L. Underhill, *Invariants of the function $f(x, y, x', y')$ in the calculus of variations*. « Trans. Amer. Math. Soc. », 9 (1908), pp. 316-338, anche per uno spazio metrico generale (n. 4) a due dimensioni. Cfr. pure O. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Lipsia e Berlino 1909, p. 228.

Corrispondentemente segue dalla (10), dopo un calcolo semplice, l'equazione differenziale

$$(12)\qquad \boxed{\frac{d^2\omega}{ds^2} + \left\{K + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 - g_{ik}(Dv)^i(Dv)^k\right]\right\}\omega = 0\,,}$$

già stabilita dal sig. U. Crudeli [1] per il caso particolare $\alpha =$ costante.

È l'equazione di Eulero per l'integrale nel secondo membro della (6*).

Nel caso $n = 2$ si ha identicamente

$$(13)\qquad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = g_{ik}(Dv)^i(Dv)^k\,,$$

sicchè la (6) o (6*) si riduce alla forma già menzionata

$$\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{s_1}^{s_2} \left(\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 - K\omega^2\right) ds\,,$$

e la (12) - o, ciò che qui è lo stesso, la (10) - si cambia nell'equazione di Jacobi

$$(J)\qquad \frac{d^2\omega}{ds^2} + K\omega = 0\ [2].$$

4. *La forma normale invariante* (6) *o* (6*) *della variazione seconda e le equazioni differenziali* (10) *e* (12) *rimangono inalterate se ds è l'elemento lineare d'uno spazio metrico generale ad n dimensioni, vale a dire se l'integrale* (3) *è l'integrale fondamentale d'un problema delle variazioni positivo-definito qualsiasi* [3]. È soltanto necessario d'introdurre, al posto degli ele-

(1) U. Crudeli, *Su lo scostamento geodetico elementare....* « Rend. Acc. Lincei » (6), 5 (1927), pp. 248-251. Vedasi anche T. Boggio, loc. cit., ove si tratta il caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e le Note di G. Vranceanu, *Sopra la stabilità geodetica, ecc.*, « Rend. Acc. Lincei », (6), 5 (1927), pp. 107-110, 275-278.

(2) Per $n > 2$, contrariamente alle asserzioni dei sigg. Boggio, Crudeli e Vranceanu, loc. cit., la riduzione della (12) alla forma jacobiana (J) non è sempre possibile, neanche per α costante, ciò che già ha messo in rilievo il Cartan, *Sur l'écart géodésique*, « Rend. Acc. Lincei », (6), 5 (1927), pp. 609-613. Cfr. anche recenti Note dei signori Crudeli e Vranceanu in questi « Rendiconti ». Per la validità della (13) è necessario e sufficiente che il vettore (Dv) appartenga alla varietà lineare (a due dimensioni) determinata dai vettori (x') e (v).

(3) La $F(x, x')$ si suppone dunque positiva-omogenea del primo grado rispetto alle x'; inoltre la forma quadratica $\frac{\partial(F^2(x, x'))}{\partial x'^i \partial x'^k}\eta^i\eta^k$ nelle variabili η deve essere positiva-definita per tutti i sistemi dei valori x, x' considerati. Per le supposizioni di regolarità le quali si fanno riguardo alla $F(x, x')$ e per le specificazioni che seguono nel testo

menti della V_n che figurano nelle (6), (6*), (10), (12), gli elementi corrispondenti allo spazio generale.

Siano dunque

$$x''^i + 2\Gamma^i(x, x') = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{14}$$

le equazioni differenziali delle estremali del detto problema delle variazioni, come risultano ricavando le $x''^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2}$ dalla $\frac{dF}{ds} = 0$, associata a $(n - 1)$ delle equazioni di Eulero.

(Le Γ^i sono positive-omogence di secondo grado rispetto ai x').

Con ciò le Γ^i_{kl}, $K^i_{k\cdot lm}$, g_{ik} sono ora definite rispettivamente dalle:

$$\Gamma^i_{kl} \equiv \Gamma^i_{kl}(x, x') = \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial x'^k \partial x'^l}, \tag{15}$$

$$K^i_{k\cdot lm} \equiv K^i_{k\cdot lm}(x, x') = \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} + \Gamma^r_{kl}\Gamma^i_{rm} - \Gamma^r_{km}\Gamma^i_{rl} - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x'^r}\Gamma^r_{mn} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x'^r}\Gamma^r_{ln}\right) x'^n\,, \tag{16}$$

$$g_{ik} \equiv g_{ik}(x, x') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (F^2(x, x'))}{\partial x'^i \partial x'^k}\,. \tag{17}$$

L'abbassamento e l'innalzamento degli indici si definiscono ancora mediante il sistema g_{ik} ed il sistema reciproco g^{ik}. La grandezza l, l'angolo α ed i parametri v^i s'intendono adesso *rispetto all'elemento lineare* (x, x') *dell'estremale* B:

$$l = \left|\sqrt{g_{ik}(x, x')\,\xi^i \xi^k}\right|, \tag{18}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{l}(g_{ik}(x, x')\,x'^i \xi^k) = \frac{\lambda}{l}\,, \tag{19}$$

$$v^i = \frac{1}{l}\xi^i\,. \tag{20}$$

Infine K è la curvatura dello spazio generale nel punto (x) relativamente all'elemento lineare (x, x') ed alla giacitura $[(x'), (\xi)]$:

$$K \equiv K(x, x', \xi) = \frac{K_{iklm}(x, x')\,x'^i x'^l \xi^k \xi^m}{[g_{il}(x, x')\,g_{km}(x, x') - g_{im}(x, x')\,g_{lk}(x, x')]\,x'^i x'^l \xi^k \xi^m}\,. \tag{21}$$

cfr. L. Berwald, *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume....* « Math. Zeitschr. », 25 (1926), pp. 40–73. Là le Γ^i, Γ^i_{kl}, K del testo si designano rispettivamente $\frac{1}{2}\varphi^i(x, x')$, $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^i(x, dx)}{\partial dx^k \partial dx^l}$, $R(x, dx, \xi)$.

Finalmente giova rilevare che il metodo originale per mezzo del quale il Levi-Civita ha dedotto le equazioni differenziali (10) può essere parimenti applicato allo spazio metrico generale senza cambiamenti essenziali. Anzi il calcolo acquista in brevità e chiarezza, quando si adopera la generalizzazione del calcolo differenziale assoluto da me sviluppata.

Alcune applicazioni delle formole svolte nella presente Nota saranno esposte in altra occasione.

Matematica. — *Il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito finito: caso di uno spazio Riemanniano.* Nota II di A. J. McConnel, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Ci proponiamo qui di applicare i risultati ottenuti nella Nota precedente [2] al caso particolarmente interessante di uno spazio Riemanniano.

In uno spazio Riemanniano, c'è un elemento lineare, ds, definito da un'equazione della forma

$$ds^2 = g_{mn}\, dx^m \cdot dx^n, \tag{18}$$

e le funzioni, Γ^r_{mn}, divengono i simboli di Christoffel, cioè

$$\Gamma^r_{mn} = \left\{ \begin{matrix} r \\ m\, n \end{matrix} \right\}. \tag{19}$$

Possiamo anche considerare un vettore covariante, B_r, come l'associato d'un vettore contravariante, B^r, conforme all'equazione

$$B_r = g_{rs}\, B^s; \tag{20}$$

nonchè parlare della grandezza d'un vettore e dell'angolo di due vettori. Ricordiamo che rimangono costanti le grandezze e l'angolo di due vettori, che subiscono uno spostamento parallelo lungo una curva; perciò, possiamo supporre che le grandezze dei vettori A^r e B^r nella Nota precedente siano l'unità.

Nella formola (13) introduciamo l'elemento d'area, che indicheremo con dS, e sia S l'area della regione Γ. Essendo λ^r, μ^r i parametri delle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, e α l'angolo di questi parametri, abbiamo

$$\lambda^m \cdot \mu^n \cdot dS = \frac{\partial x^m}{\partial u} \frac{\partial x^n}{\partial v} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot du \cdot dv.$$

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) *Il trasporto parallelo, ecc.* Nota I, p. 208 di questo volume dei «Rendiconti».

L'equazione (13) diviene

$$(21) \qquad (B_r \Delta A^r)_o = -\iint_\Gamma \frac{R^r_{.smn} B_r A^s \lambda^m \mu^n}{\operatorname{sen} \alpha} dS,$$

od anche, per il solito teorema del valor medio,

$$(22) \qquad \begin{cases} (B_r \Delta A^r)_o = -\left[\dfrac{R^r_{.smn} B_r A^s \lambda^m \mu^n}{\operatorname{sen} \alpha}\right]_M \iint dS \\ \qquad\qquad = -\left[\dfrac{R^r_{.smn} B_r A^s \lambda^m \mu^n}{\operatorname{sen} \alpha}\right]_M \cdot S. \end{cases}$$

Ricordiamo che il senso di descrizione del circuito è quello della rotazione $\lambda^r \to \mu^r$. Nel caso d'un circuito infinitesimale la formola è

$$(23) \qquad \Delta A^r_o = -\left[\frac{R^r_{.smn} A^s \lambda^m \mu^n}{\operatorname{sen} \alpha}\right]_o \cdot S + O(\delta^3).$$

Introduciamo adesso l'angolo di due vettori. Sia β l'angolo dei vettori A^r, B^r, cioè

$$\cos \beta = A^r B_r.$$

Se poniamo

$$\cos \beta^*_o = (B_r A^{*r})_o \quad , \quad \cos \beta_o = (B_r A^r)_o ,$$

il cambiamento del coseno dell'angolo è dato dall'equazione

$$(24) \qquad \begin{cases} \Delta (\cos \beta)_o = (B_r \Delta A^r)_o = -\iint_\Gamma \dfrac{R_{rsmn} B^r A^s \lambda^m \mu^n}{\operatorname{sen} \alpha} dS \\ \qquad\qquad = -\left[\dfrac{R_{rsmn} B^r A^s \lambda^m \mu^n}{\operatorname{sen} \alpha}\right]_M \cdot S. \end{cases}$$

Ritorniamo, un momento, alla formola (12), e supponiamo che si applichi al circuito seguente,

$$\rho = f(\theta) \quad , \quad o \leqslant \theta \leqslant \varphi < \Delta\theta \quad ; \quad \theta = \varphi = \text{cost.} \quad , \quad f(\varphi) \geqslant \rho \geqslant o .$$

Abbiamo, ricordando che l'angolo β rimane costante quando θ rimane costante,

$$(B_r \Delta A^r)_o = \cos \beta - \cos \beta_o = -\iint R_{rsmn} B^r A^s \frac{\partial x^m}{\partial \rho} \frac{\partial x^n}{\partial \theta} d\rho \, d\theta .$$

Possiamo considerare questa formola come una funzione di φ.

Deriviamola rispetto alla variabile φ. Avremo

$$-\operatorname{sen}\beta\frac{d\beta}{d\varphi}=-\int_{\Pi}^{f(\varphi)}R_{rsmn}B^{r}A^{s}\frac{\partial x^{m}}{\partial\rho}\frac{\partial x^{n}}{\partial\theta}d\rho,$$

cioè, se $\operatorname{sen}\beta$ non s'annulla,

$$\frac{d\beta}{d\varphi}=\int_{0}^{f(\varphi)}\frac{R_{rsmn}B^{r}A^{s}\dfrac{\partial x^{m}}{\partial\rho}\dfrac{\partial x^{n}}{\partial\theta}}{\operatorname{sen}\beta}d\rho,$$

perchè β ha lo stesso valore in tutti i punti della curva, $\theta=\text{cost}$. Integriamo quest'ultima equazione da o a $\Delta\theta$. Avremo

$$\Delta\beta_{o}=\beta_{o}^{*}-\beta_{o}=\iint\frac{R_{rsmn}B^{r}A^{s}\dfrac{\partial x^{m}}{\partial\rho}\dfrac{\partial x^{n}}{\partial\theta}}{\operatorname{sen}\beta}d\rho\,d\theta,$$

da cui

$$\Delta\beta_{o}=\iint_{\Gamma}\frac{R_{rsmn}B^{r}A^{s}\lambda^{m}\mu^{n}}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}dS \tag{25}$$

e

$$\Delta\beta_{o}=\left[\frac{R_{rsmn}B^{r}A^{s}\lambda^{m}\mu^{n}}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}\right]_{M}\cdot S. \tag{26}$$

Questa formola è una estensione della formola di Pérès [1], a cui si riduce nel caso d'un circuito infinitesimale, potendo essere scritta:

$$\Delta\beta_{o}=\left[\frac{R_{rsmn}B^{r}A^{s}\lambda^{m}\mu^{n}}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}\right]_{o}\cdot S+O(\delta^{3}). \tag{27}$$

Se ci limitiamo a uno spazio di 2 dimensioni, vale a dire, $N=2$, tutti i vettori A^{r}, B^{r}, λ^{r}, μ^{r} appartengono a questo spazio. Scegliamo B_{o}^{r} per modo che le rotazioni $B_{o}^{r}\to A_{o}^{r}$, e $\lambda^{r}\to\mu^{r}$ abbiano lo stesso senso. Si ha, indicando con K la curvatura Riemanniana dello spazio,

$$\frac{R_{rsmn}B^{r}A^{s}\lambda^{m}\mu^{n}}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{R_{rsmn}\lambda^{r}\mu^{s}\lambda^{m}\mu^{n}}{\operatorname{sen}^{2}\alpha}=K.$$

(1) Pérès, *Le parallèlisme de M. Levi-Civita et la courboure riemannienne*, « Rend. R. Acc. Lincei » (5), XXVII (1919), pp. 425-428.

Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus* (1927), p. 193.

Segue che

$$\Delta\beta_0 = \iint_\Gamma K\,dS, \tag{28}$$

e

$$\Delta\beta_0 = K_M \cdot S, \tag{29}$$

dove K_M è la curvatura nel punto M. Inoltre l'approssimazione per un circuito infinitesimale dà

$$\Delta\beta_0 = K_0 \cdot S + O(\delta^3). \tag{30}$$

Quando il circuito è un triangolo geodetico dello spazio di 2 dimensioni, $\Delta\beta_0$ è l'eccesso geodetico del triangolo [1], e si ha la celebre formola di Gauss

$$A + B + C - \pi = \iint_\Gamma K\,dS, \tag{31}$$

dove A, B, C, sono gli angoli del triangolo.

Matematica. — *Sull'equazione di Laplace dello spazio iperbolico.* Nota di G. Ascoli, presentata [2] dal Corrisp. G. Fubini.

Se per il quadrato dell'elemento lineare dello spazio a curvatura costante negativa $K = -1$ si assume la forma:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2},$$

la quale permette la rappresentazione conforme dello spazio nel semispazio euclideo $z > 0$ (o $z < 0$), si trova che la relativa equazione di Laplace può scriversi nel modo seguente:

$$z\Delta_2 U - \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{A}$$

L'equazione (A) ha strette analogie con l'ordinaria equazione di Laplace, almeno sinchè la si consideri in domini (che diremo *di* 1^a *specie*) situati interamente nel semispazio $z > 0$ (o $z < 0$); valgono così per le sue soluzioni teoremi corrispondenti a quelli di Green e di Gauss, e per i problemi di valori al contorno che ad essa si riferiscono si possono dimostrare

(1) Levi-Civita, loc. cit., p. 197.
(2) Nella seduta del 19 febbraio 1928.

teoremi di unicità e di esistenza in circostanze non dissimili da quelle valide per il caso euclideo [1].

Queste analogie cadono completamente appena ci si porti in domini che abbiano sul contorno *(2ª specie)* o nell'interno *(3ª specie)* punti del piano limite, a causa della singolarità che l'equazione (A) presenta per $z = 0$. Per siffatte equazioni, di tipo costante (nel nostro caso ellittico), ma dotate di varietà singolari, lo studio può dirsi appena iniziato; può infatti citarsi in proposito un'equazione incontrata da Tricomi [2], che ha risoluto su di essa un problema di valori al contorno per domini di 2ª specie, e per una trasformata della (A) un risultato di Bianchi [3], che avremo in seguito occasione di richiamare.

Avendo preso a studiare i problemi di valori al contorno per la (A), con speciale riguardo ai domini di 2ª e 3ª specie, ho potuto ottenere risultati abbastanza esaurienti che formeranno oggetto di una Memoria di prossima pubblicazione. Nella presente Nota sono rapidamente riassunti i punti essenziali della ricerca e le conclusioni a cui sono pervenuto.

1. *La soluzione fondamentale.* – Siano P e Q due punti arbitrari del semispazio $z > 0$ (o $z < 0$), P_1, Q_1 le loro immagini rispetto al piano $z = 0$, r, r_1 le distanze euclidee PQ, $PQ_1 = P_1Q$, r^* la distanza iperbolica PQ. L'espressione

$$\Omega(P, Q) = \operatorname{cth} r^* = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r}\right)$$

soddisfa alla (A), sia che si consideri in essa P o Q come punto variabile, ed ha per la (A) l'ufficio di *soluzione fondamentale.* Mediante essa si esprime, con perfetta analogia col caso euclideo, l'angolo solido iperbolico elementare determinato da un punto P e da un elemento superficiale $d\sigma$, di normale n, adiacente ad un punto Q; precisamente:

$$d\omega_P^* = \frac{1}{z_Q}\frac{d\Omega(P, Q)}{dn}\, d\sigma .$$

2. *Teoremi di Green e di Gauss, e loro conseguenze.* – Per le soluzioni delle (A) regolari in un dominio τ di prima specie, di contorno σ, dotate di derivate regolari al contorno vale la formula:

$$4\pi U(P) = \int_\sigma \frac{1}{z_Q}\left[U(Q)\frac{d\Omega(P, Q)}{dn} - \Omega(P, Q)\frac{dU(Q)}{dn}\right] d\sigma$$

dalla quale si deduce l'analiticità delle soluzioni.

(1) Cfr. Fubini, *I principi fondamentali della teoria delle funzioni armoniche negli spazi di curvatura costante.* («Annali R. Sc. Norm. Sup. di Pisa», IX, 1902).

(2) Tricomi, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto.* («Mem. Acc. Lincei», 5ª, vol. XIV, 1923).

(3) Bianchi, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 U = 0$ *nello spazio indefinito non euclideo.* («Rend. Lincei», 5ª, IX, 1900).

Se il dominio è una sfera, di cui P è il *pseudocentro* (centro nella metrica iperbolica) si hanno i teoremi di media, corrispondenti a quelli di Green e di Boggio-Zaremba:

$$U(P)\int_{\sigma}\frac{d\sigma}{\zeta^2}=\int_{\sigma}U(Q)\frac{d\sigma}{\zeta^2}\quad,\quad U(P)\int_{\tau}\frac{d\tau}{\zeta^3}=\int_{\tau}U(Q)\frac{d\tau}{\zeta^3}\,.$$

Queste proprietà sono caratteristiche delle soluzioni di (A), nelle stesse condizioni considerate da Levi [1] per le ordinarie funzioni armoniche. Da esse derivano il teorema di unicità e le proprietà ad esso connesse, sia per i domini di 1ª che di 2ª specie.

3. *Il potenziale di doppio strato iperbolico e le sue applicazioni.* - Partendo dalla soluzione $\Omega(P,Q)$ (n. 1) come potenziale iperbolico elementare, si può costruire una *funzione potenziale di doppio strato*

$$W(P)=\int\mu\,d\omega_P^*=\int_{\sigma}\mu\frac{d\omega_P^*}{d\sigma}\,d\sigma$$

la quale soddisfa alla (A) in ogni punto esterno alla superficie σ e alla sua immagine σ_1 rispetto al piano limite; nell'intorno di un tale punto essa è anzi analitica. La superficie σ può avere anche punti sul piano $\zeta=0$, o giacervi, tutta o in parte; per i punti del piano $\zeta=0$ l'espressione del $d\omega_P^*$ è allora:

$$d\omega_P^*=\frac{4\zeta_P^2}{r^4}\frac{d\zeta_Q}{dn}\,d\sigma\,.$$

In ogni caso, nei punti del piano limite esterni alla superficie potenziante la $W(P)$ si annulla. Per i limiti della $W(P)$ al tendere di P a un punto di M di σ vale la formula di Neumann:

$$\lim_{P\to M}\{W(P)-\mu_M\omega_P^*\}=W(M)-\mu_M\omega_M^*$$

con l'unica sostituzione degli angoli solidi iperbolici a quelli euclidei. In base a questa formula si può svolgere per i domini di 1ª specie il metodo di Neumann per la risoluzione del problema di valori al contorno, come ha mostrato Fubini (loc. cit.); e anche la riduzione a un'equazione integrale di Fredholm, di 2ª specie. Per i domini di 1ª specie il nucleo è regolare e l'equazione risolubile; invece per i domini di 2ª specie le singolarità del nucleo non sembrano garantire la validità dei tre teoremi fondamentali di Fredholm.

(1) Levi E., *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* («Rend. Lincei», 5ª, XVIII, 1909).

Si ha però un risultato molto semplice e per noi fondamentale nel caso di una semisfera terminata al piano limite: la formula di Neumann dà immediatamente la soluzione che prende valori assegnati sulla superficie curva e valori nulli sul piano limite. La semisfera essendo immagine di un semispazio iperbolico, si ha qui l'analogia perfetta col semispazio euclideo. La soluzione essendo data dal potenziale di un doppio strato disteso sulla semisfera, è analitica sul piano limite. Ne segue l'importante conseguenza che le soluzioni della (A) regolari in un dominio τ terminato a un dominio piano π_0 del piano limite e nulle su π_0, sono analitiche nei punti di π_0.

Altro caso importante si ha dalla considerazione dei doppi strati distesi su un dominio π_0 del piano limite. La formula di Neumann mostra che mediante un tale doppio strato si esprime la soluzione della (A) regolare in tutto lo spazio esterno al dominio π_0 e che assume su π_0 valori assegnati. In forma diversa, tale risultato risale a Bianchi (loc. cit.); e perciò abbiamo designato come *integrale di Bianchi* l'espressione

$$W(P) = \frac{\zeta_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

che, per i dati valori $U(Q)$, rappresenta la soluzione.

Il problema di valori al contorno per la semisfera si può allora risolvere anche per il caso che i valori dati sul cerchio limite π_0 non siano nulli; la soluzione è la somma di una parte analitica anche nei punti di π_0 (potenziale di un doppio strato disteso su σ) e di un integrale di Bianchi, generalmente non analitico nei punti di π_0; e la decomposizione si applica poi subito a tutti i domini terminati a un dominio del piano limite.

4. *Il problema di valori al contorno per i domini di 2ª specie.* – Questo problema può essere risoluto sotto condizioni molto generali operando con un passaggio al limite a partire da opportuni domini parziali di 1ª specie, per i quali il problema è supposto risoluto, con mezzi qualsivogliano. Diamo una breve indicazione del procedimento.

Sia τ un dominio di 2ª specie, terminato dal contorno σ fuori del piano limite e da π_0 sul piano limite. Per h sufficientemente piccolo, il piano $\zeta = h$ taglierà il dominio; sia π_h l'intersezione, τ_h e σ_h le parti di τ e di σ per le quali è $\zeta \geqq h$. *Supponiamo che sia dimostrata l'esistenza della soluzione regolare in τ_h che assume valori noti su σ_h e valori nulli su π_h, e si sappia che i suoi valori sono sempre compresi tra il limite superiore e inferiore dei valori assunti al contorno* (1).

(1) Questa seconda condizione è necessaria, non potendosi ritenere senz'altro valida la proprietà in discorso, a causa delle discontinuità che in generale si presenteranno lungo l'orlo di σ_h. Si possono però assegnare casi assai generali in cui la condizione è soddisfatta; per es. se l'orlo di σ_h è costituito da una o più linee rettificabili.

Siano assegnati su σ e su π_0 valori arbitrari, distribuiti con continuità, salvo al più nell'intorno dell'orlo l di σ, ma ad ogni modo limitati. La considerazione di un certo integrale di Bianchi permette di supporre nulli i valori su π_0, ciò che appunto faremo. Si cerchi allora la soluzione regolare in τ_h che assume su σ_h i valori U_σ noti e su π_h il valore zero; e sia essa $W(P, h)$. *Per ogni punto* P *interno a* τ, *od anche giacente su* σ, *esiste il limite di* $W(P, h)$ *per* $h \to 0$ *ed è la funzione* $W(P)$ *cercata.*

La dimostrazione della convergenza è agevole quando i valori U_σ sono positivi o nulli; risulta infatti allora che per un dato P il valore di $W(P, h)$ al decrescere di h è limitato e mai decrescente. A questo caso ci si può sempre ridurre potendosi sempre rappresentare la funzione U_σ come differenza di due funzioni non negative.

La stessa semplificazione permette di dimostrare che la funzione limite $W(P)$ soddisfa ai teoremi di media, ed è quindi soluzione, e ne segue l'uniformità della convergenza in ogni dominio tutto interno a τ.

Più delicata è la verifica delle condizioni al contorno, che non possiamo perciò utilmente riassumere; essa viene completata da dimostrazioni di uniforme convergenza in domini appartenenti a τ e che affiorino al contorno in regioni dove la distribuzione dei valori non presenta discontinuità.

5. *Soluzioni con derivate regolari sul piano limite.* – Alla ricerca precedente si collega la seguente questione, essenziale per lo studio delle soluzioni regolari nei domini di 3ª specie. Sotto quali condizioni per i valori assegnati sui contorni σ e π_0 del dominio τ di 2ª specie la soluzione $W(P)$ possiede nei punti interni di π_0 derivate prime e seconde pure determinate e finite? La questione si riconduce subito ad un caso particolare: quello dell'integrale di Bianchi

$$U(P) = \frac{\zeta^2}{\pi} \int_{\pi_0} A(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

determinato dai valori assegnati alla soluzione sul contorno π_0. Poichè la (A) dà, per $\zeta = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial \zeta} = 0$, dovrà essere finito il limite:

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{U(x, y, \zeta) - U(x, y, 0)}{\zeta^2} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{U(x, y, \zeta) - A(x, y)}{\zeta^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U(x, y, \zeta)}{\partial \zeta^2} \right)_{\zeta = 0}.$$

La ricerca delle condizioni (che *a priori* non possono ritenersi sufficienti al nostro scopo primitivo) affinchè questo limite sia finito *in tutto* π_0 non può essere riassunta in poche righe; diremo soltanto che può introdursi un operatore Φ, avente il carattere di un Δ_2 *generalizzato* (poichè si riduce all'ordinario Δ_2 sotto certe condizioni qualitative per la funzione operanda), tale che in tutto π_0 debba essere $\Phi A(Q) = 0$. Ora le proprietà

che l'operatore Φ ha comuni col Δ_2 sono sufficienti a provare che *la* $A(Q)$ *deve essere armonica in* π_0 (1).

Una facile verifica prova poi che questa condizione è sufficiente perchè l'integrale di Bianchi possegga le derivate richieste. Del resto si proverà tra poco direttamente che l'integrale è anzi, sotto quella condizione, funzione analitica nell'intorno di ogni punto interno a π_0.

Come si è avvertito, la conclusione trovata vale per ogni soluzione regolare in un dominio di 2^a specie terminato a π_0.

6. *Il teorema di unicità per i domini di* 3^a *specie.* - Sia $U(P)$ una soluzione regolare in un dominio τ di 3^a specie, nulla al contorno; sia π_0 l'intersezione di τ col piano $z = 0$, τ' e τ'' i domini di 2^a specie in cui essa divide τ. La $U(P)$, avendo nei punti di π_0 derivate prime e seconde pure determinate e finite, si riduce su π_0 a una funzione armonica, nulla al contorno, quindi nulla su tutto π_0. Sul contorno di ciascuno dei domini di 2^a specie τ', τ'', la $U(P)$ è nulla, quindi è nulla in ogni loro punto, cioè in tutto τ.

Segue subito la unicità della soluzione che assume sul contorno di τ valori assegnati, distribuiti con continuità.

7. *Analiticità delle soluzioni regolari nei domini di* 3^a *specie.* - Conserviamo le precedenti ipotesi sul dominio di 3^a specie τ. Sia $U(P) = U(x, y, z)$ una soluzione regolare in τ, la quale quindi si ridurrà per $z = 0$ a una funzione armonica $A(x, y)$. Si vedrà subito che la $U(x, y, z) - A(x, y)$ è una soluzione, regolare in τ, nulla per $z = 0$, quindi analitica nell'intorno di π_0, sia che la si consideri in τ' che in τ''. E poichè $A(x, y)$, come funzione armonica, è analitica, segue che $U(x, y, z)$ è pure analitica nei due intorni di π_0.

Diciamo di più che le due funzioni analitiche così definite in τ' e τ'' sono l'una il prolungamento dell'altra; basterà provare per questo che nei punti di π_0 le loro derivate di ogni ordine coincidono. Ora derivando n volte l'equazione (A) rispetto a z, per $z = 0$, a destra, si trova:

$$n\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^{n-1} U}{\partial z^{n-1}}\right)_{z=+0} = \left(\frac{\partial^{n+1} U}{\partial z^{n+1}}\right)_{z=+0}$$

(1) Sotto condizioni più restrittive (a noi basta invece supporre la continuità della $A(x, y)$) la deduzione è immediata. Dalla (A) segue infatti:

$$\lim_{z \to 0} \Delta_2 U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{z=0};$$

basta ammettere la continuità delle derivate seconde pure rispetto a z per $z = 0$ per ottenere

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{z=0} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{z=0} = 0.$$

dalla qual relazione ricorrente si vede che le derivate di ordine dispari sono nulle e quelle di ordine pari si esprimono tutte in funzione di $\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}$. Lo stesso avviene per le derivate a sinistra, che hanno la stessa espressione. Ora la $\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}$ ha un unico valore, sia per $\zeta = +0$ che per $\zeta = -0$, quindi lo stesso avviene per le altre derivate rispetto a ζ. La cosa si estende subito a tutte le altre derivate, onde ne segue la tesi.

Possiamo concludere che le soluzioni della (A) regolari in un dominio, di qualunque specie, sono analitiche in ogni punto interno al dominio.

8. *Impossibilità in generale del problema di valori al contorno per i domini di 3ª specie.* – Nel numero precedente si è trovato che se una soluzione è regolare nell'intorno di un dominio π_0 del piano limite, le derivate di ordine dispari rispetto a ζ nei punti del piano limite sono nulle. Quindi: *le soluzioni regolari in un dominio di 3ª specie sono funzioni pari di* ζ. Ne segue che assegnati i valori che deve assumere una soluzione sul contorno di un dominio di 3ª specie, tale soluzione *non esisterà in generale*. Se esiste, il procedimento analogo a quello usato al n. 6 permetterà ad ogni modo di determinarla.

9. Le considerazioni dei nn. 1-5, relative ai domini di 1ª e 2ª specie si estendono facilmente all'equazione di Laplace relativa all' S_n iperbolico per n qualunque (> 3),

$$(B) \qquad x_n \Delta_2 U - (n-2)\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \qquad \left(\Delta_2 = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$$

Non così le deduzioni seguenti, le quali cadono completamente per $n > 3$, non valendo neppure i corrispondenti risultati. Così la funzione x_n^{n-1} soddisfa alla (B) e considerata per $x_n > 0$ si raccorda regolarmente alla soluzione identicamente nulla nel semispazio $x_n < 0$, cioè non si ha analiticità nei punti del piano limite. Per i domini di 3ª specie il teorema di unicità è falso; il problema di esistenza indeterminato.

È probabile che risultati analoghi a quelli ottenuti per $n = 3$ si possano dimostrare per $n > 3$ imponendo alle soluzioni nei punti del piano limite condizioni più restrittive, nelle quali intervengano derivate di ordine superiore al 2°. Si può osservare però che tali condizioni non sono allora più quelle strettamente necessarie perchè l'equazione da integrare conservi ovunque significato.

Matematica. — *Sulle quadriche dello spazio riemanniano a tre dimensioni.* Nota di GINA BURANI, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Slebodzinski in una sua Nota dallo stesso titolo della presente pubblicata nei « Comptes Rendus » dell'anno scorso (tome 184, n. 8, p. 424), definisce come quadrica di uno spazio riemanniano V_3 una superficie Q le cui linee asintotiche sono delle geodetiche di Q e, per conseguenza di V_3.

Mi sono proposta di vedere se per quadriche così definite vale il teorema di Bonnet secondo cui: « Le quadriche (di S_3) sono caratterizzate dalla proprietà che lungo ciascuna linea di curvatura il relativo raggio principale di curvatura è proporzionale al cubo dell'altro » ed ho trovato che in genere non vale.

Il procedimento della ricerca mi ha permesso di individuare nella famiglia generale delle quadriche di Slebodzinski, quella delle quadriche, che chiamo di Liouville, (in quanto il loro ds^2 è esprimibile nella forma di Liouville) i cui raggi principali di curvatura sono legati da una relazione del tipo $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_2)}$, famiglia che comprende alla sua volta quella delle quadriche che chiamo di Bonnet (in quanto per esse vale il teorema di Bonnet) i cui raggi principali di curvatura soddisfano a due relazioni rispettivamente del tipo $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_2)}$, $R_1 \cdot R_2 = c f_1^2(x_1) \cdot f_2^2(x_2)$ (o a due ad esse equivalenti).

Queste quadriche a mano a mano che si vanno particolarizzando presentano sempre maggiore analogia con le quadriche dello spazio ordinario, le quali trovano perfetto riscontro di proprietà nelle quadriche di Bonnet.

È importante notare che le superficie coordinate di un ds^2 a tre dimensioni espresso nella forma di Liouville sono quadriche di Bonnet.

1. Come si può tradurre analiticamente la definizione di quadrica di Slebodzinski?

Data una superficie Q di V_3, riferendola alle linee di curvatura il suo elemento lineare assume la forma

$$(1) \qquad ds^2 = b_{11}\, dx_1^2 + b_{22}\, dx_2^2$$

(1) Nella seduta del 19 febbraio 1928.

e l'equazione delle asintotiche diventa

$$\Omega_{11}\,dx_1^2 + \Omega_{22}\,dx_2^2 = 0 \tag{2}$$

equivalente alle due

$$\sqrt{\Omega_{11}}\,dx_1 + i\sqrt{\Omega_{22}}\,dx_2 = 0 \quad ; \quad \sqrt{\Omega_{11}}\,dx_1 - i\sqrt{\Omega_{22}}\,dx_2 = 0\,.$$

Differenziando queste ultime, indi sommando e sottraendo le equazioni ottenute, si hanno le due equazioni:

$$\frac{\partial \lg\sqrt{\Omega_{11}}}{\partial x_1}\,dx_1^2 + \frac{\partial \lg\sqrt{\Omega_{11}}}{\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 + d^2x_1 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \lg\sqrt{\Omega_{22}}}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+ \frac{\partial \lg\sqrt{\Omega_{22}}}{\partial x_2}\,dx_2^2 + d^2x_2 = 0$$

che, moltiplicate rispettivamente per dx_2 e dx_1 e sottratte dànno luogo all'equazione

$$d^2x_1\,dx_2 - d^2x_2\,dx_1 = \frac{\partial \lg\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}}{\partial x_1}\,dx_1^2\,dx_2 + \frac{\partial \lg\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}}{\partial x_2}\,dx_1\,dx_2^2.$$

Se le asintotiche della superficie sono anche geodetiche, questa equazione, per valori di dx_1 e di dx_2 tratti da (2), deve coincidere con quella delle geodetiche, cioè, per valori di dx_1 e dx_2 tratti da (2), deve essere

$$\frac{\partial \lg\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}}{\partial x_1}\,dx_1^2\,dx_2 + \frac{\partial \lg\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}}{\partial x_2}\,dx_1\,dx_1^2 = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} dx_1^3 +$$

$$+ \left[2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right] dx_1^2\,dx_2 + \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right] dx_1\,dx_2^2 - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} dx_2^3.$$

Ponendo in questa equazione da prima

$$dx_1 = i\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}\,dx_2\,, \quad \text{indi} \quad dx_1 = -\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}\,dx_2\,,$$

poi sommando e sottraendo le due equazioni ottenute mediante la sostituzione, si perviene alle due espressioni:

$$\frac{\partial \lg\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}}{\partial x_1} = 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\Omega_{11}}{\Omega_{22}} \quad ; \quad \frac{\partial \lg\sqrt{\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}}}{\partial x_2} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\Omega_{22}}{\Omega_{11}}$$

che, calcolati i simboli di Christoffel relativamente alla (1) ed introdotti i raggi principali di curvatura $R_1 = \frac{b_{11}}{\Omega_{11}}$ e $R_2 = \frac{b_{22}}{\Omega_{22}}$, si trasformano a calcoli fatti nelle due equivalenti:

$$(S)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lg \sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}}{\partial x_1} = \left(1 - \dfrac{R_2}{R_1}\right) \dfrac{\partial \lg \sqrt{b_{22}}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \lg \sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}}{\partial x_2} = \left(\dfrac{R_1}{R_2} - 1\right) \dfrac{\partial \lg \sqrt{b_{11}}}{\partial x_2} . \end{cases}$$

Queste relazioni rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti cui devono soddisfare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di una superficie Q di V_3 affinchè sia una quadrica di Slebodzinski.

2. Il teorema di Bonnet sopra citato, indicando con R_1 il raggio principale di curvatura relativo a $dx_2 = 0$ e con R_2 quello relativo a $dx_1 = 0$, è espresso dalle due relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_1}{R_2^3}\right) = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_2}{R_1^3}\right) = 0 .$$

Valgono in generale le uguaglianze:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_1}{R_2^3}\right) = \frac{R_1}{R_2^3}\left(\frac{\partial \lg R_1}{\partial x_1} - 3\,\frac{\partial \lg R_2}{\partial x_1}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_2}{R_1^3}\right) = \frac{R_2}{R_1^3}\left(\frac{\partial \lg R_2}{\partial x_2} - 3\,\frac{\partial \lg R_1}{\partial x_2}\right)$$

che nel caso delle quadriche di Slebodzinski, per le (S), diventano rispettivamente

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_1}{R_2^3}\right) = \frac{2\,R_1}{R_2^3}\left[\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial \lg \sqrt{b_{22}}}{\partial x_1} - \frac{\partial \lg R_2}{\partial x_1}\right];$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_2}{R_1^3}\right) = \frac{2\,R_2}{R_1^3}\left[-\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right)\frac{\partial \lg \sqrt{b_{11}}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lg R_1}{\partial x_2}\right]$$

e dimostrano appunto che per queste quadriche in genere non vale il teorema di Bonnet.

Vale però se e solo se assieme alle (S) sono soddisfatte anche le due relazioni seguenti

$$(B)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lg R_2}{\partial x_1} = \left(1 - \dfrac{R_2}{R_1}\right) \dfrac{\partial \lg \sqrt{b_{22}}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \lg R_1}{\partial x_2} = -\left(\dfrac{R_1}{R_2} - 1\right) \dfrac{\partial \lg \sqrt{b_{11}}}{\partial x_2} . \end{cases}$$

Chiamo quadriche di Bonnet quelle particolari quadriche di Slebodzinski che soddisfano alle condizioni di definizione (S) e (B).

Si vede facilmente che il sistema delle (S) e delle (B) è equivalente al sistema delle (S) e delle

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_2)} \quad ; \quad R_1 \cdot R_2 = c \cdot f_1^2(x_1) \cdot f_2^2(x_2) .$$

3. Il sistema delle (S) e di $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_2)}$ definisce delle particolari quadriche di Slebodzinski che sono superficie di Liouville.

Infatti facendo la sostituzione di parametri $x_1 = \frac{1}{f_1}, x_2 = \frac{1}{f_2}$ si ha $\frac{R_2}{R_1} = \frac{x_2}{x_1}$ che, sostituito nelle (S), dà

$$\frac{\partial \lg b_{22}}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1 - x_2} \quad ; \quad \frac{\partial \lg b_{11}}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1 - x_2}$$

da cui

$$b_{22} = (x_1 - x_2)\, U_1(x_1) \quad ; \quad b_{11} = (x_1 - x_2)\, U_2(x_2) .$$

E il ds^2 della quadrica assume la forma

$$ds^2 = (x_1 - x_2)\,[U_1(x_1)\, dx_1^2 + U_2(x_2)\, dx_2^2]$$

o, con una sostituzione di parametri, $ds^2 = (\Lambda_1(x_1) - \Lambda_2(x_2)\,(dx_1^2 + dx_2^2)$, che è appunto un ds^2 di Liouville riferito ai suoi parametri isometrici.

Reciprocamente: se una superficie di Liouville è quadrica di Slebodzinski soddisfa alla condizione $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_2)}$.

Sia $(\Lambda_1 - \Lambda_2)\,(dx_1^2 + dx_2^2) = ds^2$ la superficie V_2 considerata. Posto $\Lambda_1 - \Lambda_2 = M$ e $\zeta = \frac{R_2}{R_1}$ le (S) diventano

$$-\frac{\partial \lg \zeta}{\partial x_1} = (1 - \zeta)\frac{\partial \lg M}{\partial x_1} \quad ; \quad -\frac{\partial \lg \zeta}{\partial x_2} = \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)\frac{\partial \lg M}{\partial x_2} .$$

Da cui, con facile calcolo,

$$\frac{\partial \lg\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta}\right)}{\partial x_1} = \frac{\partial \lg M}{\partial x_1} \quad ; \quad \frac{\partial \lg(\zeta - 1)}{\partial x_2} = \frac{\partial \lg M}{\partial x_2}$$

cioè

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta} = f_2 M \quad ; \quad \zeta - 1 = f_1 M$$

ed infine

$$\zeta = \frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1}{f_2} .$$

Chiamo quadriche di Liouville le quadriche di Slebodzinski che soddisfano alle condizioni di definizione (S) e $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1}{f_2}$.

Sulle quadriche di Liouville, da quanto sopra, le linee di curvatura costituiscono un sistema isotermo. Questo sistema è anche isotermo–coniugato. Infatti la seconda forma fondamentale di una quadrica di Liouville avente il ds^2 espresso nella forma $ds^2 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$ e $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f_1}{f_2}$ è del tipo $\varphi(x_1 x_2)(f_1 dx_1 + f_2 dx_2)$.

È poi evidente che le asintotiche delle quadriche di Liouville (che sono anche geodetiche) si trovano con quadrature.

4. Dato uno spazio riemanniano V_3 il cui elemento lineare sia espresso nella forma generale di Liouville

$$ds^2 = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)\,dx_1^2 + (X_2 - X_1)(X_2 - X_3)\,dx_2^2 + \\ + (X_3 - X_1)(X_3 - X_2)\,dx_3^2$$

con $X_i = X_i(x_i)$, le superficie coordinate $x_i = \text{cost.}$ costituiscono una famiglia isoterma di quadriche di Bonnet.

Consideriamo p. es. la superficie coordinata $x_3 = 0$ ed indichiamo con $\overline{X}_3$ il valore di X_3 per $x_3 = 0$.

L'elemento lineare di $x_3 = 0$ è:

$$ds^2 = (X_1 - X_2)(X_1 - \overline{X}_3)\,dx_1^2 + (X_2 - X_1)(X_2 - \overline{X}_3)\,dx_2^2.$$

I coefficienti della sua seconda forma fondamentale sono [1]

$$\Omega_{11} = \frac{-(X_1 - X_2)\overline{X}_3'}{2\sqrt{(X_3 - X_1)(X_3 - X_2)}} \quad ; \quad \Omega_{12} = 0 \quad , \quad \Omega_{22} = \frac{-(X_2 - X_1)\overline{X}_3'}{2\sqrt{(X_3 - X_1)(X_3 - X_2)}}.$$

Da cui

$$R_1 = -\frac{2}{\overline{X}_3'}(X_1 - \overline{X}_3)\sqrt{(X_1 - \overline{X}_3)(X_2 - \overline{X}_3)},$$

$$R_2 = -\frac{2}{\overline{X}_3'}(X_2 - \overline{X}_3)\sqrt{(X_1 - \overline{X}_3)(X_2 - \overline{X}_3)}.$$

Si verifica immediatamente che queste quantità, unitamente a b_{11} e b_{22} dati dal ds^2 ultimo scritto soddisfano identicamente alle (S) e alle (B).

(1) Cfr. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª edizione, vol. II, p. 454.

Matematica. — *Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve sghembe.* Nota di G. Palozzi, presentata [1] dal Socio G. Castelnuovo.

1. E. Bompiani, in una recente Nota dell'Accademia dei Lincei [2], nell'intento di dare un fondamento geometrico diretto alla teoria proiettiva delle curve piane (prive di singolarità), ha considerato certi invarianti infinitesimi di contatto fra curve piane, ed ha utilizzato, per la costruzione di questi invarianti, un procedimento già adoperato da C. Segre [3] per dimostrare che due curve piane, aventi in un punto la stessa tangente ed un contatto d'ordine egualmente elevato con questa, hanno un invariante proiettivo (finito).

In un'appendice alla Geometria proiettivo-differenziale di Fubini e Čech [4], posteriore alla Nota suindicata, lo stesso Bompiani, dopo avere osservato come sia ancora da fare la ricerca degli invarianti proiettivi di contatto fra curve sghembe, ha suggerito, per tale ricerca, la seguente estensione del procedimento del Segre: « Si seghino due curve c e $\bar{c}$, aventi in un punto ordinario O un contatto d'ordine $n \geq 1$, e la tangente comune t con un piano ω, prossimo ad O, nei punti P, $\overline{P}$, T; poi si proiettino questi punti da una retta r per O e si consideri il birapporto D dei tre piani $\pi, \overline{\pi}, \tau$ così ottenuti e di un quarto piano arbitrario σ per r. Lo studio di D, e precisamente della sua dipendenza da ω, r, σ, fornirà gli invarianti di contatto delle due curve c e $\bar{c}$ ».

A questo studio è dedicata la presente Nota.

2. Riferite le due curve c e $\bar{c}$ ad un qualsiasi sistema di coordinate proiettive non omogenee X Y Z avente l'origine in O e l'asse X coincidente con la tangente t, le equazioni di c e $\bar{c}$ si scriveranno, in un intorno di o,

$$Y = X^2 \sum_0^\infty{}_i \, a_i X^i \qquad Y = X^2 \sum_0^\infty{}_i \, \bar{a}_i X^i$$

$$Z = X^2 \sum_0^\infty{}_i \, \alpha_i X^i \qquad Z = X^2 \sum_0^\infty{}_i \, \bar{\alpha}_i X^i$$

(1) Nella seduta del 19 febbraio 1928.
(2) *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane.* Ser. VI, vol. III, 1926.
(3) *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche,* ecc. Ser. V, vol. VI, 1897.
(4) Zanichelli, Bologna.

e si avrà, se (come supporrò) c e $\bar{c}$ hanno in O un contatto d'ordine $k+1$ $(k \geqq 0)$, $a_i = \bar{a}_i$ e $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ per $i < k$, ma $a_k \neq \bar{a}_k$ o $\alpha_k \neq \bar{\alpha}_k$ necessariamente. Sia, per es., $\alpha_k \neq \bar{\alpha}_k$.

Sia poi

$$(1) \qquad X = pY + qZ + \varepsilon \qquad (p = p_0 + p_1\varepsilon + \cdots, \; q = q_0 + q_1\varepsilon + \cdots)$$

l'equazione del piano ω. L'ascissa x del punto P ha uno sviluppo del tipo

$$(2) \qquad x = \varepsilon + \varepsilon^2 \sum_0^\infty{}_j \delta_j \varepsilon^j = \varepsilon \left(1 + \varepsilon \sum_0^\infty{}_j \delta_j \varepsilon^j\right)$$

ove le δ_j si determinano uguagliando i coefficienti dei termini simili nell'identità

$$\sum_0^\infty{}_j \delta_j \varepsilon^j = \left(1 + \varepsilon \sum_0^\infty{}_j \delta_j \varepsilon^j\right)^2 \sum_0^\infty{}_i (p\,a_i + q\,\alpha_i)\,\varepsilon^i \left(1 + \varepsilon \sum_0^\infty{}_j \delta_j \varepsilon^j\right)^i.$$

Per ciò che segue, non è però necessario calcolare effettivamente le δ_j; basta, invece, osservare semplicemente che per una qualunque δ_j si ha

$$\delta_j = a_j p_0 + \alpha_j q_0 + \cdots$$

e per una δ_{j+1} con $j > 0$

$$\delta_{j+1} = a_{j+1} p_0 + \alpha_{j+1} q_0 + a_j p_1 + \alpha_j q_1 + (j+4)(a_j p_0 + \alpha_j q_0)(a_0 p_0 + \alpha_0 q_0) + \cdots$$

ove i termini indicati brevemente con $\cdots$ sono indipendenti dalle a_i e α_i con $i \geqq j$.

Similmente, $\bar{P}$ avrà un'ascissa $\bar{x}$ per la quale varrà uno sviluppo dello stesso tipo di (2); e, indicando con $\bar{\delta}_j$ i coefficienti dei termini di questo sviluppo, ogni $\bar{\delta}_j$ e ogni $\bar{\delta}_{j+1}$ con $j > 0$ sarà data, a meno di termini non contenenti $\bar{a}_i$ e $\bar{\alpha}_i$ con $i \geqq j$, dalle relazioni che si deducono dalle ultime due soprascritte col cambiamento di a_i e α_i in $\bar{a}_i$ e $\bar{\alpha}_i$.

L'asse Y non essendo stato fissato, non si diminuisce l'arbitrarietà della retta r supponendo che questa retta non sia situata sul piano XY. A rappresentare r si potranno allora assumere le equazioni

$$(3) \qquad X = lZ \qquad\qquad Y = mZ$$

e sghemba con r sarà certo ogni retta di equazioni del tipo

$$(4) \qquad Y = nY - h \qquad\qquad Z = 0.$$

Il piano π proiettante da r il punto P (x, y, z) ha per equazione

$$X(mz - y) + Y(x - lz) + Z(ly - mx) = 0;$$

cambiando x, y, z in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ si ottiene da questa l'equazione del piano $\bar{\pi}$ proiettante $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; e con la seconda delle (3) coincide l'equazione di τ. Per conseguenza, come equazione di σ può prendersi

$$X(mz - y) + Y(x - lz) + Z(ly - mx) + \lambda(Y - mZ) = 0$$

con $\lambda \neq 0$, altrimenti $\sigma \equiv \pi$.

Indicate con $X, \bar{X}, X_\tau, X_\sigma$ le ascisse dei punti in cui la retta (4) incontra i piani $\pi, \bar{\pi}, \tau, \sigma$, si ha

$$D = (\pi\bar{\pi}\tau\sigma) = (X\bar{X}X_\tau X_\sigma) = 1 + [(\bar{x} - l\bar{z})(mz - y) - (x - lz)(m\bar{z} - \bar{y})]\frac{1}{\lambda(\bar{y} - m\bar{z})}$$ (1)

e quindi, per l'ipotesi sull'ordine del contatto fra c e $\bar{c}$ e per l'osservazione sulla dipendenza di δ_j e $\bar{\delta}_j$ da $a_i, \alpha_i, \bar{a}_i, \bar{\alpha}_i$, e purchè m sia tale da rendere $\bar{a}_0 - m\bar{\alpha}_0 \neq 0$,

$$D = 1 + \frac{m\alpha_k - a_k - (m\bar{\alpha}_k - \bar{a}_k)}{\lambda(\bar{a}_0 - m\bar{\alpha}_0)}\varepsilon^{k+1} + \dots$$

ove i termini non scritti contengono tutti a fattore ε^{k+2}.

Si determini ora m in modo che sia

$$m\alpha_k - a_k - (m\bar{\alpha}_k - \bar{a}_k) = 0 \qquad (\alpha_k - \bar{\alpha}_k \neq 0).$$

Dallo sviluppo di D che precede, se il valore di m che così si ottiene non soddisfa all'uguaglianza $\bar{a}_0 - m\bar{\alpha}_0 = 0$, o dal significato geometrico di questa, nel caso contrario risulta, che *il piano*

$$Y(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) = Z(a_k - \bar{a}_k),$$

determinato dagli intorni d'ordine $k + 2$ di O su c e $\bar{c}$, *è proiettivamente invariante.*

Se, com'è lecito, si assume questo piano come piano ZX, si ha che le proiezioni di c e $\bar{c}$ sul piano XY fatte (parallelamente all'asse Z e quindi) da un punto qualunque del piano ZX (poichè, in questo pianò, non è stato fissato l'asse Z nè, su questo, il punto all'infinito) hanno un contatto d'ordine $k + 2$, almeno. Si giunge così (ma per altra via) al *teorema di Halphen:*

Se due curve sghembe c e $\bar{c}$ hanno, in un punto ordinario O, *un contatto d'ordine* $(k + 1 =) n \geq 1$, *nel fascio dei piani passanti per la comune tangente v'è un* PIANO PRINCIPALE *tale che le proiezioni di c e $\bar{c}$ da un suo punto qualunque hanno un contatto d'ordine* $(k + 2 =) n + 1$, *almeno* (2).

(1) Se fosse $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$ (e quindi $a_k \neq \bar{a}_k$), bisognerebbe considerare, in luogo di D, il birapporto $(X\bar{X}X_\sigma X_\tau) = \frac{1}{D}$.

(2) *Sur les invariants différentielles des courbes gauches.* « Journal de l'Ecole Polytechnique », t. XXVII, 1880.

3. Per continuare l'analisi, supporrò che sia $\bar{a}_0 - m\bar{\alpha}_0 \neq 0$ e $k \geq 1$. Per aver preso il piano principale come piano ZX, si ha

$$D = 1 + [x\bar{y} - \bar{x}y + l(\bar{z}y - z\bar{y})]\frac{1}{\lambda\bar{y}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\lambda\bar{a}_m}[\bar{a}_{k+1} - a_{k+1} + q_0(\bar{\alpha}_k - \alpha_k)a_0 + l(\bar{\alpha}_k - \alpha_k)a_0]\varepsilon^{k+2} + \cdots,$$

i termini omessi contenendo a fattore ε^{k+3}. D'altra parte, quando ω tende a passare per O, la retta secondo cui ω taglia il piano principale tende alla retta che ha per equazione (in questo piano)

$$X = q_0 Z. \tag{5}$$

Pertanto, se a q_0 si fa corrispondere quel valore di l per cui s'annulla, nel precedente sviluppo, il coefficiente del termine in ε^{k+2}, si ha che, quando la retta (5) descrive, nel piano principale, il fascio di centro O, la retta di equazioni (3) (nella seconda delle quali è ora $m = 0$) descrive lo stesso fascio e i fasci sovrapposti descritti da tali due rette si corrispondono in una involuzione non parabolica avente per rette doppie l'asse X e *la retta*

$$2(\bar{\alpha}_k - \alpha_k)a_0 X = (a_{k+1} - \bar{a}_{k+1})Z$$

che è perciò una retta *proiettivamente invariante*, dipendente dagli intorni $k + 2$ di O su c e $\bar{c}$.

Prendendo tale retta come asse Z, si riconosce immediatamente che essa è la *retta principale di Bompiani* (luogo dei punti del piano principale proiettando dai quali c e $\bar{c}$ si ottengono due curve aventi un contatto d'ordine $k + 3$, almeno) [1]. Per questa retta sussiste dunque la proprietà:

Se due curve sghembe c e $\bar{c}$ hanno, in un punto ordinario O, *un contatto d'ordine* $(k + 1 =) n > 1$ *ed il piano principale distinto dal piano osculatore comune, gli intorni d'ordine* $(k + 2 =) n + 1$ *di* O *sulle due curve determinano nel fascio di rette, che ha per centro* O *e per sostegno il piano principale, una involuzione (non parabolica) avente per rette doppie la retta principale e la tangente comune a c e $\bar{c}$.*

4. Si consideri la curva inviluppo delle rette d'intersezione dei piani (1) con ω e poi il punto di contatto $\left(X = 0, Z = -\frac{1}{q_1}\right)$ di questa curva con la retta principale. Siccome è

$$D = 1 + (x\bar{y} - \bar{x}y)\frac{1}{\lambda\bar{y}} = 1 + \frac{1}{\lambda\bar{a}_0}[\bar{a}_{k+2} - a_{k+2} + 2q_1(\bar{\alpha}_k - \alpha_k)a_0]\varepsilon^{k+3} + \cdots$$

(1) *Sul contatto di due curve sghembe.* « Mem. Accad. Scienze di Bologna », ser. VIII, t. III, 1925-26.

ove $+ \cdots$ accenna termini contenenti a fattore ε^{k+4}, si vede che si può fissare sulla retta principale, e in relazione agli intorni d'ordine $k+3$ di O su c e $\bar{c}$, un *punto proiettivamente invariante* che coincide col *punto principale* (1).

5. La seconda delle due ipotesi introdotte al n. 3 è dovuta al fatto che esigenze di calcolo richiedono che il caso $k = 0$ sia trattato separatamente dal caso $k > 0$. Ma anche se $k = 0$, cioè anche *se le due curve c e $\bar{c}$ hanno in* O *un contatto del primo ordine (purchè però non abbiano lo stesso piano osculatore) seguitano a sussistere le conclusioni dei nn. 3 e 4*, come è facile verificare.

Al contrario, vien meno la validità di questi risultati, se si suppone che c e $\bar{c}$ abbiano un contatto del primo ordine e, inoltre, lo stesso piano osculatore (o, più in generale, se, qualunque sia l'ordine di contatto, il piano osculatore comune coincide col piano principale). Infatti, basta cercare nel piano osculatore, assunto, p. es., come piano ZX, un punto dal quale c e $\bar{c}$ siano proiettate, per es., sul piano XY in due curve aventi un contatto del terzo ordine, per convincersi dell'impossibilità di determinare la retta principale (e quindi anche il punto principale).

A render ragione, almeno per $k = 0$, di tale impossibilità, riprendiamo la considerazione del birapporto D, riguardandovi ora m arbitrario. Si ha, per essere $a_0 = \bar{a}_0 = 0$

$$D = 1 + \frac{1}{\lambda\alpha_0}\left\{(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0)\varepsilon + [m(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1) + 2m q_0(\alpha_0^2 - \bar{\alpha}_0^2) + \bar{a}_1 - a_1]\varepsilon^2 + \cdots\right\}$$

da cui risulta che, facendo corrispondere ad m quel valore di q_0 per cui si annulla, in questo sviluppo, il coefficiente del termine in ε^2 e facendo poi variare m, alla tangente comune a c e $\bar{c}$ (considerata come intersezione del piano rappresentato dalla seconda delle (9) col piano ZX) vengono a corrispondere tutte le rette (5) del fascio di centro O di questo piano.

Dunque:

Se due curve sghembe c e $\bar{c}$ hanno in un punto ordinario O *un contatto del 1° ordine e lo stesso piano osculatore, gli intorni del 2° ordine di* O *sulle due curve determinano, nel fascio di rette di questo piano, con centro in* O, *una involuzione parabolica di cui l'unica retta doppia è la tangente comune a c e $\bar{c}$.*

(1) *Sul contatto di due curve sghembe.* « Mem. Accad. Scienze di Bologna », ser. VIII, t. III, 1925–26.

Matematica. — *Sulla quasicontinuità delle funzioni composte.* Nota di G. Scorza-Dragoni, presentata [1] dal Corrisp. L. Tonelli.

È noto che se $f(y)$ è una funzione continua nella y e $y(x)$ è una funzione quasicontinua nella x, è quasicontinua anche la funzione composta $f(y(x))$.

In questa Nota mi propongo di far vedere che, se la $y(x)$ soddisfa ad una certa condizione, nel teorema precedente all'ipotesi della continuità della $f(y)$ può essere sostituita quella della quasicontinuità [2].

1. Sull'asse delle x sia assegnato uno pseudointervallo I, ed in questo sia definita una funzione $y = y(x)$ quasicontinua e tale che l'insieme J descritto da $y = y(x)$ al variare di x in I sia ancora uno pseudointervallo.

Insieme alla $y = y(x)$ consideriamo la funzione inversa $x = x(y)$, funzione che può anche essere a più valori; mediante la $x(y)$ ogni punto $\bar{y}$ di J è trasformato nell'insieme dei punti di I che verificano l'equazione

$$y(x) = \bar{y}.$$

Ciò posto, la condizione cui alludevo è la seguente: ogni pseudointervallo di misura nulla contenuto in J è trasformato, mediante la $x(y)$, in uno pseudointervallo di misura nulla contenuto in I [3].

2. Supposta verificata la condizione del n. 1 si ha immediatamente che *Se la* $x(y)$ *trasforma gli pseudointervalli della successione*

$$J_1, J_2, J_3, \cdots$$

negli pseudointervalli della successione

$$I_1, I_2, I_3, \cdots,$$

e se è

$$J_1 > J_2 > J_3 > \cdots$$

(1) Nella seduta del 19 febbraio 1928.

(2) In questa Nota mi servo della terminologia adoperata dal Tonelli nei suoi *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna, Zanichelli, 1922.

(3) La condizione non è nuova, se la $y(x)$ pone una corrispondenza biunivoca e continua fra I ed J.

In queste ipotesi l'argomento è stato studiato a fondo da H. Rademacher: *Eineindentige Abbildungen und Messbarkeit*, «Diss. Göttingen, Monatsh. f. Math.», 27, 183-291 (1916).

– nel qual caso è anche $I_1 > I_2 > I_3 > \cdots$ – *e*

$$\lim_{n\to\infty} m J_n = 0 ,$$

è

$$\lim_{n\to\infty} m I_n = 0 .$$

Evidentemente, la $x(y)$ trasforma lo pseudointervallo

$$\lim_{n\to\infty} J_n = J_1 \cdot J_2 \cdots$$

nello pseudointervallo

$$\lim_{n\to\infty} I_n = I_1 \cdot I_2 \cdots ;$$

ma è

$$\lim_{n\to\infty} m I_n = m \lim_{n\to\infty} I_n = m \lim_{n\to\infty} J_n = 0 , \cdots$$

Più generalmente si ha che

Se la $x(y)$ trasforma gli pseudointervalli della successione

$$J_1 , J_2 , J_3 , \cdots$$

negli pseudointervalli

$$I_1 , I_2 , I_3 , \cdots ,$$

e se converge la serie

$$m J_1 + m J_2 + m J_3 + \cdots ,$$

è

$$\lim_{n\to\infty} m I_n = 0 .$$

Posto

$$J'_1 = J_1 + J_2 + J_3 + \cdots \quad , \quad J'_2 = J_2 + J_3 + \cdots \quad , \quad J'_3 = J_3 + J_4 + \cdots , \cdots$$

e

$$I'_1 = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots \quad , \quad I'_2 = I_2 + I_3 + \cdots , \cdots ,$$

si ha che la $x(y)$ trasforma gli pseudointervalli $J'_1, J'_2, \cdots$ negli pseudointervalli $I'_1, I'_2, \cdots$ e che è $J'_1 > J'_2 > \cdots$ e

$$\lim_{n\to\infty} m J'_n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k}^{n \cdots \infty} m J_k = 0 ;$$

per il teorema precedente è dunque

$$\lim_{n\to\infty} m I'_n = 0 ,$$

ma è

$$m I_n \leq m I'_n , \cdots$$

3. Sia $f(y)$ una funzione quasicontinua in J e sia

$$\begin{cases} \delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \cdots \\ \delta_{2,1}, \delta_{2,2}, \delta_{2,3}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

una doppia infinità di intervalli aperti e disgiunti [1] tali che posto

$$J_n = J \cdot \delta_{n,1} + J \cdot \delta_{n,2} + \cdots \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

la $f(y)$ risulti continua in

$$J - J_n$$

nel mentre che è

$$m J_n \leq \sum_{k}^{1 \cdots \infty} m \delta_{n,k} < \frac{1}{2^n} .$$

Diciamo $y'_{i,j}$ ed $y''_{i,j}$ l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $\delta_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, \cdots)$.

L'insieme I_n trasformato di J_n mediante la $x(y)$ è somma delle porzioni di I in cui è

$$y'_{n,1} < y(x) < y''_{n,1} \quad , \quad y'_{n,2} < y(x) < y''_{n,2}, \cdots \qquad (n = 1, 2, \cdots);$$

poichè $y(x)$ è una funzione quasicontinua, ciascheduno di questi insiemi è uno pseudointervallo, quindi è uno pseudointervallo anche I_n. Ma la serie

$$\sum_{k}^{1 \cdots \infty} m J_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

è convergente, quindi è

$$\lim_{n \to \infty} m I_n = 0 . \qquad (1)$$

4. Nell'insieme $I - I_n$ la $y(x)$ è quasicontinua; mentre x varia in $I - I_n$, y varia in $J - J_n$ e in questo insieme $f(y)$ è continua. Di qui si deduce che $f(y(x))$ è quasicontinua in $I - I_n$, e, data la (1) e l'arbitrarietà di n, che $f(y(x))$ è quasicontinua in I.

Matematica. — *Sul concetto di tensore costante in varietà qualunque.* Nota di A. Masotti, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cioè, privi di punti comuni.

Geometria. — *Coordinate locali nella geometria proiettivo-differenziale di una superficie: gli elementi unità.* Nota di E. Bortolotti, presentata[1] dal Socio G. Castelnuovo.

1. È noto quanto riesca proficuo, nello studio della geometria proiettivo-differenziale di una superficie, l'uso di un opportuno riferimento *locale*. La scelta di un *tetraedro* collegato al punto variabile x della superficie (che supporremo sempre non rigata) in modo intrinseco a questa e invariante per proiettività, può farsi in varie maniere[2]; ad es. Fubini e Čech, nel loro Trattato[3], riferiscono i punti e i piani associati all'intorno di x a due diversi tetraedri, tra loro duali rispetto alla quadrica di Lie relativa ad x. Ricorderò che i due tetraedri (T_1, T_2) hanno a comune gli spigoli uscenti dal punto x: le tangenti asintotiche, e la (1ª) *normale proiettiva* (N_1): e quindi anche il terzo spigolo situato sul piano tangente ξ in x, la *seconda normale proiettiva* (N_2). L'ulteriore vertice di T_1 su N_1, e l'ulteriore faccia di T_2 per N_2 sono il punto $X = \frac{1}{2}\Delta_2 x$, e il piano $\Xi = \frac{1}{2}\Delta_2 \xi$ (G. P. D. p. 78) dei quali è noto il significato geometrico[4]. Se le x sono le coordinate normali di Fubini, i vertici A_0, A_1, A_2, A_3, di T_1 sono i punti x, x_u, x_v, x_{uv}.

(1) Nella seduta del 19 febbraio 1928.

(2) Ved. Fubini, *Nuova trattazione elementare dei fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie* («Rend. Ist. Lombardo», vol. 59, 1926, pp. 69-81).

(3) *Geometria Proiettiva Differenziale* (Bologna, Zanichelli, 1926-27). Citerò d'ora innanzi quest'opera con G. P. D.

(4) Ved. Bompiani, *Nozioni di geometria proiettivo-differenziale relative ad una superficie dello spazio ordinario* («Rend. Lincei», ser. 5ª, vol. 33, 1° sem., 1924, pp. 85-90), p. 90. Oppure G. P. D., Append. II (Bompiani) p. 687.

Se y è un punto generico dello spazio, rispetto al tetraedro T_1 esso avrà certe coordinate locali y'_i, tali che

$$y = y'_0 x + y'_1 x_u + y'_2 x_v + y'_3 x_{uv}.$$

Ma naturalmente, perchè le y'_i (o meglio i loro rapporti) risultino *determinate* (in modo proiettivamente invariante) quando è assegnato il punto y, occorre fissare (in modo intrinseco e invariante) anche il *punto unità* E. Ciò equivale a fare una particolare scelta dei *parametri* (asintotici) u, v. Ora, siccome nelle forme normali del Fubini, $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$, $\varphi_3 = \beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)$ figurano due funzioni β, γ dei parametri u, v, viene naturale di scegliere u, v in modo che nel punto iniziale P sia $\beta = \gamma = 1$; questa osservazione non è nuova [1]. Ma il corrispondente significato degli elementi unità e dei parametri u, v non è stato indicato: è quello che ora farò.

2. Il Bompiani ha mostrato [2] come le forme differenziali monomie (invarianti)

$$(1) \qquad d_1 s^3 = \beta^2\gamma\, du^3 \quad , \quad d_2 s^3 = \beta\gamma^2\, dv^3$$

possano vantaggiosamente assumersi per definire gli *elementi d'arco proiettivi* $d_1 s, d_2 s$ *delle asintotiche* sulla superficie. Sia questa ad asintotiche reali, siano $d_1 s, d_2 s$ le radici cubiche *reali* di $d_1 s^3, d_2 s^3$. Se poniamo

$$(2) \qquad d\bar{u} = \sqrt[3]{\beta_0^2 \gamma_0}\, du \quad , \quad d\bar{v} = \sqrt[3]{\beta_0 \gamma_0^2}\, dv,$$

ove β_0, γ_0 sono i valori di β, γ in P, i nuovi parametri sono, *inizialmente*, gli archi proiettivi delle asintotiche uscenti da P. Riferendosi ai parametri β, γ introdotti con le (2) si ha appunto inizialmente $\beta = 1$, $\gamma = 1$ [3]. Il corrispondente punto unità E è il punto

$$(3) \qquad x + x_{\bar{u}} + x_{\bar{v}} + x_{\bar{u}\bar{v}} = x + \frac{x_u}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}} + \frac{x_v}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}} + X.$$

(1) Ved. ad es. FUBINI, *Nuova trattazione*...., p. 77.

(2) BOMPIANI, *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie* (« Boll. Unione Matem. Italiana », vol. V, 1926, pp. 167-173, 209-214). Oppure G. P. D., Append. II (BOMBIANI), p. 685.

(3) Si potrà avere *in ogni punto* della superficie $\beta = \gamma = 1$ soltanto se le asintotiche di ciascun sistema segnano su quelle dell'altro una corrispondenza che conserva la lunghezza d'arco proiettiva; ecco dunque una nuova proprietà caratteristica delle *superficie di coincidenza* (G. P. D., p. 390).

Si può anche porre

$$d\bar{u} = \sqrt[3]{\beta^2(u,0)\gamma(u,0)}\, du \quad , \quad d\bar{v} = \sqrt[3]{\beta(0,v)\gamma^2(0,v)}\, dv;$$

cioè assumere come nuovi parametri (asintotici) due parametri che lungo le due asintotiche uscenti da P misurino *in ogni punto* la lunghezza d'arco proiettiva.

La caratterizzazione geometrica di E potrà farsi, ad es. caratterizzando le sue proiezioni E_3, E_0 su ciascuna delle facce $A_0 A_1 A_2$ (piano tangente) e $A_1 A_2 A_3$ del tetraedro T_1 dal vertice opposto.

3. Il punto E_3, cioè $x + \frac{x_u}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}} + \frac{x_v}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}$, stà evidentemente sulla tangente di Segre reale uscente da P. Cerchiamo di stabilire se tale punto potrà riguardarsi come *punto di regresso* (G. P. D., p. 132), sul piano π tangente in P, di una linea della superficie uscente da P (s'intende: con la direzione della tangente di Darboux reale), della quale possa darsi una semplice caratterizzazione.

Osserviamo che se d indica differenziazione lungo la linea supposta $\left(\text{onde si avrà, in P, } \frac{dv}{du} = -\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\right)$, se Du, Dv sono (secondo Čech: ved. G. P. D., p. 298) i *differenziali coniugati* a du, dv e $D\varphi = \varphi_u Du + \varphi_v Dv$, il punto E_3 può così esprimersi:

$$x + \frac{Dx}{D_1 s} = x + \frac{Dx}{D_2 s}. \tag{4}$$

Ora; più in generale, se $d\bar{u}, dv$; Du, Dv sono due qualunque sistemi di differenziali coniugati, il punto

$$x + \frac{Dx}{f}$$

ove f è una forma lineare in du, dv, è, per ogni valore di $\frac{dv}{du}$, il punto di regresso su π della linea del sistema *radiale* (secondo Bompiani: G. P. D., p. 688) associato alla forma f:

$$\vartheta_{\lambda\mu}\, \delta^2 u^\lambda\, du^\mu - \varphi_3' - f \cdot \varphi_2 = 0 \qquad (u^1 = u\,,\ u^2 = v) \tag{5}$$

che esce da P con la direzione $\left(\frac{dv}{dv}\right)$ (essendo $\varphi_3' = \omega\beta\gamma\,(-\beta du^3 + \gamma dv^3)$, $\omega = \operatorname{sgn}\beta\gamma$: ved. per le notaztoni G. P. D., pp. 50, 89, 297, 332).

Dunque: il punto E_3 è *il punto di regresso comune alle linee dei due sistemi radiali associati alle forme lineari* $D_1 s = \omega d_1 s$, $D_2 s = -\omega d_2 s$, *uscenti da* P *con la direzione della tangente di Darboux reale.* Cioè: è il punto comune ai *raggi* di tali sistemi radiali, situati sul piano π, punto appartenente anche alla tangente di Segre reale in P.

Dualmente, il piano degli *assi* dei sistemi *assiali* corrispondenti alle stesse due forme lineari $D_1 s, D_2 s$ è il piano unità ε_3 $\left(\xi + \xi_u + \xi_v = \xi + \right.$ $\left. + \frac{\xi_u}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}} + \frac{\xi_v}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\right)$ nella stella P: questo piano contiene anche la tan-

gente di Darboux reale uscente da P, e oscula le due linee, dei due sistemi assiali ora detti, uscenti da P con la direzione di quella tangente.

4. È interessante notare, come questi sistemi radiali o assiali ci diano facilmente anche una costruzione geometrica dei punti x_u , x_v (o, dualmente, dei piani ξ_u , ξ_v) e quindi, della *normale proiettiva* del Fubini. Infatti, si vede bene che *il punto* $x_u\,[x_v]$ *è il punto di regresso, su* π, *della linea del sistema radiale associato a* $D_2 s\,[D_1 s]$, *la quale esce da* P *con la direzione della tangente all'asintotica* $u\,[v]$. Così viene determinata la 2ª *normale proiettiva*, e dualmente, la prima. (Si tenga presente che $d_1 s$ e $d_2 s$ si ottengono in modo indipendente dalla normalizzazione di Fubini [1]).

5. Ancora più semplicemente che per E_3 si ottiene la caratterizzazione del punto unità E_0 sul piano $A_1 A_2 A_3$, cioè, del punto $X + \frac{x_u}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}} + \frac{x_v}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}$.

Esso, congiunto con P (x), dà l'*asse* del sistema *assiale* associato alla forma lineare $-(D_1 s + D_2 s) = \omega\,(d_2 s - d_1 s)$ $(\omega = \operatorname{sgn}\beta\gamma)$, che eguagliata a o dà le linee di Segre reali. Invece il sistema *radiale* associato alla stessa forma ha per *raggio* la retta intersezione di $\pi\,(\xi)$ col piano unità $\Xi + \xi_u + \xi_v$ della stella (Ξ, ξ_u, ξ_v): piano che si otterrà dunque proiettando la retta ora detta dal punto in cui il piano Ξ incontra la (1ª) normale proiettiva.

La forma $D_1 s + D_2 s$ è uno dei fattori lineari di φ'_3. Agli altri due fattori (siano essi immaginari, come nelle nostre ipotesi, o anche reali) corrisponderanno altri due sistemi assiali. Ebbene:

La retta polare del piano tangente rispetto al triedro degli assi corrispondenti ai tre fattori lineari di φ'_3 *è la* (1ª) *normale proiettiva di Fubini.* In modo duale si ha la 2ª normale.

Riferendoci al tetraedro T_1 e al punto unità E l'equazione della *quadrica di Darboux* generica (cfr. G. P. D., p. 129) diviene

$$(\mu - K)\, y'^2_3 + 2\,(y'_0 y'_3 - y'_1 y'_2) = 0\,.$$

Ne segue in particolare che la *quadrica normale*, $\mu = K$, *è caratterizzata dal fatto, che essa passa pel punto unità* E. E le superficie a curvatura proiettiva media $K = +1$ sono caratterizzate dal passaggio della *quadrica di Lie* relative al punto generico, pel punto unità corrispondente.

(1) Ved. Bompiani *Le forme elementari.....*, già cit.

Analisi. — *Equazione integrale di terza specie ed applicazioni alle equazioni differenziali.* Nota II, di P. NALLI, presentata [1] dal Corrisp. G. FUBINI.

Soddisfatte le condizioni (6) occorrerà per la risolubilità della (5) che risulti convergente la serie

$$\sum_1^\infty n \frac{1}{\mu_n^2} \left| \int_a^b f(s)\psi_n(s)\,ds \right|^2$$

dove μ_n è la costante caratteristica dell'operazione elementare S_n costruita per mezzo delle funzioni $\varphi_n(s)$, $\psi(s)$.

Tale condizione è soddisfatta da qualunque $f(s)$ se le μ_n non si addensano intorno allo zero.

Inoltre, per ogni T_n di secondo tipo che figura nella forma canonica di H, costruita per mezzo delle funzioni $f_n(s;\lambda)$ e $g_n(s;\lambda)$ ed avente la funzione caratteristica $\rho_n(\lambda)$, dovrà esistere l'integrale singolare di Hellinger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\int_a^b g_n(s;\lambda)f(s)\,ds \cdot d\overline{\int_a^b g_n(s;\lambda)f(s)\,ds}}{d\rho_n(\lambda)},$$

cioè la somma dei due limiti per $\varepsilon = 0$ degli integrali della medesima espressione presi tra $-\infty$ e $-\varepsilon$ e tra ε ed ∞.

Tale condizione è soddisfatta da qualunque $f(s)$ se la $\rho_n(\lambda)$ è costante in un conveniente intervallo che comprende all'interno il punto zero.

Finalmente, la serie formata con tali integrali singolari deve risultare convergente, il che accadrà certamente se esiste un intervallo attorno allo zero dove tutte le $\rho_n(\lambda)$ sono costanti.

Quest'ultimo gruppo di condizioni, oltre le (6), è soddisfatto per qualunque $f(s)$ in $\Omega(a,b)$ quando $|k(s)|$ si mantiene superiore ad un numero positivo quasi dapertutto in (a,b).

(1) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1928.

Soddisfatte tutte le dette condizioni la (5) ammette soluzione e precisamente è soddisfatta dalla funzione $p(s)$, determinata quasi dapertutto in (a, b), per la quale si ha per qualunque $q(s)$ in $\Omega(a, b)$

$$\int_a^b p(s)\,q(s)\,ds = \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{\mu_n} \int_a^b q(s)\,\varphi_n(s)\,ds \cdot \int_a^b f(s)\,\psi_n(s)\,ds +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{d\int_a^b f_n(s;\lambda)\,q(s)\,ds \cdot \int_a^b g_n(s;\lambda)\,f(s)\,ds}{d\,\rho_n(\lambda)},$$

dove ogni termine della seconda serie è un integrale singolare di Hellinger, e cioè la somma dei due limiti per $\varepsilon = 0$ degli integrali della medesima espressione presi tra i limiti $-\infty$ e $-\varepsilon$ e tra ε ed ∞.

La più generale soluzione si ottiene poi da questa particolare aggiungendo una funzione $v(s)$ soddisfacente alla $H[v] = 0$.

Tutto ciò che abbiamo esposto comprende quanto è già noto per la equazione integrale di seconda specie ($k(s) = 1$) e per quella di prima specie ($k(s) = 0$), e *si applica più in generale all'equazione funzionale*

$$H[p(s)] = f(s)$$

nell'ipotesi che la H *sia lineare, applicabile a tutte le funzioni,* $p(s)$ *di* $\Omega(a, b)$ *e riproducente funzioni di* $\Omega(a, b)$, *che ammetta una operazione associata* $\bar{H}$, cioè tale che siano simmetriche limitate e definite positive le due operazioni $\bar{H} \cdot H$ ed $H \cdot \bar{H}$, chiamando *simmetrica un'operazione* O *quando*

$$\int_a^b O[p(s)]\,\overline{q(s)}\,ds = \overline{\int_a^b O[q(s)]\,\overline{p(s)}\,ds},$$

e limitata un'operazione simmetrica O *quando esiste un numero positivo* M *tale che per qualunque* $p(s)$ *soddisfacente alla condizione*

$$\int_a^b |p(s)|^2\,ds \leq 1$$

la quantità reale

$$\int_a^b O[p(s)]\,\overline{p(s)}\,ds$$

risulti in valore assoluto minore di M; *definita positiva, se tale quantità non è negativa.*

I risultati esposti possono trovare applicazioni per lo studio di equazioni differenziali lineari, specialmente nel caso di singolarità.

Per esempio, siano $p(s)$ e $q(s)$ due funzioni continue in (a, b) e la prima sia derivabile. Per una funzione $u(s)$ dotata di derivata prima e seconda in (a, b) poniamo

$$L[u] = u'' + p(s)\,u' + q(s)\,u\,.$$

Analogamente, date tre funzioni $k(s)$, $p_1(s)$, $q_1(s)$ continue in (a, b), la prima derivabile due volte, la seconda una volta, poniamo

$$M[u] = k(s)\,u'' + p_1(s)\,u' + q_1(s)\,u\,.$$

Se l'equazione $L[u] = 0$ non ammette un integrale che si annulla in a e b ed $f(s)$ è una funzione dotata di derivata prima e seconda, che si annulla negli estremi dell'intervallo (a, b), l'equazione

$$L[u] = M[f] \tag{7}$$

ammette uno ed un solo integrale che si annulla in a e b.

Tale integrale si può mettere sotto la forma

$$u(s) = k(s)\,f(s) + \int_a^b K(s, t)\,f(t)\,dt \tag{8}$$

definendo opportunamente la funzione $K(s, t)$ nel quadrato $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$.

Infatti siano $u_1(s)$ ed $u_2(s)$ due integrali dell'equazione $L[u] = 0$ che si annullano rispettivamente in a e b. Essi, per una ipotesi fatta, saranno linearmente indipendenti.

Se poniamo

$$\begin{cases} K(s, t) = u_1(s)\,v_1(t) & \text{per} \quad s < t \\ K(s, t) = u_2(s)\,v_2(t) & \text{per} \quad s > t\,, \end{cases} \tag{9}$$

possiamo determinare la funzione v_1 e v_2 in modo che la $u(s)$ definita dalla (8), la quale si annulla evidentemente in a e b, soddisfi alla (7).

Infatti, definita la u per mezzo della (8) e la K per mezzo della (9), posto per brevità

$$g(s) = u_1(s)\,v_1(s) - u_2(s)\,v_2(s)\,,$$
$$l(s) = u_1'(s)\,v_1(s) - u_2'(s)\,v_2(s)\,,$$

si trova facilmente

$$L[u] = k(s)\,f'' + [2\,k'(s) + p(s)\,k(s) - g(s)]\,f'$$
$$+ [k''(s) + p(s)\,k'(s) + q(s)\,k(s) - g'(s) - l(s)]\,f$$

e si possono determinare $g(s)$ ed $l(s)$ in modo che il secondo membro si riduca ad $M[f]$, ed in conseguenza determinare v_1 e v_2.

Ora supponiamo che si cerchi un integrale di un'equazione differenziale

$$h(s)\,u'' + h_1(s)\,u' + h_2(s)\,u = \varphi(s)$$

che si annulli in a e b, nell'ipotesi che $h_2(s)$ e $\varphi(s)$ siano continue in $(a\,,b)$, $h_1(s)$ ed $h(s)$ derivabili rispettivamente una e due volte.

Si può, ed in infiniti modi, scrivere,

$$h(s)\,u'' + h_1(s)\,u' + h_2(s)\,u = \rho\,\mathrm{L}[u] - \rho\,\mathrm{M}[u]$$

essendo ρ una costante, in modo che la $k(s)$ che figura in $\mathrm{M}[u]$ non si annulli in $(a\,,b)$, che l'equazione $\mathrm{L}[u] = 0$ non ammetta un integrale che si annulli in a e b e nello stesso tempo esista una funzione $f(s)$ che si annulli in a e b e soddisfi all'equazione

$$\rho\,\mathrm{M}[f] = \varphi(s)\,.$$

Per esempio, si può scrivere

$$h(s)\,u'' + h_1(s)\,u' + h_2(s)\,u =$$

$$= \rho\left[u'' + \frac{h_1(s)}{\rho}\,u' + \frac{h_2(s)}{\rho}\,u + \tau u\right] + (h(s) - \rho)\,u'' - \rho\,\tau u$$

e fissare la costante ρ in modo che $h(s) - \rho$ non si annulli in $(a\,,b)$ e la costante τ in modo che, ponendo

$$\mathrm{L}[u] = u'' + \frac{h_1(s)}{\rho}\,u' + \frac{h_2(s)}{\rho}\,u + \tau u\,,$$

$$\mathrm{M}[u] = \frac{\rho - h(s)}{\rho}\,u'' + \tau u\,,$$

siano soddisfatte le altre condizioni.

La quistione proposta, essendo ridotta a trovare una funzione $u(s)$ che si annulli in a e b e soddisfi all'equazione differenziale

$$\mathrm{L}[u] = \mathrm{M}[u] + \mathrm{M}[f]$$

è ricondotta alla risoluzione dell'equazione integrale

$$u(s) = \frac{\rho - h(s)}{\rho}\,u(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,u(t)\,dt + \psi(s)$$

dove

$$\psi(s) = \frac{\rho - h(s)}{\rho}\,f(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,f(t)\,dt\,,$$

cioè alla risoluzione dell'equazione integrale di terza specie

$$h(s)\,u(s) = \rho \int_a^b K(s,t)\,u(t)\,dt + \rho\,\psi(s)\,.$$

Ciò può riuscire vantaggioso quando la $h(s)$ si annulla nell'intervallo (a, b).

Meccanica. — *Sul concetto di tensore costante in varietà qualunque.* Nota di A. Masotti, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Contributo alla teoria balistica delle stelle variabili.* Nota II del dott. C. Cannata presentata[1] dal Corrisp. M. La Rosa.

Nella Nota precedente si sono fissati i tratti essenziali della teoria balistica delle variabili, per le orbite ellittiche. Dalle considerazioni ivi svolte risulta chiaro che possono presentarsi due soli casi: quello in cui la $\frac{dt}{d\mathrm{T}}$ si mantenga positiva per qualunque valore di E e quello in cui la $\frac{dt}{d\mathrm{T}}$ cambi invece di segno. La incompatibilità delle (12) e (14) della Nota I (come pure ragioni fisiche evidenti) fanno infatti escludere che la $\frac{dt}{d\mathrm{T}}$ possa essere sempre negativa.

Nella presente Nota si sono applicati i risultati ottenuti a qualche esempio relativo all'uno o all'altro caso.

*
* *

Per ragioni evidenti, nei grafici costruiti, invece di T si è presa come ascissa la quantità $\mathrm{T} - \delta$ che è data dalla prima equazione (15) (Nota I)

$$(16) \qquad \mathrm{T} - \delta = \frac{1}{m}\left(\mathrm{E} - e\sin\mathrm{E} + \mathrm{H}\,\frac{\sin(\mathrm{E}+\varphi)}{1 - e\cos\mathrm{E}}\right).$$

Cambiare allora il valore di m, supposte fissate H, e, φ equivale in fondo a cambiare la scala delle ascisse o l'unità dei tempi. Il valore di m è legato

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

esclusivamente al periodo di rotazione τ dell'astro; ponendo nella (16), al posto di E, successivamente 2π e *zero*, e sottraendo poi, membro a membro, si ottiene infatti:

$$\tau = \frac{2\pi}{m}.$$

Nel caso del circolo, m non è altro che la velocità angolare. Le altre quantità H, e, φ sono numeri puri e perciò indipendenti dalle unità scelte per le lunghezze o per i tempi.

Ciò posto cominciamo a supporre:

$$H = 0.4 \quad , \quad e = 0.4 \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad m = 1 .$$

Poichè nel nostro caso $\cos\varphi = 0$ la condizione affinchè T sia funzione monodroma di t è data dalla (13) della Nota I, cioè da

$$H \min \left[\frac{\cos(E + \varphi) - e\cos\varphi}{(1 - e\cos E)^3} \right] \geqq -1 .$$

Questa condizione è certamente soddisfatta per qualunque valore di E, quando lo sia nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Ora, ponendo in generale

$$y = \frac{\cos(E + \varphi) - e\cos\varphi}{(1 - e\cos E)^3}$$

ed annullando la $\frac{dy}{dE}$ si ottiene

$$(17) \quad -\sin(E + \varphi) + e\sin\varphi - 2e\sin E\cos(E + \varphi) + 3e^2\sin E\cos\varphi = 0$$

cosicchè il massimo cercato è soluzione di questa equazione [1]. Nel nostro caso la (17) diventa

$$(18) \qquad 4\cos^2 E + 5\cos E - 6 = 0.$$

L'unica soluzione accettabile è

$$\cos E = \frac{3}{4}$$

e quindi

$$\sin E = \pm\, 0.66119 \text{ (a meno di } 10^{-5} \text{ per eccesso).}$$

Si ottengono così un massimo ed un minimo in corrispondenza al segno + od al segno — di $\sin E$, e si trova in conseguenza che la (19) è certamente soddisfatta quando $H < 0.5$.

(1) Nei vari casi che ci interessano ogni massimo (minimo) assoluto è anche massimo (minimo) relativo.

Per la costruzione della curva di luce ho perciò attribuito ad E una serie di valori, in corrispondenza ai quali ho calcolato $T - \delta$ e $\frac{dt}{dT}$. Ho inoltre calcolato i massimi e i minimi di $\frac{dt}{dT}$ che si hanno in corrispondenza agli zeri della derivata $\frac{d}{dT}\left(\frac{dt}{dT}\right)$. Poichè

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{dt}{dT}\right) = \frac{d}{dE}\left(\frac{dt}{dT}\right)\frac{dE}{dT}$$

e $\frac{dE}{dT} \neq 0$, basterà porre

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{dt}{dT}\right) = 0.$$

Si riottiene allora l'equazione (18), cosicchè, denotando con (E) la misura in gradi dell'anomalia eccentrica, i valori di massimo e di minimo si ottengono rispettivamente per

$$(E) = 41^\circ\,24'\,35'' \quad , \quad (E) = 313^\circ\,35'\,25''.$$

I risultati dei calcoli numerici eseguiti sono riportati nella tabella seguente:

(E)	$T - \delta$	$\frac{dt}{dT}$	(E)	$T - \delta$	$\frac{dt}{dT}$
0°	0.67	1	90°	1.17	1.67
20°	0.81	2.29	135°	1.86	1.15
25°	0.835	2.88	180°	2.84	1
28°	0.85	3.26	225°	3.98	0.89
30°	0.85	3.53	270°	5.10	0.71
36°	0.87	4.20	315°	6.20	0.57
40°	0.88	4.35	323°35′	6.25	0.56
41°24′	0.89	4.37	360°	6.95	1
45°	0.90	4.1			

Prendendo in ascisse le $T - \delta$ e in ordinate le $\frac{dt}{dT}$ si è ottenuta la curva 1. Essa, come si vede, presenta dapprima un andamento rapidamente crescente, raggiunge un massimo ed in seguito decresce, repentinamente in un primo tratto e lentissimamente poi, sino a raggiungere un minimo dopo

il quale ricomincia la fase crescente. Caratteristica di questa curva è la brevità dell'intervallo di tempo in cui si hanno variazioni cospicue dell'intensità luminosa, rispetto all'intervallo in cui queste variazioni risultano piccole.

Come secondo esempio ho voluto considerare il caso in cui $\varphi = \frac{\pi}{4}$, fermi restando i valori delle altre costanti. Naturalmente qui i massimi e minimi si trovano in corrispondenza alle radici dell'equazione che si ottiene dalla (17) ponendovi $\varphi = \frac{\pi}{4}$. La condizione (13), è, come si può subito verificare, soddisfatta anche in questo caso e quindi la curva si costruisce al solito modo calcolando, in corrispondenza a una serie di valori di E, le $T - \delta$ e $\frac{dt}{dT}$. I risultati di questi calcoli si trovano nella tabella seguente e con essi si è costruita la curva II. Accanto ad essa abbiamo voluto riportare la curva di luce sperimentale di δ Cephei (fig. 2) per dare agio di notare la grande somiglianza tra le due curve (1).

(E)	$T - \delta$	$\frac{dt}{dT}$	(E)	$T - \delta$	$\frac{dt}{dT}$	(E)	$T - \delta$	$\frac{dt}{dT}$
0°	0.47	0.56	120°	1.83	1.41	240°	4.215	1.01
10°	0.65	0.66	130°	1.99	1.35	250°	4.42	0.96
20°	0.79	0.81	135°	2.07	1.32	260°	4.625	0.91
30°	0.915	1.03	140°	2.16	1.30	270°	4.83	0.855
40°	1.015	1.31	150°	2.34	1.26	280°	5.03	0.79
45°	1.06	1.44	160°	2.53	1.22	290°	5.24	0.72
50°	1.10	1.565	170°	2.73	1.19	300°	5.45	0.65
60°	1.18	1.73	180°	2.94	1.17	310°	5.67	0.59
65°	1.22	1.77	190°	3.15	1.145	320°	5.89	0.54
70°	1.27	1.78	200°	3.37	1.12	330°	6.12	0.505
80°	1.35	1.74	210°	3.58	1.10	340°	6.34	0.49
90°	1.45	1.655	220°	3.79	1.07	350°	6.56	0.51
100°	1.57	1.56	225°	3.90	1.05	360°	6.75	0.56
110°	1.69	1.48	230°	4.00	1.04			

(1) La curva di luce di δ Cephei è stata riportata da KARL SCHILLER: *Einführung du das Studiun der veränderlichen Sterne*, Leipsia, 1923, p. 17.

Questa tabella ci mostra che il massimo dell'intensità luminosa si ha per un valore dell'anomalia eccentrica vicino a 70°, mentre il minimo capita in vicinanza di 340°.

In un ultimo esempio si è infine supposto

$$H = 1 \quad , \quad e = 0.4 \quad , \quad m = 1 \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{4} .$$

Qui la condizione (13) non è più soddisfatta e quindi, per la costruzione della curva di luce, conviene prima costruirsi le curve T (E) e $\frac{dt}{dT}$ (E). Fissato poi un valore per T si determinano i valori di E corrispondenti, si calcola la $\frac{dt}{dT}$ per ognuno di questi e si sommano i valori assoluti dei risultati. Tale somma che denoteremo con I si può ritenere proporzionale all'intensità luminosa osservata all'istante T fissato.

Nella seguente tabella sono riportati i risultati dei vari calcoli eseguiti:

T — δ	I	T — δ	I	T — δ	I	T — δ	I
1.18	0.34	1.895	22.05	2.23	2.05	4.17	0.81
1.46	0.43	1.8975	22.0	2.35	1.84	4.405	0.70
1.66	0.635	1.900	22,55	2.49	1.69	4.66	0.60
1.80	1.09	1.9025	23.75	2.64	1.56	4.95	0.51
1.8775	> 100	1.905	26.65	2.80	1.46	5.26	0.43
1.880	54.35	1.9075	33.4	2.97	1.375	5.60	0.365
1.8825	33.1	1.910	> 100	3 15	1.285	5.97	0.32
1.885	27.8	1.916	5.25	3.33	1.20	6.36	0.29
1.8875	25.7	1.96	3.61	3.53	1.11	6 75	0.28
1.890	23.55	2.03	2.81	3.73	1.01	7.125	0.29
1.8925	22.65	2.12	2.35	3.94	0.91	7.45	0.34

La curva III ottenuta prendendo in ascisse T — δ ed I in ordinate, per la brevità dell'intervallo dei tempi di arrivo in cui si verificano le sovrapposizioni di luce e per la piccolezza della scala delle ascisse, non lascia scorgere le modificazioni introdotte da tali sovrapposizioni. Queste particolarità possono invece notarsi nella fig. 3 in cui si è usata una scala 100 volte più grande per le ascisse e 10 volte più piccola per le ordinate [1].

(1) Notiamo che i valori più grandi dell'intensità luminosa si hanno per valori dell'anomalia compresi tra 40° e 110°.

Fisica. — *Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. Applicazione alla teoria del sistema periodico degli elementi.* Nota II di E. Fermi, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

In una Nota pubblicata recentemente in questi « Rendiconti » ebbi occasione di mostrare come si potessero ottenere dei risultati di media sopra la distribuzione degli elettroni attorno al nucleo di un atomo pesante considerando che gli elettroni formino attorno al nucleo una specie di atmosfera gassosa per il cui calcolo possono applicarsi delle considerazioni statistiche; data la densità considerevole di questo gas di elettroni, esso si trova alle temperature ordinarie in condizioni di degenerazione completa. Lo scopo di questa seconda Nota è di mostrare l'applicazione del metodo statistico alla teoria del sistema periodico degli elementi.

La teoria elettronica del sistema periodico si basa, come è noto, sopra la classificazione in gruppi degli elettroni atomici dovuta a Bohr [2] e Stoner [3] e sul principio di esclusione di Pauli. Un elettrone viene classificato mediante i suoi due numeri quantici totale e azimutale n e k; n può prendere tutti i valori interi da 1 a ∞, k, secondo la classificazione originaria di Bohr prende i valori interi da 1 ad n, secondo la nuova meccanica i valori da 0 ad $n-1$. È noto d'altra parte che i risultati della nuova meccanica possono, in prima approssimazione, ottenersi per mezzo della teoria quantica ordinaria purchè al numero k si attribuiscano invece che i valori interi $0, 1, 2, \cdots, n-1$, i valori precedenti aumentati di $1/2$.

Siccome nel presente lavoro noi ci serviremo dei metodi della vecchia teoria dei quanti, noi prenderemo dunque per k i valori $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \cdots$, corrispondenti agli elettroni $s, p, d, f, \cdots$. Dal principio di esclusione segue poi che in un atomo può aversi al massimo un elettrone per ogni stato quantico completamente definito. Ora si trova che fissati n e k esistono $4k$ stati quantici completamente definiti che hanno n e k come quanti totale e azimutale e quindi in un atomo si possono avere al massimo $4k$ elettroni n_k.

Nello stato fondamentale dell'atomo i suoi Z elettroni (Z = numero atomico) occuperanno gli Z posti liberi di minore energia. Ora, se il mo-

(1) Nella seduta dell'8 gennaio 1928.
(2) N. Bohr, « Zs. f. Phys. », *9*, p. 1, 1922.
(3) E. C. Stoner, « Phil. Mag. », *48*, p. 719, 1924.

vimento di ogni elettrone avvenisse sotto l'azione di una unica carica elettrica concentrata nel nucleo, come nel caso dell'idrogeno, l'energia dipenderebbe soltanto, a meno delle piccole correzioni dovute alla relatività e all'elettrone rotante, dal numero quantico totale n. In realtà il moto di ogni elettrone ha luogo invece sotto l'azione della carica nucleare Ze ridotta dall'azione di schermo degli elettroni circostanti al nucleo. Per modo che l'elettrone può considerarsi soggetto all'azione di una carica efficace Z_{effe} che varia con la distanza r dell'elettrone dal nucleo e precisamente decresce da Ze ad e quando r cresce da 0 ad ∞. Ciò ha per effetto che, a parità di n, gli elettroni che hanno k più piccolo (le cui orbite hanno maggiore eccentricità e penetrano quindi nell'interno dell'atomo fino a minore distanza dal nucleo) vengono a trovarsi soggetti a una carica efficace più grande e quindi hanno energie di legame maggiori.

Avviene anzi spesso che gli elettroni aventi k grande sono legati meno fortemente di elettroni aventi n più grande ma k più piccolo. Questo fatto ha conseguenze importanti sopra la struttura del sistema periodico; esso infatti permette di render conto qualitativamente del fatto che nella successione degli elementi alcuni gruppi elettronici corrispondenti a valori elevati di k vengono occupati dopo altri gruppi aventi n più grande e k più piccolo. Così, p. es., i 14 posti $4f$ $\left(n = 4\,, k = \frac{7}{2}\right)$ vengono occupati successivamente negli elementi con numeri atomici da 58 a 71 costituenti il gruppo delle terre rare; e in questi elementi si hanno già occupati i posti s aventi $n = 6$. Allo stesso modo i posti $3d$ $(n = 3\,, k = 5/2)$ cominciano ad essere occupati nello Scandio $(Z = 21)$ quando già sono occupati i posti $4s$. A queste circostanze sono legate, come è noto, le varie particolarità che si riscontrano nel sistema periodico.

Per la previsione precisa di queste particolarità sarebbe necessario conoscere il modo di variare della carica efficace alle varie distanze dal nucleo; ora, la teoria statistica svolta nella Nota precedente, ci ha permesso di risolvere, almeno in via di approssimazione, questo problema. Vogliamo ora vedere come si possano applicare quei risultati al calcolo della formazione dei diversi gruppi elettronici nell'atomo. La via più diretta per la risoluzione di questo problema sarebbe quella di calcolare l'energia delle varie orbite elettroniche nel campo di forza dovuto all'azione del nucleo e degli altri elettroni dell'atomo. Siccome però questo studio conduce a difficoltà considerevoli, ho preferito procedere per un'altra via, che, pur conducendo a risultati meno completi, permette tuttavia di raggiungere più rapidamente lo scopo. Nella Nota precedente è stata calcolata la distribuzione statistica degli elettroni alle varie distanze dal nucleo; è facile anche calcolare, in base alla teoria della degenerazione dei gas, la distribuzione delle velocità degli elettroni stessi e quindi si può dedurre quanti elettroni hanno una determinata quantità di moto areale, ossia un dato quanto azimutale k.

Dai risultati della Nota precedente, usando le stesse notazioni, risulta che la densità n degli elettroni a distanza r dal nucleo è

$$(1) \qquad n = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} e^{3/2}}{3h^3} V^{3/2} = \frac{2^{9/2}\pi m^{3/2} Z^{3/2} e^3}{3h^3} \frac{1}{r^{3/2}} \varphi^{3/2}\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

D'altra parte si deduce facilmente dalla teoria della degenerazione [1], tenendo presente che gli elettroni hanno peso statistico 2, che la densità degli elettroni di velocità compresa tra v e $v + dv$ è, nel caso della degenerazione completa

$$(2) \qquad n(v)dv = \begin{cases} \dfrac{8\pi m^3}{h^3} v^2\, dv & \text{per} \quad v < \left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{1/3} \dfrac{hn^{1/3}}{m} \\ 0 & \text{per} \quad v > \left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{1/3} \dfrac{hn^{1/3}}{m} \end{cases}$$

di qui risulta che il numero di elettroni aventi quantità di moto areale compresa entro i limiti p e $p + dp$ e contenuti nell'elemento di volume $d\tau$ è

$$(3) \qquad dN = 8\pi d\tau \frac{m^3}{h^3} \frac{pdp}{m^2 r^2} \sqrt{\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2 n^{2/3}}{m^2} - \frac{p^2}{m^2 r^2}}.$$

Tenendo poi presente che si ha $p = \dfrac{h}{2\pi} k$, e ponendo per n la sua espressione (1) e per $d\tau$ l'espressione $4\pi r^2 dr$, si ha:

$$dN = 4k\,dk\,dr \sqrt{\frac{8mZe^2}{h^2} \frac{1}{r} \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right) - \frac{k^2}{\pi^2 r^2}}.$$

Per ottenere il numero N_k degli elettroni aventi quanto azimutale nell'intervallo dk basta integrare l'espressione precedente rispetto ad r per tutti i valori per cui il radicale è reale. Ponendo $\xi = \mu r$ si trova subito, tenendo anche presente l'espressione di μ (Cfr. Nota I)

$$(4) \qquad N_k = \left(\frac{48}{\pi^2}\right)^{1/3} Z^{1/3} k\,dk\, \Phi\left(\frac{2^{4/3} k^2}{3^{2/3}\pi^{2/3} Z^{2/3}}\right)$$

dove si è posto

$$(5) \qquad \Phi(x) = \int \frac{d\xi}{\xi} \sqrt{\xi\varphi(\xi) - x}$$

essendo l'integrale steso a tutti i valori positivi di ξ per cui il radicale è

(1) E. Fermi, «Zs. f. Phys.», *36*, p. 902, 1926.

reale. La $\Phi(x)$ può calcolarsi numericamente in base ai valori di φ già calcolati nella Nota I; si trova che i suoi valori sono dati da

$$\Phi(0{,}49) = 0 \quad ; \quad \Phi(0{,}4) = 0{,}36 \quad ; \quad \Phi(0{,}3) = 0{,}87 \quad ; \quad \Phi(0{,}2) = 1{,}48 \; ;$$
$$\Phi(0{,}1) = 2{,}20 \quad ; \quad \Phi(0) = 3{,}2$$

si ha poi $\Phi(x) = 0$ per $x > 0{,}49$.

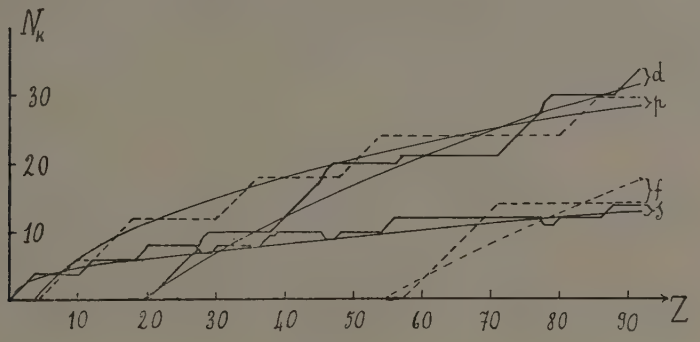


Fig. 1.

Resta così risolto il problema della determinazione del numero degli elettroni che hanno un dato quanto azimutale k, in funzione del numero atomico Z dell'atomo; basta infatti perciò porre in (4) $dk = 1$ e si trova

$$(6) \qquad N_k = \left(\frac{48}{\pi^2}\right)^{1/3} Z^{1/3} k \; \Phi\left(\frac{2^{4/3} k^2}{3^{2/3} \pi^{2/3} Z^{2/3}}\right)$$

La figura rappresenta i risultati della teoria e il loro confronto con l'esperienza; in essa si hanno quattro coppie di grafici; ciascuna coppia è costituita da una curva continua e da una spezzata ed è relativa ad un valore del quanto azimutale (le quattro coppie corrispondono a

$$k = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{5}{2} \quad , \quad \frac{7}{2} \quad ,$$

cioè agli elettroni s, p, d, f). La curva continua rappresenta il numero degli elettroni dell'atomo che hanno il quanto azimutale indicato in funzione di Z (che è riportato in ascisse) quale risulta dalla teoria; invece le spezzate rappresentano lo stesso numero quale è in realtà. Si vede che l'accordo, almeno nelle linee generali è soddisfacente; naturalmente, per la stessa natura statistica della teoria svolta non si potrebbe attendere da essa di render conto particolarmente dei vari zig-zag delle curve empiriche, ma soltanto del loro andamento complessivo il quale viene in realtà rappresentato assai fedelmente dalla teoria. Notiamo in particolare che dalla teoria risulta per quale numero atomico debbono cominciare a comparire nel-

l'atomo gli elettroni s, p, d, f. Tali numeri atomici sono quelli per cui le quattro curve teoriche del grafico hanno ascissa eguale ad 1, e cioè rispettivamente 1, 5, 21, 55. Ora gli elettroni s appaiono in realtà già nell'idrogeno ($Z = 1$); gli elettroni p incominciano nel *Boro* ($Z = 5$); quelli d nello *Scandio* ($Z = 21$) e segnano l'inizio della anomalia del primo grande periodo; infine gli elettroni f cominciano ad apparire nel *Cerio* ($Z = 58$) e segnano l'inizio del gruppo anomalo delle terre rare. Si vede dunque che la teoria permette di prevedere con notevole esattezza i numeri atomici per i quali incominciano le varie anomalie del sistema periodico degli elementi.

Fisica. — *Sulla teoria dei satelliti di Rutherford.* Nota del dott. G. Gentile, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

Sir Ernest Rutherford ha pubblicato recentemente una Memoria [2] in cui espone una teoria sulla costituzione del nucleo. Questa teoria è sorta per conciliare risultati differenti, ottenuti con metodi diversi, nel calcolo delle dimensioni nucleari.

Difatti se per regione nucleare s'intenda quello spazio intorno al punto di carica Ze, in cui non vale più la legge di Coulomb, si può facilmente vedere, con il metodo di Rutherford, tenendo conto della deviazione delle particelle α per urto contro un nucleo, che per l'Uranio il raggio del nucleo risulta di $3{,}2 \cdot 10^{-12}$ cm.

Invece dall'energia con cui viene liberata una particella α, nelle trasformazioni radioattive, corrispondente all'energia potenziale $\frac{2Ze^2}{r}$; si avrebbe un limite inferiore α per il raggio del nucleo di Uranio di 6×10^{-12} cm.

Rutherford immagina allora il nucleo come formato d'una parte centrale, caricata positivamente Ze, e intorno a cui girano dei satelliti neutri, mantenuti sulle loro orbite circolari da forze attrattive dovute alla elettricità indotta dal nucleo su questi satelliti, schematizzati come due sfere isolate conduttrici.

Questi satelliti non sarebbero altro che particelle α con due elettroni ad una distanza di $7 \cdot 10^{-13}$ cm. dal centro della α e probabilmente circolanti in orbite, rese possibili soltanto dalla distorsione della struttura nucleare della α per opera dell'intenso campo elettrico del nucleo centrale.

La forza d'attrazione si può facilmente calcolare con il metodo di Thomson delle immagini elettriche, che fa localizzare in M, coniugato

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) *Structure of the Radioactive Atom and Origin of* α *Rays*, by Ernest Rutherford in «Philosophycal Magazine», (vol. 4, n. 22, 1927).

armonico di A, una carica $-\frac{aZe}{r}$ e in O una carica $\frac{aZe}{r}$, essendo a il raggio della sfera e r la distanza del centro dal punto influenzale.

Inoltre è: $OM = \frac{a^2}{r}$ e quindi la forza attrattiva F è:

$$F = \frac{aZ^2e^2}{r}\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{\left(r - \frac{a^2}{r}\right)^2}\right\} = \frac{a^3Z^2e^2(a^2 - 2r^2)}{r^3(r^2 - a^2)^2}$$

Scrivendo allora le due equazioni:

$$mvr = \frac{h}{2\pi}n \qquad \frac{mv^2}{r} = \frac{a^3Z^2e^2(2r^2 - a^2)}{r^3(r^2 - a^2)^2}$$

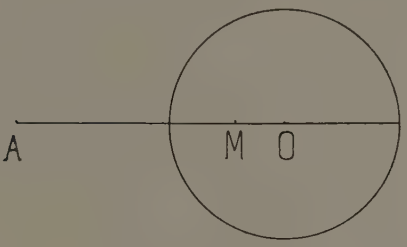


Fig. 1.

si può calcolare il raggio che risulta in prima approssimazione

$$r = \sqrt{2}\,Ze\,a^{3/2}m^{1/2}\frac{2\pi}{nh}.$$

Dopo questo Rutherford calcola l'energia totale dell'orbita; e tenendo conto che nell'uscire dal nucleo il satellite perde due elettroni, che cadono sul nucleo, aggiunge ancora l'energia potenziale: $\frac{2(Z-2)e^2}{r}$.

Ottiene quindi per l'energia di liberazione della particella l'espressione:

$$E = \frac{2(Z-2)e^2}{r} - w + \frac{n^4h^4}{8a^3m^2Z^2e^2}(1 - bn^2).$$

Questa teoria Rutherford confronta con l'esperienza e trova buon accordo, cercando per tentativi i numeri quantici convenienti.

Certamente, per quanto vi possano rimanere dei punti oscuri, questa teoria attrae molto, perchè spiegherebbe l'origine dei raggi γ, che corrisponderebbero a perdite di energia dei satelliti in un salto quantico, e il cui studio aveva già condotto altri (Ellis, Kuhn, ecc.) a postulare dei livelli energetici nella stessa struttura nucleare; e ci darebbe una ragione del fatto

che le particelle α escono con energie di valore diverso da nuclei di medesimo numero atomico.

Senza negare l'interesse indiscutibile che questa teoria possiede, non possiamo nasconderci alcune difficoltà che essa presenta; così non appare plausibile la stessa grandezza dei numeri quantici, adoperati nel calcolo delle energie, varianti fra 15 e 30 e comprendenti anche mezzi quanti (come non avviene nelle teorie comuni quantistiche, dove i quanti compaiono o sempre interi o sempre metà). E d'altra parte, questo valore elevato dei numeri quantici appare anche sproporzionato al numero di elementi isotopi a cui essi si riferiscono; nello stesso numero 84, che ne contiene di più, s'incontrano soltanto 7 gruppi di particelle α. Inoltre si può calcolare che la vita media di questi stati quantici è piccolissima; molto più di quella relativa all'idrogeno. Per calcolare la vita media di questi stati quantici abbiamo calcolato dapprima il momento elettrico di questa sfera polarizzata, che evidentemente si riduce al momento del dipolo MO che è

$$\mu = \frac{a^3 Ze}{r^2}.$$

E sostituendo per r il suo valore si ottiene:

$$\mu = \frac{Ze\,a^3 n^2 h^2}{8\pi^2 Z^2 e^2 a^3 m} = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 Zem}.$$

Quindi l'energia irraggiata in un secondo è

$$W = \frac{2}{3}\frac{\mu^2 \omega^4}{c^3} \qquad \text{essendo} \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

la velocità angolare. Noi adoperiamo, in tal modo, la elettrodinamica classica e non crediamo che, facendo questo, si faccia un'estrapolazione troppo grande; poichè la stessa osservazione si può fare sul fatto che si applicano al mondo nucleare le leggi e i metodi quantistici.

Adoperando le notazioni di Rutherford e i valori da lui dati nella tavola II della sua Memoria, si ha che per il numero atomico 84 e orbita 28: $mv^2 = 4n^4 B = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ erg mentre m, massa d'un atomo di He, è $m = 6{,}6 \cdot 10^{-24}$. Quindi:

$$v = 2\sqrt{\frac{Bn^4}{m}} = 1{,}98 \cdot 10^{+9} \text{ cm./sec.} \qquad r = \frac{nh}{2\pi v m} = \frac{28^4}{6{,}6 \cdot 1{,}98}\, 10^{-12} \text{ cm.} = 2{,}24 \cdot 10^{-12} \text{ c}$$

$$v = 0{,}9 \cdot 10^{21} \qquad \mu = \frac{28^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 84 \cdot 6{,}6 \cdot 4{,}67} = 1{,}4 \cdot 10^{-21}$$

$$W = \frac{2}{3^4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 1{,}4^2 \cdot 10^{84+2-30-42} = 3{,}3 \cdot 10^{10} \text{ erg./sec.}$$

Ora l'energia irradiata per passare dall'orbita 28 alla 27,5 è, secondo i dati di Rutherford:

$$\delta w = w_{28} - w_{27,5} = 4{,}176 \cdot 10^{-7} \text{ erg};$$

e il valore della vita media quindi risulta:

$$\tau = \frac{\delta w}{w} = \frac{4{,}176}{3{,}3} 10^{-17} \text{ secondi}$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-17} \text{ secondi}.$$

Lo stesso calcolo è stato fatto per l'Ionio:

$$Z = 90 \quad ; \quad n = 19 \quad ; \quad Bn^4 = 12{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ erg}.$$

Quindi

$$v = 2\sqrt{0{,}18} \cdot 10^9 = 8{,}4 \cdot 10^8 \text{ cm./sec.} \qquad r = \frac{19}{6{,}6 \cdot 0{,}8} 10^{-12} = 3{,}6 \cdot 10^{-12} \text{ cm.}$$

$$\omega = \frac{8{,}4}{3{,}6} 10^{20} = 2{,}3 \cdot 10^{20} \qquad \mu = \frac{19^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 90 \cdot 6{,}6 \cdot 4{,}67} = 6{,}4 \cdot 10^{-32}$$

$$W = \frac{2}{3^4} 2{,}3^4 \; 6{,}4^2 \cdot 10^{80-30-44} = 0{,}24 \cdot 2 \cdot 6{,}4^2 \; 10^6 = 0{,}28 \cdot 10^8.$$

E poichè l'energia irradiata nel passaggio dall'orbita 19 alla 18 è circa di $2 \cdot 10^{-7}$ erg ne risulta una vita di $0{,}7 \cdot 10^{-15}$ secondi, valore leggermente superiore al precedente.

Questi risultati fanno dubitare molto della stabilità di questi sistemi nucleari, perchè il calcolo delle vite medie con la elettrodinamica classica ha dato sempre valori compatibili con la realtà sperimentale. E si sa che vi sono elementi radioattivi - l'Ionio per esempio - che durano migliaia di anni.

Chimica. — *Sul piombo piroforico.* Nota di G. R. Levi e A. Celeri [1] presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Il piombo piroforico è stato sino ad oggi assai poco studiato: W. van Rijn riscaldando il tartrato di piombo alla più bassa temperatura possibile lo ottenne per la prima volta. L'ossidabilità del piombo finemente diviso, preparato per riduzione dell'ossido con idrogeno a moderata temperatura, si ha facilmente a temperatura poco superiore a quella ambiente come dimostrò molto tempo fa G. C. Winthelbleck [3].

Tuttavia le nostre cognizioni precise sul piroforico erano assai scarse e perciò riteniamo utile esporre i risultati delle nostre ricerche su questo argomento.

La ragione che ci ha portato ad iniziare questo studio è legata ad alcuni tentativi che da tempo uno di noi va facendo per ottenere una forma di piombo cubica tipo stagno grigio la cui esistenza apparirebbe verosimile pur non essendo ancora stata realizzata.

In realtà, come si rileverà dalle sotto esposte esperienze non è derivata alcuna conferma al preteso dimorfismo del piombo poichè si è sempre trovata la forma cubica già studiata da precedenti autori [4].

Il presente lavoro è diviso in due parti: la prima si occupa della determinazione del piombo metallico in presenza dei suoi ossidi, la seconda dei modi di preparazione del piombo piroforico e delle analisi dei prodotti ottenuti.

1. Determinazione del piombo in presenza dei suoi ossidi. — I metodi analitici ordinari sono poco sensibili dato l'elevato peso atomico del piombo, inoltre la presenza di carbone, di carbonati o di piccole quantità di prodotto non decomposto avrebbero potuto falsare completamente i risultati. Abbiamo perciò cercato un metodo che permettesse la determinazione del piombo metallico in presenza dei suoi ossidi in genere.

I metodi presi in esame sono:

a) azione del piombo su soluzioni di cloruro ferrico;

b) azione del piombo su soluzioni di acetato di argento;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della Regia Università di Milano.

(2) Nella seduta del 19 febbraio 1928.

(3) « Chem. Weekbl. », 5, 1 (1908).

(4) « Jour. prak. Chemie » (1), *10*, 227.

(5) V. p. es. G. R. Levi, « Nuovo Cimento » (1924), maggio-giugno e la letteratura ivi citata.

c) azione del piombo su soluzioni di nitrato di argento;

d) misura dell'H_2 svolto trattando la sostanza con acido cloridrico.

a) Il piombo usato in questi saggi preliminari era della polvere fina di Erba sgrassata con benzolo e asciugata a 80°. Le quantità pesate variarono da gr. 0,1 a 0,3.

In un primo tempo si provò a trattare la soluzione di $FeCl_3$, debolmente cloridrica, a bagno maria con piombo fino a completa soluzione di questo, aggiungendo poi solfato manganoso, diluendo e titolando con permanganato.

Il % trovato risultò... 95,6. Lo stesso prodotto dopo fusione, essendo in grani più grossi, si sciolse assai più lentamente e diede in modo parallelo un titolo assai inferiore.... 91,2.

Ripreso l'esame della polvere come più adatta e più confrontabile coi preparati piroforici che ci interessavano, abbiamo sostituito l'acido cloridrico con l'acido fosforico, titolando poi sempre con permanganato a freddo.

Il % di piombo trovato risultò 88,9

Infine si provò a trattare con soluzione di cloruro ferrico senza acidificare, sciogliendo poi con acido cloridrico a bagno maria il sale basico che si forma per azione del piombo.

Il % di piombo trovato risultò 85,4

Tutti questi risultati, oltre ad essere variabilissimi, sono sempre in meno; il metodo fu perciò scartato.

b) Si usò per queste prove acetato di argento, prima a caldo e poi a freddo, la polvere di piombo ed il prodotto fuso in quantità fra gr. 0,1 e 0,2 con una soluzione pari a gr. 0,5 di acetato di argento.

I risultati possono essere così riassunti:

con soluzione neutra e calda di acetato di argento riscaldando 1/2 ora a bagno maria dall'argento depositato si calcolò il titolo di piombo . . . . . 93,1 %

scaldando più a lungo si trovò . . . . . 97,3 %

sul piombo fuso, con mezz'ora di riscaldamento si trovò 81,0 %

la polvere finissima preparata per conveniente setacciatura diede, riscaldando 1/4 d'ora, il titolo di . . . . . 99,6 %

riscaldando 3/4 d'ora . . . . . 100,7 %

riscaldando 2 ore . . . . . 115,0 %

Si tentò in fine la stessa azione a freddo agitando per 4 ore, sempre sulla polvere finissima, il titolo risultò . . . . . 103,0 %

Anche questi risultati si dimostrarono inservibili, i valori sono enormemente errati per eccesso.

c) Considerata l'alterabilità dell'acetato di argento in queste condizioni si passò ad eseguire una serie di prove parallele col nitrato di argento, riscaldando a bagno maria. I valori ottenuti sono:

per $^1/_4$ d'ora di riscaldamento . . . . . 75,7 %
per 1 ora di riscaldamento . . . . . 65,0 %
per 2 ore di riscaldamento . . . . . 61,3 %

Tutti i valori risultano perciò fortemente errati per difetto, evidentemente causa l'azione ossidante dell'anione.

d) Vista l'impossibilità di ricorrere ai metodi volumetrici precedentemente tentati si pensò di misurare l'idrogeno svolto per trattamento della sostanza con acido cloridrico concentrato e bollito d. 1,12 operando in un palloncino ed usando un comune azotometro di Schiff per raccogliere l'idrogeno.

Si operò in corrente di CO_2 pura con tutte le precauzioni comuni a questo genere di analisi, del resto assai semplici.

I risultati furono ottimi:

il piombo in polvere finissima di Erba, diede con questo metodo il titolo . . . . . 98,7 %

il piombo puro della casa Kahlbaum, raspato dal pezzo con una sottile lama di acciaio diede in tre analisi i seguenti valori:

I . . . . . 99,60 %
II . . . . . 99,80 %
III . . . . . 99,65 %

In tal modo risultò che il piombo metallico presente si lascia esattamente determinare in presenza dei suoi ossidi per questa via; si potè perciò passare all'esame dei preparati piroforici usando questo metodo per il dosaggio del piombo metallico in essi contenuto.

2. Preparazione del piombo piroforico.

a) *Piombo piroforico dal tartrato.*

Eseguimmo in primo luogo una preparazione secondo W. van Rijn, ma si trovò più conveniente di tenere la temperatura alta e di scaldare rapidamente il tartrato in tubo chiuso, anzichè tenere la temperatura bassa e scaldare più a lungo.

Per avere un prodotto vivacemente piroforico è conveniente operare nel seguente modo: in un tubo di vetro chiuso ad una estremità si mettono circa 2 grammi di tartrato di piombo, si fa il vuoto poi dall'altra estremità e si introduce il tubo in un forno riscaldato a 480° avendo cura che il vetro non tocchi le pareti del forno. Dopo alcuni secondi si ha un abbondante sviluppo di vapori, e quando questi cessano (2 a 4 minuti primi) si toglie immediatamente il tubo dal forno e lo si lascia raffreddare sempre nel vuoto.

Esponendo il prodotto all'aria esso si accende spontaneamente trasformandosi in ossido giallo.

Data la viva piroforicità del prodotto se ne fece una analisi nel seguente modo. Dopo raffreddamento del prodotto ottenuto come sopra si introdusse nel tubo, invece d'aria, una soluzione benzolica di paraffina all'1 %.

La massa così protetta non è più piroforica, un esame alla lente mostrò però in diverse preparazioni che il prodotto non era omogeneo e spesso poterono riconoscersi cristallini di tartrato di piombo inalterato.

Ad ogni modo per stabilire se il prodotto era costituito sostanzialmente di piombo libero ne fu fatta una analisi nel seguente modo:

Una certa quantità (circa gr. 0,2) non pesata venne trattata con acido cloridrico e l'idrogeno sviluppato misurato seguendo il metodo sopra detto.

Nello stesso liquido si dosò poi il piombo totale come solfato. Il titolo in piombo metallico rispetto al piombo totale risultò . . 86,8 %

Perciò il prodotto piroforico così ottenuto deve considerarsi essenzialmente piombo libero tanto più che in esso sono visibilmente contenute anche particelle di tartrato ancora non decomposto.

Per ottenere un prodotto di composizione costante abbiamo perciò preferito riscaldare in presenza di paraffina il tartrato, mantenendo la massa a 350 — 360°. Il preparato, come si dirà subito dopo, si ossida rapidamente all'aria a temperatura ambiente, tuttavia fu possibile con rapida operazione farne un'analisi approssimata che diede i seguenti risultati:

piombo metallico. . . . . 71,9 %
piombo totale . . . . . 96,7 %

Come si è detto sopra il prodotto si ossida rapidamente all'aria, infatti in 2 ore gr. 1,4524 aumentarono nell'ambiente della bilancia di gr. 0,0168 e cioè 1,16 %.

Era perciò evidente che il basso titolo di piombo metallico precedentemente trovato era, almeno in parte, da attribuirsi alla parziale ossidazione del prodotto. Infatti una determinazione fatta senza pesare la sostanza e cioè introducendola umida di benzolo e paraffina (semplicemente pressata fra carta da filtro diede un contenuto di idrogeno pari a gr. 0,1568 di piombo metallico; nello stesso liquido fu poi dosato il piombo come solfato trovandone un valore pari a gr. 0,1569 di piombo totale.

Il piombo piroforico così preparato è perciò completamente esente da ossidi; è un po' meno di piroforico di quello ottenuto nel vuoto senza paraffina e la sua combustione diventa rapida solo se è in massa un po' forte nel qual caso rapidamente passa al giallo.

In piccole quantità l'ossidazione è lenta, ma non porta ad un preparato di composizione costante; infatti il prodotto asciugato il più rapidamente possibile nel vuoto e pesato, diede un incremento di peso tale che, ammettendo la sostanza di partenza piombo puro, corrispondeva dopo due giorni a 96,91 % di piombo e cioè ad un assorbimento di 3,09 % di ossigeno. Il calcolato per Pb_2O è 96,28, per PbO 92,82.

Lasciato sempre nell'ambiente della bilancia dopo una settimana, l'incremento corrispondeva a 4,42 % di ossigeno e 95,58 di piombo e cioè non si arriva ad un prodotto di composizione definita.

Interessante risultò l'esame roentgenografico dei preparati. Il prodotto appena asciugato, protetto in tubo di carta bachelizzata, rivelò nette le linee del piombo metallico e nessun altra. Dopo l'ossidazione lenta all'aria in due giorni il prodotto che pure aveva il 50 % di piombo libero, rivelò le linee del metallo assai debolmente; nette e numerose si mostrarono invece le linee del PbO giallo pur essendo questo una sostanza a basso grado di simmetria (ortorombico) il che mostra l'enorme influenza delle alterazioni superficiali in questi esami di sostanze ad alto potere assorbente studiate con radiazione molle $> 1{,}5$ Å.

b) *Piombo piroforico dal citrato.* La preparazione dal citrato di piombo tribasico fu condotta negli stessi modi sopra indicati pel tartrato è cioè prima nel vuoto a 480° e poi a 360° con paraffina riscaldando un'ora.

Il titolo in piombo metallico risultò 89,0 in confronto a 71,9 ottenuto dal tartrato. Ciò si deve ad una maggior rapidità dell'analisi e non ad una minore ossidabilità; il prodotto è infatti almeno altrettanto piroforico quanto quello dal tartrato sia confrontando le preparazioni nel vuoto che quelle in paraffina.

Si formano pel citrato più materie catramose che colorano il benzolo di lavaggio.

c) *Piombo piroforico dall'ossalato.* L'ossalato di piombo con la paraffina fu scaldato in bagno di sabbia a 300° e cioè a più bassa temperatura per evitare la fusione del metallo che in assenza, o quasi, di materie carboniose si raccoglierebbe altrimenti in una massa compatta.

Dopo un'ora di riscaldamento la massa raffreddata e lavata con benzolo fu analizzata. Prima di tutto si rilevò la presenza di un po' di sostanze carboniose causate dalla paraffina. Il prodotto si ossida, analogamente a quello dal tartrato, a temperatura ambiente.

L'idrogeno determinato col solito metodo diede un valore pari a 29,91 % di piombo, mentre il piombo totale risultò 96,41.

Il prodotto pur essendo relativamente povero di piombo metallico rivelò nette tutte le linee del metallo all'esame roentgenografico e debolissime solo alcune delle più intense del PbO.

Si deve quindi ammettere che la formazione del metallo sia prevalentemente superficiale e perciò più appariscente all'esame roentgenografico; ad esaltare l'effetto roentgen si aggiunge l'alto grado di simmetria del metallo in confronto al suo ossido PbO.

Il prodotto ottenuto decomponendo l'ossalato in corrente di CO_2 è profondamente diverso; ha un basso titolo di piombo totale, 89,0 %; un bassissimo titolo di piombo metallico 4,12 % ed inoltre, a differenza del precedente, non si ossida all'aria a temperatura ambiente: esso appare ricco

di carbonato di piombo. All'esame roentgenografico rivela le linee dell'ossido e quasi nulla quelle del piombo metallico.

d) *Piombo piroforico dal formiato.* La preparazione fu condotta come la precedente per l'ossalato a 300° in presenza di paraffina pura, riscaldando un'ora e lavando poi col benzolo.

Le quantità di materie carboniose risultarono minime. Alla bilancia il prodotto cresce rapidamente di peso come il preparato dal tartrato, pesato con molta rapidità il titolo del piombo risultò 96,0 %. Il piombo attivo determinato dall'idrogeno svolto risultò 91,15 %.

Il preparato fotografato mostra nette tutte le linee del piombo e nessun altra.

Riassumendo viene dimostrato:

a) Che il piombo piroforico ha la stessa struttura cristallina cubica a facce centrate, del piombo ordinario.

b) Che i granuli del prodotto piroforico sono sufficientemente grossi da dare linee nette e sottili nei fotogrammi di Debye.

c) Che è possibile ottenere dal citrato, dal tartrato e dal formiato di piombo, per conveniente riscaldamento un piombo piroforico talvolta leggermente impuro di ossido di piombo.

d) Che dall'ossidazione lenta del piombo piroforico si forma direttamente ossido di piombo PbO forma gialla e che l'ossidazione più o meno profonda è funzione del tempo e della dimensione dei granuli del metallo, ma non si arresta ad alcun composto definito.

e) Viene fatta rilevare l'importanza delle alterazioni superficiali nell'esame roentgenografico quando si lavori con raggi X molli (sotto 1,5 Å).

f) Viene dato un metodo preciso per dosare il piombo metallico in presenza di piombo ossidato misurando l'idrogeno svolto dal prodotto per trattamento con acido cloridrico.

Geologia. — *Nota sulla geologia del Gruppo della Grivola.* Nota di G. B. Dal Piaz, presentata dal Socio C. F. Parona.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

ERRATA-CORRIGE

Astronomia fisica. — *Sull'assorbimento della luce stellare nell'atmosfera di Roma.* Nota del dott. G. Andrissi.

In una precedente Nota pubblicata nei «Rendiconti», vol. VII, ser. 6ª, I sem., fascicolo I, nella tabella I, annessa alla detta Nota, vennero omesse le lettere greche che distinguono le stelle della stessa costellazione, quindi i nomi delle stelle vanno così letti: α Cane minore; α Gemelli; β Orione; α Toro; β Gemelli; γ Orione; α Auriga; α Leone; α Orione; γ Cassiopea; η Orsa maggiore; α Orsa maggiore; γ Pegaso; β Pegaso; α Orsa minore; β Cassiopea; α Aquila; α Cefei; γ Orsa minore; β Drago; σ Cigno; β Auriga; α Cigno; α Perseo; β Toro.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 marzo 1928 (Anno VI)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata.* Nota [1] del Corrisp. L. TONELLI.

In alcuni studi recenti [2], la prof.ª Nalli e il prof. Andreoli si sono occupati della definizione di area di una superficie e sono stati condotti ad una definizione di *coppia di funzioni di due variabili a variazione limitata*. Nell'ultima delle loro Note, applicando i risultati generali ottenuti alle superficie date nella forma $z = f(x, y)$, ne hanno ricavato una definizione di *funzione di due variabili a variazione limitata* ed hanno posto la domanda di vedere in quale relazione sta questa loro definizione con quella da me data due anni or sono, in questi stessi « Rendiconti » [3].

Nella presente Nota, mi propongo di rispondere a tale domanda.

1. Per semplicità, supporrò sempre, in ciò che segue, che la funzione $f(x, y)$ sia definita nel quadrato Q, di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$, ed ivi *continua*.

La definizione di funzione $f(x, y)$ a variazione limitata, da me data, è la seguente: « la $f(x, y)$ è a variazione limitata se, indicata con $V_{(y)}(\bar{x})$ la variazione totale della funzione, della sola y, $f(\bar{x}, y)$, per y variabile in $(0, 1)$, e con $V_{(x)}(\bar{y})$ quella della $f(x, \bar{y})$, per x variabile pure in $(0, 1)$,

(1) Presentata nella seduta del 19 febbraio 1928.

(2) *Sull'area di una superficie ecc.* (« Rend. Lincei », vol. V, 1927, p. 963); *Sull'area di una superficie ecc.* (« Rend. Circ. Matem. di Palermo », to. LII, 1928).

(3) *Sulla quadratura delle superficie*, Nota I (« Rend. Lincei », vol. III, 1926, p. 357).

le due funzioni $V_{(y)}(x)$ e $V_{(x)}(y)$, rispettivamente della x e della y, sono finite in quasi tutto $(0, 1)$, e se, inoltre, esistono finiti i due integrali (nel senso del Lebesgue)

$$(1) \qquad \int_0^1 V_{(y)}(x)\,dx \quad , \quad \int_0^1 V_{(x)}(y)\,dy \text{ ».}$$

Una funzione soddisfacente a questa definizione sarà detta, per intenderci, *a variazione limitata* (T).

La definizione di funzione $f(x, y)$ a variazione limitata, che discende da quella generale di coppia di funzioni di due variabili a variazione limitata, posta dai colleghi Nalli e Andreoli, assoggetta la $f(x, y)$ alle seguenti condizioni: 1° ad ogni curva continua e rettificabile di Q, la $z = f(x, y)$ fa corrispondere, nello spazio, una curva rettificabile; 2° esiste un numero positivo M tale che, diviso il quadrato Q in un numero finito qualsiasi di parti, mediante delle curve continue, rettificabili e chiuse C, è sempre

$$\Sigma \left| \int_C (x\,dz - z\,dx) \right| < M \quad ; \quad \Sigma \left| \int_C (y\,dz - z\,dy) \right| < M.$$

Le funzioni che soddisfano a questa definizione saranno dette *a variazione limitata* (N — A, I).

La prima delle condizioni ora indicate porta come conseguenza (per una nota proposizione del Lebesgue) che la $f(x, y)$ sia a rapporto incrementale (tanto rispetto alla x quanto rispetto alla y) limitato. In questo caso, le $V_{(y)}(x)$ e $V_{(x)}(y)$ sono sempre inferiori ad un numero fisso e gli integrali (1) sono ambedue finiti. Può dunque affermarsi che *ogni funzione a variazione limitata* (N — A, I) *è anche a variazione limitata* (T)[1]. E siccome esistono delle funzioni a variazione limitata (T) che non sono a rapporto incrementale limitato, può dirsi che *non tutte le funzioni a variazione limitata* (T) *sono a variazione limitata* (N — A, I).

2. La definizione di funzione a variazione limitata (N — A, I) contiene delle condizioni inutilmente restrittive (dati gli scopi a cui deve servire) e la Nalli e l'Andreoli, nel n. 8 della loro Nota del « Circ. Matem. di Palermo », hanno dato perciò anche questa seconda definizione, più larga: « la $f(x, y)$ è a variazione limitata - noi diremo *a variazione limitata* (N — A, II) - quando, per ogni x, è a variazione limitata rispetto ad y in $(0, 1)$ e, per ogni y, lo è rispetto ad x pure in $(0, 1)$, e quando le funzioni $H(x, y) = \int_0^x f(x, y)\,dx$, $K(x, y) = \int_0^y f(x, y)\,dy$ sono tali che,

(1) Si vede anche che ogni $f(x, y)$ a variazione limitata (N–A, I) è *assolutamente continua*, secondo la definizione da me posta in *Sulla quadratura delle superficie*, Nota III (« Rend. Lincei », vol. III, 1926, p. 633).

diviso il quadrato Q in rettangoli parziali e denotando con (x', y') e (x'', y'') le coordinate dei due vertici opposti in un rettangolo $(x' < x'', y' < y'')$ le somme $\sum |H(x', y') - H(x', y'') - H(x'', y') + H(x'', y'')|$, $\sum |K(x', y') - K(x', y'') - K(x'', y') + K(x'', y'')|$, estese a tutti i rettangoli parziali, si mantengono limitate».

Dimostrerò, in ciò che segue, che *ogni funzione* $f(x, y)$ *a variazione limitata* (N — A, II) *è anche a variazione limitata* (T), *ma non viceversa.*

3. Per provare quanto ho or ora affermato, consideriamo la nuova definizione di funzione a variazione limitata che si ottiene dalla (N — A, II) sopprimendo in essa la condizione che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata su ogni retta parallela all'asse x o all'asse y. Diremo dunque che: « la $f(x, y)$ è *a variazione limitata* (T, *bis*) se, divisi i lati di Q, che si trovano sugli assi x e y, in parti, mediante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1$, e considerati i rettangoli $R_{r,s} \equiv [x_{r-1} \leq x \leq x_r \quad , \quad y_{s-1} \leq y \leq y_s]$, $(r = 1, 2, \cdots, m \; ; \; s = 1, 2, \cdots, n)$ le somme

$$s_1 = \sum_{r,s} \left| \int_{x_{r-1}}^{x_r} \{f(x, y_s) - f(x, y_{s-1})\} \, dx \right|,$$

$$s_2 = \sum_{r,s} \left| \int_{y_{s-1}}^{y_s} \{f(x_r, y) - f(x_{r-1}, y)\} \, dy \right|,$$

estese a tutti i rettangoli $R_{r,s}$ si mantengono limitate».

Dimostriamo che *questa nuova definizione è equivalente a quella di funzione a variazione limitata* (T).

Supponiamo, infatti, che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata (T). Allora, avendosi

$$s_1 \leq \int_0^1 \sum_{r} |f(x, y_s) - f(x, y_{s-1})| \, dx \leq \int_0^1 V_{(y)}(x) \, dx,$$

$$s_2 \leq \int_0^1 V_{(x)}(y) \, dy,$$

le somme s_1 e s_2 si mantengono limitate, e la $f(x, y)$ è perciò anche a variazione limitata (T, *bis*).

Per dimostrare il viceversa, faremo vedere che, se la $f(x, y)$ è a variazione limitata (T, *bis*), la superficie $z = f(x, y)$ ha area finita, secondo la definizione di area del Lebesgue.

4. Poniamo, per ciascuno dei rettangoli $R_{r,s}$, definiti nel n. 3,

$$a_{r,s} = \left| \int_{x_{r-1}}^{x_r} \{ f(x, y_s) - f(x, y_{s-1}) \} dx \right| \quad , \quad b_{r,s} = \left| \int_{y_{s-1}}^{y_s} \{ f(x_r, y) - f(x_{r-1}, y) \, dy \} \right| ,$$

$$\sigma_{r,s} = \sqrt{R_{r,s}^2 + a_{r,s}^2 + b_{r,s}^2}$$

(dove, con $R_{r,s}$, indichiamo anche l'area del rettangolo) e consideriamo la somma $\Sigma\sigma_{r,s}$ estesa a tutti i rettangoli $R_{r,s}$. Indichiamo poi con A il limite superiore delle somme $\Sigma\sigma_{r,s}$ corrispondenti a tutte le possibili divisioni di Q in rettangoli $R_{r,s}$. Si vede facilmente che, *condizione necessaria e sufficiente affinchè* A *sia finito è che la* $f(x, y)$ *sia a variazione limitata* (T, *bis*). Si vede, inoltre, utilizzando un lemma da me dato altrove [1], che, *quando tutte le differenze* $x_r - x_{r-1}$ *e* $y_s - y_{s-1}$ *tendono allo zero,* $\Sigma\sigma_{r,s}$ *tende al suo limite superiore* A.

5. Supponiamo che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata (T, *bis*) e dimostriamo che, detta S l'area della superficie $z = f(x, y)$ - area secondo la definizione del Lebesgue - è $S \leq A$.

Ammettiamo, dapprima, che la $f(x, y)$ abbia, in tutto Q, finite e continue le derivate parziali del primo ordine $p = \partial f / \partial x \quad q = \partial f / \partial y$. È allora

$$a_{r,s} = |f(x'_r, y_s) - f(x'_r, y_{s-1})| (x_r - x_{r-1}) = |q(x'_r, y'_s)| R_{r,s},$$

$$b_{r,s} = |f(x_r, y''_s) - f(x_{r-1}, y''_s)| (y_s - y_{s-1}) = |q(x''_r, y''_s)| R_{r,s},$$

dove (x'_r, y'_s) e (x''_r, y''_s) sono punti convenientemente scelti nell'interno del rettangolo $R_{r,s}$. È dunque, tenendo conto della continuità delle derivate parziali $p(x, y)$ e $q(x, y)$,

$$\sum \sigma_{r,s} = \sum R_{r,s} \sqrt{1 + p^2(x'_r, y'_s) + q^2(x'_r, y'_s)} + \varepsilon,$$

con $\varepsilon \rightarrowtail 0$ quando tutte le differenze $x_r - x_{r-1}$ e $y_s - y_{s-1}$ tendono allo zero. Facendo questo passaggio al limite, l'uguaglianza precedente dà

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy.$$

Ma l'integrale qui scritto rappresenta, nel caso considerato, il valore dell'area S; possiamo perciò affermare che, se la $f(x, y)$ ha le derivate parziali $p(x, y)$ e $q(x, y)$ finite e continue, è esattamente $S = A$.

(1) *Sulla quadratura delle superficie*, Nota II (« Rend. Lincei », vol. III, 1926, p. 445), n. 3.

Passiamo ora al caso generale e, preso un $\delta > 0$ e $< 1 : 2$, consideriamo il quadrato $Q_\delta \equiv [\delta \leq x \leq 1 - \delta \ , \ \delta \leq y \leq 1 - \delta]$ e, in esso, le funzioni

$$F_n(x, y) = \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} f(x + \xi \ , \ y + \eta)\, d\xi\, d\eta\,, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

dove abbiamo posto $h_n = \delta : n$. La $F_n(x, y)$ risulta continua in tutto Q_δ, insieme con le sue derivate parziali del primo ordine:

$$\frac{\partial F_n}{\partial x} = \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \{f(x + h_n, y + \eta) - f(x - h_n, y + \eta)\}\, d\eta\,,$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial y} = \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \{f(x + \xi, y + h_n) - f(x + \xi, y - h_n)\}\, d\xi.$$

Se perciò indichiamo con S_n l'area della superficie $z = F_n(x, y)$, considerata per tutti i punti (x, y) di Q_δ, e con A_n il limite superiore, relativo alla funzione $F_n(x, y)$ e al quadrato Q_δ, analogo a quello A definito nel n. 4 per la $f(x, y)$ e il quadrato Q, abbiamo, per quanto precede, $S_n = A_n$.

Dividiamo ora Q_δ in rettangoli $R'_{r,s} = [x'_{r-1} \leq x \leq x'_r \ , \ y'_{s-1} \leq y \leq y'_s]$, come abbiamo fatto precedentemente per Q, e indichiamo con $a^{(n)}_{r,s}$ $b^{(n)}_{r,s}$ e $\sigma^{(n)}_{r,s}$ le espressioni analoghe alle $a_{r,s}$, $b_{r,s}$ e $\sigma_{r,s}$, e relative a questa suddivisione di Q_δ e alla $F_n(x, y)$. Avremo

$$a^{(n)}_{r,s} = \left| \int_{x'_{r-1}}^{x'_r} \{F_n(x, y'_s) - F_n(x, y'_{s-1})\}\, dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \left| \int_{x'_{r-1}}^{x'_n} \{f(x + \xi, y'_s + \eta) - f(x + \xi, y'_{s-1} + \eta\}\, dx \right| d\xi\, d\eta$$

$$\leq \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} a_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\,,$$

dove abbiamo indicato con $a_{r,s}(\xi, \eta)$ l'espressione $a_{r,s}$ (definita nel n. 4) relativa alla $f(x, y)$ ed al rettangolo $R'_{r,s}(\xi, \eta)$, che si ottiene da $R'_{r,s}$ con la traslazione $X = x + \xi$, $Y = y + \eta$. In modo analogo, abbiamo

$$b^{(n)}_{r,s} \leq \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} b_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;$$

e poichè è

$$R'_{r,s} = R'_{r,s}(\xi, \eta) = \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} R'_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

abbiamo anche

$$\sigma_{r,s}^{(n)} \leq \frac{1}{4h_n^2} \left[\left(\int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} a_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \right)^2 + \left(\int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} b_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} R'_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \left[a_{r,s}^2(\xi, \eta) + b_{r,s}^2(\xi, \eta) + R'^2_{r,s}(\xi, \eta) \right]^{\frac{1}{2}} d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \sigma_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

e facendo la somma relativa a tutti i rettangoli $R'_{r,s}$,

$$\sum \sigma_{r,s}^{(n)} \leq \frac{1}{4h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \sum \sigma_{r,s}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \leq A,$$

perchè la somma $\sum \sigma_{r,s}(\xi, \eta)$, quando è $-h_n \leq \xi \leq h_n$, $-h_n \leq \eta \leq h_n$, non può superare il limite A definito nel n. 4. Di qui segue $A_n \leq A$, e perciò anche $S_n \leq A$.

Siccome poi, per $n \to \infty$, le funzioni $F_n(x, y)$ convergono uniformemente, in Q_δ, alla $f(x, y)$, l'area S_δ della parte della superficie $z = f(x, y)$ che si proietta ortogonalmente su Q_δ, risulta finita e $\leq A$, perchè essa non può superare il minimo limite delle aree S_n. Dalla disuguaglianza $S_\delta \leq A$, ricaviamo che il minimo limite di S_δ per $\delta \to 0$, è anch'esso $\leq A$; e poichè l'area S di tutta la superficie $z = f(x, y)$ non può superare il minimo limite indicato, ne viene pure $S \leq A$. Con ciò resta provato che, se la $f(x, y)$ è a variazione limitata (T, *bis*), l'area della superficie $z = f(x, y)$ è finita e quindi [1] la $f(x, y)$ è anche a variazione limitata (T). È così completamente dimostrato quanto avevamo affermato e cioè che le due definizioni di funzione a variazione limitata (T) e (T, *bis*) sono del tutto equivalenti.

6. Nel numero precedente ho provato che, se la $f(x, y)$ è a variazione limitata (T, *bis*), è $S \leq A$. Ora voglio osservare che $a_{r,s}$ e $b_{r,s}$ sono rispettivamente minori o uguali ai numeri $\alpha_{r,s}$ e $\beta_{r,s}$ che io definii nella

(1) Loc. cit. in nota (3) p. 357.

mia Nota II sulla quadratura della superficie [1]; perciò è sempre $\sigma_{r,s} \leq$ $\leq \sqrt{R_{r,s}^2 + \alpha_{r,s}^2 + \beta_{r,s}^2}$ ed il limite A è sempre minore od uguale al limite superiore delle somme $\sum \sqrt{R_{r,s}^2 + \alpha_{r,s}^2 + \beta_{r,s}^2}$, che è [2] $\leq S$ [3]. È dunque, in tutti i casi, $A \leq S$, e ne viene che, se la $f(x, y)$ è a variazione limitata (T, *bis*), è esattamente $A = S$. Se poi la $f(x, y)$ non fosse a variazione limitata (T, *bis*), non sarebbe neppure a variazione limitata (T), e si avrebbe perciò contemporaneamente $A = +\infty$, $S = +\infty$, e quindi ancora $A = S$. Possiamo, pertanto, affermare che, nella sola ipotesi della continuità della $f(x, y)$, *quando le differenze* $x_r - x_{r-1}$, $y_s - y_{s-1}$ *tendono tutte allo zero, la somma* $\Sigma\sigma_{r,s}$ *tende all'area della superficie* $z = f(x, y)$, *sia quest'area finita o no* [4].

7. Ritornando alla definizione di funzione a variazione limitata (N — A, II), riportata nel n. 2, osserviamo che, se la $f(x, y)$ è a variazione limitata secondo tale definizione, essa è pure, evidentemente, a variazione limitata (T, *bis*), e perciò, per quanto abbiamo provato, anche a variazione limitata (T). Esistono, invece, delle funzioni a variazione limitata (T) che non sono a variazione limitata su tutte le parallele all'asse x o y, e che non sono perciò a variazione limitata (N — A, II). Per avere una di queste funzioni, basta considerare su (0, 1) una funzione $\varphi(x)$ continua, tale che, in ogni intervallo $(x, 1)$, con $0 < x < 1$, abbia soltanto un numero finito di oscillazioni, ed una variazione totale uguale a $1 : \sqrt{x}$, e definire la $f(x, y)$ come quella funzione che in Q, per $x^2 + y^2 \leq 1$, è rappresentata dalla superficie che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la curva $z = \varphi(x)$, del piano (x, z), e che, negli altri punti di Q ha il valore φ [1]. Per questa funzione, la $f(x, 0)$ non è a variazione limitata, e neppure lo è la $f(0, y)$. Essa, ciononostante, è a variazione limitata (T), perchè è sempre, per $x > 0$, $V_{(y)}(x) \leq 1 : \sqrt{x}$ e, per $y > 0$, $V_{(x)}(y) \leq 1 : \sqrt{y}$. Perciò gli integrali (1) esistono entrambi finiti.

Matematica. — *Sur la courbe de Viviani.* Nota del Socio Straniero G. Cesàro.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Loc. cit. in nota (1), p. 360.

(2) Loc. cit. in nota (1), p. 360.

(3) Anzi, per un risultato di T. Rado (*Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes*, «Fundamenta Mathematicae», to. X, 1927, p. 197), è esattamente = S.

(4) Questo risulttato è l'analogo di quello ottenuto dal Rado per le somme di Geöcze (loc. cit.).

Meccanica. — *Una interpretazione espressiva delle condizioni di Saint–Venant sulle deformazioni infinitesime.* Nota [1] del Corrispondente U. Cisotti.

1. - Il tensore di deformazione.

Sieno y_i $(i = 1, 2, 3)$ le coordinate cartesiane di un generico punto dello spazio, x_i coordinate generali, per cui

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_1^3{}_\nu \, dy_\nu^2 = \sum_1^3{}_{ik} \, a_{ik} \, dx_i \, dx_k$$

è l'espressione del quadrato dell'elemento lineare in coordinate rispettivamente cartesiane e generali, essendo

$$a_{ik} = a_{ki} = \sum_1^3{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}$$

a determinante $\| a_{ik} \| > 0$; per esse risulta nullo il tensore riemanniano, per la presupposta euclidicità dello spazio.

Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore, di modulo infinitesimo, funzione dei punti x_i, che definisce, con riferimento alle coordinate generali, uno spostamento infinitesimo del mezzo; se v^i segnano le componenti contravarianti di $\boldsymbol{v}$ il punto P di coordinate x_i si porta nel punto P + δP di coordinate $x_i + v^i$. Le componenti covarianti v_i sono notoriamente legate alle contravarianti dalle relazioni

$$(2) \qquad v_i = \sum_1^3{}_j \, a_{ij} v^j \qquad , \qquad v^i = \sum_1^3{}_j \, a^{ij} v_j .$$

Se

$$(3) \qquad v_{i|k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \sum_1^3{}_l \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\} v_l \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

sono le componenti covarianti del tensore derivato di $\boldsymbol{v}$, colle posizioni:

$$(4) \qquad 2\,\xi_{ik} = v_{i|k} + v_{k|i},$$

risulta definito, mediante le componenti covarianti $\xi_{ik} = \xi_{ki}$, il tensore doppio simmetrico di deformazione $\boldsymbol{\xi}$; il tensore $\boldsymbol{\xi}$ sia infinitesimo, cioè infinitesime le sue componenti (covarianti, contravarianti o miste).

(1) Presentata nella seduta del 4 marzo 1928.

2. – Variazione dell'elemento lineare.

Nel passaggio dalla configurazione C di punti x_i a quella C + δC di punti $x_i + v^i$ l'elemento ds subisce la variazione δds che, per (1) risulta essere definita dalla[1]:

$$ds \cdot \delta ds = \sum_{1}^{3}{}_{ik} \xi_{ik}\, dx_i\, dx_k; \tag{5}$$

pertanto l'elemento lineare ds della configurazione C si cangia in $ds + \delta ds$ e quindi ds^2 in $ds^2 + 2\,ds \cdot \delta ds$; si ha dunque, per (1) e (5), la seguente espressione per il quadrato dell'elemento lineare in C + δC:

$$d\sigma^2 = ds^2 \left(1 + 2\,\frac{\delta ds}{ds}\right) = \sum_{1}^{3}{}_{ik} (a_{ik} + 2\,\xi_{ik})\, dx_i\, dx_k. \tag{6}$$

3. – Il tensore di Riemann della forma variata $d\sigma^2$.

Determiniamo le componenti del tensore di Riemann relativo alla nuova forma (6). Posto:

$$b_{ik} = a_{ik} + 2\,\xi_{ik} \tag{7}$$

(1) Infatti, dalla (1) si deduce

$$2\,ds \cdot \delta ds = \sum_{1}^{3}{}_{ik} (\delta a_{ik}\, dx_i\, dx_k + 2\,a_{ik}\, \delta dx_i \cdot dx_k); \tag{a}$$

d'altra parte è:

$$\delta a_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{l} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\, v^l = \sum_{1}^{3}{}_{l} \left\{ \begin{bmatrix} i\ l \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k\ l \\ i \end{bmatrix} \right\} v^l,$$

e quindi

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} \delta a_{ik} \cdot dx_i\, dx_k = 2 \sum_{1}^{3}{}_{ikl} \begin{bmatrix} i\ l \\ k \end{bmatrix} v^l\, dx_i\, dx_k. \tag{b}$$

Tenendo conto di (2) si ha:

$$\delta dx_i = d\,\delta x_i = dv^i = \sum_{1}^{3}{}_{j} \frac{\partial v^i}{\partial x_j}\, dx_j = \sum_{1}^{3}{}_{jh} \left(\frac{\partial a^{ih}}{\partial x_j}\, v_h + a^{ih}\, \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right) dx_j,$$

e quindi

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} a_{ik}\, \delta dx_i \cdot dx_k = \sum_{1}^{3}{}_{ikjh} a_{ik} \left(\frac{\partial a^{ih}}{\partial x_j}\, v_h + a^{ih}\, \frac{\partial v^h}{\partial x_j} \right) dx_k\, dx_j,$$

ma è:

$$\sum_{1}^{3}{}_{i} a_{ik}\, \frac{\partial a^{ik}}{\partial x_j} = -\sum_{1}^{3}{}_{i} a^{ih}\, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \qquad , \qquad \sum_{1}^{3}{}_{i} a_{ik}\, a^{ih} = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k, \\ 1 & \text{se } h \neq k, \end{cases}$$

dunque, tenendo conto della (3), si ricava in definitiva:

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} a_{ik} \cdot \delta dx_i \cdot dx_k = \sum_{1}^{3}{}_{ik} \left(v_{i|k} - \sum_{1}^{3}{}_{l} \begin{bmatrix} i\ l \\ k \end{bmatrix} v^l \right) dx_i\, dx_k;$$

per questa e per (b) dalla (a) scende senz'altro la (5).

si ha per i simboli di Christoffel di prima specie:

$$\left[\begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix}\right]_b = \left[\begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix}\right]_a + 2\left[\begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix}\right]_\xi \tag{8}$$

l'indice riferendosi alle componenti dei tensori $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{\xi}$. Per i simboli di seconda specie, essendo

$$\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}_b = \sum_1^3{}_j\, b^{lj}\left[\begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix}\right]_b \quad , \qquad b^{lj} = a^{lj} + 2\xi^{lj},$$

si ha, per (7) e (8), tenendo presente che il tensore $\boldsymbol{\xi}$ è infinitesimo e che quindi è pure infinitesimo l'ultimo termine di (8),

$$\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}_b = \left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}_a + 2\sum_1^3{}_j\left(\xi^{lj}\left[\begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix}\right]_a + a^{lj}\left[\begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix}\right]_\xi\right).$$

In coordinate cartesiane y_i, essendo:

$$a^{lj} = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq j, \\ 1 & \text{se } l = j, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}_a = 0,$$

si ottiene

$$\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}_b = 2\left[\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right]_\xi = \frac{\partial \xi_{il}}{\partial y_k} + \frac{\partial \xi_{kl}}{\partial y_i} - \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial y_l}. \tag{9}$$

I simboli di Riemann di seconda specie sono, in coordinate generali x_i

$$\{ir, hk\}_b = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\}_b - \frac{\partial}{\partial x_h}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\}_b - \sum_1^3{}_l\left[\left\{\begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix}\right\}_b\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\}_b - \left\{\begin{matrix} l\,k \\ r \end{matrix}\right\}_b\left\{\begin{matrix} i\,h \\ l \end{matrix}\right\}_b\right].$$

Essi definiscono, mediante componenti miste (covarianti rispetto al primo, terzo, quarto indice e contravarianti rispetto al secondo), il tensore riemanniano relativo alla forma (6). Le sue componenti cartesiane (indifferentemente covarianti, contravarianti o miste) rispetto alla forma prima (1) sono per (9):

$$\{ir, hk\}_b = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial \xi_{hr}}{\partial y_i} - \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial y_r}\right) - \frac{\partial}{\partial y_h}\left(\frac{\partial \xi_{kr}}{\partial y_i} - \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial y_r}\right).$$

Per le note proprietà, antisimmetrica e ciclica, i predetti simboli di Riemann, distinti e non nulli, rientrano tutti nel tipo:

$$\{i+1\ i+2 \quad , \quad k+1\ k+2\}_b \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

colla convenzione di considerare equivalenti gli indici che differiscono per multipli di 3. Pertanto le precedenti si riducono alle sei seguenti:

$$\{i+1\ i+2 \quad , \quad k+1\ k+2\}_b = \frac{\partial}{\partial y_{k+2}}\left(\frac{\partial \xi_{k+1\,i+2}}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial \xi_{i+1\,k+1}}{\partial y_{i+2}}\right) - \tag{10}$$

$$- \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\left(\frac{\partial \xi_{k+2\,i+2}}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial \xi_{i+1\,k+2}}{\partial y_{i+2}}\right).$$

L'annullarsi del tensore riemanniano è condizione caratteristica perchè la forma (6) sia euclidea; in particolare debbono annullarsi le precedenti componenti cartesiane [1], cioè i primi membri delle (10). Il corrispondente annullarsi dei secondi membri esprime le cosidette condizioni di Saint-Venant, necessarie e (come dimostrò il Beltrami) sufficienti perchè un assegnato tensore doppio simmetrico possa assumersi come tensore di deformazione.

Pertanto *le condizioni di Saint-Venant sono equivalenti alla circostanza che la metrica del mezzo deformato sia euclidea.*

Chimica. — *La riduzione del solfuro di argento a mezzo del carbone* [2]. Nota [3] del Socio N. Parravano e di G. Malquori.

1. Lo studio degli equilibri di riduzione dei solfuri metallici a mezzo del carbone si presenta molto difficile perchè, alla temperatura elevata alla quale bisogna sperimentare per avere tensioni apprezzabili, il solfuro di carbonio che si forma nella reazione di desolforazione reagisce con i comuni materiali di esperienza quali il quarzo e le porcellane. Secondo Koref [4] la formazione di solfuro di silicio è infatti già sensibile poco al disopra di 1100°, per cui al di là di questa temperatura viene meno ogni rigore quantitativo.

Solo il solfuro di argento presenta caratteristiche che potevano lasciare sperare possibile una misura della tensione di solfuro di carbonio della reazione $2Ag_2S + C = 4Ag + CS_2$ e noi abbiamo perciò voluto effettuarla (a 1015° e a 1050°).

2. Nella atmosfera gasosa sovrastante al miscuglio di $Ag_2S + C$ esistono S_2 e CS_2, e fra le pressioni parziali dei due vale la relazione

$$\text{(I)} \qquad \frac{P_{S_2}}{P_{CS_2}} = \text{cost}$$

a temperatura costante.

Per stabilire P_{CS_2} occorreva pertanto determinare P_{S_2} e il valore del rapporto (I). Abbiamo perciò misurato anzitutto i valori di P_{S_2}.

(1) Cfr. la mia Nota, *Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee*, questi «Rendiconti», vol. VII, 1° sem., 1928, p. 269.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(3) Presentata nella seduta del 4 marzo 1928.

(4) «Zeit. anorg. Chem.», 66, 73, (1910).

A questo scopo ci siamo serviti dello stesso metodo descritto in un lavoro precedente a proposito della covellite e del trisolfuro di molibdeno [1] e abbiamo ottenuto i risultati seguenti:

a 1015° . . . . . 4 mm. Hg
a 1050° . . . . . 7.5 »

3. La misura del rapporto $\frac{C_{S_2}}{C_{CS_2}}$ è stata fatta partendo da solfuro e carbone con un metodo dinamico.

Una corrente d'azoto veniva fatta passare a velocità costante e molto piccola (150 cm.³ all'ora) per la camera di reazione costituita da un tubo di porcellana scaldato alla temperatura desiderata (fig. 1). Al centro del tubo era situata la navicella contenente solfuro d'argento e grafite; sopra la navicella arrivava l'estremità della coppia termoelettrica che serviva a misurare la temperatura.

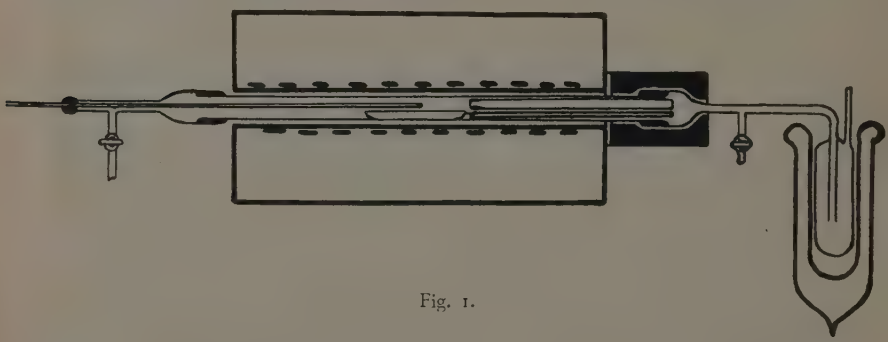


Fig. 1.

L'azoto trascinava i vapori di zolfo e di solfuro di carbonio, e li depositava in adatto separatore, immerso in un miscuglio frigorifero di anidride carbonica e alcool.

Per impedire che lo zolfo si depositasse lungo l'apparecchio prima del separatore, la giuntura (in vetro pyrex) fra separatore e canna di porcellana, era immersa in un bagno di lega fusibile. Il bagno, oltre assicurare la tenuta funzionando da chiusura idraulica, permetteva anche di mantenere in quel punto una temperatura che non consentiva allo zolfo di condensarsi.

L'azoto era privato da ogni impurezza di ossigeno facendolo passare ripetute volte su fosforo umido e su rame arroventato.

L'esperienza si conduceva nella maniera seguente. Si scaldava la camera di reazione alla temperatura voluta facendo passare azoto nell'apparecchio,

(1) Questi « Rendiconti » [6], 7, 19 (1928).

e si continuava a far passare gas a questa temperatura almeno per un'ora senza raccogliere lo zolfo e il solfuro che venivano trascinati. Dopo un'ora si cominciavano a raccogliere i vapori di solfo e di solfuro nel separatore, raffreddando questo fortemente, e si continuava la raccolta almeno per due ore. Alla fine dell'esperienza si saldavano alla fiamma i fori di entrata e di uscita del separatore.

Si pesava la somma $CS_2 + S_2$, e, scacciato il CS_2, si aveva per differenza il peso dello zolfo. Questo veniva controllato ossidando con bromo e pesando il solfato di bario.

I valori ottenuti sono i seguenti:

a 1015°

$$\frac{S_2}{CS_2} = 0.113 ;$$

a 1050°

$$\frac{S_2}{CS_2} = 0.188 .$$

Gli stessi valori si sono avuti variando la velocità di afflusso dell'azoto (120 cm.³ all'ora) per modo che è a ritenersi essi corrispondano a stati di equilibrio.

Dai valori ottenuti, servendosi delle tensioni di zolfo del solfuro di argento avanti riportate si ricava:

a 1015° . . . . . $P_{CS_2} = 35.6$ mm. Hg
a 1050° . . . . . $P_{CS_2} = 39.6$ » »

4. Secondo la (I) le P_{CS_2} possono anche calcolarsi dalle tensioni di Ag_2S ricavate dal calore di formazione o dall'equilibrio di riduzione con idrogeno, e dalla costante di dissociazione del solfuro di carbonio.

Effettuando il calcolo per le due temperature indicate si ottiene:

a 1015° . . . . . P_{CS_2} 14.4 mm. Hg
a 1050° . . . . . P_{CS_2} 27.3 » »

La concordanza dei valori trovati con quelli calcolati può ritenersi soddisfacente date le notevoli approssimazioni inerenti al calcolo.

Chimica. — *Sul frazionamento delle miscele neodimosamariche.* Nota [1] del Corrisp. L. Rolla e di L. Fernandes.

La separazione della massima parte del samario dal neodimio riesce notoriamente di grande facilità col metodo dei doppi nitrati del magnesio in soluzione neutra.

Lo stesso metodo mentre serve pure bene per purificare il samario dalle ultime tracce di neodimio, presenta notevolissime difficoltà nella separazione delle ultime tracce di samario dal neodimio.

C. Auer von Welsbach [2] il quale in una sua recente nota [2] pone in rilievo questa difficoltà, propose di cristallizzare nuovamente i nitrati doppi con l'ammonio per questa ultima purificazione. Data però la grande solubilità di questi sali per le frazioni neodimosamariche, anche questo metodo non arriva a risultati soddisfacenti.

Anche il metodo dei bromati che è stato da noi a lungo sperimentato, per questo scopo, mentre che porta ad una purificazione piuttosto rapida del samario, non riesce ad eliminare le ultime tracce di questo elemento dal neodimio.

Dall'esame delle curve di solubilità (v. fig. 1) costruite in funzione del numero atomico delle terre rare, si può facilmente rilevare come una massima differenza di solubilità si raggiunga per i nitrati doppi del manganese.

Il metodo basato sulla cristallizzazione di questi sali introdotto da Lacombe e lungamente studiato in seguito, è consigliato solo per la separazione delle frazioni intermedie, per la purificazione cioè del praseodimio dal neodimio e viceversa. La cristallizzazione delle frazioni samariche sotto forma di nitrati doppî col manganese non è possibile, data la grande solubilità di questi sali e si verrebbero ad incontrare le stesse difficoltà che nel caso dei nitrati doppi con l'ammonio.

Noi abbiamo considerato allora la possibilità di raggiungere dei gradi giusti di solubilità cristallizzando le soluzioni solide dei nitrati doppî del magnesio, coi nitrati doppî del manganese.

Abbiamo intrapreso le nostre esperienze sui due materiali di diversa origine e composizione.

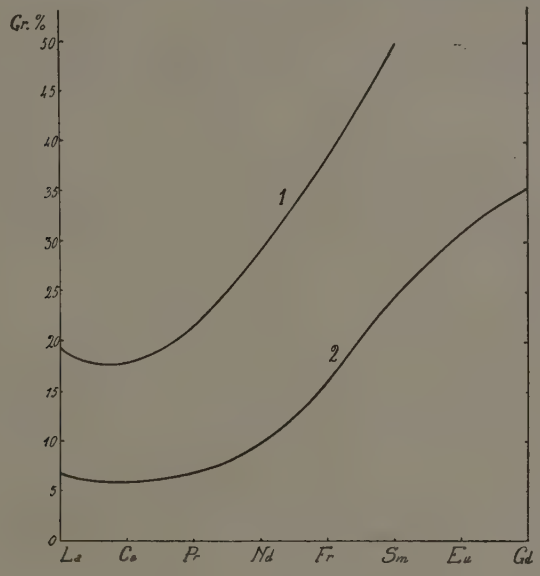
1. Siamo partiti da circa un chilogrammo di ossido di neodimio impuro di samario, ottenuto nella testa della cristallizzazione col metodo dei bromati.

(1) Presentata nella seduta del 4 marzo 1928.
(2) « Chem. Zeit. », 118, 990 (1926).

L'ossido trasformato in nitrato fu addizionato col nitrato di magnesio e nitrato di manganese in ugual quantità.

Dopo trenta serie di cristallizzazioni eseguite su sei frazioni, il samario era completamente eliminato nelle due ultime, mentre che il neodimio allo stato ai purezza assoluta si era raccolto nelle prime quattro frazioni.

Durante il frazionamento, naturalmente il manganese si spostava nelle frazioni di coda mentre che la testa si arricchiva di magnesio.



1 - $2R'''(NO_3)_3 \cdot 3Mg(NO_3)_2\ 24H_2O$
2 - $2R'''(NO_3)_3 \cdot 3Mn(NO_3)_2\ 24H_2O$

Fig. 1.

Se il frazionamento avesse dovuto continuare, sarebbe stato opportuno aggiungere del manganese alle prime frazioni e toglierne una parte dalle code.

2. Un altro frazionamento fu eseguito sopra diversi chilogrammi di ossido di neodimio ancora impuro di praseodimio e contenente tutto il samario originario. Questo materiale proveniva dalle code del frazionamento dei doppî nitrati di ammonio e tallio.

Questa volta il manganese venne aggiunto in quantità decrescente dalla testa alla coda e per il magnesio si usarono concentrazioni diverse.

Dopo 15 serie condotte su 12 frazioni, le ultime code avevano acquistato la colorazione gialla, caratteristica del samario e contenevano solo poco neodimio.

Dopo altre cinquanta serie tutto il samario si era accumulato nelle ultime quattro frazioni. Le ultime due erano perfettamente esenti di neodimio e impure solo per terre terbiche e yttriche. La terzultima conteneva neodimio e samario in quantità pressochè uguali. La quartultima conteneva il samario solo come impurezza.

Il praseodimio si era raccolto nelle prime due frazioni ancora impure per poco neodimio, e questo allo stato di purezza assoluta si trovava nelle cinque frazioni di mezzo.

Da questi risultati noi possiamo senz'altro concludere che il metodo della cristallizzazione dei nitrati doppî di magnesio e manganese si presta ottimamente per la separazione e purificazione del neodimio dal samario e viceversa.

Mineralogia. — *I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - IX. Solfati di cerio (ceroso) e rubidio.* Nota del Socio F. Zambonini e S. Restàino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *La più giusta denominazione e la cartografia del Massiccio Cristallino sul quale è, in parte, fondata la città di Savona.* Nota del Corrisp. S. Franchi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Il diverso corredo cromosomico delle cellule dei Metazoi in rapporto al sesso e la differenza di categoria degl'« Individui misti » e dei « Gameti puri » in « Cryptochilum echini » Mps.* Nota [1] del Corrisp. A. Russo.

Negli ultimi anni le indagini su le differenze di struttura fra i due sessi nei Metazoi e quindi su le probabili cause del loro differenziamento, sono state dirette alla sostanza dei nuclei cellulari.

In alcune specie, studiate da tale punto di vista (McClung, Wilson, Stevens, Payne, ecc.), si è resa visibile, infatti, una differente quantità di sostanza nucleare, che sarebbe in relazione con la diversa sessualità degli individui. Tale differenza, che, in origine, si manifesta nelle cellule sessuali, dalle quali, dopo la fecondazione, si trasmette alle cellule che compongono

(1) Presentata nella seduta del 19 febbraio 1928.

i tessuti dell'adulto, per lo più appare nel complesso delle cellule sessuali maschili e spermii, dei quali, in tali casi, metà ha una maggiore quantità di sostanza nucleare dell'altra metà.

Com'è noto, gli elementi nucleari differenziatori sono alcuni particolari cromosomi o un solo cromosoma, detti *cromosomi accessorî*, *eterocromosomi*, *allosomi* o *cromosomi X*, i quali, quando la cellula pregerminativa o *spermatogonia* compie le divisioni di maturazione, passano in una delle cellule mature, mentre l'altra ne rimane priva.

Le cellule sessuali femminili mature (*ova*) hanno invece tutte, per lo più, l'intero corredo cromosomico, per cui, quando saranno fecondate dagli spermii dell'una e dell'altra categoria, si otterrà una *I^a cellula embrionale*, che ora avrà un numero maggiore di corpi nucleari, ora un numero minore, e conseguentemente anche nelle cellule dell'individuo adulto si avrà la stessa differenza. Nel primo caso (*maggiore quantità di sostanza nucleare*) si è potuto constatare che l'individuo, che ne deriva, è di sesso femminile, nel secondo caso (*minore quantità di sostanza nucleare*) di sesso maschile.

Il Wilson [1] ed il Payne [2] specialmente distinsero negli *Emitteri* ed in altri ordini d'insetti, diversi tipi di combinazioni cromosomiche, che da vari ricercatori furono estesi ad altre specie di Metazoi. Nel tipo *Protenor* (Wilson) il nucleo della *spermatogonia* ha un corredo di cinque cromosomi, di cui uno rappresenta il *cromosoma X*, il quale, quando la cellula compie la divisione di maturazione, passa in una delle cellule figlie, delle quali perciò, mentre una ha due cromosomi, più il *cromosoma X*, l'altra ha soltanto due cromosomi. Tutte le cellule sessuali femminili mature invece hanno tre cromosomi e perciò, se sono fecondate da spermii a tre cromosomi, la *I^a cellula embrionale* avrà 6 cromosomi, ne avrà invece 5, se saranno fecondate da spermii a due cromosomi, ottenendosi nel 1° caso femmine, nel 2° maschi.

Nel tipo *Ligaeus* la *spermatogonia* ha 6 cromosomi, dei quali due, che rappresentano gli elementi differenziatori, sono uno grande, l'altro piccolo. Con le divisioni di maturazione si otterranno anche spermii di due categorie, distinte dalla diversa quantità di sostanza nucleare. Le *oogonie* hanno invece 6 cromosomi della stessa grandezza, per cui, dopo le divisioni di maturazione, si avranno ova mature tutte con tre cromosomi uguali. In questo Emittero, la *I^a cellula embrionale* avrà quindi, in un caso, 6 cromosomi di uguale volume; nell'altro caso anche 6 cromosomi, dei quali però uno è di

(1) Wilson E., *Studies on Chromosomes.* – III. *The sexual differences of the Chromosome-groups in Emiptera with some considerations on the determination and inheritance of sex.* « The Journal of Experimental Zoology », vol. III, 1906.

(2) Payne F., *Some new types of chromosome distribution and their relation to sex.* « Biolog. Bulletin », vol. XVI, 1909.

minore volume. Anche in *Ligaeus* fu constatato che dalla *I^a cellula embrionale* con maggiore quantità di sostanza nucleare si sviluppa una femmina, da quella con minore quantità si sviluppa un maschio.

Un caso analogo fu descritto dal Payne nel tipo *Diplocodus*, in cui entrambe le cellule sessuali mature hanno 13 cromosomi, dei quali, in una metà di tali cellule, uno è grande, nell'altra metà piccolo. In questo caso, unendosi ova e spermii con cromosoma differenziale grande, la *I^a cellula embrionale*, che avrà 26 cromosomi, darà ♀, invece darà ♂, se si uniscono ova e spermii entrambi con cromosoma differenziale piccolo.

Analoghi risultati si hanno nei vari altri tipi, descritti dal Payne, come nei tipi *Fitchia, Prionodus, Galastochoris, Acholla,* ecc.

Tenendo presente i risultati sopra cennati, mi è parso non privo di interesse mettere in rilievo in *Cryptochilum echini*, un organismo di struttura assai semplice, diverso dai Metazoi, che la differenza di categoria dei vari individui dipende anche da una differente quantità di sostanza nucleare.

Già in una Nota precedente [1] avevo riferito su le due categorie d'individui, presentate da tale Ciliato, e su le caratteristiche, che essi posseggono durante i due cicli, il *principale* e l'*accessorio*. Qui insisto su tali reperti, riferendoli alla diversa sessualità degl' individui stessi, accennata nella Nota avanti citata, ed alla analogia che potrebbe stabilirsi con i reperti rilevati nei Metazoi.

La differenza di categoria fra gl' individui di *Cryptochilum* si basa essenzialmente su la diversa quantità di sostanza nucleare, che si osserva specialmente nei micronuclei; in quanto che, se quelli della *Categoria A* si assumono uguali ad I, quelli della *Categoria B* sono uguali ad 1/2.

Difatti, durante la *Coniugazione vera* fra i gameti puri, il micronucleo del Gamete A, uguale ad I, dopo due successive divisioni mitotiche, forma 4 nuclei, ciascuno dei quali ha il valore di 1/4. Di essi, mentre due formano il micronucleo ed uno dei tre macronuclei dell'apparato nucleare dell'*Individuo misto A*, uno viene riassorbito ed il quarto emigra nel gamete B, dove compie una *3^a mitosi*, per cui in questo gamete si costituiscono due nuovi nuclei, che hanno il valore di 1/8 e che dànno anche origine al micronucleo e ad uno dei tre macronuclei dell'apparato nucleare dell'*Individuo misto B*, come fu rappresentato nella fig. 1 e come è meglio documentato dalla fig. 2, in cui i singoli stadi furono riprodotti direttamente dai preparati.

In detta coniugazione il micronucleo del gamete B, che ha forma di

(1) Russo A., *I due cicli sessuati di «Cryptochilum echini» Maupas si svolgono con due categorie d'individui, che si dividono e si rinnovano con modalità diverse.* Rendic. R. Accad. Lincei», vol. III, ser. 6^a. Roma 1926.

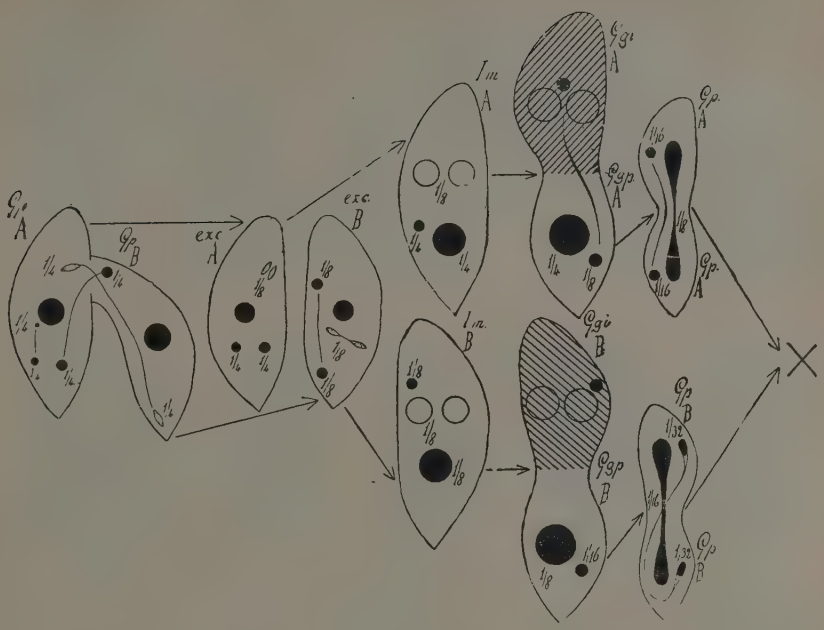


Fig. 1.

Nella prima figura, a sinistra, è rappresentato quello stadio della *Coniugazione vera*, in cui $^1/_4$ del micronucleo del Gamete puro *A* (*Gp. A*), formatosi dopo due divisioni mitotiche, emigra nel Gamete puro *B* (*Gp. B*).

La seconda rappresenta l'Exconiugante *A* (*exc. A*) con i due nuclei stazionarii, uguali ad $^1/_4$, ed i due nuclei, derivati dal nucleo migrante, uguali ad $^1/_8$.

La terza rappresenta l'Exconiugante *B* (*exc. B*), in cui il nucleo migrato, dopo la 3ª mitosi, ha formato due nuclei, uguali ad $^1/_8$, mentre il nucleo stazionario sta per formare due altri nuclei, uguali anche ad $^1/_8$.

Le due figure successive (4ª fila) rappresentano i due Individui misti *A* e *B* (*Im. A.–Im. B*), nei quali i nuclei dell'apparato nucleare hanno origine diversa e diversa quantità di sostanza nucleare.

Le due figure in 5ª fila rappresentano la divisione dei due Individui misti *A* e *B* e la formazione del Gametogene impuro *A* e *B* (*Ggi. A-Ggi. B*), ombreggiati, perchè producono un ciclo a parte (*ciclo accessorio*), e del Gametogene puro *A* e *B* (*Ggp. A-Ggp. B*), da ciascuno dei quali, per divisione (5ª fila) si formano due Gameti puri, atti a copulare ed a riprodurre di nuovo il *ciclo principale*. In essi, dalle frazioni segnate vicino ai nuclei, si rileva che, assumendo quelli del Gamete puro *A* uguali ad 1, quelli del Gamete puro *B* sono uguali a $^1/_2$.

(Figura semischematica). I nuclei, derivati dal Gamete puro *A*, furono rappresentati in nero, quelli, derivati dal Gamete puro *B*, furono rappresentati punteggiati e col solo contorno.

virgola, compie invece una sola divisione atipica e, dei due nuclei così derivati, uno permane nel gamete B, l'altro emigra nel gamete A, dividendosi poi con lo stesso processo atipico e dando origine a due dei tre macronuclei degl'*Individui misti A* e *B*. Tali macronuclei, come si è detto in altre Note [1], hanno tutti il valore di 1/8, essendo il micronucleo del gamete B uguale ad 1/2 rispetto a quello del gamete A, con forma di globulo, che è uguale ad 1.

Con il processo sopra cennato, si stabilisce la differenza di categoria tra l'*Individuo misto A* e quello *B*, in quanto i micronuclei del loro apparato nucleare, entrambi derivati dal micronucleo globuliforme del gamete *A*, sono nel primo 1/4, nel secondo 1/8, cioè l'uno la metà dell'altro.

La differenza di quantità della sostanza nucleare, stabilitasi negl'Individui misti, dopo la coniugazione vera, si conserva nei gameti, che da essi derivano, come fu esposto nella Nota [2] precedente. Difatti, tali individui si dividono per formare due *Gametogeni* e durante questo processo, mentre il micronucleo si scinde, dei tre macronuclei, due, quelli derivati dal gamete B, si portano in massa nella regione anteriore, l'altro, derivato, come il micronucleo, dal gamete A, si porta nella regione posteriore. Per effetto di tale divisione, il micronucleo dei gametogeni, formatisi dall'Individuo misto A, è 1/8 quello dei gametogeni, formatisi dall'Individuo misto B, è 1/16. Dei due gamatogeni così costituitisi uno è *impuro*, perchè il micronucleo deriva dal gamete A, i due macronuclei dal gamete B, l'altro è *puro*, perchè sia il micronucleo sia il macronucleo derivano dal gamete A.

Questi ultimi gametogeni, per dare origine ai *Gameti puri*, atti ad una nuova coniugazione vera, si dividono un'altra volta e, poichè, oltre al micronucleo, si divide anche il macronucleo, l'apparato nucleare, che si costituisce in ciascuno dei due gameti puri della *Categoria A*, sarà formato da un micronucleo uguale da 1/16 e da un macronucleo uguale ad 1/8, mentre l'apparato nucleare dei gameti puri della *Categoria B* è costituito da un micronucleo uguale ad 1/32 e da un macronucleo uguale ad 1/16, cioè, se l'apparato nucleare della *Categoria A* lo assumiamo uguale ad 1, quello della *Categoria B* avrà valore di 1/2.

La differenza di categoria, oltre ad avere come base la differenza di sostanza nucleare anche nei due gameti puri, può fondarsi su altri caratteri, che maggiormente distinguono tali gameti fra loro, i quali caratteri sono relativi alle manifestazioni vitali dei micronuclei.

(1) Russo A., *Sulla diversa costituzione dei due Gameti puri in « Cryptochilum echini » Maupas, risultante dall'analisi delle successioni nucleari, e su la prevalenza del micronucleo globuliforme.* Ibidem, vol. XXXIII, ser. 5ª. Roma 1924.

(2) Russo A., Nota sopra citata.

Fig. 2.

Tre stadii della *Coniugazione vera* tra Gameti puri, gli *exconiuganti* e la ricostruzione degli *Individui misti*:

1) Uno dei primi stadii, in cui il micronucleo del Gamete *A* ha formato i due primi nuclei, mentre quello del Gamete *B* è ancora nella fase iniziale della divisione atipica.

2) Stadio successivo, in cui il micronucleo del Gamete *A*, con due mitosi successive, forma 4 nuclei, mentre quello del Gamete *B*, con la divisione atipica, ne forma 2.

3) Stadio finale, in cui $^1/_4$ del micronucleo del Gamete *A* emigra nel Gamete *B*, mentre metà del micronucleo del Gamete *B* emigra nel Gamete *A*.

4) Exconiugante *A*, appena isolato, dopo la coniugazione vera, con due *nuclei stazionarii* o proprii all'estremo posteriore ed un *nucleo migrato* dal Gamete *B*, all'estremo opposto.

5) Exconiugante *A*, in cui il *nucleo migrato*, per divisione atipica, ha formato due nuclei fusati.

6) Fase iniziale della sviluppo dell'*Individuo misto A*, in cui uno dei due nuclei stazionarii forma il micronucleo, mentre gli altri tre aumentano di volume per formare i macronuclei. La posizione di tali nuclei è ben determinata e diversa da quella assunta dai nuclei, che si sviluppano dall'Exconiugante *B*.

7) Stadio più progredito dello sviluppo dell'apparato nucleare dell' *Individuo misto A*. L'originaria provenienza dei nuclei è chiaramente dimostrata dalla loro diversa posizione.

8) Stadio iniziale della divisione dell'*Individuo misto A*, per la formazione del *Gametogene puro* e di quello *impuro*. Il micronucleo si divide per *mitosi*. Il macronucleo del Gamete originario è stato riassorbito.

9) Exconiugante *B*, appena isolato dopo la coniugazione vera, con due nuclei, uno *stazionario* o proprio all'estremo inferiore, l'altro *migrato* dal Gamete *A*, in un piano anteriore.

10) Exconiugante *B*, in cui il *nucleo migrato* dal Gamete *A*, dopo essersi diviso per mitosi, forma due nuclei, uguali ad $^1/_8$, mentre il *nucleo stazionario* si divide atipicamente per formare due macronuclei dell'apparato nucleare dell'*Individuo misto B*. Si osservi la posizione di tali nuclei, che si conserva negli stadii successivi e che fanno distinguere l'*Individuo misto B* dall'*Individuo misto A*.

11-12) Stadii più progrediti dello sviluppo dell'apparato nucleare dell'*Individuo misto B*, in cui il micronucleo è sempre ad un piano anteriore, mentre nell'*Individuo misto A* è ad un piano posteriore.

13) Stadio iniziale della divisione dell'*Individuo misto B* per la formazione dei due *Gametogeni*, il puro e l'impuro *B*. Il micronucleo si divide per *amitosi*. In questo stadio il macronucleo del Gamete originario e stato riassorbito.

La spiegazione delle lettere come nella figura 1ª.

Tutte le figure furono riprodotte dai preparati con Microscopio Zeiss, Oc. comp. 4 × 10, Obb. imm. omog. $^1/_{12}$, carta sul tavolo da lavoro. Ridotte a metà.

Difatti, come fu esposto in altre Note [1], il micronucleo del *Gamete A* si divide più rapidamente di quello del *Gamete B*, e mentre il primo segue il processo mitotico, il secondo quello atipico o amitotico. Oltre a ciò, il micronucleo globuliforme del gamete *A*, durante la coniugazione principale, compie una divisione in più, perchè, come avanti si è detto, una quarta parte di esso, migrando nel gamete *B*, si divide una 3ª volta per fornire il micronucleo degl'individui di questa categoria.

Ma, ciò che maggiormente autorizza a distinguere le due categorie, si è la funzione diversa che i micronuclei dei gameti *A* e *B* compiono durante il processo sessuale e nella formazione dell'apparato nucleare degli *Individui misti*, che ne derivano. Mentre il micronucleo globuliforme del gamete *A*, con le sue più celeri divisioni mitotiche, forma i micronuclei di tutti gl'individui *puri* ed *impuri* di entrambe le categorie, il micronucleo virgoliforme del gamete *B* forma soltanto macronuclei, mai micronuclei. Si può quindi asserire che il micronucleo del gamete *A*, con maggiore quantità di sostanza nucleare, oltre ad una più grande attività riproduttiva,

(1) Russo A., *Sul differente ritmo di divisione dei micronuclei durante la coniugazione vera in « Chryptochilum echini »*. Rendic. R. Accad. Lincei », vol. XXXIII, ser. 5ª. Roma 1924.

per la velocità maggiore con cui si divide, ed un predominio sul gamete *B*, in quanto il micronucleo di questo è solo da quello ricostituito, ha una spiccata funzione germinativa; mentre il micronucleo del gamete *B* ha una funzione spiccatamente trofica.

Se si considerano i fatti sopra rilevati, relativi alla differenziazione degl'individui dei due sessi, sia nei Metazoi, finora studiati, sia in *Cryptochilum*, è evidente che, in entrambi i casi, la differenza di categoria è fondata su la diversa quantità di sostanza nucleare per quanto non esista una precisa identità, stabilendosi quella differenza con modalità diverse.

Nei Metazoi, ad una maggiore quantità di sostanza nucleare, determinata dalla presenza di un cromosoma o da più cromosomi differenziali, corrisponde lo sviluppo di un individuo femminile, mentre ad una minore quantità, dipendente dalla mancanza di quei cromosomi, o perchè essi sono più piccoli di quelli dell'altra categoria, corrisponde un individuo maschile.

Analogamente, in *Cryptochilum*, la differenza di quantità di sostanza nucleare fra gl'individui delle due categorie è l'indice della loro diversa natura, soltanto che essa si determina durante la coniugazione dei gameti, perchè una quarta parte del micronucleo del gamete *A* emigra nel gamete *B*, dove compie una *3ª mitosi* per fornire all'Individuo misto *B* due nuclei, che sono la metà di quelli dell'Individuo misto *A*.

Il *Gamete puro* e l'*Individuo misto* della *Categoria A*, avendo maggiore quantità di sostanza nucleare potrebbero rappresentare individui femminili e ciò, a mio parere, anche per le particolari manifestazioni vitali dei loro micronuclei, avanti rilevate (*Divisione mitotica con emissione di filamento siderofilo, maggiore celerità di divisione, durante la coniugazione, prevalenza sul micronucleo del gamete B, perchè fornisce tutti i micronuclei delle categorie A e B*).

Il *Gamete puro* e l'*Individuo misto* della *Categoria B*, con minore quantità di sostanza nucleare, corrisponderebbero invece ad individui maschili, e ciò anche per le diverse manifestazioni vitali del micronucleo in confronto di quelle che furono osservate nel micronucleo degl'individui della *Categoria A* (*Divisione atipica o amitotica, senza emissione di filamento siderofilo, minore celerità di divisione, durante la coniugazione, e perchè tale micronucleo forma soltanto macronuclei, che hanno funzione trofica*).

Pur non potendosi determinare, con la dovuta sicurezza, quale degli individui della categoria *A* e di quella *B* rappresenti il sesso femminile e quale quello maschile, tuttavia parmi interessante rilevare che la diversa quantità di sostanza nucleare nelle cellule degl' individui dei due sessi, nei Metazoi, ed il corrispondente fenomeno, osservato nelle due categorie d'individui di *Cryptochilum*, fa veramente pensare che tale sostanza abbia una relazione con il differenziamento sessuale. Non si può omettere però di dire che la differente quantità di sostanza nucleare, relativa al differenziamento sessuale, potrebbe essere, in specie determinate, soltanto la parte material-

mente visibile della struttura cellulare e ciò in relazione ai mezzi di osservazione, di cui oggi disponiamo.

Ma, in altre specie, tale diversità potrebbe inizialmente osservarsi nel protoplasma delle ova, dove si manifesta con prodotti metabolici di varia natura, dipendenti dal momento del ciclo evolutivo, che l'ovo percorre, come ho potuto dimostrare nella Coniglia [1], senza escludere con ciò che tali prodotti possano influire sul nucleo ovulare, come parte intimamente connessa al protoplasma nel complesso cellulare, anzi come uno dei due elementi (citoplasma e nucleo) la cui interazione deve costituire la vita cellulare [2].

Penso che ogni sesso si può riportare ad una condizione di metabolismo, i cui indici materiali, ai nostri mezzi d'indagine, possono essere manifesti o nel citoplasma o nel nucleo.

Botanica. — *Osservazioni sopra lo « Scleroderma ambiguum » Petri e le sue affinità sistematiche.* Nota del Corrisp. L. Petri.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul parallelismo di Levi-Civita e sopra certe possibili estensioni.* Nota di P. Nalli, presentata [3] dal Socio T. Levi-Civita.

Da quanto abbiamo esposto nella Nota *Sulle coordinate geodetiche* [4] risulta che alla nozione di parallelismo si potrebbe arrivare nel seguente modo, senza passare per la varietà euclidea nella quale la V_n è immersa.

Sia L una linea in una varietà V_n. Lasciandoci guidare dall'analogia per quanto accade quando $n = 2$, ammettiamo che esista un sistema di coordinate $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$ geodetiche in ogni punto di L. Sostituendo ad

(1) Russo A., *Sui prodotti del diverso tipo di metabolismo, osservato nelle uova di Coniglia, e sul loro valore per il problema della sessualità.* « Archivio di Fisiologia », vol. VIII, 1910; *La funzione di assorbimento e di secrezione interna nelle cellule della granulosa del follicolo di Graaf della Coniglia, la degenerazione grassa ed il ciclo vitale dell'ovo* (con Appendice: *Su le cause determinanti il sesso dei nati della Coniglia*). « Atti Accad. Gioenia », vol. XI, ser. 5ª. Catania 1918.

(2) Leggasi in proposito il lavoro di A. Brachet, *Recherches sur la fécondation prématurée de l'œuf d'oursin* (*Paracentrotus lividus*). « Archives de Biologie », t. XXXII, 1922.

(3) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(4) In questo volume dei « Rendiconti ».

esse delle opportune combinazioni lineari a coefficienti costanti, possiamo supporre che nell'espressione del ds^2,

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{ij}\, \bar{a}_{ij}\, d\bar{x}_i\, d\bar{x}_j ,$$

sia lungo L

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} . \tag{1}$$

Diremo che un vettore si sposta per parallelismo lungo L quando nel detto sistema di coordinate le sue componenti si mantengono costanti.

Se $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \cdots, \bar{R}_n$ sono le componenti covarianti di un tale vettore, facendo un cambiamento di variabili, avremo per le nuove componenti covarianti R_i le eguaglianze

$$R_i = \sum_1^n {}_k\, \bar{R}_k \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

e di qui, differenziando lungo L

$$dR_i = \sum_1^n {}_{kj}\, \bar{R}_k \frac{\partial^2 \bar{x}_k}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_j .$$

Ma siccome in ogni punto di L

$$\bar{R}_k = \bar{R}^k ,$$

denotando con $\bar{R}^k$ le componenti controvarianti, sarà

$$\bar{R}_k = \bar{R}^k = \sum_h R^h \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_h} .$$

Sostituendo nella espressione di dR_i

$$dR_i = \sum_1^n {}_{hkj} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_h} \frac{\partial^2 \bar{x}_k}{\partial x_i\, \partial x_j} R^h\, dx_j . \tag{2}$$

Si tenga poi conto che

$$a_{ik} = \sum_1^n {}_{jh}\, \bar{a}_{jh} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_h}{\partial x_k} ,$$

e quindi, derivando rispetto ad x_r (tenuto conto delle (1) e del fatto che lungo L si annullano le derivate parziali delle $\bar{a}_{jh}$ rispetto alle $\bar{x}$) sarà lungo L

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} = \sum_j \frac{\partial^2 \bar{x}_j}{\partial x_i\, \partial x_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} + \sum_j \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \bar{x}_j}{\partial x_k\, \partial x_r} .$$

Tenendo conto di questo, dalla (2) si ottiene facilmente

$$dR_i = \sum_{hj}^{n} \left[\begin{matrix} i \\ h \end{matrix} \; \begin{matrix} j \\ \cdot \end{matrix} \right] dx_j R^h .$$

Si trovano così le equazioni differenziali del parallelismo, per mezzo delle quali poi si dimostra che effettivamente esistono sistemi di coordinate geodetiche in ogni punto di una linea L, aperta e senza punti multipli. Si può dunque dire che l'introduzione della nozione di parallelismo ha permesso di sfruttare il fatto che lungo una linea L esiste una V'_n euclidea osculatrice ad una V_n, mentre prima di tale introduzione si riusciva solo a sfruttare il fatto che, fissato un punto in una V_n, esisteva una V''_n euclidea osculatrice alla V_n in quel punto.

Ritorniamo ora al problema generale posto nella Nota citata.

Quando per una V_n esiste un sistema di coordinate geodetiche in ogni punto di una V_m contenuta in essa, si può generalizzare la nozione di parallelismo, dicendo, p. es., che un vettore funzione dei punti di V_m è parallelo lungo V_m, quando nel sistema di coordinate geodetiche le sue componenti sono costanti. Naturalmente se $m > 1$ non esistono in generale sistemi di coordinate geodetiche nei punti di una V_m. Perchè ne esistano è necessario e sufficiente che, spostando per parallelismo, secondo Levi-Civita, un vettore lungo una linea chiusa contenuta in V_m, si ritorni al punto di partenza col medesimo vettore.

Tali varietà V_m si presenterebbero quindi dotate di una notevole proprietà: l'uniformità nel trasporto per parallelismo lungo una loro linea.

Si presentano allora varie questioni. Per es.: per una V_n qualunque esistono di tali V_m con $m < n$ e maggiore di 1?

Se ciò non accade per qualunque m, quale è il massimo valore che si può dare ad m?

Altra generalizzazione della teoria del parallelismo.

Per una V_n, fissata in essa una linea L, aperta e senza punti multipli, esiste una V'_n euclidea osculatrice a V_n lungo (L, L'). Ma si comprende facilmente che esisterà una V''_n a curvatura costante assegnata, osculatrice a V_n lungo (L, L'').

Non esisterà in generale nè la V'_n euclidea nè la V''_n a curvatura costante assegnata se L è chiusa. Ma se L è chiusa e non ha punti multipli, sarà possibile assegnare la curvatura costante della V''_n in modo da avere l'osculazione lungo (L, L'')? E se ciò è possibile, accadrà che il contatto tra V_n e V''_n sia di ordine superiore al secondo? Se ciò non accade in generale, sarebbe interessante cercare a quali condizioni deve soddisfare la linea chiusa perchè accada.

Altra domanda: se L è aperta, si può fissare la curvatura costante e della V''_n perchè lungo (L, L'') la V_n e la V''_n abbiano un contatto di ordine superiore al secondo?

Più in generale, si potrebbe studiare l'osculazione tra una V_n ed una V'_n a curvatura costante lungo (V_m, V''_m) con $0 \leq m \leq n$.

Ma una estensione, a mio parere più interessante, potrebbe essere la seguente.

Supponiamo che di una varietà V_n *sia assegnata* non una metrica lineare, ma *una metrica superficiale*.

Allora non è più assegnato un sistema doppio simmetrico covariante a_{rs}, ma *un sistema quadruplo covariante* $h_{rs,pq}$, il quale gode delle seguenti proprietà:

È emisimmetrico rispetto ad ogni gruppo di indici r, s, *e* p, q.

Gode della proprietà ciclica

$$h_{rs,pq} + h_{rp,qs} + h_{rq,sp} = 0.$$

Ai vettori della metrica lineare corrispondono qui i sistemi doppi emisimmetrici covarianti o controvarianti.

Quando nella V_n è assegnata una metrica lineare, il tensore $h_{rs,pq}$ potrebbe essere $a_{rp}a_{sq} - a_{rq}a_{sp}$ (ed allora è proprio il caso di una metrica superficiale) o potrebbe essere il tensore di Riemann.

Ma lasciando ad $h_{rs,pq}$ la massima generalità, si presentano tanti problemi.

Per es., quando è possibile, con un cambiamento di variabili, ridurre le $h_{rs,pq}$ a costanti?

Problema più generale: data una V_m in V_n $(0 \leq m \leq n)$ è possibile, con un cambiamento di variabili fare in modo che si annullino le derivate parziali delle $h_{rs,pq}$ in ogni punto di V_m?

Per $m = 1$ si potrebbe in corrispondenza fondare una teoria di parallelismo superficiale per i tensori emisimmetrici di rango due, o più generalmente per i tensori con un numero pari di indici divisi in coppie ed emisimmetrici rispetto agli indici di ogni coppia.

La teoria applicata al tensore $a_{rp}a_{sq} - a_{rq}a_{sp}$ potrebbe portare a risultati relativi ad una specie di curvatura superficiale delle varietà. Applicata al tensore di Riemann potrebbe servire allo studio di proprietà del terzo e quarto ordine di una varietà e potrebbe portare ad una curvatura del secondo ordine.

Nel caso di varietà a curvatura costante le due applicazioni coinciderebbero.

Ed è chiaro come si potrebbe proseguire nella generalizzazione, considerando una metrica di volume, e così via.

Matematica. — *Le sostituzioni pseudo-normalizzanti e la normalizzazione nella teoria generale delle varietà abeliane reali.* Nota di S. Cherubino, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Intorno ad una classe di funzionali continui.* Nota di P. TORTORICI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Calcolo funzionale. — *I funzionali lineari delle funzioni di due variabili complesse.* Nota II di L. FANTAPPIÈ, presentata [1] dal Socio F. SEVERI.

8. Sia $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ una successione di funzioni dell'intorno (r) di y_0, alle quali è applicabile la formula (25) della Nota precedente, tale che la serie

$$y(t_1, t_2) = \sum_1^\infty{}_n\, y_n(t_1, t_2) \tag{30}$$

sia *uniformemente convergente per t_1 fuori di C_1' o su C_1' e t_2 fuori di C_2' o su C_2'*. La somma $y(t_1, t_2)$ della serie sarà allora olomorfa per t_1, t_2 variabili in questi campi, e apparterrà quindi ancora all'intorno (r) di y_0, in cui il funzionale lineare $\overline{F}$ è regolare. Applicando ad essa la formula (25) avremo

$$\overline{F}[y(t_1, t_2)] = \overline{F}\left[\sum_1^\infty{}_n\, y_n(t_1, t_2)\right] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1'} \int_{C_2'} \left\{\sum_1^\infty{}_n\, v(t_1, t_2)\, y_n(t_1, t_2)\right\} dt_1\, dt_2$$

e poichè la serie (30) è uniformemente convergente su C_1', C_2' e la $v(t_1, t_2)$ è ivi olomorfa e quindi limitata in modulo, anche la serie $\sum_1^\infty{}_n\, v(t_1, t_2)\, y_n(t_1, t_2)$ sarà uniformemente convergente su C_1', C_2'. Integrando termine a termine, come è permesso, avremo allora, ricordando la stessa formula (25),

$$\overline{F}\left[\sum_1^\infty{}_n\, y_n(t_1, t_2)\right] = \sum_1^\infty{}_n\, \overline{F}[y_n(t_1, t_2)]. \tag{31}$$

Nell'ipotesi precedente della convergenza uniforme della serie (30), *sussiste dunque la proprietà distributiva del funzionale lineare* $\overline{F}$ *anche per una somma di un numero infinito di termini; per calcolare il funzionale lineare* $\overline{F}$ *della somma di una serie, si può cioè fare la somma della serie* (31), *convergente, che si ottiene applicando* $\overline{F}$ *ai successivi termini della serie* (30).

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

9. Dalla determinazione lineare $\overline{F}$ del funzionale F nell'intorno (r) di y_0, si può cercare di passare, con successivi *prolungamenti analitici*, alle varie determinazioni di F per qualunque altra funzione del suo campo naturale di esistenza. Consideriamo perciò la formula fondamentale (25), che ci dà il valore di $\overline{F}$ per qualunque funzione y dell'intorno (r) di y_0, mediante un integrale doppio esteso a un ciclo chiuso a due dimensioni. Supponiamo poi che, data una certa linea analitica $y = y(t_1, t_2; \varepsilon)$, si possa far variare ε da ε_1 a ε_2, su un percorso L di valori non eccezionali, in modo che la funzione $y_1 = y(t_1, t_2; \varepsilon_1)$ sia interna all'intorno iniziale (r) di y_0, $y_2 = y(t_1, t_2; \varepsilon_2)$ sia invece esterna, e inoltre, *per ogni valore di* ε *su* L, *si possa sempre trovare un ciclo chiuso a due dimensioni* $\Gamma(\varepsilon)$, *variabile con continuità al variare di* ε, *tale che nessuno dei suoi punti nell'*M_4 *coincida con qualche punto delle varietà singolari dell'indicatrice* $v(t_1, t_2)$ *o della funzione* $y(t_1, t_2; \varepsilon)$; *mentre, per* $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\Gamma(\varepsilon_1)$ *si riduca al ciclo* C_1', C_2', *che compare nell'espressione integrale* (25) *di* $\overline{F}[y_1(t_1, t_2)]$.

Poichè tanto $\Gamma(\varepsilon)$, quanto le varietà singolari della $y(t_1, t_2; \varepsilon)$, sono varietà *chiuse* dell'M_4, esisterà una *minima distanza sferica* $\rho(\varepsilon) > 0$ dei punti di $\Gamma(\varepsilon)$ dai punti di queste varietà. Se allora prendiamo un qualunque valore ε_0 di ε su L, e consideriamo l'espressione integrale

$$(32) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma(\varepsilon_0)} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

questa avrà un significato ben definito per ogni funzione y dell'intorno $(\rho(\varepsilon_0))$ di $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$, poichè ogni tale funzione è olomorfa per tutte le coppie t_1, t_2 che hanno una distanza sferica $\geqq \rho(\varepsilon_0)$ dalle coppie singolari di $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$, e quindi, in particolare, sul ciclo $\Gamma(\varepsilon_0)$. Entro questo intorno $(\rho(\varepsilon_0))$ della $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$ l'espressione (32) ci rappresenta evidentemente una determinazione *regolare e lineare* di un funzionale analitico; si tratta ora di far vedere che questo è lo stesso funzionale F, analitico in senso stretto, considerato nella Nota precedente, che cioè la determinazione (32) nell'intorno $(\rho(\varepsilon_0))$ di una qualunque funzione $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$, per ε_0 su L, può sempre ottenersi, con successivi prolungamenti analitici, dalla determinazione iniziale $\overline{F}$, data dalla (25) nell'intorno (r) di y_0.

Osserviamo intanto che, per ogni valore ε_0 di ε su L, potrà sempre determinarsi, sulla sfera complessa ε, un cerchio $C(\varepsilon_0)$ con centro in ε_0 e raggio conveniente $R(\varepsilon_0) > 0$ (il massimo possibile), tale che, per ε entro questo cerchio, la $y(t_1, t_2; \varepsilon)$ sia sempre interna all'intorno $(\rho(\varepsilon_0))$ della $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$; anzi data la variazione *continua* delle sue varietà singolari, nell'M_4, in dipendenza dal parametro ε_0, anche la funzione $R(\varepsilon_0) > 0$, definita per ε_0 su L, sarà continua e ammetterà un *minimo* $\sigma > 0$. Dividiamo allora l'arco L, che supporremo sempre regolare e

di lunghezza finita l, in n archi di uguale lunghezza $\frac{l}{n}$, mediante i punti $\varepsilon_{0,0} = \varepsilon_1, \varepsilon_{0,1}, \cdots, \varepsilon_{0,n} = \varepsilon_2$, in modo che sia $\frac{l}{n} < \sigma$. Per ε_0 variabile su L, tra $\varepsilon_{0,i-1}$ e $\varepsilon_{0,i}$, il cerchio $C(\varepsilon_0)$ di raggio $R(\varepsilon_0) \geqq \sigma$ conterrà sempre nel suo interno gli estremi $\varepsilon_{0,i-1}$ e $\varepsilon_{0,i}$, che distano dal suo centro meno di σ. Ciò vuol dire che le funzioni $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i-1})$ e $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i})$ sono sempre interne all'intorno $(\rho(\varepsilon_0))$ delle funzioni $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$, corrispondenti a quei valori di ε_0.

Prendendo allora un numero $\lambda_i > 0$ abbastanza piccolo, si potrà sempre fare in modo che non solo la $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i})$, ma anche tutte le funzioni $y(t_1, t_2)$ dell'intorno (λ_i) di questa siano ancora interne all'intorno $(\rho(\varepsilon_0))$ delle funzioni $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$. Tutte queste funzioni y saranno dunque olomorfe, in particolare, sui cicli d'integrazione $\Gamma(\varepsilon_0)$, e per queste funzioni l'espressione (32) avrà sempre un significato ben determinato; anzi il suo valore resterà sempre costante qualunque sia ε_0 su L, tra $\varepsilon_{0,i-1}$ e $\varepsilon_{0,i}$, poichè al variare di ε_0 il ciclo d'integrazione $\Gamma(\varepsilon_0)$ varia con continuità. In particolare, pei valori estremi, sarà

$$(33)\quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma(\varepsilon_{0,i-1})} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma(\varepsilon_{0,i})} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 .$$

Ma il primo membro della (33) ci rappresenta una determinazione regolare e lineare non solo nell'intorno (λ_i) di $y(t_1, t_2, \varepsilon_{0,i})$, ma nell'intorno più vasto $(\rho(\varepsilon_{0,i-1}))$ della $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i-1})$, mentre il secondo membro ci rappresenta una simile determinazione nell'intorno $(\rho(\varepsilon_{0,i}))$ della $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i})$. D'altra parte queste due determinazioni coincidono, per la (33), nell'intorno (λ_i) della $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i})$, che è comune ai due intorni precedenti; dunque la determinazione dataci dal 2° membro nell'intorno $(\rho(\varepsilon_{0,i}))$ della $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i})$ deve dirsi, secondo le nostre definizioni, il *prolungamento analitico* di quella che il 1° membro della (33) definisce nell'intorno $(\rho(\varepsilon_{0,i-1}))$ della $y(t_1, t_2; \varepsilon_{0,i-1})$.

Facendo $i = 1, 2, \cdots, n$, avremo infine

$$(34)\quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma(\varepsilon_2)} v(t_1, t_2)\, y_2(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = F[y_2(t_1, t_2)]$$

cioè *il valore che otteniamo per la nostra espressione integrale, facendo variare con continuità il ciclo* Γ *d'integrazione, nel modo già detto, ci rappresenta sempre una determinazione, lineare e regolare in un intorno conveniente, del funzionale* F, *analitico in senso stretto, e che diremo pure lineare; determina-*

zione ottenuta da quella iniziale $\overline{F}$ *con un numero finito di prolungamenti analitici successivi.*

Ciò naturalmente vale non solo per $\varepsilon = \varepsilon_2$, ma anche per qualunque altro valore ε_0 di ε sulla linea L.

10. Per calcolare effettivamente $F[y_2(t_1, t_2)]$ mediante l'integrale doppio che compare nella formula precedente, basterà dunque definire un ciclo $\Gamma(\varepsilon_0)$, variabile con continuità al variare con continuità di ε_0 su L, come precedentemente è stato precisato. Cominciamo perciò coll'osservare che una coppia di valori $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ potrà essere singolare tanto per la $v(t_1, t_2)$ che per la funzione iniziale $y_1(t_1, t_2)$, solo se i due valori $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ non sono insieme ambedue esterni o ambedue interni ai due cerchi C_1, C_2 rispettivamente. Nel primo caso, infatti, essa non potrebbe essere singolare per la y_1, nel secondo non potrebbe essere singolare per la v. Restano quindi due soli casi possibili, e cioè $\bar{t}_1$ interno a C_1, $\bar{t}_2$ esterno a C_2 (o su C_2), oppure $\bar{t}_1$ esterno a C_1 (o su C_1), $\bar{t}_2$ interno a C_2; conseguentemente potremo distribuire tutte le intersezioni $\bar{t}_1, \bar{t}_2$, delle varietà singolari dell'indicatrice v con quelle singolari per la y_1, in due gruppi ben distinti I_1 e I_2, mettendo nel gruppo I_1 tutte le intersezioni per cui l'*ascissa* $\bar{t}_1$ è interna a C_1, nel gruppo I_2 quelle invece per cui l'*ordinata* $\bar{t}_2$ è interna a C_2. Se poi consideriamo, invece della funzione fissa y_1, la funzione variabile $y(t_1, t_2; \varepsilon)$ e facciamo variare con continuità ε su L, a partire dal valore ε_1 per cui $y(t_1, t_2; \varepsilon_1) = y_1$, anche le intersezioni $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ delle varietà singolari della v con quelle della y varieranno pure con continuità, e potranno sempre tenersi distinte in due gruppi $I_1(\varepsilon)$ e $I_2(\varepsilon)$, secondochè provengono da I_1 o I_2 rispettivamente, *finchè* ε *non prenda un valore* $\bar{\varepsilon}$ *per cui questi due insiemi acquistino un elemento comune.*

Supponiamo ora che, per ε variabile su L da ε_1 a ε_2, ciò non accada mai, supponiamo anzi di più che mai due punti di $I_1(\varepsilon)$ e $I_2(\varepsilon)$ abbiamo *medesima ordinata*; per ogni tale valore ε_0 di ε potremo allora sempre trovare sulla sfera t_2 una *curva separatrice* $C_2(\varepsilon_0)$, variabile con continuità con ε_0, che si riduca a C_2' per $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$, e contenga all'interno tutte le ordinate $\bar{t}_2$ dei punti di $I_2(\varepsilon_0)$, ma lasci all'esterno tutte le ordinate dei punti di $I_1(\varepsilon_0)$. Per ogni valore t_2' di t_2 su $C_2(\varepsilon_0)$, i punti singolari delle due funzioni (di t_1) $v(t_1, t_2')$ e $y(t_1, t_2'; \varepsilon_0)$ saranno sempre distinti; potremo perciò trovare sulla sfera t_1 una *curva separatrice* $C_1(\varepsilon_0, t_2')$, che contenga all'interno tutti i punti singolari della y, ma lasci all'esterno quelli della v, e che vari con continuità insieme a t_2' e ε_0, per ridursi a C_1' quando $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$. Se consideriamo allora, per ogni valore di ε_0, gli ∞^2 punti di M_4 che si ottengono associando a ogni valore t_2' di t_2 su $C_2(\varepsilon_0)$ gli ∞^1 valori di t_1 su $C_1(\varepsilon_0, t_2')$, vediamo che questi ∞^2 punti costituiscono precisamente un ciclo chiuso a due dimensioni $\Gamma(\varepsilon_0)$, che varia con continuità al variare di ε_0 su L senza mai incontrare elementi singolari della v o della y, e che si riduce al ciclo C_1', C_2' per $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$.

Per ogni valore di ε_0 su L, una determinazione di $F[y(t_1, t_2; \varepsilon_0)]$ potrà quindi calcolarsi dalle formule integrali precedenti, eseguendo prima l'integrazione rapporto a t_1, e poi rapporto a t_2; cioè

$$F[y(t_1, t_2; \varepsilon_0)] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma(\varepsilon_0)} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2; \varepsilon_0)\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2(\varepsilon_0)} dt_2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1(\varepsilon_0, t_2)} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2; \varepsilon_0)\, dt_1$$

o anche

$$(35) \qquad F[y(t_1, t_2; \varepsilon_0)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2(\varepsilon_0)} v(t_1, t_2)\, y(\overset{*}{t}_1, t_2; \varepsilon_0)\, dt_2 .$$

Il valore del funzionale F *per la funzione* $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$ *viene dato dunque come il residuo integrale della funzione* $g(t_2; \varepsilon_0) = v(t_1, t_2)\, y(\overset{*}{t}_1, t_2; \varepsilon_0)$, *relativo a una curva chiusa* $C_2(\varepsilon_0)$, *che racchiuda nel suo interno tutte e sole le ordinate dei punti di* $I_2(\varepsilon_0)$, *cioè quelle ordinate dei punti di intersezione che diventano tutte interne a* C_2, *quando la* $y(t_1, t_2 : \varepsilon_0)$ *si riduce alla* y_1, *interna all'intorno* (r) *di* y_0.

Se due punti di $I_1(\varepsilon_0)$ e $I_2(\varepsilon_0)$ non hanno mai *medesima ascissa*, per ε_0 su L, *il calcolo del funzionale si può eseguire in modo simile, facendo prima il prodotto funzionale* $v(t_1, t_2)\, y(t_1, \overset{*}{t}_2; \varepsilon_0) = h(t_1; \varepsilon_0)$, *e poi calcolando il residuo integrale di questa funzione di* t_1, *relativo a una curva chiusa che racchiuda nel suo interno tutte e sole le ascisse dei punti di* $I_1(\varepsilon_0)$, *cioè quelle ascisse dei punti d'intersezione, che si riducono interne a* C_1, *quando la* y, *variando in dipendenza da* ε_0 *su* L, *si riduce alla* y_1. I valori ottenuti per per $F[y(t_1, t_2; \varepsilon_0)]$, con questi due diversi metodi, saranno evidentemente uguali, poichè essi non sono altro che il valore, per $\varepsilon = \varepsilon_0$, della funzione analitica $f(\varepsilon) = F[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$, ottenuto prolungando l'elemento $\overline{F}[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$, definito nell'intorno di $\varepsilon = \varepsilon_1$, sempre lungo la medesima linea L.

11. Dalle considerazioni fatte si può già prevedere, però, che il valore del funzionale F potrà essere diverso, se si congiunge y_1 a y_2 con una diversa linea analitica, oppure se, sulla stessa linea analitica, si sceglie un altro cammino L_1 per congiungere ε_1 con ε_2. La distribuzione dei punti d'intersezione delle varietà singolari della v e della $y(t_1, t_2; \varepsilon_0)$ nei due insiemi $I_1(\varepsilon_0)$ e $I_2(\varepsilon_0)$ dipende infatti dalla linea analitica e dal cammino seguito per andare da ε_1 a ε_2; cambiando la linea, o questo cammino, può variare questa distribuzione e quindi anche l'insieme dei punti singolari

delle funzioni g o h che si debbono chiudere colla curva, su cui va calcolato il residuo integrale.

A differenza di quanto accade pei funzionali lineari delle funzioni di una sola variabile complessa, *potranno dunque aversi più valori per il funzionale lineare* $F[y(t_1, t_2)]$, *anche se tanto l'indicatrice v del funzionale, quanto la funzione y, a cui esso va applicato, sono funzioni monodrome.*

Meccanica. — *Sulla teoria balistica della luce.* Nota di A. Cabras, presentata dal Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra le soluzioni periodiche a periodi grandissimi nella meccanica.* Nota di G. Vranceanu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul significato geometrico della derivazione intrinseca.* Nota di M. Pastori, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Su un nuovo modello di igrometro a condensazione.* Nota del dr. L. Martinozzi, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

In una sua recente Nota il Ranzi [2] metteva in evidenza una causa di errore che altera notevolmente le determinazioni dello stato igrometrico fatte con gli igrometri a condensazione tipo Regnault, Chistoni, ecc., nei quali il raffreddamento si ottiene per mezzo dell'evaporazione di etere nel recipiente che contiene il bulbo termometrico. Il Ranzi difatti ha potuto verificare che la temperatura della parete lucente differisce da quella del bulbo termometrico fino di un grado centigrado, per quante precauzioni si prendano.

Ho cercato di realizzare un apparecchio che sia di facile e semplice uso e costruzione, e nel quale sia eliminata la causa di errore suaccennata.

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) Ivo Ranzi, *Su una causa di errore* ecc., « Nuovo Cimento », Nuova serie, vol. IV, n. 4, 1927.

Concetto direttivo dei miei tentativi [1] è stata l'identificazione del corpo termometrico con la parete sulla quale si deposita la rugiada, cercando di evitare i poco pratici artifici fino ad oggi escogitati.

Il corpo termometrico è costituito da una lamina bimetallica di argento ed acciaio « invar », avvolta a cilindro su se stessa. Un lembo della lamina (lungo una generatrice di detto cilindro) è fissato ad una colonnetta verticale di alluminio, ed al lembo libero è fissata con viti una asticciuola che per mezzo di un sistema di leve (simile a quello usato negli apparecchi registratori) fa spostare un lungo indice su una scala.

Volendo ottenere una maggiore sensibilità, si può sostituire all'indice uno specchietto e servirsi del noto metodo della riflessione di un raggio luminoso su una scala; in tal caso, perchè l'aumento di sensibilità non sia illusorio, occorrerà ricorrere al metodo usato dal Ranzi per cogliere il momento di apparizione o di scomparsa della rugiada.

La faccia esterna della lamina (argento ben lucente) serve come parete su cui si depone la rugiada; e la faccia interna viene raffreddata per mezzo di etere.

Per la taratura dell'apparecchio il metodo migliore, col quale cioè ci si avvicinerebbe di più alle normali condizioni di funzionamento, sarebbe quello di provocare il raffreddamento con un getto d'aria o altro gas raffreddati, contro la faccia interna della lamina, osservando, insieme alle indicazioni dell'indice sulla scala, le indicazioni di un galvanometro connesso con una pila termoelettrica, una saldatura della quale sia a contatto con la faccia esterna della lamina. Si può con speciali accorgimenti evitare che la corrente del gas sia tale da provocare spostamenti meccanici della lamina, e dirigerla in modo da provocare eguale raffreddamento in ogni punto.

Non avendo a propria disposizione un galvanometro, si può procedere nel modo col quale vengono tarati abitualmente i termografi: cioè per immersione in una miscela di alcool ed anidride carbonica, nella quale si pone pure il bulbo di un termometro campione. L'errore commesso con questo metodo di taratura, data la forte conduttività della lamina, è trascurabile, per apparecchi dai quali non si richieda eccessiva sensibilità.

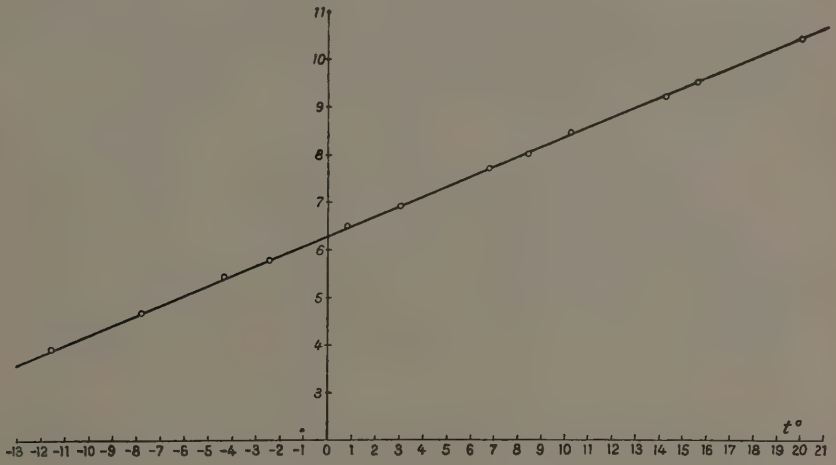
Riporto il grafico di taratura dell'apparecchio da me costruito: i punti contornati da un cerchiettino corrispondono alle osservazioni fatte. La sensibilità dell'apparecchio risulta di 2 mm./1° cent.

Nelle prove da me fatte col modellino di cui ho accennato, ottenevo il raffreddamento della lamina strofinando con un leggero tampone di garza imbevuto d'etere la faccia interna della lamina: con questo sistema si leggono le temperature di scomparsa della rugiada anzichè quelle di formazione; poichè le prime sono alterate dalle pressioni che si esercitano sulla

(1) Lavoro eseguito nella Stazione Aerologica Sperimentale dell'Ufficio Presagi.

lamina sensibile strofinandola col tampone. Che tutta la lamina sia alla stessa temperatura si deduce dal fatto che la rugiada scompare contemporaneamente da tutti i punti della sua superficie.

Nelle varie osservazioni da me compiute il tempo impiegato per la scomparsa della rugiada variava da due a cinque minuti.



Nella seguente tabella sono raccolti i resultati di alcune misure eseguite insieme col mio igrometro ed uno psicometro di Assmann:

IGROMETRO					PSICROMETRO		
temp. amb.		punto rug.		umid.	asciutto	bagnato	umid.
indice	temp.	indice	temp.				
10.3	19.6	8.7	11 5	59	19.6	14.8	57
10.5	20.6	7.7	6.8	42	20.6	13.9	43
7.7	6.8	5.3	— 5.2	43	6.2	2.1	42

*
* *

Spesso mi è occorso di vedere come da personale incolto e senza lungo tirocinio vengano letti più facilmente dei grafici che delle tabelle numeriche; perciò ho pensato di costruire un grafico nel quale siano tracciate le curve colleganti i punti corrispondenti ad egual stato igrometrico, e per coordinate si abbiano variabili in semplice relazione con la temperatura am-

biente T_1 e col punto di rugiada T_2. Varie formule, tutte empiriche, sono state proposte per esprimere l'andamento delle curve dei vapori saturi; tra esse e quella che più si avvicina alla rappresentazione del vero è quella del Battelli [1]:

$$\text{(A)} \qquad \text{Log } p = a + b\alpha^t + c\beta^t$$

nella quale p è la tensione del vapore, t la temperatura centigrada, a, b, c, α, β, delle quantità costanti per ciascun corpo; il logaritmo è in base 10. Per l'acqua e per l'intervallo di temperatura — 10°, 100° i valori delle costanti sono:

$$a = 4.7325067 \qquad b = 0.0137486 \qquad c = -4.101985$$
$$\log \alpha = 0.00701402 \qquad \log \beta = \bar{1}.99670488$$

Consideriamo ora due temperature T_1 e T_2 e supponiamo che corrispondano alla temperatura ambiente ed al punto di rugiada di un determinato luogo; se indichiamo con p_1 e p_2 le tensioni del vapore acqueo corrispondenti a queste temperature, avremo che l'umidità relativa sarà espressa da:

$$U = 100\,\frac{p_2}{p_1} = 10^{b(\alpha^{T_2} - \alpha^{T_1}) + c(\beta^{T_2} - \beta^{T_1}) + 2}$$

Osservando il valore numerico del coefficiente β si vede che il termine in cui esso compare può ritenersi nullo. Del resto era stato già osservato dal Bartoli che in moltissimi casi l'andamento dei vapori saturi era esprimibile con formule contenenti un solo esponenziale.

In definitiva, l'umidità relativa di un ambiente alla temperatura T_1 se T_2 è il punto di rugiada, è espressa da:

$$\text{(B)} \qquad U = 10^{b(\alpha^{T_2} - \alpha^{T_1}) + 2}$$

il luogo dei punti di egual umidità relativa sarà dato dalle curve

$$\text{(B')} \qquad U = \text{cost}$$

ossia dalle curve

$$\text{(C)} \qquad b(\alpha^{T_2} - \alpha^{T_1}) + 2 = K$$

dove K è il logaritmo decimale della costante che compare nella (B').

L'espressione della temperatura del punto di rugiada in funzione della temperatura ambiente, si ricava facilmente ed è:

$$T_2 = \frac{1}{\log \alpha} \log (R + \alpha T_1)$$

(1) «Mem. Acc. di Torino», 41, 1892, pp. 33-43; 1892, p. 63, «Ann. de Chem. et Phys», 26, 1892, pp. 410-3; 1894, p. 408.

dove i logaritmi sono naturali, ed è

$$R = \frac{K - 2}{b} .$$

Dal valore di b, osservando che K può oscillare tra $-\infty$ e $+2$ si ha che la R è compresa tra $-\infty$ e 0. Però si deve osservare che in realtà mai si scenderà a valori di K negativi, poichè non si presenta mai il caso di umidità relative inferiori ad 1 e quindi la R rimarrà compresa tra 0 e -148.

Dall'esame dell'equazione si osserva subito che per $U = 100$ si ha $T_1 = T_2$ mentre per $U = 0$ per qualsiasi temperatura T_1 si avrebbe $T_2 = -\infty$. Ciò posto, ritorniamo alla (C): essa potrà scriversi:

(C′) $$\alpha^{T_2} = R + \alpha^{T_1}$$

se poniamo

$$Y = \alpha^{T_2} \qquad X = \alpha^{T_1}$$

avremo che la (C′) è l'equazione di una retta inclinata di 45° sull'asse delle ascisse, e che interseca l'asse delle ordinate ad una altezza R. Ad ogni valore dell'umidità relativa, cui corrisponde uno, ed uno solo valore di R, corrisponderà una retta.

Ebbene, se sugli assi in luogo dei valori della X e della Y scriviamo i valori corrispondenti delle T_1 e T_2, ed accanto alle varie rette scriviamo il valore della umidità relativa, corrispondente alla R, avremo costruito un grafico, per il quale con estrema facilità, date le due temperature T_1 e T_2 si legge il corrispondente valore della umidità relativa. Si avrà, è vero, l'inconveniente di non avere una scala lineare sugli assi, ma ciò non mi pare inconveniente grave, come lo ha dimostrato l'esperienza fatta già in altri campi.

Fisica. — *Su di un nuovo metodo per l'osservazione di piccolissime birifrangenze.* Nota del dott. G. Todesco, presentata [1] dal Socio Q. Majorana,

Mi propongo di descrivere in questa Nota un metodo per la osservazione di piccolissime birifrangenze (accidentali, magnetiche, elettriche), che si è manifestato di comodo e rapido impiego e che presenta una sensibilità superiore a quella dei dispositivi ordinariamente sin qui impiegati allo scopo.

Il metodo si fonda sull'impiego di una cellula fotoelettrica destinata a ricevere la luce che, per effetto della interposizione fra due nicol incrociati del corpo birifrangente in esame, emerge dal nicol analizzatore.

L'impiego della cellula fotoelettrica, mentre permette grazie ad un conveniente sistema di amplificazione, di apprezzare variazioni di intensità luminosa estremamente deboli, sottrae tale apprezzamento alle inevitabili cause di errore e di incertezza da cui sono affetti i metodi che richiedono l'uso dell'occhio dello sperimentatore, e traduce l'apprezzamento stesso in un dato numerico obbiettivo (deviazione di un galvanometro connesso alla cellula) che si presta a facili ed immediati confronti.

A tradurre in atto il principio esposto, occorreva realizzare un dispositivo sperimentale semplice che permettesse di raggiungere ad un tempo una elevata sensibilità ed una grande stabilità, condizioni queste - come si sa - non facili ad ottenersi, trattandosi di impiegare congegni, quali audion e cellule fotoelettriche, di funzionamento delicato ed incostante.

Ho sperimentato dapprima e per vario tempo con diversi dispositivi del tipo di quelli ordinariamente impiegati per l'amplificazione di correnti fotoelettriche, e dopo varie modificazioni e perfezionamenti, ho addottato lo schema rappresentato in fig. 1 che mi ha dato i migliori resultati, specialmente in ordine alla stabilità delle deviazioni galvanometriche.

Tralasciando vari dettagli e particolarità che potranno essere esposti in altro momento, descriverò sommariamente il dispositivo amplificatore indicato in figura per passare poi all'esposizione dei primi resultati con esso ottenuti.

Dispositivo amplificatore. - C è una cellula fotoelettrica a idruro alcalino in gas nobile, B è una valvola termoionica a doppia griglia destinata all'amplificazione della corrente fotoelettrica. La corrente di placca di

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

questa valvola può essere esattamente compensata mediante la corrente di placca di una seconda lampada a tre elettrodi A, funzionante da diodo (griglia e placca unite insieme) e connessa in maniera da fornire una corrente di senso contrario alla precedente nel ramo E D del circuito, in cui trovansi inseriti un milliamperometro M ed un galvanometro G in parallelo. La valvola A non abbisogna, pel suo funzionamento, di alcuna batteria di placca; infatti, poichè il punto D del circuito è connesso al suolo, la placca p' si trova a potenziale zero ed allora, se le polarità della pila P′ di accensione

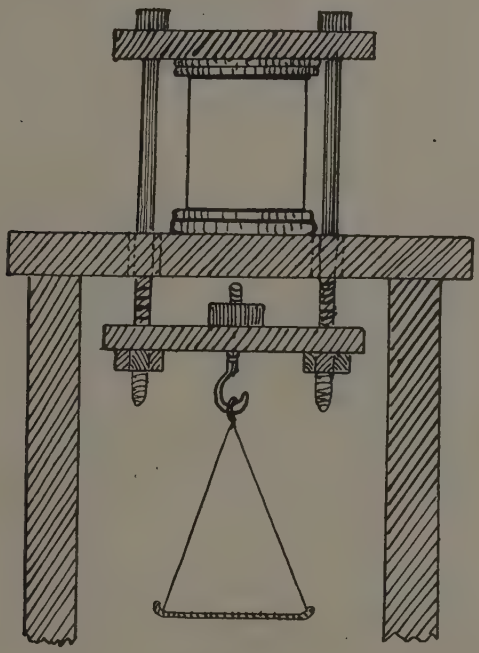


Fig. 1.

del filamento f' sono disposte come in figura, la piccola $d\,.\,d\,.\,p\,.$ esistente fra le porzioni del filamento prossime al polo negativo della pila P′ e la placca, è sufficiente per fornire la debole corrente elettronica di compensazione, necessaria.

Le connessioni della cellula fotoelettrica alla lampada bigriglia essendo disposte come in figura, il funzionamento dell'apparecchio è il seguente: a cellula non illuminata, il milliamperometro M è percorso dalla corrente continua costante di placca della valvola B. L'accensione della valvola A e la manovra del reostato r permettono di compensare esattamente questa corrente e di far tornare a zero l'ago del milliamperometro: a questo ap-

parecchio viene allora sostituito il galvanometro G. L'illuminazione della cellula provoca una emissione di elettroni per parte della superficie metallica m: la griglia g connessa con m, si carica positivamente e favorisce l'affluire della corrente elettronica sulla placca p. La corrente di placca *aumenta* quindi ogni volta che si illumina la cellula e questo incremento di

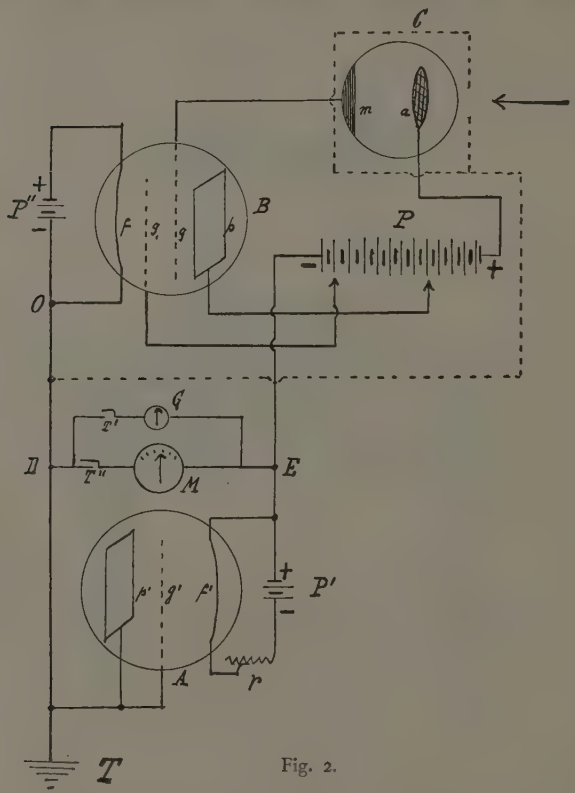


Fig. 2.

corrente produce una deviazione del galvanometro G, sensibilmente proporzionale all'intensità luminosa incidente, se si sono scelte le tensioni di griglia e di placca dell'audion e quella della cellula, in modo che questi due congegni lavorino nella zona rettilinea della loro caratteristica.

Sempre a proposito del funzionamento dell'amplificatore in questione, è opportuno notare che negli ordinari dispositivi di amplificazione di correnti fotoelettriche descritti da Ferrié, Jouast e Mesny [1], la corrente di placca

(1) «C. R.», 178 (1924), p. 1117.

diminuisce anzichè aumentare quando si illumina la cellula. Ciò dipende dal fatto che lo schema del circuito è essenzialmente diverso, la griglia *g* essendo, in quei dispositivi, connessa con l'anodo della cellula fotoelettrica anzichè col metallo. Ne segue che illuminando la cellula, la griglia riceve un apporto di elettroni e si carica negativamente anzichè positivamente, provocando una limitazione della corrente di placca della valvola. In altre parole negli ordinari dispositivi i due spazi catodici dell'audion e della cellula sono connessi in derivazione, mentre nella disposizione sopra descritta e illustrata in figura, sono posti fra loro in serie [1].

L'amplificatore descritto presenta i seguenti vantaggi:

a) semplicità del circuito: una unica batteria serve infatti a fornire le tensioni necessarie alla griglia *g'*, alla placca *p* dell'audion e all'anodo *a* della cellula fotoelettrica, le connessioni essendo così ridotte al minimo;

b) stabilità e prontezza: il primo requisito è ottenuto curando particolarmente l'isolamento delle varie connessioni, racchiudendo la cellula in una scatola metallica messa a terra, mantenendo basse le tensioni di accensione e di placca della valvola bigriglia e usando batterie di accensione di grande capacità. Utilissima inoltre si è mostrata la messa a terra del punto O cui fan capo, nello schema adottato, tutti i circuiti dell'audion e della cellula. La prontezza si deve principalmente al fatto che la griglia *g*, essendo gli spazi catodici filamento-placca dell'audion e metallo-anodo della cellula, disposti fra loro in serie, può, cessata che sia l'illuminazione di questa, riprendere immediatamente il potenziale primitivo, mentre negli ordinari montaggi, nei quali i detti spazi catodici sono in opposizione, occorre un certo tempo affinchè la griglia dissipi, attraverso gli inevitabili difetti di isolamento, la carica negativa accumulata durante l'illuminazione della cellula;

c) facile regolaggio della corrente di compensazione: trattandosi infatti di una corrente elettronica prodotta da una valvola termoionica, basta regolare l'accensione del filamento mediante un conveniente reostato, per variarne a piacere l'intensità entro limiti vastissimi e con manovra facile e comoda. Si evitano così i ben noti inconvenienti dovuti all'impiego di un elettromotore sussidiario chiuso in circuito su di una resistenza di elevato valore, la quale ben difficilmente presenta il requisito indispensabile della assoluta costanza.

Resultati. - Per rendermi conto della sensibilità del descritto dispositivo sperimentale e della sua attitudine a mettere in rilievo fenomeni che

(1) La disposizione in serie degli spazi catodici di cui è questione, per il caso di una lampada a tre elettrodi destinata ad amplificare una corrente fotoelettrica pulsante, è stata indicata dal prof. Majorana nel suo *Nuovo metodo di telefonia ottica con luce ordinaria o con luce ultravioletta.* (Questi «Rendiconti», V (1927), p. 726).

diano luogo a piccolissimi ritardi ottici, ho preso anzitutto in considerazione i fenomeni di birifrangenza accidentale del vetro compresso.

A tale scopo, davanti ad una sorgente luminosa di intensità ben costante (lampada elettrica intensiva alimentata da una batteria di accumulatori di grande capacità), ho posto due nicol incrociati col polarizzatore a 45° sull'orizzonte ed ho allogato tra i nicol un blocchetto di vetro isotropo (altezza 20 mm., larghezza 20 mm., spessore 9 mm.) introdotto nell'apparecchio rappresentato in fig. 2 mediante il quale è possibile esercitare sul vetro una pressione pressochè uniforme ed esattamente misurabile. A nicol paralleli, l'immagine reale del blocchetto di vetro, fornita da una lente posta al di là del nicol analizzatore, va a formarsi sulla cellula fotoelettrica.

Disposti i nicol all'estinzione e regolata la corrente compensatrice dell'apparecchio amplificatore in modo che l'indice luminoso riflesso dallo specchietto del galvanometro [1] sia sullo zero della scala, ho verificato subito che l'introduzione nella bilancina dell'apparecchio illustrato in figura 2, del peso di 1 kg. produce una deviazione che non è contenuta nei limiti della scala. Con un peso di soli 100 gr. si ottiene già una deviazione di un centinaio di divisioni, corrispondenti quindi a circa una divisione per grammo. A dare un'idea della perfetta stabilità della deviazione galvanometrica, dirò di più, che ho potuto effettivamente constatare come posando con precauzione sul piattello della bilancina, un pesetto da 1 gr., l'indice luminoso si sposti sulla scala, di una quantità assai prossima ad una divisione.

Questa esperienza permette una misura assoluta della sensibilità dell'apparecchio. Resulta infatti dalle accurate esperienze del Pockels [2] sul vetro compresso, che sottoponendo un blocco di vetro alla pressione di 1 kg. per mm.^{2} ed osservando in direzione normale allo sforzo, la differenza di cammino per ogni mm. di spessore attraversato, fra i due raggi ordinario e straordinario emergenti dal cristallo fittizio così formato, è di circa 0.050 lunghezze d'onda. Nel mio caso la pressione di un grammo si esercita su di un'area di $20 \times 9 = 180$ mm.^{2} e lo spessore del blocchetto è di 9 mm. Per cui il ritardo misurato, cui corrisponde la deviazione di circa una divisione della scala, è di

$$\frac{0.050 \times 9}{1000 \times 180} = 2,5 . 10^{-6} \lambda .$$

Tale sensibilità non mi resulta sia stata raggiunta finora con gli ordinari dispositivi ottici a lamina polariscopica [3] e non è neanche la massima ottenibile col dispositivo descritto, giacchè la corrente fotoelettrica fornita dalla cellula, può essere ulteriormente amplificata mediante una o più lam-

(1) Galvanometro tipo D'Arsonval; sensibilità 10^{-8} mm. su scala ad un metro.

(2) Cfr. Bouasse, *Optique cristalline.*

(3) Ad es. gli apparecchi a penombra, secondo il Drude, possono apprezzare ritardi dell'ordine di $10^{-4}\lambda$. (*Précis d'Optique*, t. II, 1912, p. 230).

pade a tre elettrodi montate in amplificatore a corrente continua. Non ho ulteriormente sperimentato sulla birifrangenza accidentale del vetro compresso, ma desidero sin d'ora notare che, con l'apparecchio descritto, si presenta facile uno studio della distribuzione degli sforzi nell' interno di una lamina di vetro soggetta a pressione, trazione o flessione, analogamente a quanto già si è fatto in proposito con altri metodi.

Resomi conto della sensibilità del metodo coi fenomeni di birifrangenza accidentale del vetro, ho pensato che esso potesse applicarsi con successo alla constatazione di piccolissime birifrangenze magnetiche o elettriche. Un facile calcolo preventivo mi aveva infatti mostrato che nel caso della birifrangenza magnetica dei consueti liquidi organici (benzolo, toluolo, ecc.), un effetto apprezzabile poteva ottenersi con campi dell'ordine di un migliaio o due di gauss e con percorsi del raggio luminoso nell' interno del liquido, di qualche cm.

Anzitutto ho verificato che l'*effetto Majorana* nel ferro colloidale si mette facilmente in evidenza col campo fornito da un semplice magnete permanente. Passando poi alla birifrangenza del benzolo, ho constatato che col campo fornito da un modesto elettromagnete, si ottiene al galvanometro una deviazione apprezzabile.

Mi riserbo di istituire delle esperienze precise di misura e di sperimentare con liquidi nei quali la birifrangenza magnetica non è stata ancora constatata, aumentando, se è il caso, la sensibilità del metodo. Sono in corso inoltre ricerche tendenti a mettere in rilievo l'*effetto Kerr* nei solidi con campi elettrici deboli.

Ma intanto mi preme di far noti questi primi resultati dai quali mi sembra poter concludere che il metodo proposto è suscettibile di render segnalati servigi in tutti quei casi in cui si voglia con comodità e rapidità mettere in evidenza piccolissime birifrangenze e studiarne con accuratezza la dipendenza da vari fattori.

Fisica. — *Influenza della carica elettrica sulla conduttività di una pellicola metallica.* Nota di M. Pierucci, presentata [1] dal Corrisp. L. Puccianti.

§ 1. – Una pellicola metallica sia l'armatura a terra di un condensatore carico. Se V è il potenziale dell'armatura isolata, A l'area, Q la carica, D lo spessore dell'isolante interposto, K la sua costante dielettrica, si ha la nota relazione:

$$Q = \frac{KA}{4\pi D} V .$$

Poniamo ad es.: V = 10.000 volta, D = 0.05 cm., K = 6 [2]. Si ottiene per Q il valore: $3.2 \cdot 10^2$. A. (*u. e. s.* C. G. S.); ed essendo $4.7 \cdot 10^{-10}$ (*u. e. s.* C. G. S.) la carica dell'elettrone, il numero *n* degli elettroni mandati a terra o richiamati sulla pellicola, (secondo il segno della carica) sarà $6.8 \cdot 10^{11}$. A. circa. Se fissiamo poi che la pellicola metallica sia costituita soltanto da una ventina di strati atomici e che il diametro atomico del metallo considerato sia (come avviene per il tungsteno): $2.8 \cdot 10^{-8}$ circa [3], si trova per il numero totale degli atomi N contenuti nella pellicola: $3.8 \cdot 10^{16}$. A. circa [4].

E per lo spessore della pellicola [4] avremo il valore: $4.6 \cdot 10^{-7}$ circa.

Se ora si suppone che nella conducibilità della pellicola si abbia in media un elettrone libero per atomo [5], si ottiene per la variazione relativa di resistenza (aumento per carica positiva della pellicola, diminuzione per carica negativa):

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{n}{N} = 1.8 \cdot 10^{-5} .$$

Se invece, come fa il Kent [6] per il sodio e il potassio, si assumessero in media 1.5 elettroni liberi per atomo, si avrebbe:

$$\frac{\Delta R}{R} = 1.2 \cdot 10^{-5} .$$

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1928.

(2) Sono all'ingrosso, come vedremo, i valori realizzati nei miei esperimenti.

(3) Il diametro atomico « alla Bragg » del tungsteno non è - che io mi sappia - ancor conosciuto. Calcolandolo con l'ipotesi che gli atomi siano sferici e disposti a costipazione massima, ed assumendo per il numero di Avogadro il valore: $6.0 \cdot 10^{23}$, si ottiene: $2.84 \cdot 10^{-8}$.

(4) Sempre supponendo la costipazione massima.

(5) Vedi, ad es., G. Borelius, « Phil. Mag. » 6ª Serie, vol. 40, pp. 746-763, 1920.

(6) C. V. Kent, Phys. Rev. », vol. 22, n. 5, p. 479, 1923.

Vengon però subito in mente, alcune possibili cause di dissimetria dell'effetto, rispetto al segno del campo. Prima di tutto, a meno di operare su pellicole quadrate, bisognerà tener conto delle deformazioni geometriche dovute ai fenomeni di elettrostrizione, che tenderanno a rendere dissimetrico il risultato. Una seconda causa di dissimetria potrebbe ricercarsi nelle diverse condizioni in cui si trovano le due facce della pellicola metallica, una sola delle quali aderisce all'isolante [1].

Infine altra causa di dissimetria dovrebbe ricercarsi, secondo il Perkins [2], in un allungamento del cammino degli elettroni liberi provocato dal campo.

§ 2. - Avanti di passare ad esporre i risultati delle mie ricerche debbo ricordare che per il primo il Perkins [3] sperimentò sullo stesso argomento. Il risultato positivo della prima ricerca fu smentito poi da Venner, Forman e Lindberg [4] e anche dallo stesso Perkins [5]; il quale, viceversa, successivamente trovò un effetto nullo per lamine d'oro [5]; un effetto contrario a quello previsto dalla teoria e notevolissimo, nel caso della grafite [5]; e da ultimo, per pellicole di bismuto, un effetto ancora inconciliabile con la previsione teorica, sia per l'ordine di grandezza molto maggiore di quella prevista, sia per il segno immutabile con l'invertirsi del campo [6]. In conclusione, qualunque possa essere la causa di tali effetti, essi non rappresentano certo il fenomeno cercato; l'investigazione del quale deve farsi in condizioni più opportune, sia per sensibilità, sia per prevenzione di fatti perturbatori.

§ 3. - È chiaro che la ricerca non può essere eseguita che su lamine estremamente sottili.

La ricca bibliografia sulle lamine sottili, o, come si usa chiamarle, sulle pellicole metalliche, insegna che tali lamine (ottenute generalmente per evaporazione del metallo nel vuoto o per proiezione catodica « evaporated films » e « sputtered films ») non sono stabili che per grossezze superiori ad un certo limite (generalmente $1 \cdot 10^{-6}$ cm.). La loro resistività ρ' è molto

(1) Il Millikan ha recentemente sperimentato (R. A. Millikan e C. F. Eyring, « Phys. Rev. », 27, pp. 51–67, 1926) sulla estrazione di elettroni dai metalli per mezzo di campi intensissimi; quindi se nella nostra esperienza il campo tende a far affondare, per così dire, gli elettroni nell'isolante, oppur no, è verosimile che si possa avere (specialmente con campi d'intensità maggiore di quella supposta nell'esempio precedente) un diverso comportamento nella variazione della resistenza, a seconda del segno del campo.

(2) H. A. Perkins, « Phys. Rev. », vol. 25 p. 584, 1925.

(3) H. A. Perkins, « Phys. Rev. », vol. 18, p. 131 1921.

(4) F. Venner, N. L. Forman, A. R. Lindberg, « Phys. Rev. », vol. XX, pp. 589-593, 1922.

(5) H. A. Perkins, « Compt. Rend. », vol. 127, 2° sem., p. 303, 1923.

(6) H. A. Perkins, « Phys Rev. », vol. 25, p. 584, 1925.

maggiore di quella comune ρ del metallo di cui sono formate. Così il Peacok [1] per lamine di ferro « evaporated » di grossezza da $1.3 \cdot 10^{-6}$ a $1.34 \cdot 10^{-5}$ trova: $\rho'/\rho = 3.1$; per lamine di cobalto dello spessore da $1.1 \cdot 10^{-6}$ a $1.66 \cdot 10^{-5}$, $\rho'/\rho = 23$. Il Mackeown [2] per pellicole d'oro della grossezza da $1 \cdot 10^{-6}$ a $8 \cdot 10^{-6}$ ottiene $\rho'/\rho = 3$ circa. Secondo lo Steinberg [3], poi, per pellicole « evaporated » di ferro, di spessore non ben precisato, è $\rho'/\rho = 57$.

Ma ciò che per il nostro caso più importa è che la resistenza delle pellicole è fortemente aumentata o diminuita dai gas in presenza dei quali le pellicole si trovano, come hanno potuto rilevare Janitzky [4], Kleine [5], Reynolds [6], Suhrmann [7], Koller [8], M. So [9] ed altri.

Bisogna dunque sperimentare in vuoti molto spinti, non che su pellicole che siano simultaneamente stabili e sottilissime. Il prof. Puccianti mi suggerì di approfittare delle pellicole metalliche che vengono a formarsi, con l'uso, sulla parete interna delle comuni lampadine a incandescenza. Scelsi le così dette « lampade da vetrina » a filamento di tungsteno, che per la loro forma cilindrica [10] presentavano il vantaggio di una più agevole manipolazione. Usando lampade la cui metallizzazione (ben inteso leggera), fosse ottenuta con poche ore di funzionamento (p. es., tenendo accesa la lampada sotto una tensione superiore a quella per cui è costruita) l'ordine di grandezza della resistenza è di qualche migliaio di *ohm* per la forma quadrata ; ma la pellicola si presenta pochissimo stabile, tantochè in contatto con l'aria acquista, quasi subito, una resistenza praticamente infinita. Se invece la metallizzazione (s'intende ancora leggerissima) è ottenuta in seguito a mesi di funzionamento sotto tensione normale, allora la resistenza della pellicola - di qualche migliaio di *ohm* anche in questo caso – presenta una maggiore stabilità tanto da poter eseguire la manipolazione che ora descrivo.

Appena aperta la lampada ne vengono tolti il filamento di tungsteno e il sostegno di vetro; vengono poi stesi sulla pellicola metallica – agli estremi e a metà - tre anelli di lega di Wood, alti ciascuno circa due centimetri (e dello spessore di circa mezzo millimetro) ; a questi tre anelli si saldano tre fili metallici, che passano all'esterno, attraverso il vetro, mediante tre saldature in platino. Dopo questa rapida operazione la lam-

(1) H. B. Peacok, « Phys. Rev. », vol. 27, pp. 474-483, 1926.
(2) S. S. Mackeown, « Phys. Rev. », vol. 25, pp. 85-93, 1924.
(3) J. C. Steinberg, « Phys. Rev. », vol. 21, pp. 23-29, 1923.
(4) A. Janitzky, « Zeits f. Phys. », vol. 31, pp. 277-295, 1925.
(5) H. Kleine, « Zeits. f. Phys. », vol. 33, pp. 391-407, 1925.
(6) F. W. Reynolds, « Phys. Rev. », vol. 24, pp. 523-531, 1924.
(7) R. Suhrmann, « Zeits. f. Phys. », vol. 19, pp. 1-16, 1923.
(8) L. R. Koller, « Phys. Rev. », vol. 17, pp. 231-232, 1921 e vol, 18, pp. 221-235, 1921.
(9) M. So « Phys. Mat. Soc. Jap. Proc. », vol. 2, pp. 118-125, 1920.
(10) Altezza : 30 cm. circa ; diametro : 3.76 cm. ; spessore della parete : 0.05 cm.

pada viene portata alla pompa Gaede, vuotata quanto meglio è possibile, e infine chiusa alla fiamma. Sulla parete esterna della lampada si stendono poi due armature di stagnola; così da poter disporre di due condensatori e poter operare sull'uno e sull'altro [1]. La manipolazione precedente alla svuotatura va compiuta in poco tempo (al massimo in un'ora; risulta quindi tutt'altro che facile. Dopo molti e ripetuti tentativi potei infine giungere ad un campione particolarmente adatto agli esperimenti (*eseguiti, per ora, soltanto sopra uno dei due condensatori*) [2].

Ecco in qual maniera veniva ricercata l'eventuale variazione di resistenza. La carica era comunicata molto lentamente all'armatura esterna, attraverso una forte resistenza liquida, da una macchina di Wimshurst; il potenziale di carica non era da caso a caso lo stesso, pur aggirandosi quasi sempre intorno ai 10,000 volta. La pellicola era mantenuta costantemente in comunicazione col suolo, e la misura della sua resistenza veniva fatta con la consueta disposizione del ponte di Wheatstone, in cui l'elettrogeneratore era un accumulatore di notevole capacità e il galvanometro era un Siemens corazzato ad alta resistenza. Il galvanometro al momento della carica e della scarica veniva posto in corto circuito su se stesso [3].

Ed ecco i risultati finora ottenuti:

1° Lo sviluppo della pellicola nel senso delle generatrici del cilindro è pressochè uguale al suo sviluppo perimetrico [4]. La sua resistenza dopo qualche mese che la lampada è chiusa non subisce variazioni che per effetto di temperatura e (vedi più avanti) di cariche e scariche; ed ha all'incirca il valore di 1600 *ohm*.

Se ammettessimo che la resistività della pellicola fosse uguale a quella del metallo in grosse sezioni (cioè circa $7 \cdot 10^{-6}$ *ohm*/cm^3) ricaveremmo per l'ordine della grossezza media della pellicola stessa: 10^{-9} cm.; il che è assurdo. Ma questo risultato (ricordando che la resistività delle pellicole molto sottili è molto grande) prova che la pellicola sulla quale ho sperimentato era estremamente sottile [5].

2° Il coefficiente di temperatura della resistenza della pellicola è negativo e dell'ordine di grandezza di $5 \cdot 10^{-4}$. È perciò presumibile (con-

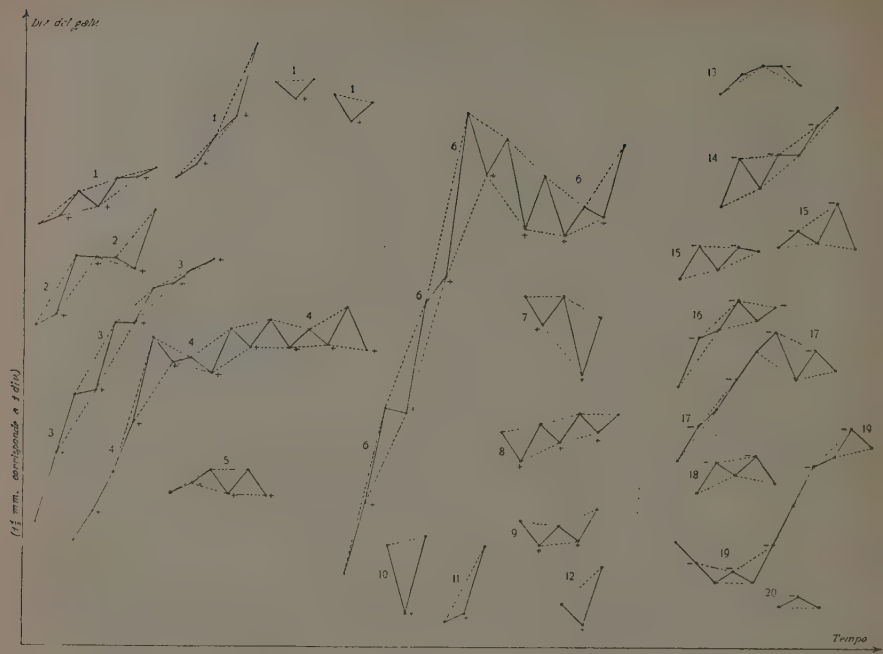
(1) O su ambedue in modo differenziale, quando si voglia farlo.

(2) Ringrazio il Capo-Tecnico dell' Istituto di Fisica di Pisa, Orfeo di Nasso, che efficacemente mi coadiuvò.

(3) E veniva protetto da accidentali correnti di carica e di scarica del condensatore mediante autoinduzioni in serie e capacità in parallelo.

(4) La pellicola stesa sopra un piano sarebbe dunque all' incirca un quadrato (v. le considerazioni del § 1).

(5) Il Patterson, («Phil Mag.», Serie 6ª, vol. 4°, pp. 652-678, 1902) trova che per spessori più piccoli di $7 \cdot 10^{-7}$ cm. la resistenza delle pellicole di platino cresce molto più rapidamente con l'assottigliarsi delle pellicole stesse.



I segni ● indicano letture con pellicola scarica. Le letture successive sono riunite con tratti uniti.

» ●+ » » » » carica $+te$. » » con pellicola scarica sono riunite con tratteggiate

» ●— » » » » » $-te$. » » » » carica » » » »

Numeri d'ordine	Potenziale di carica dell'armatura isolata (in volta)	Sensibilità del galvanometro (divisioni per $\Delta R/R = 1 \cdot 10^{-5}$) (1)	Data delle esperienze (2)	Numeri d'ordine	Potenziale di carica dell'armatura isolata (in volta)	Sensibilità del galvanometro (divisioni per $\Delta R/R = 1 \cdot 10^{-5}$) (1)	Data delle esperienze (2)
1; 9	10.000 circa	3 circa	19-12-27	13	5.000 circa	3 circa	19-12-27
2; 3; 4; 5;	10.000 »	2 »	27-10-27	14; 15	10 000 »	3 »	17-12-27
6	10.000 »	5 »	28-10-27	16	10 000 »	3 »	19-12-27
7; 8	10.000 »	3 »	17-12-27	17	10.000 »	2 »	26-10-27
10	15.000 »	$5^1/_2$ »	14-1-28	18; 19	10.000 »	3 »	19-12-27
11; 12	10.000 »	$5^1/_2$ »	14-1-28	20	8.000 »	$5^1/_2$ »	14-1-28

(1) Si apprezzava comodamente il quinto di divisione.
(2) Si noti la maggiore regolarità delle serie più recenti.

cordemente ai risultati del Longden [1], del Patterson [2], dello Swann [3], del Koller [4], del Reynolds [5], del Curtiss [6], ecc.) che lo spessore della pellicola sia dell'ordine di qualche 10^{-7} cm.

3° Se la carica e la scarica del condensatore non sono molto lente si ha un permanente aumento della resistenza della pellicola.

4° Anche operando lentissimamente, una prima carica produce sempre un aumento (in massima parte permanente), nella resistenza della pellicola, di qualche decimillesimo del suo valore totale. La carica successiva, però, produce un effetto molto minore. Caricando e scaricando lentissimamente, con segni di carica variati, per un grandissimo numero di volte, si giunge ad un punto tale che la resistenza varia pochissimo per carica e scarica. Questa ulteriore stabilizzazione l'ho potuta ottenere soltanto in qualche mese di tempo [7].

5° Arrivato a questo punto iniziai le venti serie di esperienze rappresentate nelle venti grafiche della figura. Per ciascuna di esse in ordinate sono riportate le divisioni di cui si spostava il galvanometro ($1\,{}^1/_2$ mm. corrisponde a 1 div.) quando successivamente veniva - ad intervalli pressochè uguali di tempo (circa 3^m) – caricato e scaricato il condensatore (come verso positivo è assunto quello che indica un aumento della conducibilità della pellicola); in ascisse è riportato il tempo (1 mm. corrisponde a 1 minuto).

L'esame delle grafiche rileva che all'inizio di ogni serie la resistenza della pellicola subisce generalmente variazioni permanenti piuttosto notevoli (quasi sempre diminuzioni), seguite da lievi fluttuazioni, da ascriversi verisimilmente a fluttuazioni di temperatura.

Riguardo alla questione che c'interessa, lo stesso esame mostra anche che la *variazione della resistenza della pellicola muta di segno col mutare del segno della sua carica; e, quando si carichi con potenziali di circa 10,000 volta l'armatura isolata, si ottiene per cariche positive della pellicola un aumento relativo di resistenza un po' superiore a* $1 \cdot 10^{-5}$; *nel caso opposto la diminuzione relativa è circa* $1 \cdot 10^{-5}$. *Il segno di queste variazioni è dunque quello previsto dalla teoria; ed anche l'ordine di grandezza è all'incirca quella prevista, quando si supponga che lo spessore della pellicola sia verso i:* $5 \cdot 10^{-7}$ *cm.*

Ciò rende, se non foss'altro plausibile il pensare che le cautele prese siano state sufficienti a eliminare i fatti spurii e ad isolare il fenomeno ricercato.

(1) A. C. Longden, « Am. Journ. Sc. », vol. 9, p. 407, 1900 e « Phys. Rev. », vol. 9, p. 84, 1900.

(2) J. Patterson, « Phil. Mag. », Serie 6ª, vol. 4°, pp. 652–678, 1902.

(3) W. F. G. Swann, « Phil. Mag. », vol. 28, p. 467, 1914.

(4) L. R. Koller, « Phys. Rev. », vol. 18, pp. 221-235, 1921.

(5) F. W. Reynolds, « Phys. Rev. », vol. 24, pp. 523-531, 1924.

(6) L. F. Curtiss, « Phys. Rev. », vol. 17, p. 235, 1921.

(7) È necessario, dunque, far eseguire alla pellicola una specie – diciamo così – di ginnastica per eliminare questi fatti spurii, sulla natura dei quali è difficile dire qualcosa di preciso; ma che forse sono in connessione col variare delle piccole quantità di gas contenute dalla pellicola e con modificazioni dell'isolante.

Fisica. — *Un metodo interferenziale per la misura della suscettività magnetica dei liquidi.* Nota di O. Specchia, presentata dal Socio Q. Majorana.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento.* Nota III [1] di G. Natta e M. Freri, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Le interpretazioni, che i diversi sperimentatori diedero in base ai risultati dell'analisi termica al sistema cadmio-argento, non sembrano pienamente concordare con i dati da noi ottenuti a mezzo dell'analisi röntgenografica e raccolti nelle due prime Note sullo stesso argomento di questa. Per meglio discutere i valori ottenuti coi diversi metodi, abbiamo riportato in fig. 1 il primo diagramma di stato proposto da Petrenko e Fedorow [3]. Esso differisce soltanto nella parte centrale da quello presentato da Bruni e Quercig [4], che non descrissero i composti Ag_2Cd_3 e $AgCd_3$, e fu in seguito soltanto leggermente modificato nella parte inferiore dagli stessi Petrenko e Fedorow [5], che finirono con l'escludere l'esistenza del composto $AgCd_4$, dapprima da loro stessi descritto, ed ammettere invece una sola curva del solido fortemente inclinata tra i punti *D* e *b* del diagramma.

In fig. 2 abbiamo schematicamente rappresentati alcuni dei più tipici fotogrammi ottenuti col metodo delle polveri sulle leghe temprate. Si osservano, anche a prima vista, le notevoli differenze che contraddistinguono i fotogrammi delle diverse fasi.

Per le leghe α i risultati röntgenografici accordano pienamente con quelli termici. Le leghe temprate presentano il reticolo dell'argento leggermente deformantesi con la composizione e risultano costituite da una serie continua di soluzioni solide di cadmio nell'argento.

L'analisi coi raggi X rivela una fase β, avente struttura cubica tipo corpo centrato, che denota l'esistenza di un composto AgCd, capace di fornire soluzioni solide con i componenti, presente nelle leghe che vanno dal 46 al 55 % di cadmio. Nella lega al 55 % si osservano già nettamente le linee di una successiva fase, da noi indicata con γ. Quest'ultima fase,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.
(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.
(3) « Zeit. anorg. Chem. », 70 (1911), 161.
(4) « Zeit. anorg. Chem. », 68, (1910), 198.
(5) « Zeit. anorg. Chem. », 71 (1911), 215.

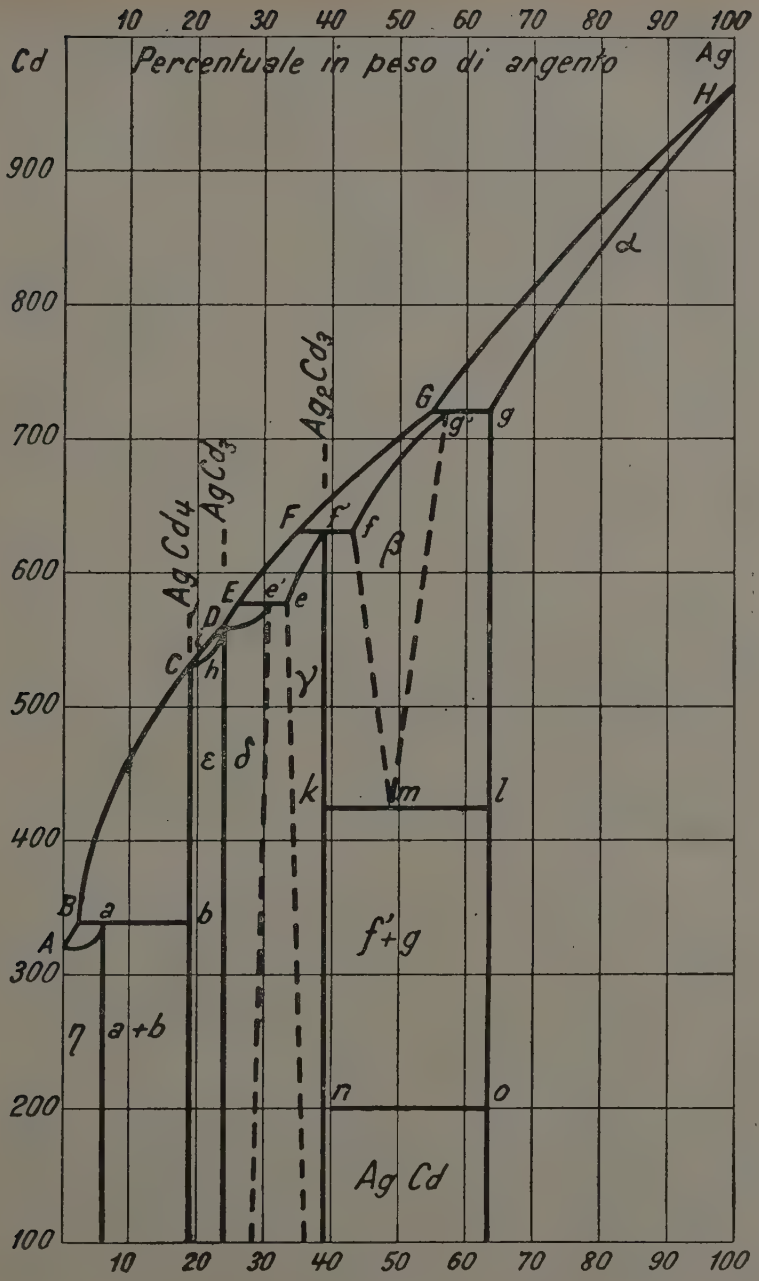

Cd
Percentuale in peso di argento
Ag
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
900
800
700
600
500
400
300
200
100
H
α
G
g
g'
F
f'
f
β
E
e'
e
D
C
h
γ
ε
δ
k
m
l
B
a
b
A
f'+g
η
a+b
n
o
Ag Cd
Ag Cd4
Ag Cd3
Ag2 Cd3

Fig. 1.

che presenta una struttura molto complessa e simile a quella corpo centrato, e che si può considerare formata da soluzioni solide nel composto Ag_5Cd_8, si ritrova nelle leghe temprate contenenti dal 55 al 65 % di Cd.

L'esistenza del composto AgCd nelle leghe temprate è sfuggita invece a Petrenko e Fedorow che ne ammisero solo la formazione nelle leghe

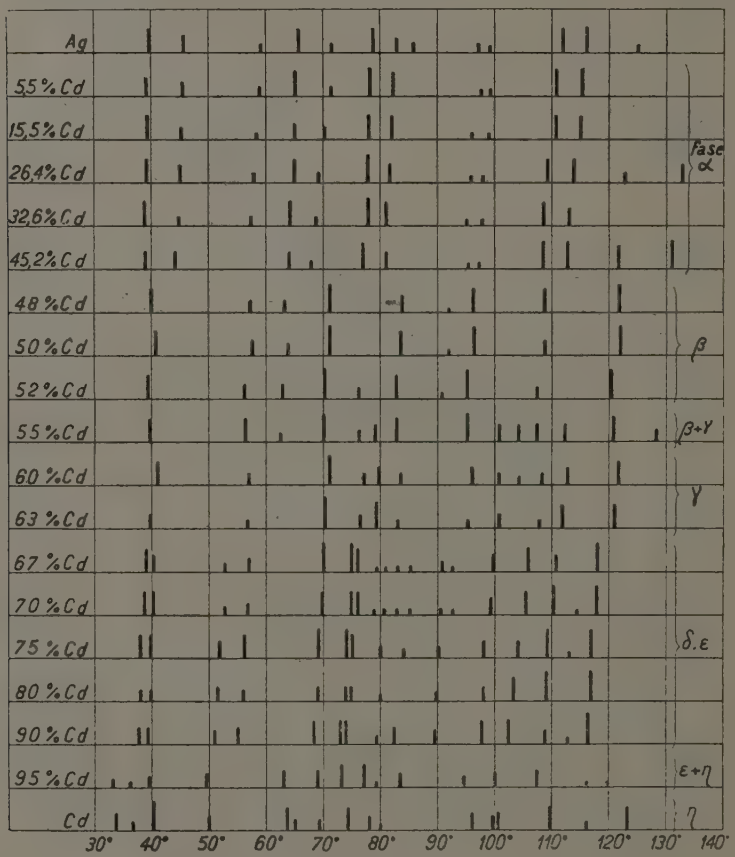


Fig. 2.

ricotte al disotto di 200°. Detti AA. descrissero una fase (β) di maggiore estensione della nostra e che comprenderebbe come intervallo di composizione anche la nostra fase γ.

La lieve differenza strutturale tra le nostre fasi β e γ (quest'ultima si può quasi ritenere come un tipo speciale di soluzione solida di cadmio nel composto AgCd, ricavabile da questo per una sostituzione complessa di n

atomi di argento con $m < n$ atomi di cadmio, ma tale da apparire ai raggi X come una nuova struttura) fa supporre che siano pure poco accentuate le differenze tra le due fasi osservabili con l'analisi termica e giustifica in parte il mancato riconoscimento da parte di Petrenko e Fedorow.

Maggiori disaccordi tra i nostri risultati e quelli di Petrenko e Fedorow si riscontrano per maggiori percentuali di cadmio. Nell'intervallo che va dal 65 sin oltre il 90 % di cadmio, noi osserviamo coi raggi X un solo tipo di fotogrammi, che denoterebbero l'esistenza di un solo composto, probabilmente $AgCd_3$, capace di fornire soluzioni solide ideali δ con l'argento e ε con il cadmio. Soltanto leggerissime differenze di intensità ed alcune lievissime linee soprannumeri lasciano supporre che le soluzioni solide più ricche di argento possano presentare una distribuzione di atomi alquanto più regolare. L'esistenza di un composto Ag_2Cd_3, supposto da Petrenko e Fedorow, viene da noi negata, almeno come fase distinta avente una propria struttura cristallina.

Dal 95 al 100 % di cadmio, in accordo con Bruni e Sandonnini e con Petrenko e Fedorow, ritroviamo un'ultima serie di soluzioni solide di argento nel reticolo del cadmio.

Dal paragone delle leghe cadmio-argento con quelle rame–zinco si rivela una profonda analogia strutturale. Per la lega al 75 % di cadmio, già Westgren e Phragmén avevano osservato una analogia cogli ottoni δ [1]. Ora si dimostra che tutte le fasi riscontrate da Westgren e Phragmén per le leghe rame–zinco si ritrovano in quelle argento-cadmio ed hanno reticolo simile.

Tale profonda analogia tra i due sistemi è dovuta al fatto che il diametro atomico dell'argento (2.88 Å) sta a quello del cadmio (2.98 Å) all'incirca nello stesso rapporto in cui stanno i diametri atomici del rame (2.54 Å) e dello zinco (2.66 Å) ma sopratutto è da ricercarsi nella posizione omologa che hanno l'argento e il cadmio nel sistema periodico rispetto al rame ed allo zinco.

Sarebbe interessante ricercare coi raggi X se tale analogia si mantiene con le leghe dell'altra coppia di metalli che nel sistema periodico occupa posizioni omologhe a quella cadmio-argento e rame-zinco, e cioè con le leghe rame–mercurio.

Noi abbiamo esaminato inoltre tutte le leghe ricotte, ma solo per la fase β abbiamo osservato una trasformazione. Ma mentre Petrenko e Fedorow ammettono che il composto AgCd si forma soltanto a temperature inferiori ai 200°, noi dimostriamo che il composto AgCd è dimorfo, presenta una modificazione cubica stabile ad alta temperatura che si tasforma sotto i 420° in una modificazione esagonale compatta. Al di sotto dei 200° certe soluzioni solide del composto AgCd si scinderebbero invece in miscele di cristalli delle due fasi α e γ.

(1) «Kolloid-Zeit», *36* (1925), 86.

Dopo questi risultati appare necessaria una revisione accurata dei dati dell'analisi termica, che intendiamo effettuare tra breve. Stiamo inoltre eseguendo delle lunghe ricotture a temperature vicine a quelle di fusione per osservare se si formano delle nuove fasi o se le soluzioni ideali già osservate tendono a formare delle distribuzioni regolari degli atomi del metallo disciolto.

Conclusioni. — Dall'esame coi raggi X mediante il metodo delle polveri delle leghe Cd-Ag rapidamente solidificate e temprate, si dimostra:

1. Esiste un campo di soluzioni solide α di cadmio nell'argento aventi il reticolo di questo ma deformantesi regolamente con la composizione secondo la legge di Vegard sino al 35 % di cadmio. La fase α si ritrova nelle leghe dal 0 al 45 % di cadmio circa. Il lato della cella elementare cresce da 4.07 a 4.15 Å.

2. Esiste un composto AgCd avente un reticolo cubico corpo centrato capace di formare coi componenti soluzioni solide β, presenti nelle leghe dal 47 al 55 % di cadmio. La cella elementare, di lato crescente da 3.32 a 3.34 Å, contiene una molecola. Densità calcolata: 9.97-9.82.

3. Le leghe contenenti dal 55 al 65 % di cadmio sono costituite da soluzioni solide di una nuova fase avente una struttura complessa, simile al corpo centrato, con cella elementare cubica di lato 9.96 Å contenente 52 atomi, cioè 4 molecole del composto Ag_5Cd_8.

4. Dal 65 al 95 % circa di cadmio si ritrova un tipo di struttura semplice esagonale compatta con c/a = 1.58 e con lato variante da 3.04 a 3.09 Å. Tali leghe sembrano rappresentare delle soluzioni solide ideali di cadmio e d'argento nel composto $AgCd_3$. La dimensione della cella elementare di questo, probabilmente multipla di 3.07 Å, non può venir determinata con esattezza perchè gli atomi di cadmio e d'argento hanno pesi atomici poco diversi. Per la stessa ragione è difficile stabilire se esistano in queste leghe delle distribuzioni regolari di atomi del metallo soluto.

5. Le leghe dal 95 al 100 % di cadmio sono costituite da soluzioni di argento nel cadmio aventi il reticolo di quest'ultimo.

Per ricottura non si osservano trasformazioni che per le leghe β.

Il composto AgCd è dimorfo e si trasforma sotto i 420° in una modificazione esagonale compatta con c/a = 1.62 ed a = 3.01 Å. A temperature inferiori ai 200° alcune soluzioni solide del composto AgCd diventano instabili e si trasformano in una miscela delle fasi α e γ.

6. Esiste una profonda analogia nella struttura cristallina tra le leghe rame-zinco e argento-cadmio dimostrata dal fatto che tutte le fasi presenti nelle leghe temprate cadmio-argento si ritrovano con reticolo simile negli ottoni. Tale analogia ha un riscontro nella posizione omologa che occupano nel sistema periodico i metalli rame e zinco rispetto all'argento e al cadmio.

Chimica. — *Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche* [1]. Nota V di G. Scagliarini ed E. Brasi, presentata [2] dal Corrisp. G. Boeris.

In alcune note precedenti [3] è stata messa in rilievo l'influenza che ha la costante dielettrica del mezzo in cui avvengono le reazioni e la concentrazione dei corpi reagenti sulle azioni intermolecolari e interioniche che si esercitano in seno alle soluzioni stesse, ciò che ha per conseguenza la formazione di composti di addizione differenti sia variando la natura del solvente, sia variando la concentrazione delle sostanze che entrano in reazione.

Un esempio che illustra bene tale fatto si ha nella serie degli alogenuri del mercurio bivalente. Già Grutzner [4] da soluzioni acquose di cloruro di mercurio e di esametilentetramina ottenne un prodotto di addizione della formola: $2HgCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$ e da soluzioni alcooliche delle stesse sostanze un altro composto: $HgCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$. Da soluzioni acquose di joduro mercurico ed esametilentetramina ottenne il composto: $HgJ_2 \cdot C_6H_{12}N_4$.

Allo scopo di vedere la influenza che poteva avere la concentrazione rispettivamente dell'esametilentetramina o dell'alogenuro di mercurio nella formazione dei composti di addizione, vennero estese queste ricerche a tutti gli alogenuri del mercurio usando come solvente l'acetone, che risultò essere più adatto alle ricerche da noi intraprese. Variando difatti la concentrazione o dell'alogenuro o della base organica potemmo ottenere i composti qui sotto elencati:

Con eccesso di urotropina	Con eccesso di alogenuro
$2HgCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$	$3HgCl_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$
$HgBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$	$HgBr_2 \cdot C_6H_{12}N_4$
$HgJ_2 \cdot C_6H_{12}N_4$	$3HgJ_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$ (giallo).

È degno di nota il fatto assai strano che si verifica nel primo caso sopra riportato e cioè che con un eccesso della base si ha il composto più

(1) Lavoro eseguito nei laboratori di Chimica Generale delle Università di Bologna e di Ferrara.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) «R. Acc. Lincei», Serie VI, vol. I, p. 382; id. Serie VI, vol. II, p. 269; id. Serie VI, vol. IV, p. 318; id. Serie VI, vol. IV, p. 387; «Accademia Scienze Mediche e Naturali di Ferrara». Seduta 3 aprile 1927.

(4) «Central Blatt», 1898 Band. II, p. 664.

ricco in cloruro mercurico di quello che si ottiene quando si ecceda coll'alogenuro.

Preparazione dei composti di addizione:

$3HgCl_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$ e $2HgCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$

Ad una soluzione satura a freddo di cloruro mercurico in acetone venne aggiunta a poco a poco una soluzione pure satura a freddo di urotropina in acetone. Si ebbe subito la formazione di un precipitato bianco che al microscopio risultava costituito da piccoli cristalli riuniti a croce. Continuando ad aggiungere la soluzione della base si notava che fino ad un certo momento non si verificava alcuna variazione, ma poi si aveva la formazione di un precipitato leggerissimo del tutto diverso del precedente. Infatti questo esaminato al microscopio appariva costituito da aghi minutissimi di splendore setaceo. Trascurando le porzioni intermedie che chiameremo di coda e di testa si sono potuti separare i due composti distinti, che filtrati alla pompa, lavati ripetutamente coll'acetone e seccati fra carta da filtro vennero sottoposti ad analisi:

Per $3HgCl_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$	Calcolato %	Cl	19.43	N 10.23
	Trovato %	»	19.20	» 9.72
Per $2HgCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$	Calcolato %	Cl	20.79	N 8.21
	Trovato %	»	20.38	» 8.41

La determinazione degli alogenuri fu sempre fatta seguendo il metodo di Vohlard, previa eliminazione del mercurio con tornitura di alluminio. L'azoto fu determinato o col metodo Dumas o con quello di Kjeldahl previa precipitazione del mercurio col solfuro sodico.

Preparazione del composto di addizione $HgBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$.

Ad una soluzione acetonica concentrata e fredda di urotropina (2 molecole) venne aggiunta una soluzione acetonica pure concentrata e fredda di bromuro di mercurio (1 molecola). Si ebbe un precipitato cristallino costituito da tavolette sottilissime di splendore setaceo. Raccolto alla pompa e lavato con acetone, il precipitato venne seccato fra carta da filtro indi analizzato:

Per $HgBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$	Calcolato %	Br	24.95	N 17.49
	Trovato %	»	24.65	» 17.47

Preparazione del composto di addizione $HgBr_2 \cdot C_6H_{12}N_4$.

Ad una soluzione acetonica concentrata e fredda di bromuro mercurico venne aggiunta una soluzione acetonica pure concentrata e fredda di urotropina in quantità molecolari corrispondenti. Si formò un precipitato cristallino costituito da piccolissimi aghi. Il precipitato filtrato alla pompa e lavato ripetutamente con acetone venne, come nel caso precedente, seccato fra carta da filtro e sottoposto all'analisi:

Per $HgBr_2 \cdot C_6H_{12}N_4$	Calcolato %	Br	31.93	N	11.19
	Trovato %	»	31.10	»	11.40

Preparazione del composto di addizione $HgJ_2 \cdot C_6H_{12}N_4$.

Ad una soluzione concentrata e fredda in acetone di urotropina, venne aggiunta una soluzione pure concentrata e fredda di joduro mercurico. Si ottenne un precipitato cristallino di colore bianco costituito da aghi, il quale venne filtrato alla pompa e lavato diverse volte con acetone. Seccato fra carta da filtro il composto venne sottoposto all'analisi:

Per $HgJ_2 \cdot C_6H_{12}N_4$	Calcolato %	J	42.69 %	N	9.42 %
	Trovato %	»	42.20	»	10.02

Preparazione del composto di addizione $3HgJ_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$.

Data la piccolissima solubilità dello joduro mercurico in acetone, per agire in presenza di un eccesso di sale si sbattè in una bevuta una soluzione acetonica fredda e concentrata di esametilentetramina con joduro mercurico solido e finamente polverizzato, aggiungendo tanta soluzione di esametilentetramina fino a totale esaurimento dello joduro mercurico. In tale maniera si veniva formando un precipitato costituito da piccolissimi cristalli di color giallo paglierino che raccolto alla pompa, lavato con acetone e seccato come al solito fra carta da filtro, venne sottoposto ad analisi:

Per $3HgJ_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$	Calcolato %	J	46.33 %	N	6.82 %
	Trovato %	»	45.80	»	7.05

Chimica. — *Sul solfuro di zinco precipitato.* Nota di G. R. Levi e C. G. Fontana, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* - IV. *I molibdovanadotioacquati.* Nota di L. Fernandes, presentata dal Corrisp. L. Rolla.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulla geologia del Gruppo della Grivola.* Nota di Giambattista Dal Piaz, presentata[1] dal Socio C. F. Parona.

Come ho avuto occasione di ricordare in precedenti Note, nell'estate del 1926 e del 1927 compii, sotto la guida del dr. F. Hermann, un rilevamento geologico di dettaglio nella catena montuosa posta fra la Valsavarenche e la Valnontey, per il tratto che va dal monte Ruïe al monte Herbetet (massiccio del Gran Paradiso). La presente Nota e lo stereogramma tectonico ad essa allegato, hanno lo scopo di illustrare in modo sommario e schematico, ma nello stesso tempo fedele e preciso, i principali fenomeni osservati nel corso delle due campagne.

Tre unità rondamentali concorrono a formare la regione (bibl. 1–5):

A) piega retroflessa posteriore del ricoprimento IV [2];

B) *nappe des schistes lustrés* o ricoprimento VI [serie mesozoica della Grivola + scaglie pretriasiche e lembi di Trias calcareo compresi entro le formazioni delle pietre verdi e dei calcescisti];

C) parte frontale superiore del ricoprimento V.

La prima unità, ossia la piega retroflessa posteriore del Gran S. Bernardo, è formata: al nucleo dai gneiss tonalitici del Gran Nomenon, e all'esterno da scisti vari del Permo-carbonifero, ricoperti alla lor volta dai sedimenti neritici del Trias. Per quanto a prima vista d'apparenza semplice e tranquilla, questo complesso è in realtà suddiviso in un numero indefinibile di scaglie e scheggie listriche, rese visibili da discordanze e disturbi nel Trias, ad esempio al Colle Belleface, presso q. 2815 (n. 10 della fig.), vicino a Mésoncles ecc.

La formazione dell'anticlinale, rovesciata a sud, del Gran Nomenon, è dovuta alla spinta profonda del Gran Paradiso contro la parte posteriore del Gran S. Bernardo, allorchè quest'ultimo fu arrestato dai massicci ercinici antestanti; un po' alla volta l'enorme piega incominciò a retroflettersi e « carreggiò » all'indietro, raschiandone una parte sulla *nappe des schistes*

(1) Nella seduta del 19 febbraio 1928.

(2) Per semplicità indicherò spesso i diversi ricoprimenti soltanto con il loro numero d'ordine, ossia con IV, V e VI per i ricoprimenti rispettivamente del Gran S. Bernardo, del Gran Paradiso e della Dent Blanche.

lustrés, finchè, nell'ultimissima fase del movimento alpino, fu costretta a risolversi nelle scaglie listriche prima descritte.

La pertinenza di tutto o quasi tutto il mesozoico fra IV e V alla *nappe des schistes lustrés* (VI) è indiscutibilmente dimostrata dalla presenza in esso dei seguenti lembi pretriasici e triasici, di facies analoga a VI:

1° affioramento di micascisti nella parte alta della parete est della Grivola; il banco si continua con ogni evidenza anche sulla parete ovest e precisamente nella parte scura centrale della fascia sedimentaria superiore;

2° lama triasica e micascisti gneissici a due miche ed ortite di La Tour (n. 8 della fig.); queste due scaglie, tutte contorte e sfilacciate, sono comprese in una zona di formidabile milonitizzazione;

3° banchi di micascisto a due miche ed ortite di q. 1900-2000 fra Tignet e Leviona (n. 3 e 2 della fig.), sul fianco sinistro della valle.

Questi lembi, assieme a quelli delle valli di Lanzo, di Avérole, Col Rossetto, Leynir, monte Rafray, Champorcher, Châtillon, ecc. (bibli.: 4, op. V-VIII; 5, op. I, IV e V), rappresentano in parte gli sfilacciamenti verso S. O. del lobo monte Emilius e in parte gli equivalenti di scaglie inferiori.

La natura magmatica delle ofioliti, intercalate ai sedimenti orogeni del Lias, fu già dimostrata in un precedente lavoro (bibl. 5, op. III). Nella regione studiata le intrusioni simiche presentano in massima parte composizioni chimiche corrispondenti a quelle dei « magmi gabbrici »; soltanto qua e là si hanno nuclei più basici (ultrafemici), di solito all'interno e non alla periferia delle masse ofiolitiche e rivelati dalla presenza di serpertine. Sembra quindi di poter asserire che le differenze chimiche in discorso sono dovute, anzichè a segregazioni magmatiche locali e avvenute *in situ*, ad un originario differenziamento del magma, modificato fin che si vuole, ma non completamente mascherato dai movimenti tettonici contemporanei e posteriori all'intrusione.

Dal punto di vista mineralogico le rocce verdi della Grivola sono formate nella zona assiale da *anfiboliti glaucofaniche*, più o meno ricche di epidoto e talora granatifere, e nelle due zone laterali da *prasiniti* epidotiche e anfiboliche, più o meno cloritiche; il primo di questi due tipi litologici è rappresentato nella grande parete sovrapposta a Dégioz e Tignet (n. 5 e 3 della fig.), presso Leviona inferiore (n. 2), nella parete dominante l'altipiano Bocconère superiore-La Tour (n. 9 e 8 della fig.) prolungata da una fascia simica sino a Col Lauson ecc. In pieno accordo con ciò ho avuto modo di osservare non solo nuclei di anfiboliti glaucofaniche circondati da rocce prasinitiche, ma anche, a scala microscopica, l'anfibolo violetto attorniato da orneblenda verde concresciutagli sopra; sembra così di assistere ad una graduale, progressiva « prasinitizzazione » delle anfiboliti. Il fatto che al gruppo caratteristico epidoto + granato + glaucofane si sostituisce il complesso epidoto + albite + orneblenda verde non è imputabile, come ho dimostrato nella Nota precedentemente citata, a differenze di natura

chimica, ma è spiegabile soltanto con azioni d'ordine tettonico, per cui i lembi anfibolici debbono essersi trovati, durante un certo tempo, in ambiente più superficiale che non le digitazioni prasinitiche. La caratteristica ora descritta porta un appoggio all'idea che anche le intrusioni simiche siano venute con penetrazione dall'alto al basso, come pare dimostrato dalla presenza di scaglie di VI nelle formazioni mesozoiche e da tutta la struttura della *nappe des schistes lustrés*.

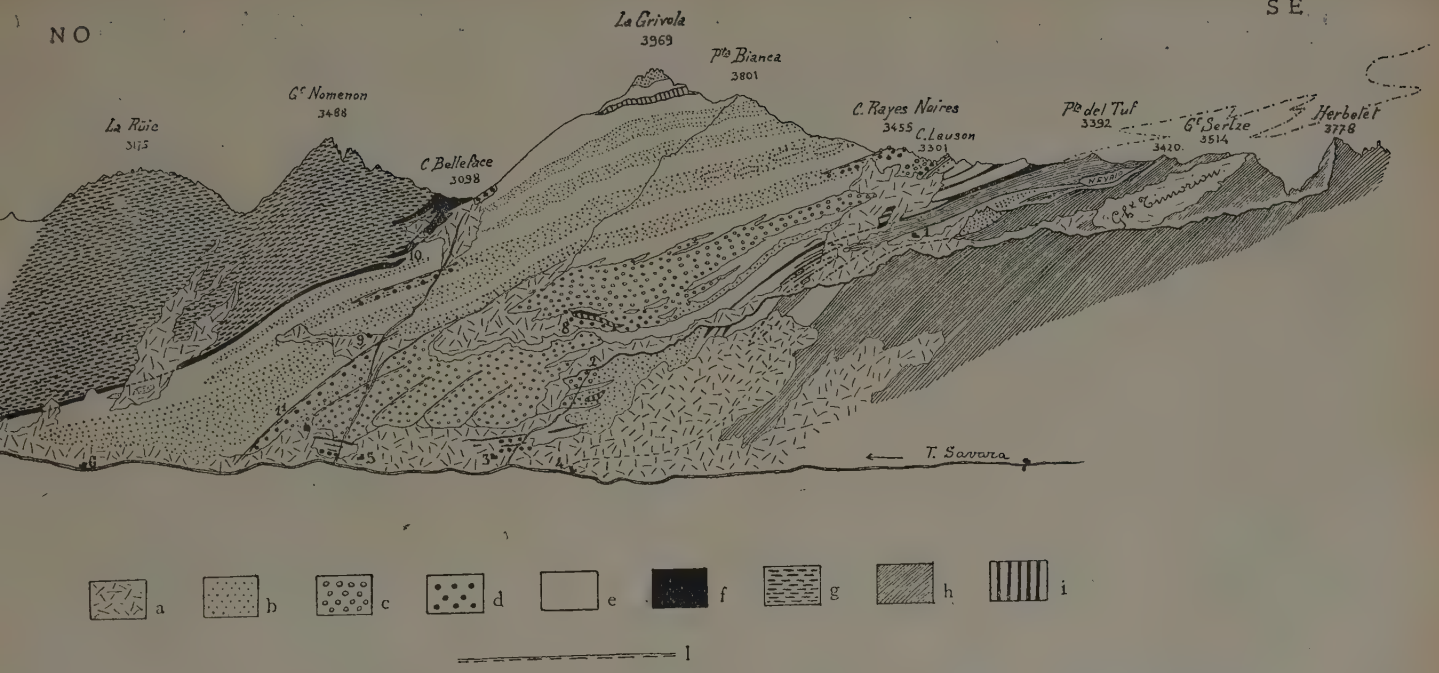
In alcune prasiniti (Col Lauson, sentiero Dégioz-Bocconère) ho trovato traccia di minerali originari, resti di augite e di diopside, sopra i quali è concresciuta l'orneblenda verde. Vere e proprie rocce pirosseniche non furono mai ritrovate; purtroppo le serpentine, causa la profonda alterazione subita, non ci permettono di dedurre in modo sicuro la loro primitiva costituzione mineralogica.

Anche la *nappe des schistes lustrés*, come già la piega retroflessa del Gran S. Bernando, mostra numerosissimi fenomeni di scagliamento listrico, rivelati facilmente da pizzicature di calcescisti nelle pietre verdi, da cengie e dalla presenza di materiali laminati, cloritoscisti, talcoscisti, serpentine, amianto, miloniti e brecce tettoniche lungo i piani di frizione. Tra gli scorrimenti più importanti ricorderemo: quello che s'incontra presso i 2400 m. salendo da Bocconère a q. 2815; quello di Colle Belleface; quello che decorre pressapoco lungo il sentiero Dégioz - Bocconère inferiore - Bocconère superiore, prolungandosi probabilmente sino a Colle Rayes Noires *et ultra*; quello formidabile di La Tour; quelli che in serie ripetuta solcano la grande parete di anfiboliti glaucofaniche sovrapposta a Dégioz e Tignet; quello di Tignet ecc. Come nel caso del ricoprimento IV, anche lo scagliamento listrico della zona della Grivola è imputabile ad una spinta postuma, che agì in ambiente superficiale, con il diminuito concorso della temperatura e degli agenti mineralizzanti e con notevole aumento dell'attrito intimo di tutta la massa; si originarono così i materiali cataclastici prima ricordati.

A complemento di quanto si è detto sulla *nappe des schistes lustrés*, debbo aggiungere che la supposta « sinclinale » mesozoica della Grivola *non è affatto emersa*, nè sul contrafforte Val di Rhêmes–Valsavarenche, nè altrove. (bibl. 6).

Il ricoprimento del Gran Paradiso presenta la seguente successione litologica, dal nucleo alla periferia: gneiss ghiandone, qua e là granitoide (Gran Sertze), gneiss micacei granatiferi e gneiss minuti chiari (sella fra il Gran Sertze e la Punta dell'Inferno), gneiss grafitici (Punta dell'Inferno) e infine calcari e dolomie del Trias (versante meridionale di Punta Lauson).

Per quanto si tratti di un fatto notissimo, è bene insistere sulle profonde, fondamentali differenze litologiche esistenti fra il Gran Paradiso e il Gran S. Bernardo, rese in modo sommario, ma tuttavia evidentissimo, anche nel relativo foglio geologico al 100.000, rilevato dagli Ingegneri del



Stereogramma geotettonico del versante occidentale della catena M.te Herbetet–M.te Ruie (Massiccio del Gran Paradiso).

Scala 1 : 50.000 – Gb. Dal Piaz dis.

Spiegazione dei segni convenzionali:

1. Lèviona superiore (Val Inferno). 2. Lèviona inferiore. 3. Tignet. 4. Bien. 5. Dègioz. 6. Rovenaud. 7. Rioula. 8 la Tour. 9. Bocconère superiore. 10. *apud* q. 2815. 11. scorrimento presso il sentiero Dègioz-Bocconère.

a) quaternario; *b*) prasiniti; *c*) anfiboliti glaucofaniche; *d*) serpentine; *e*) calcescisti (Lias orogeno); *f*) calcari e dolomie (Trias neritico); *g*) pretriasico del ricoprimento IV (Gr. S. Bernardo); *h*) pretriasico del ricoprimento V (Gr. Paradiso); *i*) scaglie pretriasiche del ricoprimento VI (Dent Blanche, o *nappe des schistes lustrés*); *l*) piani di scorrimento.

R. Ufficio Geologico (bibl. 7). Un collegamento in profondità, mediante una sinclinale, fra queste due distinte masse pretriasiche, come è stato supposto anche recentemente (bibl. 9), non sembra perciò chiaro e, tanto meno, probabile, sia pur prescindendo da qualsiasi altra considerazione.

La più importante caratteristica tettonica del ricoprimento V è rappresentata dalla digitazione gneissica di Val Inferno, che ho altra volta (bibl., 5, op. II) dimostrata indiscutibilmente connessa per la sua parte *superiore*, e non per l'inferiore (bibl., 8 e 9), alla massa originaria. La digitazione si risolve anteriormente in un certo numero di scaglie listriche, apportando disturbi e complicazioni anche nel Trias, le cui lame, mentre sono ancora in numero di quattro sulla parete destra di Val Inferno, diventano sei presso Leviona di mezzo. I calcari e le dolomie che affiorano vicino a Tignet e Dégioz (n. 3 e 5 della fig.) rappresentano verosimilmente lembi strappati e portati lontano dalla massa originaria e sarebbe azzardato riferirli senz'altro al Trias di Leviona-Val Inferno. Questi fatti, come pure gli inizi di pieghe retroflesse che si osservano in Valnontey (Hermann), si possono spiegare meccanicamente soltanto come effetti di una pressione tangenziale sul dorso del Gran Paradiso, allorchè quest'ultimo era già arrestato in profondità dal ricoprimento antestante; si dimostra così indirettamente, l'esistenza della *nappe des schistes lustrés*, la quale sarebbe scorsa « piallando » sulle masse sottostanti, costringendo la fronte di V a ripiegarsi e a risolversi in una serie di digitazioni frontali, sia gneissiche che triasiche. I numerosi contatti anormali verificatisi in tal modo fra i diversi terreni e in particolare fra gneiss e calcescisti, sono svelati soltanto dai rapporti di giacitura delle singole formazioni e ciò in causa della grande profondità a cui avvennero i maggiori fenomeni dell'orogenesi pennidica.

Sono lieto di porgere pubblicamente i sensi della mia più profonda riconoscenza al Dr. F. Hermann e al prof. A. Bianchi, che mi furono Maestri autorevoli e instancabili, l'uno negli studi geotettonici e l'altro nelle ricerche petrografiche.

BIBLIOGRAFIA

(1) P. Termier, I. *Schistes lustrés de la Grivola, gneiss du Valgrisanche et du Grand Paradis*, « Bull. Carte Géol. de la France etc. », n. 44, tome VII, 1895-96, Parigi 1895, p. 150; II. *Quatre coupes à travers les Alpes franco-italiennes*, « Bull. Soc. Géol. Fr. » (4), II, pp. 411-432, pl. XII-XIII, 1902; III. *Les nappes des Alpes orientales et la synthèse des Alpes*, « ibidem », (4), III, pp. 711-765, pl. XXII-XXIII, 1903; IV. *Sur la nécessité d'une nouvelle interprétation de la tectonique des Alpes franco-italiennes*, « ibidem », (4), VII, pp. 171-189, pl. IV e V, 1907.

(2) M. Lugeon e E. Argand, I. *Sur les grandes nappes de recouvrement de la zone du Piémont*, « C. R. Ac. Sc. », Parigi, t. 140, 1905, p. 1364; II. *Sur les homologies dans les nappes de recouvrement de la zone du Piémont*, « ibidem », 1905, p. 1491.

(3) E. Argand, I *Les nappes de recouvrement des Alpes Pennines* etc., « Mat. Carte Géol. de la Suisse », N. S. Livr. XXXI, 1910; II. *Neuf coupes à travers les Alpes Occiden-*

tales, 1902-1911; III. *Les nappes de recouvrement des Alpes Occidentales*, carta tettonica 1:500.000, 1902-1911.

(4) F. Hermann, I. *Sur le faisceau de plis en retour de Valsavarenche* etc. « C. R. Ac. Sc. » Parigi, t. 180, 1925, p. 1515; II. *Paléogéographie et genèse penniques*, « Ecl. Geol. Helv. », v. XIX, n. 3, 1925, p. 604; III. *La struttura delle Alpi Occidentali*, « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », v. LXIV, pp. 239-249, tav. VI e VII, 1925; IV. *Problèmes de Géologie Alpine*, « Flore Valdôtaine », n. 19, 1927; V. *Stereogramma tectonico delle Alpi Valdostane centrali*, « Mem. Ist. Geol. Padova », v. VII, 1927; VI. *La nappe de la Dent Blanche et les nappes des schistes lustrés en Maurienne et Tarentaise*, « Atti Soc. Elv. Sc. Nat. », sess. 108ª, Basilea 1927, p. 158 (sommario); VII. *Conceptions nouvelles sur la tectonique des Alpes franco-italiennes*, « C. R. Ac. Sc. », Parigi, t. 185, 1927, p. 1204; VIII. *Sulla tectonica valdostana*, « Mem. Ist. Geol. Padova », vol. VII, 1928.

(5) Gb. Dal Piaz, I. *Su alcuni lembi del ricoprimento della Dent Blanche (VI) compresi entro le formazioni post-triasiche della Grivola*, « Rend. R. Acc. Lincei », Roma, 4 dicembre 1927, p. 525; II. *La digitazione gneissica di Val Inferno (Gran Paradiso) e le sue relazioni con la massa frontale del ricoprimento quinto*, « ibidem », Roma, 15 gennaio 1928; III. *Sulle ofioliti alpine della zona della Grivola*, « Acc. Ven. Trent. Istr. », Padova, (3), v. XVII, gennaio 1928; IV. *Sull'orogenesi pennidica* « in preparazione »; V. *Carta geologica al 25.000 dei monti compresi fra la Valsavarenche e la Valnontey, per il tratto monte Ruïe-monte Herbetet* e relativi *Studi tettonico-petrografici*, « di prossima pubblicazione ».

(6) S. Franchi, *Sulla tettonica della zona del Piemonte*, « Boll. Comit. Geol », Roma 1906, S. 4ª, v. VII, n. 2, p. 137.

(7) *Foglio al 100.000 del Gran Paradiso*, R. Ufficio Geologico, Roma, 1912.

(8) V. Novarese, *Il profilo della Grivola*, « Boll. Comit. Geol. », Roma, XL, 1909, p. 497 ecc., tav. XV.

(9) A. Stella, *Sezioni geologiche attraverso l'alta Valle d'Aosta*, R. Ufficio Geologico, Roma, 1927.

Biologia. — *Fattori della morfogenesi nei tempi successivi dello sviluppo.* Nota [1] di G. Cotronei presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

Le recenti e brillanti ricerche di Spemann [3] e dei suoi allievi hanno aperto nuovi campi allo studio delle correlazioni di sviluppo. Si tratta di questioni fondamentali, in cui la valutazione comparativa dei vari dati sperimentali ottenuti con metodi differenti può riuscire di grande utilità per delucidare i complessi aspetti delle difficili questioni. Va subito riferito che, senza per questo diminuire per nulla i meriti delle ricerche di Spemann, sono già apparsi dei lavori (Goerttler, Brachet) che espongono dati e considerazioni non del tutto concordanti con quelle ricerche. Una recentissima nota di Pasquini [4] prende in considerazione a proposito dello sviluppo del

(1) Dall' Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) Per la bibliografia sui centri organizzatori si consulti l' « Archiv f. Entw. Mech. », dal vol. 100 (1924) fino al vol. 111 (1927) che comprende anche il lavoro di Brachet

(4) Questi « Rendiconti », vol. VI, p. 537 (1927).

cristallino i centri organizzatori secondari di Spemann, e in questa nota il Pasquini prende contemporaneamente in esame le mie più antiche ricerche (che vanno dal 1915 al 1922). Le osservazioni fondamentali dello Spemann sono oramai note: il labro dorsale blastoporale di un embrione di tritone, trapiantato sulla regione ventrale della gastrula di un altro embrione, non solo continua a svilupparsi per suo conto (Lewis), ma provoca nuove differenziazioni nella regione dell'ospite: così si sviluppa sotto l'influenza del trapianto un nuovo tubo midollare da parte di una regione dove normalmente ciò non avviene: ecco l'influenza del centro organizzatore. Assai interessanti sono anche quelle esperienze che tendono a delimitare il tempo (lo stadio) in cui il destino dei vari abbozzi sarebbe fissato in maniera definitiva: ciò avverrebbe quando il blastoporo è divenuto circolare. A tale epoca anche l'accenno nervoso si presenta predeterminato e non sono più possibili le sostituzioni con epidermide banale (Spemann, Geinitz, Mangold). In seguito Spemann ed allievi hanno delimitato nella parte entomesodermica del labbro dorsale del blastoporo l'attività del centro organizzatore. Il Lehmann ha escluso ogni influenza da parte dell'abbozzo della corda: l'attività del centro si ridurrebbe al mesoderma. Le ricerche di Goerttler, con l'asportazione del materiale cordo-mesodermico, mostrano che si ostacola bensì la disposizione dell'abbozzo midollare, ma non se ne impedisce il differenziamento. A queste osservazioni Spemann ha opposto che la funzione organizzativa del mesoderma bisogna considerarla in un periodo più precoce di quello considerato dal Goerttler.

Brachet (1927) non crede che il centro organizzatore possa essere esclusivamente rappresentato dal mesoderma della gastrula, e ricorda le sue esperienze pubblicate nel 1923, dalle quali risulta che nella parte media della semiluna grigia dell'uovo di Rana esisterebbe un centro che per autodifferenziamento produce la parte anteriore della regione cordale della testa e verso l'alto *provoca* la formazione della testa precordale e più in basso il resto degli organi assiali dorsali dell'embrione. Brachet, che ha preso in considerazione i lavori avanti citati, è convinto che il centro organizzatore degli Anfibi è dovuto a un complesso di tre centri: midollare, cordale, mesodermico.

Lo scopo della presente Nota è quello di far risaltare come tutto un corredo di altre ricerche lascia scorgere l'esistenza di centri organizzatori che si mettono in evidenza soltanto in periodi successivi dello sviluppo, e di vedere fino a quale punto questi centri organizzatori si riattaccano per la loro origine a momenti embrionali precedenti.

Ricorre nelle ricerche avanti citate, come un fatto assodato, che la presenza o l'assenza della corda non influenza per nulla lo sviluppo nè il volume degli altri organi: secondo Lehmann l'abbozzo midollare può costituirsi ugualmente nell'assenza della corda. A questo riguardo per l'esatta comprensione di questa Nota, io desidero richiamare le belle ricerche di

Giardina [1] (1914) che serviranno assai bene a delimitare il valore dei centri organizzatori nei tempi successivi dello sviluppo. Secondo Giardina l'estirpazione della corda dorsale in embrioni di *Discoglossus* lascia scorgere sia dei processi indipendenti, sia dei processi morfogenetici collegati con la corda: tra questi ultimi Giardina ammette lo sviluppo dell'intestino p. d. Le branchie, in assenza della corda, si sviluppano in grado minimo, come pure è debolissimo l'accrescimento in senso longitudinale, le cellule nervose del tubo midollare si differenziano, ma questo ha tendenza a trasformarsi in una vescicola sferica o sub-sferica. Le circostanziate ricerche del Giardina mi fanno considerare la corda dorsale come un centro organizzatore secondario per il normale dislocamento di vari abbozzi embrionali. La corda dorsale dà l'impulso come organo di sostegno e di allungamento lineare alla direzione dello sviluppo di una determinata parte del corpo dell'embrione: quella cordale; senza voler dire, con questo, che è essa che determina le potenze di sviluppo di quegli organi.

Le mie ricerche personali mi hanno fatto ammettere che nella zona precordale dell'embrione, è lo sviluppo dell'encefalo precordale che dirige la morfogenesi: tutto l'abbozzo dell'encefalo precordale col suo turgore e la sua intensa attività di accrescimento è il centro secondario organizzatore, se vogliamo adottare questa terminologia, per la morfogenesi della testa precordale. Io venni a queste conclusioni sulla base di esperienze eseguite con i sali di litio, e vedo ora che il Goerttler si è servito del cloruro di sodio per inibire l'evoluzione dell'abbozzo ento–mesodermico.

Nelle mie esperienze è risultato, cosa già nota, che i sali di litio influenzano assai facilmente lo sviluppo embrionale: io ho studiato dettagliatamente quelle influenze che si ripercuotono più tardi sullo sviluppo: ma la prima origine di queste modificazioni va, naturalmente, ricercata nell'azione sperimentale esercitata in un dato momento dello sviluppo: è risultato che il momento più utile corrisponde al periodo gastrulare, ed è risultato, inoltre, che la regione del blastoporo è una regione di intensa suscettibilità. In queste mie esperienze, studiando gli embrioni che hanno potuto continuare nello sviluppo si è visto questo fatto interessante, che la regione precordale della testa presenta graduali processi di inibizioni di sviluppo, che ho messo, seriando le osservazioni, in correlazione con le inibizioni di sviluppo dell'encefalo precordale. Queste esperienze mettono, dunque, in luce una distinzione tra la parte cordale dell'embrione e quella precordale.

Questi risultati stanno a dimostrare che con determinate esperienze una parte almeno del centro midollare può essere influenzata quando non lo sono il centro ento-mesodermico e quello cordale: si tratta adunque di

(1) Giardina A., *Sul valore morfogenetico della corda dorsale.* « Arch. Ital. d'Anat. e d'Embr. », vol. 12, 1914.

un'influenza selettiva su determinati abbozzi, a differenza di altri: ciò non vuole escludere che con gli stessi sali di litio non si possano ottenere, agendo in diverso modo, tutt'altri risultati.

Un fatto notevole accertato nelle mie esperienze è che tutta la parte del tubo midollare in rapporto con la corda dorsale non rimane influenzato, o forse per essere più esatti ha potuto ristabilire i suoi normali attributi. C'è dunque una corrispondenza di comportamento in una fase dello sviluppo, tra corda dorsale e la parte cordale del tubo midollare.

Questi risultati, che ho reso noti da parecchi anni, mi condussero, quando avevo già conseguito i miei risultati analitici, a vedere i rapporti tra le mie ricerche e quelle di Child. Da esse risultavano fatti tali che si potevano corrispondere nelle linee generali. I miei lavori, però, erano essenzialmente basati sulla documentazione morfologica ed io ho fatto notare che le inibizioni da me riscontrate riuscivano a far risaltare determinate direzioni di accrescimento embrionali ed ho potuto analizzare i fattori, tempo e luogo, in rapporto a concrete impostazioni di ricerche morfologiche sperimentali. È risultato in maniera inconfutabile che la parte cefalica precordale presenta una spiccata suscettibilità differenziale e posso aggiungere che le mie ricerche trovano conforto in tutti i reperti malformativi che riguardano la testa dei Vertebrati.

Recentemente il Ranzi (1) ha creduto non accettabili le idee di Child a proposito di sue osservazioni sull'uovo di Cefalopodi. Il Ranzi ha fatto molto bene a saggiare altro materiale da esperienza, ma non mi pare che le considerazioni che svolge abbiano un carattere estensivo. Non è mio compito di difendere le idee di Child; io preferisco richiamare le mie idee e i fatti da me messi in evidenza: io credo di aver dato la dovuta importanza ai diversi fattori morfogenetici, e da questo punto di vista faccio risaltare che il gradiente assiale va studiato in rapporto alla simmetria dei vari organismi; pertanto quegli animali in cui non prevale in modo notevole l'accrescimento cefalo-caudale non sono i più adatti per la verifica di un tale gradiente.

Riassumendo quanto ho precedentemente esposto, risulta, collegando fra loro ricerche eseguite con vari indirizzi, che mentre vi sono centri organizzatori che si manifestano precocemente (Spemann), ve ne sono altri che si manifestano più tardi; la corda dorsale si può considerare tra questi ultimi ed è importante constatare come in un tempo precedente essa non lo sia affatto. L'influenza della corda dorsale come risulta dalle ricerche di Giardina si manifesta essenzialmente per una sua azione di armonia sull'insieme di vari abbozzi d'organi poichè «la costruzione di un dato «organismo non consiste soltanto nel differenziamento istologico dei vari «abbozzi, ma anche in una certa armonia nello sviluppo delle varie parti, «armonia che viene a mancare mancando la corda».

(1) Questi «Rendiconti», vol. VI, p. 239 (1927).

Dalle mie ricerche risulta pure che l'encefalo precordale si può considerare come un centro organizzatore secondario, che si manifesta cioè, secondo il significato che do a questa espresssione, in un tempo ulteriore dello sviluppo, e anche per esso possiamo dire che deriva da un abbozzo, il tubo midollare, che viene generalmente escluso dal novero dei centri organizzatori più precoci: tuttavia le esperienze eseguite con i sali di litio dimostrano che un'influenza sperimentale esercitata precocemente si fa risentire più tardi, almeno su qualcuno di questi centri secondari. Questi centri esplicano la loro azione sulle complesse condizioni meccaniche che si delineano nell'organismo che si va sviluppando.

Zoologia. — *Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. II. Sul differenziamento polare delle uova di « Arbacia punctulata » Grey, centrifugate subito dopo la fecondazione.* Nota di P. Pasquini, presentata dal Corrispondente G. Raffaele.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Alcuni esperimenti di amplificazione e rivelazione delle correnti bioelettriche mediante l'impiego delle valvole termoioniche* [1]. Nota di E. Benedetti, presentata [2] dal Socio E. Giacomini.

Le valvole termoioniche, che in questi ultimi tempi vengono sì largamente usate per amplificare correnti elettriche debolissime e renderle così facilmente rivelabili, hanno trovato, finora, molto scarsa applicazione nel campo dell'elettrobiologia, ove nella maggior parte dei casi si ricorre ancor sempre, per rivelare tali correnti, al galvanometro a corda di Einthoven o all'elettrometro capillare. Io pensai, che potendo amplificare le medesime correnti a mezzo di un adeguato circuito a valvole, tali correnti si sarebbero potute mettere in evidenza anche senza l'ausilio dei su nominati apparecchi registratori sensibilissimi e perciò anche delicatissimi.

Decisi così di tentare l'amplificazione delle correnti di azione prodotte dalle contrazioni muscolari, che, per il loro carattere di correnti discontinue, periodiche, con una frequenza piuttosto bassa di 20 a 70 periodi al secondo, si sarebbero prestate anche ad essere rivelate per via acustica a mezzo di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Bologna, diretto dal prof. E. Giacomini.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

un telefono o di un altoparlante. A tale scopo costruii due apparecchi amplificatori: il primo possiede due stadi di amplificazione ad alta frequenza con trasformatori a minima perdita e un dispositivo per ottenere delle interferenze nelle oscillazioni ad alta frequenza, coi relativi battimenti di frequenza acustica, mediante un collegamento capacitativo equilibrato, a ponte di Weathstone; un collegamento a resistenza–capacità per far funzionare una valvola termoionica come audion escludendo una semionda per ciascun periodo; due stadi di amplificazione a frequenza musicale con trasformatori. Mediante leve di comando tutti questi dispositivi possono funzionare indipendentemente l'uno dall'altro, oppure essere accoppiati in varie combinazioni.

Il secondo apparecchio è costruito espressamente per servire come amplificatore di entrata per debolissime correnti discontinue, che si possono far agire o direttamente sulla griglia della prima valvola, oppure sul primario di un trasformatore telefonico « Nora » del rapporto 1:5. Il secondario di questo è collegato, da un lato, al cursore di un potenziometro di 400 Ohm, e dall'altro lato, alla griglia. Ai due morsetti estremi del potenziometro è inserita una pila di 4.5 V il cui positivo è a sua volta in connessione col negativo del filamento. L'accoppiamento tra 1° e 2° stadio avviene per mezzo di un trasformatore del rapporto 1:3; l'accoppiamento tra 2° e 3° è possibile in due maniere: o a mezzo di un altro trasformatore del rapporto 1:3, oppure a mezzo di resistenza–capacità. La potenza di amplificazione è, usando quest'ultimo sistema, ridotta di circa un terzo; se ne avvantaggia però la stabilità di funzionamento e la purezza di riproduzione. Per regolare la sensibilità dell'apparecchio e per impedire quanto più è possibile l'innescarsi di oscillazioni proprie, tra griglia e filamento della prima valvola è inserita in parallelo una resistenza regolabile da 0.5 a 2.5 Megohm. Dei commutatori permettono di usufruire a piacere di uno, di due o di tutti e tre gli stadi di amplificazione. Collegando questo apparecchio con gli ultimi dua stadi di bassa frequenza di quello precedentemente descritto, si ottiene un complesso amplificatore a 5 stadi, capace di fornire un'amplificazione teorica di 36.905.605 volte. Le valvole finora usate in tutti e due gli apparecchi sono le Philips C 509 a forte emissione, aventi le seguenti caratteristiche: tensione della corrente di filamento V 5.5, coefficiente di amplificazione = 9, pendenza 1.5, R_i = 6900 Ohm. Tutto il complesso funziona con una tensione anodica di 80 V fornita da una batteria di accumulatori.

La massima difficoltà nella scelta e nella messa a punto del circuito era data dalla tendenza di esso alle autooscillazioni, specialmente di quelle a frequenza musicale, che si poterono eliminare solo dopo lunghe prove e con accorgimenti speciali, mettendo cioè in parallelo con i trasformatori delle resistenze e capacità adeguate, e dando a ciascuna griglia un potenziale negativo appropriato. Trattandosi di valvole con un coefficiente di

amplificazione piuttosto alto, quindi con una pendenza della curva caratteristica piuttosto ripida, la tensione di griglia deve essere finemente regolabile per ciascuno stadio di amplificazione, in ispecial modo per i due primi. Altrettanta cura va data alla corrente di accensione del filamento. I reostati devono permettere una variazione progressiva molto delicata della resistenza e devono, per i primi stadi, essere indipendenti, uno per ciascuna valvola.

Nel circuito anodico dell'ultima valvola era inserita nel modo consueto una cuffia telefonica a forte resistenza (4000 Ohm) oppure un altoparlante.

Coi descritti apparecchi furono eseguite le seguenti esperienze: Il circuito primario del trasformatore di entrata era collegato a due fili di argento ciascuno dei quali pescava in una rispettiva vaschetta di porcellana contenente soluzione fisiologica. Immergendo un dito della mano destra in una vaschetta e un dito della mano sinistra nell'altra, si udiva, con tre stadi di amplificazione, ad ogni contrazione, anche lieve, dei muscoli flessori ed estensori delle dita, un rumore caratteristico, simile a un raschiamento nella cuffia. Con quattro stadi di amplificazione, questo rumore era udibile distintamente anche in altoparlante. Con cinque stadi il rumore in cuffia assumeva una potenza tale da riuscire quasi insopportabile, in altoparlante era tanto forte da essere udito da alcuni metri di distanza, anche una diecina. Proporzionalmente alla forza con cui veniva eseguita la contrazione, variava anche l'intensità del rumore, non però la sua frequenza. Effetti molto più potenti si ottennero tenendo una mano immersa nella vaschetta, e appoggiando l'altro conduttore sulla lingua. Si udivano allora, sovrapposte, varie qualità di rumori di intensità e di frequenza diverse, che non cessavano mai del tutto, anche tenendo la lingua in assoluto riposo, e che assumevano delle intensità fortissime ad ogni, anche piccolo, movimento. Se i conduttori dell'apparecchio venivano collegati a due aghi da dissezione e questi erano infissi per qualche millimetro appena sotto alla pelle di una cavia (opportunamente tenuta in apparecchio di contenzione), uno nella regione clavicolare destra e l'altro in prossimità dei muscoli addominali, si potevano distintamente udire in altoparlante le correnti di azione prodotte dalle pulsazioni cardiache. Contemporaneamente si udivano altri rumori: dei rumori sincroni col ritmo respiratorio, causati dalle correnti prodotte dalle contrazioni del diaframma e di altri muscoli respiratori, rumori prodotti ad ogni visibile contrazione degli arti e dei muscoli addominali, e inoltre rumori particolari, provocati da serie di scariche elettriche a frequenza bassissima di qualche diecina forse al secondo, ai quali non corrispondeva nessuna contrazione apparente. I rumori prodotti dalle correnti di azione cardiache erano sempre ben distinti dagli altri, e per il loro ritmo, e anche per una tonalità più bassa e secca, quasi di uno scatto. Anche spostando le punte degli aghi, si udivano sempre i predetti rumori, purchè una derivazione di corrente avvenisse da una regione situata cranialmente rispetto al cuore, e l'altra da una derivazione situata caudalmente.

Esperienze analoghe vennero anche eseguite su dei gattini neonati. In questi furono inoltre messi allo scoperto singoli muscoli, dai quali si derivava la corrente appoggiandovi semplicemente i reofori di argento e ottenendo così delle correnti molto più intense. Venne anche messo allo scoperto il cuore pulsante, e con due punte smusse di argento derivata la corrente direttamente dal miocardio. La rivelazione acustica era fortissima, sia derivando la corrente dalla superficie degli atrii, sia derivandola dai ventricoli. La caratteristica del rumore prodotto dalla corrente di azione atriale era diversa da quella data dalla contrazione ventricolare. La maggiore intensità di suono si otteneva derivando la corrente con un filo in corrispondenza del solco atrio–ventricolare destro e con l'altro filo dall'apice del cuore; la minima intensità ponendo i due reofori alla medesima altezza rispetto al piano trasversale.

Tali esperienze vennero anche ripetute nella rana, ove, data l'umidità della superficie della pelle, non occorre nemmeno perforarla con degli aghi. Basta appoggiare i conduttori sul tegumento per sentire e la corrente cardiaca, e, in prossimità della bocca, le correnti prodotte dalla musculatura del pavimento della cavità buccale nei movimenti di respirazione.

Credo che questi pochi esempi servano a dare un'idea della grande sensibilità di un complesso amplificatore a valvole termoioniche, e dei vantaggi che, per lo studio delle correnti bioelettriche, se ne possono ricavare. L'amplificazione è rigorosamente proporzionale, sia per quanto riguarda l'intensità, sia per quanto riguarda la frequenza; inoltre l'assoluta mancanza di inerzia permette di rilevare variazioni di intensità anche rapidissime. Certo la rivelazione con mezzi acustici, come il telefono e l'altoparlante, delle correnti amplificate può prestarsi bene per delle esperienze di assaggio e per una dimostrazione avente puramente scopo didattico, ma non si adatta, perchè soggettiva, ad uno studio accurato, analitico. Per questo è necessaria la registrazione grafica, che però è possibile. Per la registrazione della potenza basterà inserire nel circuito di uscita un rivelatore a cristallo o una lampada funzionante da audion, che, raddrizzando la corrente, possa permettere l'impiego di un comune galvanometro. Per la registrazione della frequenza si potrà impiegare un comune oscillografo industriale, e anche, più semplicemente, un tubo di Braun e lo specchio rotante. Spero di ottenere in breve qualcuno di questi apparecchi, e mi riservo quindi di comunicare in seguito i risultati ottenuti con tali mezzi.

Si potranno inoltre misurare anche correnti non discontinue a debolissimo potenziale servendosi del collegamento a ponte di Weathstone o delle sue modificazioni indicate da Scheminzky [1] e da Gildemeister [2]. Impiegando il metodo delle interferenze, si potranno registrare graficamente,

(1) Scheminzky F., *Die Anwendung von Elektronen- und Ionenröhren in der Biologie.* «Biologia generalis», Bd. 3, H. 4, 1927.

(2) Gildemeister M., *Ueber einige Anwendungen der Elektronenröhren in Widerstandschaltung und der Glimmlampen für die Physiologie.* «Pflüger's Archiv», Bd. 213, 1926.

con sufficiente precisione, correnti di frequenza molto alta anche con degli apparecchi aventi una certa inerzia meccanica. Pure inserendo come registratore un galvanometro di Einthoven si potranno, da un lato, registrare delle correnti molto più deboli di quanto si sia potuto fare finora, dall'altro lato, anche per le correnti rivelabili direttamente, si potranno avere dei grafici più precisi, non occorrendo, data la maggiore energia disponibile, spingere la sensibilità del galvanometro fino a un punto, in cui delle lievi perturbazioni estranee possono facilmente divenire causa di errori.

Devo al vivo interessamento del direttore dell'Istituto, prof. Giacomini, che mi fece ottenere un sussidio dalla R. Accademia dei Lincei, e al prof. Vincenzo Neri che pure contribuì con una cospicua somma alla costruzione degli apparecchi, se ho potuto eseguire le su riferite ricerche. Ad essi esprimo qui tutta la mia gratitudine.

Biologia. — *Notizie preliminari sugli stadi larvali di Murenoidi raccolti dal prof. Luigi Sanzo nel Mar Rosso e nel Golfo di Aden durante la crociera della R. N. « Ammiraglio Magnaghi » 1923-24.* Nota di U. D'Ancona [1] presentatata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

La collezione di Murenoidi, che il prof. Luigi Sanzo raccolse durante la crociera della R. N. « Ammiraglio Magnaghi » 1923-24 e che gentilmente affidò a me per lo studio, è di non comune importanza perchè comprende i primi stadi larvali di Murenoidi conosciuti per il Mar Rosso e per il Golfo di Aden e perchè è la più ricca fra le raccolte di leptocefali provenienti dalla Regione Indo-Pacifica.

Per tutta questa Regione sono state finora descritte 36 specie di leptocefali (Quoy e Gaimard, Lesson, Richardson, Cantor, Kaup, Bleeker, Peters, Day, Strömman, Garman, Brauer, Franz, Weber, Pappenheim, Southwell e Prashad), di cui, dovendosi passare parecchie in sinonimia, possono ritenersi specie distinte soltanto 15-20. La collezione della Magnaghi comprende invece da sola, per una parte relativamente molto limitata dell'anzidetta Regione, ben 21 specie larvali sicuramente distinte, di cui 16, anche essendo animati dai criteri più rigidamente contrari allo spezzettamento delle specie, devono essere ritenute nuove.

Queste cifre dimostrano eloquentemente l'importanza della collezione di cui il prof. Sanzo mi ha affidato lo studio [3] e dimostrano altresì quanto

(1) Dall' Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) Il lavoro completo sta per andare in stampa negli «Annali Idrografici» di Genova, in cui vengono pubblicati i risultati della Campagna della Magnaghi.

poco sono conosciuti gli stadi larvali degli Apodi della Regione Indo-Pacifica. Certamente se nell'Arcipelago Indo-Australiano, che alberga secondo Weber e Beaufort [1] 127 specie di Murenoidi, e sopra le zone profonde vicine venissero fatte delle esplorazioni con la competenza che ha in argomento chi diresse le ricerche biologiche della Magnaghi, ben più ampia messe di materiale dovrebbe aspettarsi.

Se nello studio degli stadi larvali dei Teleostei, dei Murenoidi in particolare, ha importanza l'esatta illustrazione degli esemplari e l'identificazione di specie larvali provvisorie, che in seguito possono servire alla seriazione delle varie fasi della metamorfosi, ben maggiore importanza acquista il poterne identificare le specie adulte corrispondenti. Tale identificazione è, come noto, presso che completa per le specie larvali del Mediterraneo (Grassi); per l'Oceano Atlantico sono state riconosciute le specie adulte di un piccolo numero di leptocefali (Eigenmann e Kennedy, Schmidt, Lea), nulla è stato fatto ancora per la Regione Indo-Pacifica. Finora di nessuna specie di leptocefali dell'Oceano Indiano e del Pacifico si sa a quale specie adulta corrisponda.

Come è noto, per identificare le specie larvali e le adulte soltanto in pochissimi casi è stato possibile valersi della sperimentazione diretta (Delage, Grassi); nella maggioranza dei casi si è ricorso invece alla seriazione degli stadi, che naturalmente presentano sempre notevoli lacune, per cui soltanto il riconoscimento di alcuni caratteri specifici costanti può servire a tale scopo. Fra questi quello che si mantiene più costante durante e dopo la metamorfosi è il numero dei segmenti muscolari, rispettivamente delle vertebre, che, come dimostrò il Grassi, dà il più sicuro criterio per il riferimento delle forme larvali. Naturalmente esso presenta una certa variabilità nella stessa specie e d'altra parte specie diverse possono avere numeri di vertebre prossimi o coincidenti. Perciò la conoscenza del numero delle vertebre non può da sola bastare allo scopo; quindi, pur basandosi su tale carattere, si ricorre inoltre generalmente alla similitudine con le specie larvali di cui è nota la forma adulta. Che tale procedimento dia affidamento di sicurezza, quando usato con cautela, lo vedremo in una nota successiva. Questo è d'altronde il procedimento cui spesso si è ricorso, specialmente per i leptocefali extra-mediterranei.

In ogni modo l'elemento più sicuro per l'identificazione è la conoscenza del numero dei miomeri del leptocefalo, rispettivamente del numero di vertebre dell'adulto. Ora purtroppo per i Murenoidi adulti extra-mediterranei il numero di vertebre è generalmente sconosciuto, per cui sarebbe opera sommamente utile se nei Musei che contengono ricche collezioni di Murenoidi esotici si procedesse alla determinazione del numero delle ver-

(1) Weber and Beaufort, *The Fishes of the Indo-Australian Archipelago.* III. – Leiden 1916.

tebre, cosa che potrebbe essere eseguita molto agevolmente, senza minimamente danneggiare gli esemplari, per mezzo della radiografia, come ha fatto Grassi per alcuni esemplari rari mediterranei e come ho fatto io per gli esemplari adulti del Mar Rosso [1].

Fra le specie adulte del Mar Rosso di sole 7 ho trovato in letteratura il numero delle vertebre; si conosce questo numero ancora per altre 9 che vivono nell'Oceano Indiano e nel Pacifico. Si aggiungano 2 specie del Mar Rosso, di cui io ho potuto contare il numero delle vertebre mediante la radiografia, oltre a una di cui esso era già noto, e si vedrà che le nostre conoscenze a questo riguardo sono ancora enormemente scarse.

Niente di strano quindi se il riconoscere le forme larvali sia difficile e spesso impossibile.

Delle 21 specie della collezione della Magnaghi ne ho potuto identificare 4, che ritengo siano le forme larvali rispettivamente di *Ophisoma anago*, *Conger cinereus*, *Muraena undulata* e *Muraena hepatica*.

Ophisoma anago è specie affine alla mediterranea *O. balearicum* e si ritrova in tutto l'Oceano Indiano e lungo le coste orientali dell'Asia fino al Giappone. Essa è stata da me riconosciuta anche in un esemplare adulto pescato dalla Magnaghi a Suez. Su questo ho potuto rilevare 48 vertebre preanali e 71 postanali, complessivamente 119. Ora fra il materiale larvale pescato dal prof. Sanzo, la specie più abbondantemente rappresentata ha appunto 112-117 miomeri e una grandissima assomiglianza col leptocefalo mediterraneo di *Ophisoma balearicum*, assomiglianza tale che ritengo che unitamente a questo fu confusa da Kaup, Strömman e Collett sotto i nomi di *L. taenia*, *L. marginatus*, *L. Schéelei* e *L. dentex*. Identici a questi leptocefali sono certamente parte di quelli descritti dal Weber come *L. taenia*, inoltre verosimilmente pure il *L. taenioides* e il *L. ceramensis* di Bleeker, il *Diaphanichthys brevicaudus* di Peters e il *L. indicus* di Weber.

Conger cinereus è pure specie abbondantemente diffusa nell'Oceano Indiano e nota anche per il Mar Rosso. Essa, secondo il Günther, ha 51 vertebre preanali e 94 postanali, 145 nel complesso. Si noti però che *Conger conger* ne ha 149-156 e che è pure conosciuto per l'Oceano Indiano e per il Pacifico. Il carattere comunemente usato per distinguere queste due specie è rappresentato dall'inizio della dorsale. Ma è questo veramente un carattere specifico? O non si tratta forse di razze locali di una specie unica ad ampia distribuzione? Certamente una revisione di queste specie fatta su abbondante materiale e con accurati metodi somatometrici potrebbe fornire dei dati più precisi.

Fra il materiale pescato dalla Magnaghi si ha una specie larvale a 147-152 miomeri, che presenta tanto stretta assomiglianza col leptocefalo

(1) Devo l'esecuzione delle radiografie stesse alla cortesia del dott. Di Tivoli del Laboratorio Fisico della Sanità e del dott. Petessi dell'Ospedale di S. Gallicano, Roma.

mediterraneo di *Conger conger* da essere facilmente con esso confusa. Anzi l'unico carattere distintivo rilevato fra queste due specie larvali è dato dal numero di raggi codali corrispondenti ai due ipurali, 5 e 5 nel caso del leptocefalo eritreo, 6 e 3 in quello mediterraneo. Se questo è il carattere distintivo tra queste due specie, ritengo che la forma larvale del Mar Rosso appartenga a *Conger cinereus*, che è l'unica specie adulta di questo genere nota nel Mar Rosso. Di queste due specie larvali sono probabilmente sinonimi alcuni dei leptocefali descritti per l'Oceano Indiano e per il Pacifico.

Le due specie di *Muraena*, *undulata* e *hepatica*, presentano in base ai risultati delle mie radiografie 54 + 77 e 65 + 90, in complesso 131, rispettivamente 155 vertebre, il primo dei quali dati concorda con quello del Günther di 64 + 68, complessive 132. Tutte e due queste specie sono note per il Mar Rosso. Ora tra il materiale larvale della Magnaghi si trovano due leptocefali a 125-131, rispettivamente 158-162 miomeri, ambedue strettamente assomiglianti al leptocefalo della *Muraena helena*, fra altro per l'assenza delle pettorali.

Ritengo perciò che anche in questo caso sia giustificato attribuire questi due leptocefali alle suddette specie di *Muraena*. Di quello di *M. undulata* credo sia sinonimo il *L. Peterseni* di Weber, mentre deve considerarsi specie larvale non ancora descritta quello di *M. hepatica*.

Ho ritenuto ancora di poter identificare due delle forme larvali raccolte dal prof. Sanzo col *L. mauritianus* di Pappenheim, rispettivamente col *L. vermicularis* di Southwell e Prashad. Invece le restanti 15 specie (oltre al leptocefalo di *M. hepatica*) mi resultano non ancora descritte e perciò ho dato loro dei nomi provvisori indicanti generalmente il genere cui ritengo possano appartenere o essere affini.

Procedendo su questo criterio della verosimile assomiglianza delle forme larvali di specie affini, su cui ritornerò in una prossima Nota, ritengo che i leptocefali da me studiati possano essere attribuiti alle seguenti famiglie:

Congridae: *L. Sanzoi*, *L. macrenteron*, *L. mauritianus*, *L. congroides*, *L. Magnaghii*, *L. Cotroneii*.

Nettastomidae: *L. saurencheloides*, *L. lateromaculatus*, *L. Bellottii*.

Synaphobranchidae: *L. synaphobranchoides*.

Ophichthyidae: *L. ophichthoides*.

Echelidae: *L. echeloides*.

Muraenidae: *L. grassianus*, *L. muraenoides*, *L. erythraeus*, *L. vermicularis*.

Famiglia sconosciuta: *L. arabicus*.

È notevole il fatto che come nel Mar Rosso non ci sono rappresentanti delle famiglie *Anguillidae* e *Nemichthyidae*, così non si è trovato neppure alcuno stadio larvale riferibile a queste due famiglie.

Il numero di specie larvali attribuite in tal modo alle singole famiglie non corrisponde però al numero di specie adulte conosciute per ciascuna

famiglia. Ciò ci induce a dover ammettere o che nel Mar Rosso viva un numero maggiore di Murenoidi di quanti sono finora conosciuti o che attraverso lo Stretto di Bab-el-Mandeb avvengano degli scambi di esemplari larvali o adulti, per cui alcuni che non si riproducono nel Mar Rosso vi immigrino allo stato larvale o viceversa emigrino nel Golfo di Aden.

Ritengo di dover ammettere ambedue queste ipotesi. La prima per il fatto che su tre esemplari adulti di Murenoidi raccolti dal prof. Sanzo, uno appartiene a specie nuova per il Mar Rosso, *Ophisoma anago*. La seconda di queste ipotesi è confermata dal fatto dell'abbondanza di leptocefali catturati allo Stretto di Bab-el-Mandeb nella corrente entrante, contemporanea alla notevole abbondanza di questi stadi larvali nel Golfo di Aden durante i mesi invernali.

In quanto alla distribuzione geografica devo ancora ricordare, l'assenza di leptocefali in tutte le pesche fatte nel Canale e nel Golfo di Suez, fino allo Stretto di Giubal, all'infuori di un uovo di Murenoide, fatto che mi riesce alquanto strano. Come è noto il Golfo di Suez è caratterizzato da scarse profondità.

Notevolmente più ricche sono state invece le catture di stadi larvali a sud dello Stretto di Giubal e particolarmente nella parte più meridionale del Mar Rosso e nel Golfo di Aden. Alcune specie sono state pescate esclusivamente fuori dello Stretto di Bab-el-Mandeb, altre tanto nel Mar Rosso che nel Golfo di Aden, parecchie soltanto nella parte meridionale del primo. È anzi da ritenere che buona parte delle specie stesse sia comune al Mar Rosso e al Mare Arabico; si sa che anche le specie di Murenoidi adulti note per il primo, sono per la maggior parte comuni all'Oceano Indiano.

Invece nessuna delle specie adulte del Mar Rosso è sicuramente comune al Mediterraneo e lo stesso può dirsi per le specie larvali. Qualche possibilità c'è per il mio *L. saurencheloides*, che potrebbe essere sinonimo del leptocefalo di *Saurenchelys cancrivora*, specie che secondo il Giglioli sarebbe identica all'indiana *S. Petersi* descritta dal Day. C'è forse pure qualche dubbio sulla vera differenza specifica tra il mio *L. Sanzoi* e il leptocefalo di *Ophisoma balearicum* e tra il mio *L. congri cinerei* e quello di *Conger conger*. Ma qui, come ho già accennato, entriamo nella discussione della validità delle differenze tra queste specie indiane e atlantiche affini. In ogni modo si tratta se mai di specie a larga distribuzione geografica estese dall'Atlantico all'Indiano e non di scambi attraverso il Canale di Suez, di cui non c'è alcun indizio. Infatti tutte le ricerche finora fatte sulla immigrazione delle due faune nel Canale di Suez (Tillier, Norman), hanno dato, per quanto riguarda i Murenoidi, risultati negativi.

Zoologia. — *Sulla possibilità di ordinare sistematicamente le specie larvali dei Murenoidi.* Nota di U. D'Ancona, presentata dal Corrisp. F. Raffaele.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione sul ricambio azotato di ratti albini alimentati con dieta insufficiente subproteinica, subplipinica, ipercarboidrosica.* Nota di N. A. Galamini, presentata dal Corrispondente S. Baglioni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sulla composizione chimica di alcuni latticini italiani.* Nota di L. Settimj, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. – IV. Modificazioni della struttura ultramicroscopica nel processo di cateratta.* Nota di D. Cattaneo, presentata dal Corrisp. A. Dionisi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *Modificazioni del sangue, dell'apparato emolinfatico e dei reni nei conigli trattati con trasfusione di sangue omogeneo.* Nota di A. De Lollis, presentata dal Corrisp. A. Dionisi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. Garbasso, dopo aver annunciato all'Assemblea che l'Accademia commemorerà degnamente in una speciale seduta a classi riunite il Socio onorario Armando Diaz, Maresciallo d'Italia, rievoca brevemente la figura del vincitore di Vittorio Veneto testè scomparso, ricordandone le gesta ed esaltandone le insigni virtù di soldato e di patriota.

L'Assemblea tutta si associa vivamente alle parole del Presidente.

Il Presidente sen. Garbasso annunzia anche la morte dei Soci Stranieri, E. Lorentz che può considerarsi un pioniere della fisica teorica, F. Marchand, patologo illustre dell'Università di Lipsia, e P. de Groth insigne professore di mineralogia nell'Università di Monaco.

Ricorda infine l'ultima dolorosa perdita che l'Accademia ha subito con la morte del Socio A. Abetti e rievoca i meriti dello scienziato, all'attività e alle cure del quale tanto deve l'Osservatorio astronomico di Arcetri.

Il Corrisp. Raffaele commemora brevemente il Socio Straniero F. Henneguy con le seguenti parole:

« Il 26 gennaio si è spento a Parigi L. Félix Henneguy, che dal febbraio dello scorso anno era nostro Socio Straniero.

« Il prof. Fauré-Frémier, genero dell'illustre estinto, aveva pregato il collega Giulio Fano, che n'era amico, di commemorarlo in seno alla nostra classe. Una lieve indisposizione impedisce all'amico Fano di intervenire a questa adunanza ed egli m' incarica di sostituirlo nel pietoso incarico.

« L'Henneguy, nato a Parigi nel 1850, fece i suoi studi nella Facoltà medica di Montpellier e vi fu per qualche tempo preparatore del Rouget. Nel 1871 entrò nel laboratorio di Claude Bernard al Muséum d'histoire naturelle: poi divenne preparatore della cattedra di Embriogenia comparata del Collège de France, di cui era titolare il Balbiani: e a quei due illustri maestri egli fece veramente onore. Dal 1887 all'89 incaricato di sostituire il Balbiani nell'insegnamento, nel 1900 fu chiamato a succedergli. Insegnò anche Entomologia e Entomologia applicata nella Scuola Nazionale d'agricultura di Grignon e alla Scuola Nazionale d'agricultura di Versailles.

« Fu laureato dell'Istituto, insignito del gran premio per le Scienze fisiche e del premio Serres; nel 1907 eletto membro dell'Accademia di Medicina, nel '908 di quella delle Scienze, di cui era ora vicepresidente, e fin dal 1900 dell'Accademia di Agricultura, che nel 1915 lo elesse a suo Presidente. Era da tempo presidente della Société de Biologie dov'è stato degnamente commemorato nella seduta del 28 gennaio ultimo.

« Come uomo e come scienziato, l'Henneguy si era acquistato l'affetto e la stima di tutti coloro che lo conobbero, o ne conobbero i lavori.

« La sua attività scientifica si svolse principalmente nel campo dell'Entomologia e della Citologia. Le sue lezioni sulla Cellula, pubblicate nel 1898 e quelle su gl'Insetti, comparse nel '904, si possono senza esagerazione, citare a modelli. Molto noto e diffuso l'ottimo *Trattato dei metodi tecnici dell'Anatomia microscopica*, fatto in collaborazione col Bolles Lee.

« È soprattutto come citologo che all'Henneguy spetta un posto d'onore nella storia delle scienze biologiche. Le sue ricerche su i Protozoi, sui processi di maturazione delle uova, su quelli della divisione nucleare nei blastomeri e nel periblasto delle uova dei Pesci Ossei sono ammirevoli per rigore di metodo e sagacia di analisi. Egli portò in tutta la sua opera scientifica, com'ebbe a dire il Ramier, " saggezza e prudenza. "

« E questa prudenza encomiabilissima, lo fece essere uno dei pochi che resistettero alla invadente teoria cromosomica dell'eredità. In un libriccino pubblicato pochi anni or sono: *La vie Cellulaire* (1923), l'Henneguy esprime le sue riserve sul valore attribuito ai cromosomi nella trasmissione dei caratteri ereditarî, con argomenti che io reputo meritevoli della massima considerazione.

« Alla memoria di questo onesto e modesto lavoratore, che dedicò tutta la sua vita alla ricerca scientifica, vada il reverente saluto della nostra Accademia ».

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario prof. Parravano presenta i libri pervenuti in dono all'Accademia, segnalando le « Ricerche Sperimentali fatte nel 1926–1927 » nell'Istituto di Farmacologia della R. Università di Padova, diretto dal Socio L. Sabbatani.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Millosevich legge, a nome anche del Socio D'Achiardi, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di E Grill « La datolite di Toggiano ».

L'Assemblea approva.

CONCORSI A PREMI

ELENCO DEI CONCORRENTI
AI DUE PREMI DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
PER LE *SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE*

(Scadenza 31 dicembre 1926 — L. 5000 ciascuno)

1. Bigiavi Dino. — 1. « Reazioni del Nitrosile con i nitroderivati aromatici e con gli azossicomposti » (stamp.). – 2. « Relazione fra nitroderivati aromatici e azossicomposti » (stamp.). – 3. « Azione dell'acido peracetico ecc. » (stamp.). – 4. « Sopra i due P. Nitroazossibenzoli » (in collaborazione con *A. Angeli*) (stamp.). – 5. « Ricerche sopra la formazione delle arilnitrosoidrossilammine » (in collaborazione con *F. Franceschi*) (stamp.). – 6. « Ricerche intorno ad alcuni derivati del P. e dell'o– diossiazobenzene » (in collaborazione con *P. Guarducci*) (stamp.). – 7. « I due benzolazossi -p- toluoli isomeri » (in collaborazione con *B. Sabatelli*) (stamp.). – 8. « Derivati del benzolazopirogallolo » (in collaborazione con *G. Grechi*) (stamp.). – 9. « Di una osservazione di J. Barsilowski » (stamp.). – 10. « Notizia sulla formazione dei benzolazossi -p- fenoli » (stamp.).

2. Darbi Giulio. — 1. Estratto da « Annali di Matematica pura ed applicata » (stamp.). – 2. « Sulla riducibilità delle equazioni algebriche » (ms.).

3. Da Rios Sante. — 1. « Sulla sostentazione delle eliche con anello » (stamp.). – 2. « Sul campo delle pressioni determinato da un'elica rotante a punto fisso » (in collaborazione con *A. Vecello*) (stamp.). – 3. « Elica con anello a tubo addizionale ricurvo » (dattilogr.). – 4. « Scie e anelli verticosi » (dattilogr.). – 5. « Descrizione del trovato industriale avente per titolo: " Propulsore veicolo a risucchio e reazione " » (dattilogr.).

4. De Fazi Remo. — 1. « Studi intorno agli indoni » (Nota VIII) (stamp.). – 2. « Studi intorno agli indoni » (Nota IX, Sui trusconi) (stamp.) – 3. « Sulla fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio esposte all'azione dei raggi ultravioletti » (stamp.). – 4. « Fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua esposta alle radiazioni di una lampada a vapori di mercurio » (stamp.). – 5. « Fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua radioattiva » (dattilogr.). – 6. « Sintesi in chimica organica con l'energia raggiante III Agenaftene e aldeide benzoica » (dattilogr.).

5. Del Nunzio Balbino. — 1. « Misura dell'energia radiante mediantele forze Maxwell Bartoli » (stamp.). – 2. « La misura elettrica della velocità dell'acqua » (stamp.). – 3. « La misura della velocità dell'acqua alla parete delle condutture » (stamp.). – 4. « Nuovi esperimenti sulla relazione tra perdita di calore ed attrito superficiale nei condotti cilindrici » (stamp.). – 5. « Sulla radiazione ultravioletta delle lampade ad incandescenza » (stamp.). – 6. « Il coefficiente di diffusione delle pareti colorate e la tensione di alimentazione delle lampade ad incandescenza » (stamp.). – 7. « Le lampade ad arco di Tungsteno nel vuoto » (stamp.). – 8. « Il solido fotometrico delle superfici diffondenti » (stamp.). – 9. « Alcuni esperimenti di oscillografia catodica » (stamp.). – 10. « Relazione al Comitato Nazionale Scientifico Tecnico del viaggio d'istruzione a Parigi » (stamp.). – 11. « Le azioni elettromagnetiche dei conduttori sistemati nell'interno di masse ad alta permeabilità magnetica » (stamp.). – 12. « Sul potere moltiplicatore degli amplifica-

tori a resistenza » (stamp.). - 13. « La natura del campo elettrico nell'interno dei triodi ecc. » (stamp.). - 14. « Eccitazione del gas residuo dei triodi per mezzo di elettroni a bassa velocità » (stamp.).

6. Ducci Enrico. — 1. « Complementi di ciclometria » (stamp.).

7. Gallo Domenico. — 1. « Geometria dell'angolo e sue applicazioni » (stamp. e ms.).

8. Guareschi Giacinto. — « Sulle somme di prodotti di termini diuna progressione aritmetica » (stamp.). – 2. « Determinazione del quoziente e del resto della divisione ecc. » (stamp.). - 3. « Le funzioni simmetriche complete nella teoria dell'eliminazione ecc. » (stamp.). - 4. « Sulle somme di termini di uua progressione aritmetica » (ms.).

9. Malquori Giovanni. — 1. « Sulla dissociazione termica di alcuni cloroaurati » (in collaborazione con *N. Parravano*) (stamp.). – 2. « Cloruri doppi di cesio e tallio (trivalente) » (stamp.). - 3. « Comportamento termico delle pozzolane, e loro mareagibilità allo stato solido con alcuni ossidi e carbonati alcalino terrosi » (stamp.). – 4. « Gli alluminati di bario idrati. Il sistema Al_2O_3, BaO, H_2O a 20° » (stamp.). - 5. « Equilibri di riduzione del cloruro rameoso e del cloruro di piombo a mezzo dell'idrogeno » (in collaborazione con *N. Parravano*) (stamp.). - 6. « Il sistema $Al(NO_3)_3$ — — KNO_3 — $Fe(NO_3)_3$ — H_2O a 25° » (stamp.). - 7. « Il sistema $AlCl_3$ — — $FeCl_3$ — H_2O a 25° » (stamp.). - 8. « Il sistema $AlCl_3$ — KCl — HCl — — H_2O a 25° » (stamp.). - 9-11. « Il sistema $Al(NO_3)$ — KNO_3 — H_2O a 25° » (stamp.). - « Il sistema $AlCl_3$ — KCl — H_2O a 25° ». - « I sistemi $AlCl_3$ — HCl — H_2O — KCl — HCl — H_2O e KNO_3 — HNO_3 — H_2O a 25° » (stamp.). - 12. « Sugli idrati del nitrato di alluminio » (stamp.). - 13-14. « Il sistema $FE(NO_3)_3$ — $Al(NO_3)_3$ — H_2O a 25° » – « Il sistema $Fe(NO_3)_3$ — — KNO_3 — H_2O a 25° » (stamp.). - 15. « Sulle cause che determinano le influenze di solubilità fra nitrato di piombo e nitrati alcalini » (dattilogr.). - 16. « Dissociazione termica del nitrato di cadmio » (dattilogr.). – 17. « Sugli idrati dei nitrati di cadmio, zingo e magnesio » (dattilogr.). – 18. « Sulle miscele fuse di nitrato ammonico ecc. » (dattilogr.).

10. Mayer Giovanna. — 1. « Resistenza elettrica specifica di alcune amalgame di stagno » (stamp.). - 2. « Le proprietà fisiche delle leghe metalliche nei riguardi della loro costituzione » (stamp.). - 3. « Conducibilità elettrica nei solidi » (stamp.). - 4. « Sullo stato mesomorfo » (dattilogr.). – 5. « Sistemi elettrici di misura » (dattilogr.). – 6. « Commemorazione di A. Volta » (stamp.). – 7. « L'interferometro nella misura del diametro degli astri e della distanza fra stelle doppie » (stamp.).

11. Teofilato Pietro. — 1. « Le pressioni aerodinamiche ecc. » in « Collectanea aeronautica » (stamp.). – 2. « Sul profilo longitudinale dei tubi aerodinamici » in « Collectanea aeronautica » (stamp.). – 3. « Calcolo traiettoria ecc. » (stamp.). - 4. « Moto di un grave ecc. » (stamp.).

ELENCO DEI CONCORRENTI
AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
PER LE *SCIENZE NATURALI*

(Scadenza 31 dicembre 1927 — Premio L. 5000).

1. Bolzan Pio. — 1. « Flora della provincia di Savona » (ms.). – 2. Contributo alla Flora dell'Alto Adige » (stamp.). - 3. (Come sopra, Nota II) (stamp.). - 4. (Come sopra, Nota III) (ms.). - 5. « Ricerche botaniche nella Liguria occidentale » (Nota IV) (ms.).

2. Comez Salvatore. — 1. « Osservazioni ed esperienze sulla colonizzazione delle potenze rigenerative autonome ecc. » (dattilogr.). - 2. « Rigenerazione più volte ripetuta degli anfibi anuri e suoi effetti » (pubblicazione estera) (stamp.). - 3. « Sul concetto di cellula » (stamp.). – 4. « Embriologia, anatomia e fisiologia comparata » (stamp.).

3. D'Ancona Umberto. — 1. « Dell'influenza della stasi peschereccia del periodo 1914-18 sul patrimonio ittico dell'Alto Adriatico » (stamp.) - 2. « Contributo all'istofisiologia della fibra muscolare striata » (stamp.) – 3. « Sulla struttura e sulla contrazione della fibra muscolare striata » (stamp.). - 4. « Conclusioni che si possono trarre dall'osservazione del comportamento delle miofibrille nell'inanizione » (stamp.). – 5. « Osservazioni sull'azione del digiuno nell'anguille giovani » (stamp.). – 6. « Comportamento delle strutture istologiche nel digiuno sperimentale » (stamp.). – 7. « Sulla importanza degli equilibri biologici nella biologia marina ecc. » (stamp.) – 8. L'accrescimento dell'alosa nel Tevere » (stamp.). – 9. « Ricerche sulla riproduzione dell'alosa finta » (stamp.). - 10. « Ricerche sull'ingrandimento dell'occhio dell'anguilla ecc. » (stamp.). - 11. « L'influenza della concentrazione sulla perdita in peso di giovani anguille ecc. » (stamp.). – 12. « Sul valore sistematico delle unità morfologiche di numero variabile ed in particolare sulla sistematica delle Alose mediterranee » (stamp.). - 13. « Murenoidi del Mar Rosso (atlante allegato) » (stamp.). - 14. « Il problema dell'accrescimento dei pesci studiato sulla alosa finta del Tevere » (stamp.).

4. Gatti Alessandro. — 1. « La percezione dei rapporti spaziali nei complessi visivi » (stamp.).

5. Massarza Adolfo. — 1. « Gli ordinamenti cellulari del midollo spinale umano » (dattilogr.).

6. Mola Pasquale. — 1. « Pesca ed ambiente peschereccio delle acque dolci della Sardegna » (stamp.). – 2. « Importanza dell'acquicoltura e suo sviluppo in riguardo alla pesca » (stamp.). – 3. « Per una classifica di cestodi » (dattilogr.).

7. Parlati Luigi. — 1. « Ricerche analitiche sulle terrecotte antiche » (stamp.). – 2. Per la industrializzazione della Basilicata » (stamp.). - 3. « Sulle differenze presentate nella composizione chimica dai mieli primaverili ed autunnali » (dattilogr.). – 4. « L'antracite di La Thuile » (dattilogr.) – 5. « Sulle possibili differenze presentate nella composizione chimica da alcuni tipi commerciali di miele » (dattilogr.)

8. Pasquini Pasquale. — 1. « Per una maggiore conoscenza della pesca Adriatica e insulare » (stamp.). - 2. « Contributo alla conoscenza dello sviluppo del pettine nell'occhio degli uccelli » (stamp.). – 3. « Sulla struttura del pettine ecc. » (stamp.). - 4. « Mancata chiusura del blatosforo ecc. » (stamp.). - 5. « Ricerche di embriologia sperimentale sugli echinodermi » (stamp.). - 6. « Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari ecc. » (stamp.). - 7. « Ricerche di embriologia sperimentale sui trapianti omeoplastici ecc. » (stamp.). – 8. « La capacità Lentogena della vescicola ottica ecc. » (stamp.). - 9. « Sul trapianto dell'occhio sui vertebrati ecc. » (stamp.).

9. Police Gesualdo. — 1. « Gli elementi visivi e le fibre radiali ecc. » (stamp.). - 2. « Sull'apparato buccofarnigeo ecc. » (ms).

10. Ranfaldi Francesco. — 1. « Sullo zolfo rombico dell'isola di Vulcano » (stamp.).

11. Rizzatti Ferruccio. — 1. « Botanica per tutti » (stamp.) – 2. « Nel regno delle piante » (stamp.).

12. Tramontano Guerritore. — 1. « Significato della molteplicità delcanale dell'ipoglosso nei crani ecc. » (stamp.). – 2. « Le superfici articolari per la colonna cervicale ecc. » (stamp.). – 3. Pneumatizzazione delle piccole ali ecc. » (stamp.). – 4. « L'unione atlo-occcipitale » (stamp.). – 5. « Sopra il comportamento della seconda cervicale ecc. » (stamp.). - 6. « Il significato dei canali basilari ecc. » (stamp.).

13. Valbusa Uraldo. — 1. « Il ghiacciaio della Brenva » (stamp.). - 2. I battimenti acustici nell'orrido di Pré St. Didier in Valle d'Aosta » (stamp.).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 marzo 1928

ALDRICH J. M. — Redescription of Types of American Muscoid Flies in the Collection of the Vienna Natural History Museum with Incidental Notes. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-35.

BATTAGLIA M. — Eumycetom der Schleimhaut des Gaumens. (Sonderabd. aus « Centralblatt für Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten ». B. 105, pp. 407-411). Jena, 1928. 8°.

Calendario Astronomico per l'anno 1928 del R. Osservatorio Astronomico « Vincenzo Cerulli » Collurania. Teramo, 1927. 8°, pp. 1-117.

FOSHAG W. F. and HESS F. L. — Rossite and Metarossite; two new Vanadates from Colorado. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-12.

GARCIA G. — Teoria general de la flexión de las vigas. Lima, 1927. 8°, pp. 1-21.

HILDEBRAND S. F. — Sex Ratio in Gambusia. (Reprint. from « Biological Bulletin ». Vol. LIII, pp. 300-404). s. l. 1927. 8°.

JENNINGS H. S. — The Inheritance of acquired Characters. (Reprint. from the « Forum a Magazine of Controversy »). New York, 1926. 8°, pp. 1-10.

KLEIN F. — Matemática Elemental. Vol. I. Madrid, 1927. 8°, pp. I-IV, 1-369.

LA FACE L. e SELLA M. — La zooprofilassi nella lotta antimalarica secondo le concezioni di B. Grassi. (Estr. dalla « Rivista di Malariologia ». Anno VI, 1927). Roma, 1928. 8°, pp. 1-11.

LECAT M. — L'Azéotropisme dans les systèmes binaires alcools-halogénures. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tome XLVII, pp. 39-62). Paris, 1927. 8°.

LECAT M. — L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant une amide. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tome XLVII, pp. 87-97). Paris, 1927. 8°.

LECAT M. — Nouveaux Azéotropes binaires Liste V, VIII (Extr. de « Recueil de Travaux Chimiques des Pays-Bas ». T. 46, 47, pp. 240-247; 13-18); VI, VII, IX (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tome XLVII, pp. 63-71, 108-114, 129-188). Louvain, Paris, 1927. 8°.

MAST S. O. — Reactions to light in Volvox, with special reference to the process of orientation. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für vergleichende Physiologie ». B. IV, Heft V, pp. 637-658). Berlin, 1926. 8°.

MÉMERY H. — Contribution a l'étude des variations périodiques de la température, leur cause probable. Paris, 1921. 8°, pp. 1-5.

MÉMERY H. — Les causes des phénomènes météorologiques sont-elles terrestres ou solaires ? (Extr. du « Bulletin de l'Observatoire de Talence ». N. 1, 1928). Bordeaux, 1928. 8°, pp. 1-4.

MÉMERY H. — Notes sur la recherche des périodes météorologiques analogues aux périodes solaires. (Extr. du « Bulletin de la Société Astronomique de Bordeaux ». 1926). Bordeaux, 1926. 8°, pp. 1-9.

MÉMERY H. — Nouvelles recherches sur les variations périodiques des taches solaires indépendantes de la période undécen

nale. (Extr. des « Compte-rendu au Congrès de Liege ». 1924). Paris, 1924. 8°, pp. 1-4.

MÉMERY H. — Sur certaines périodicités des taches solaires indépendantes de la période undécennale. (Extr. de « Compte-rendu du Congrès de Bordeaux ». 1923). Paris, 1923. 8°, pp. 1-5.

MERRILL G. P. — On Newly Discovered Meteoric Irons from the Wallapai (Hualapai) Indian Reservation Arizona. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 72). Washington, 1927. 8°, pp. 1-4.

NILSSON G. — Die Ursache des Sonnenlichts und der Sonnenwärme. Kopenhagen, 1928. 8°, pp. 1-8.

NÖRLUND (VON) N. E. — G. Mittag-Leffler. (Abdr. aus « Acta mathematica ». B. 50). Uppsala, 1927. 4°, pp. 1-23.

PASTEUR R. J. — Los Matemáticos Españoles del siglo XVI. Madrid, 1926. 8°, pp. 1-162.

PEARL R. — Differential Fertility. (Reprint. from the « Quarterly Review of Biology ». Vol. II, pp. 102-118). s. l. 1927. 8°.

PEARL R. — Simposium on Growth in Health and Disease. (Reprint. from the « American Naturalist ». Vol. LXI, pp. 113-131). s. l. 1927. 8°.

PEARL R. — The Constitutional Factor in Breakdown of the Respiratory System. (From « Annals of Eugenics ». Vol. II). Cambridge, 1927. 4°, pp. 1-24.

PEARL R. — The Graphic Representation of Relative Variability. (Reprint. from « Science ». Vol. LXV, pp. 237-241). s. l. 1927. 8°.

PEARL R. and ALLEN A. L. — Notes on the Growing of Seedlings for Physiological Experimentation. (Repr. from the « Proceedings of the Society for Experimental Biology and Medicine ». Vol. XXIV, pp. 439-444). s. l. 1927. 8°.

PEARL L. and LATIMER BACON A. — Biometrical Studies in Pathology. (Reprint. from the « Archives of Pathology and Laboratory Medicine ». Vol. III. pp. 963-992). Chicago, 1927. 8°.

PEARL R. and PARKER S. L. — Experimental Studies on the Duration of Life, XI. Density of Population and Life Duration in Drosophila. (Reprint. from the « American Naturalist ». Vol. XLI. pp. 289-318). s. l. 1927. 8°.

PEARL R. and RICE MINER J. — A Biometric Study of the Relative Cell Volume of Human Blood, in Normal and Tuberculous Males. (Reprint. from « Bulletin of the Johns Hopkins Hospital ». Vol. XL. pp. 3-32). s. l. 1927. 8°.

REIS VARELA J. — As comunicaçoes com os astros. Lisboa, 1924. 8°, pp. 1-84.

SABBATANI L. — Ricerche sperimentali fatte nel 1926-1927. Vol. XXI. Padova, 1927. 8°.

SELLA M. — I pesci larvifagi e l'esperimento di campagna antimalarica con le Gambusie a Rovigno d'Istria. (Estr. dalla « Rivista di Malariologia ». Anno VI, fasc. VI). Roma, 1928. 8°, pp. 1-13.

STEJNEGER L. — The Green pit Viper, Trimeresurus gramineus, in China. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1927. 8°, pp. 1-10.

TEJERA D. V. — Discurso pronunciado por el Dr. Diego Vicente Tejera en la festa de la maternidad el dia 5 de Diciembre de 1927. Matanzas, 1927. 8°, pp. 1-15.

VIVANTI G. — Elementi della teoria delle funzioni analitiche e delle funzioni trascendenti intere. Ed. II. Milano, 1928. 12° pp. I-XII, 1-425.

WENGER A. M. — Phenomenos luminosos terrestres como provas do movimento da terra no espaço. Bello Horizonte, 1927. 8°, pp. 1-16.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 marzo 1928 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia fisica. — *Sulla estinzione atmosferica a Roma.* Nota presentata [1] dal Corrisp. E. Bianchi.

In questi « Rendiconti » [2] il dott. Andrissi ha recentemente pubblicato una Nota dal titolo *Sull'assorbimento della luce stellare nella atmosfera di Roma,* che ha bisogno di alcune dilucidazioni, di una specialmente.

Io non intendo certo di fare qui un esame a fondo della Nota dell'Andrissi; anche perchè difficile sarebbe il farlo mancando in essa la specificazione di taluni dati fondamentali, indispensabili per una discussione dei risultati. Mancano, ad esempio, i valori delle distanze zenitali alle quali furono fatte le diverse osservazioni; distanze zenitali riportate sempre nelle loro comunicazioni da tutti gli autori che hanno trattato l'argomento in passato. Così non intendo discutere i dati numerici della penultima colonna della tabella riassuntiva; i valori singoli, cioè, del coefficiente ρ per il quale dovrebbe moltiplicarsi la estinzione del Müller per Potsdam onde averne quella valevole per Roma.

Ciò che intendo discutere è la conclusione del lavoro dell'Andrissi; vale a dire l'affermazione colla quale egli chiude la sua Nota. Scrive l'Andrissi: *dalla media delle suesposte osservazioni risulta per* ρ *il valore 1.90 che si accorda con il valore trovato dal prof. Armellini (1.96) e quindi quasi doppio di quello dato dal prof. Bianchi (1.02).*

(1) Nella seduta del 18 marzo 1928.
(2) Vol. VII, fasc. 1, 1928, p. 61.

In altre parole questo è detto: mentre il Bianchi colle sue osservazioni fatte a Collegio Romano trova una estinzione praticamente identica a quella di Potsdam, Andrissi, in pieno accordo con Armellini, ne trova una che invece è doppia di quella.

Vien fatto naturalmente di domandarsi se sia logico questo confronto; ed è ben facile affermare di no; che, cioè, trattasi di osservazioni e di risultati assolutamente incomparabili fra loro. Basta per ciò aver presente tutta la letteratura, (almeno quella italiana), in proposito.

Le osservazioni dell'Armellini infatti sono tutte fatte in estate, quelle dell'Andrissi per metà circa in primavera-autunno e per metà circa in estate; le une e le altre sono spinte sino a 80° di distanza zenitale ed anche più. Le mie invece sono invernali e limitate deliberatamente sino a soli 61° gradi di distanza zenitale.

Queste diversità di stagione e sopratutto di limite nella distanza zenitale sono precisamente le ragioni precipue della diversità dei risultati; cosa del resto ben nota a tutti coloro che conoscono le ricerche fatte in Italia sul fenomeno della estinzione atmosferica.

Nel comunicare, nelle « Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani » [1], le mie osservazioni sulla estinzione a Roma, ecco come concludevo la mia Nota: « Le osservazioni qui trattate dimostrano che per Collegio Romano, benchè situato nel centro della città, per l'epoca autunno-inverno e nella direzione di tramontana può ritenersi la estinzione, fino a circa 61°, come praticamente identica a quella di Potsdam ».

Vale a dire, che io, nel concludere i miei risultati, ho ben posto mente a precisare tre circostanze precipue: 1° che essi valevano per la stagione invernale; 2° per la direzione nord; 3° per distanze zenitali non oltre i 61° circa; limite questo, come ho già detto, deliberatamente impostomi, convinto come ero e come sono, che al di là di esso (*a meno di cielo eccezionalissimamente sereno*) tutto è da aspettarsi ovunque in fatto di anomalie perturbatrici delle osservazioni.

Quelle mie riserve trovarono subito piena e ben autorevole conferma in uno studio del fenomeno della estinzione fatto, con precisazione di dati e di concetti davvero perfetta, da parte del collega prof. Azeglio Bemporad [2], pubblicato pressochè simultaneamente alla mia Nota e scritto dal Bemporad ignorando ancora completamente i miei risultati.

Con questo lavoro, e con un altro sullo stesso argomento, edito circa tre anni dopo [3], il Bemporad arrivava a conclusioni così importanti nei riguardi delle diverse anomalie che accompagnano, anzi determinano, le variazioni nella estinzione atmosferica, da rendere le sue ricerche indispen-

(1) Anno 1915, p. 120.
(2) Anno 1915, p. 135.
(3) Anno 1918, p. 94.

sabili a conoscersi da chi si accinga a trattare questo campo di indagini. Indagini che riflettono un fenomeno quanto mai soggetto alle mille cause che concorrono e perturbare i risultati.

Quali le conclusioni del Bemporad? Sebbene del tutto note e presenti a chi abbia famigliarità col materiale bibliografico, sono queste:

1° Che l'ammontare della estinzione differenziale risulta pressochè identico a quello concluso dal Müller per Potsdam quando trattasi di osservazioni fatte nella stagione invernale; mentre *può* salire al doppio, al triplo ed anche più di detto valore per osservazioni fatte in estate;

2° Che interviene, a perturbare i risultati, anche il noto fenomeno di Purkinje;

3° Che anche si aggiunge quello dell'assorbimento selettivo.

Crediamo di poter aggiungere una quarta specificazione nostra, del resto già sopra accennata, e cioè:

4° Che per osservazioni fatte a forti distanze zenitali dobbiamo aspettarci anomalie di estinzione gravi o gravissime e di ammontare assolutamente imprevedibile, *a meno non trattisi di misure eseguite nelle rare notti che possono chiamarsi assolutamente e rigorosamente serene.*

Lasciando da parte le circostanze di cui ai capoversi 2° e 3°, già compiutamente trattate dal Bemporad nei due suoi lavori ricordati, e limitandoci a tener presente solo quelle di cui ai capoversi 1° e 4°, possiamo dunque dire:

a) che non si possono paragonare fra loro risultati sulla estinzione atmosferica derivanti da osservazioni fatte in stagioni diverse; tanto meno poi è permesso fare delle medie fra estinzioni invernali ed estinzioni estive allo scopo di trarne i valori medi del coefficiente ρ da usarsi localmente per tutto l'anno;

b) che non si possono paragonare fra loro valori della estinzione risultanti da osservazioni fatte a limiti massimi di distanza zenitale fra loro sensibilmente diversi; e ciò tanto meno quando, in uno dei due casi considerati, sieno state invase le distanze zenitali di forte ammontare, dell'ordine, cioè, di circa 70-80°;

c) che per uno studio dell'andamento locale della estinzione per distanze zenitali forti è assolutamente indispensabile rinunciare a tutte quelle notti nelle quali non possa dirsi essere il cielo eccezionalmente e sicuramente sereno fino all'orizzonte.

Della seconda di queste tre contingenze sperimentali ben si era reso conto esatto il collega Armellini riferendo su questi « Rendiconti » [1] circa le sue osservazioni del 1917 in confronto delle mie del 1913-14, là dove scriveva (a proposito del coefficiente $\rho = 1.02$ da me concluso e di quello $\rho = 1.96$ derivato dalle sue misure):

(1) Vol. XXVII, 1918, p. 83.

« Anzi il prof. Bianchi, osservando d'inverno e dalla parte di tramontana, dove il cielo di Roma è trasparentissimo, ottenne $\rho = 1.02$. Io sono quindi condotto ad avanzare l'ipotesi che la trasparenza dell'atmosfera di Roma non sia proporzionale a quella di Potsdam. Nelle regioni zenitali, studiate specialmente dal Bianchi, i due valori sarebbero presso a poco uguali, sopratutto nell'inverno e dal lato nord; più in basso invece (forse a causa del pulviscolo urbano) l'estinzione a Roma è circa doppia della corrispondente di Potsdam, come mostrano le mie osservazioni. È questa una irregolarità notevolissima che sarebbe bene approfondire con nuovi studi ».

Fin qui l'Armellini. Ma debbo a ciò aggiungere però, con riferimento alla contingenza sperimentale *c*) da me sopra specificata, essere mia ferma convinzione che anche al di là di 60–65° di distanza zenitale, *se si osserva soltanto nelle notti decisamente serene,* si troverà di certo estinzione praticamente identica a quella di Potsdam; una estinzione, però, la quale, come già dissi, potrà saltare anche rapidamente ed improvvisamente a valori accentuati e capricciosi sol che intervenga comunque un peggioramento, anche lievissimo, nelle condizioni di serenità.

Questa mia convinzione, più che di misure fotometriche differenziali, è il frutto di quanto hanno in me indotto migliaia di osservazioni di pianeti e comete fatte a Roma nei molti anni passati a Collegio Romano.

Quando il cielo era veramente ed indiscutibilmente sereno giù, giù sino all'orizzonte, mai ebbi a notare quella differenza sistematica, nella grandezza delle stelle osservate, di un grado in più di quanto era da aspettarsi e come avrebbe dovuto verificarsi ammettendo, sugli 80° gradi di distanza zenitale, una estinzione doppia di quella normale; ma bastava che il cielo fosse all'orizzonte o leggerissimamente fosco, od anche allo sguardo non perfettamente limpido, per constatare nell'astro studiato e nella stella di confronto tutte le possibili anomalie di splendore, aggravantisi o migliorantisi rapidissimamente in concordanza con minime variazioni nel tipo della serenità. La stessa cosa mi accade qui a Milano.

La questione della estinzione per forti distanze zenitali è dunque questione assai ardua a risolversi in numeri. Una sua valutazione numerica implica di studiarla soltanto nelle poche notti che a ciò fare si prestano; tutte le osservazioni fatte anche in parziale o tenue disobbedienza a questa norma fondamentale non possono condurre che a risultati degni soltanto di una fiducia molto e molto riservata.

Ecco perchè il Müller osservò soltanto in notti di ottimo sereno; ed ecco perchè non condivido l'opinione di chi crede potersi usare valori diversi da quelli di Potsdam in corrispondenza a serate che l'Andrissi definisce « comuni », e che in verità sono serate di serenità non sicura, per le quali quindi a forti distanze zenitali sono certe delle perturbazioni imprevedibili, non precisabili, e non certo eliminabili con l'assunzione di valori medi del coefficiente ρ.

Un'ultima considerazione ed una proposta. In molti Osservatorii nostri è stata studiata la estinzione locale, però quasi sempre invadendo limiti troppo accentuati della distanza zenitale. Io penso sarebbe bene rinnovare le misure, ma con nuove determinazioni divise in due fasi distinte. Occuparsi dapprima della estinzione sino ad un massimo di 65°, restando, cioè, entro i limiti nei quali comunemente si osserva; indagare poi in un secondo tempo la estinzione per distanze zenitali maggiori. Quasi certamente si arriverà alla conclusione che, mentre per distanze zenitali normali vige ovunque la legge empirica di Potsdam o presso a poco, per distanze zenitali accentuate invece meglio sia non fare della fotometria di precisione, a meno di cielo eccezionalmente limpido.

Astrofisica. — *Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1927.* Nota [1] del Corrisp. G. Abetti.

I risultati delle osservazioni eseguite ad Arcetri ed a Madrid durante il 1927 per l'altezza della cromosfera solare, misurando l'altezza della riga H_α invertita con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo sono i seguenti:

Altezza media della cromosfera nel 1927

+ 90° N	+ 60° E	+ 30° E	0° E	− 30° E	− 60° E	− 90° S	− 60° W	− 30° W	0° W	+ 30° W	+ 60° W	Media
				Arcetri								
10″.4	10″.0	10″.5	10″.3	10″.4	10″.4	10″.2	10″.3	10″.6	10″.5	10″.3	9″.9	10″.33
				Madrid								
9 .7	9 .9	10 .6	10 .7	11 .1	10 .7	10 .3	9 .9	9 .9	9 .4	9 .8	9 .5	10 .14

Le osservazioni di Arcetri si basano su 96 giorni di osservazioni (osservatori: G. Abetti e P. Cipriani) da cui sono state tolte alle varie latitudini le altezze che risultavano perturbate per la presenza di protuberanze. A Madrid i giorni di osservazione sono stati 59 e col 1° gennaio 1927 è stato posto in uso dal prof. P. Jimènez uno spettroscopio Zeiss, identico a quello usato in Arcetri, in unione all'equatoriale di Grubb di 20 cm. di apertura e 3 m. di distanza focale, mentre in Arcetri l'equatoriale è quello

(1) Presentata nella seduta del 18 marzo 1928.

di Amici, coll'obbiettivo di 36 cm. di apertura e 5.40 metri di distanza focale. Le osservazioni di Arcetri danno un generale abbassamento della cromosfera da 10″.8 per il 1926 a 10″.3 per il 1927, quelle di Madrid da 10″.4 per il 1926 a 10″.1 per il 1927, in media quindi si può concludere un abbassamento medio della cromosfera dal 1926 al 1927 di 0.″4. Anche le osservazioni di Catania [1] confermano questo risultato ma in misura molto più forte (da 9″.9 ad 8″.5), e come se la diminuzione fosse rapidamente avvenuta dopo il primo trimestre del 1927.

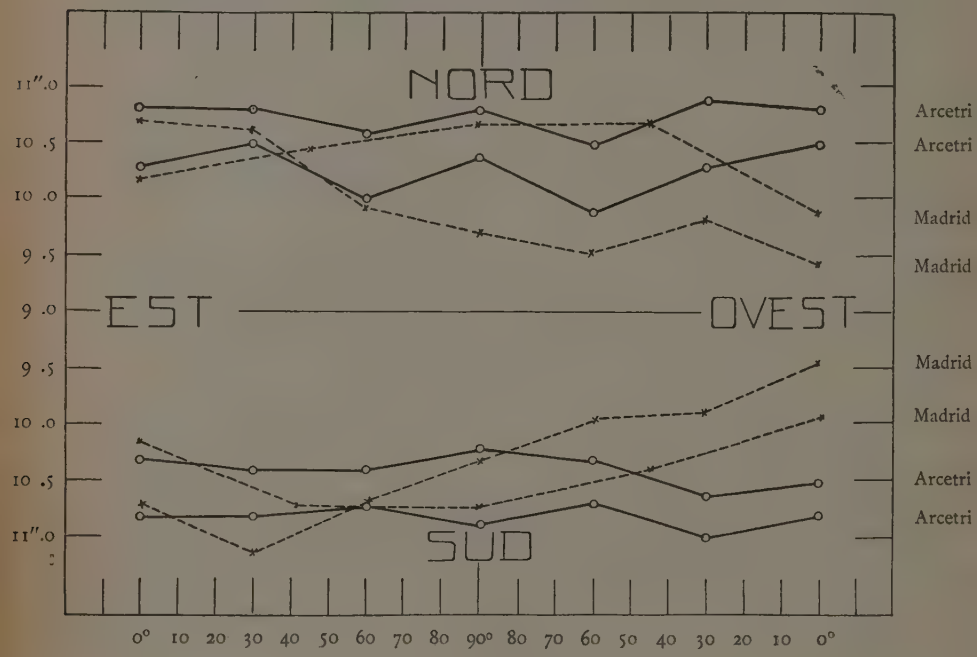


Fig. 1.

L'altezza alle varie latitudini risulta per Arcetri, come pel 1926, sensibilmente costante, forse con una lieve diminuzione, specie nell'emisfero sud, ai poli (fig. 1). L'altezza, dedotta dalle osservazioni di Madrid, risulta massima attorno all'equatore est e mostra chiaramente un abbassamento ai poli rispetto alle analoghe osservazioni del 1926. Le divergenze fra Arcetri e Madrid sono piuttosto notevoli, probabilmente per le ragioni accennate nella Nota precedente [2]. Altre differenze sistematiche non dovrebbero esi-

(1) G. A. Favaro e Rausi, *L'attività del sole nell'anno 1927*. «Pubbl. dell'Osservatorio di Catania», 1928.

(2) «Rendiconti R. Accademia dei Lincei», vol. V, p. 620, maggio 1927.

stere, perchè in occasione di una visita da me fatta a Madrid nel settembre scorso, potei fare col prof. Jimènez qualche osservazione comparativa, trovando dalle sue e dalle mie misure valori concordanti.

Si possono combinare le osservazioni di Arcetri e di Madrid in un solo quadrante perchè risulti più evidente l'andamento dell'altezza dai poli all'equatore e la differenza fra il 1926 e 1927. Applicando alle osservazioni di Madrid la differenza sistematica + 0″.25, per ridurle a quelle di Arcetri, e ricordando che nel 1926 le misure erano ancora eseguite a Madrid di 45° in 45°, si ha il seguente risultato.

Altezza della cromosfera dalle osservazioni combinate di Arcetri e Madrid

Anno	90°	60°	45°	30°	0°	
1926	10″.85	10″.63	—	10″.88	10″.80	Arcetri
	10 .95	—	10″.82	—	10 .27	Madrid
1927	10 .30	10 .15	—	10 .45	10 .40	Arcetri
	10 .25	10 .28	—	10 .61	10 .32	Madrid

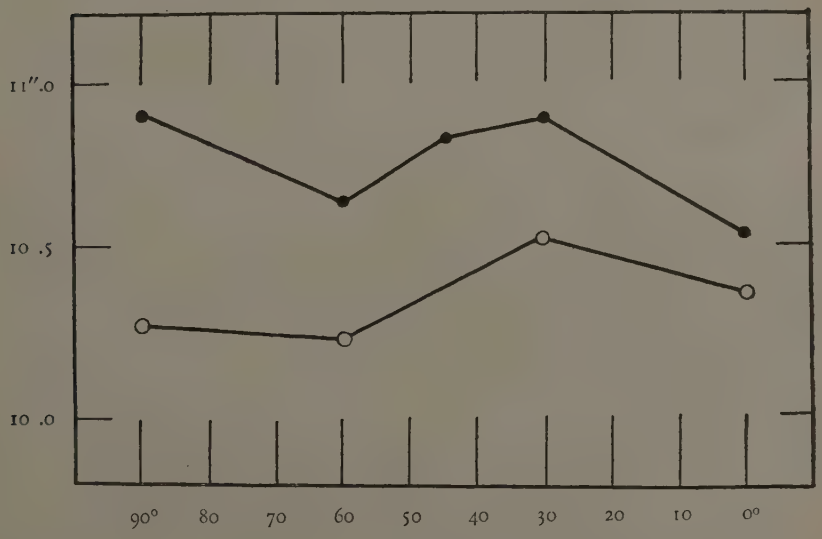


Fig. 2.

Con questi dati è stato tracciato il grafico (fig. 2) che presenta un andamento dell'altezza, dai poli all'equatore, molto simile nelle due annate e che conferma l'abbassamento generale dal 1926 al 1927 ed il probabile lieve abbassamento ai poli. Inoltre un minimo alla latitudine 60° ed un massimo a 30° risultano bene definiti.

Se si confrontano queste curve con quelle delle aree delle protuberanze dedotte dalle osservazioni di Arcetri [1], si nota come il massimo ed il minimo trovato nell'altezza della cromosfera, tanto per il 1926 che per il 1927, corrispondano al massimo ed al minimo principale delle aree che si trovano per ambedue gli anni rispettivamente all'incirca alle stesse latitudini. Il massimo secondario delle aree delle protuberanze si è spostato, da 70° nel 1926, ad 80° nel 1927 ed è diminuito notevolmente in valore assoluto, anche questo in accordo con il probabile lieve abbassamento della cromosfera ai poli.

La generale attività della cromosfera, dedotta dall'area totale delle protuberanze, e sempre dalle sole osservazioni di Arcetri, risulta diminuita di 250 unità di protuberanza dal 1926 al 1927, ciò che pure concorda con il generale abbassamento dell'altezza della cromosfera sopra trovato.

Ho già detto, nelle precedenti Note su questo argomento, che per arrivare ad una conclusione sulle supposte variazioni di altezza della cromosfera bisogna attendere la fine del presente ciclo di attività, tuttavia, in via preliminare e di ipotesi, a seguito delle precedenti osservazioni, cominciate appunto in epoca di minimo, si può pel momento concludere quanto segue.

Il fenomeno delle protuberanze, e le sue vicende durante il ciclo, sembra essere in certo qual modo dipendente o collegato con quello dell'altezza della cromosfera, nel senso che mentre le zone delle protuberanze di alta latitudine trasmigrano nel corso del ciclo (dal minimo al massimo) da ± 50° ai poli, con una generale diminuzione della loro area complessiva, l'altezza della cromosfera da un massimo ai poli, che sembra abbia luogo in corrispondenza del minimo di attività solare, va abbassandosi e lentamente conguagliandosi all'arrivo delle protuberanze.

La zona di protuberanze a bassa latitudine segue nella sua attività quella delle macchie e la loro massima altezza e frequenza verso ± 30° influenza, in epoca di massimo, anche l'altezza della cromosfera che in corrispondenza è pure massima.

Le riduzioni definitive, completate dalle osservazioni delle altre stazioni, verranno date, come di solito, nelle pubblicazioni dell'Osservatorio di di Arcetri.

(1) « Pubbl. dell'Osservatorio di Arcetri », fasc. 44, 1927, p. 61, e le osservazioni del 1927, non ancora pubblicate.

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.* – XI. *Solfati di cerio (ceroso) e rubidio* [1]. Nota [2] del Socio F. Zambonini e di Silvia Restaino.

I solfati doppî del cerio ceroso e del rubidio non sembra, almeno per quanto ci è noto, che abbiano formato oggetto di particolari indagini. Nella presente Nota, che forma la continuazione delle nostre precedenti ricerche sui solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini [3], daremo conto dei risultati da noi ottenuti nello studio, parziale, del sistema $Ce_2(SO_4)_3 — Rb_2SO_4 — H_2O$, come al solito per l'isoterma di 25°.

I risultati ai quali siamo pervenuti, operando come è stato già descritto in precedenti lavori, sono riuniti nella seguente tabella.

Tabella I.

Numero della esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	Rb_2SO_4	$Ce_2(SO_4)_3$	H_2O	$\frac{Rb_2SO_4}{H_2O}$	Ce	Rb	SO_4	H_2O	$\frac{Ce_2(SO_4)_3}{Rb_2SO_4}$	
1	34.38	—	65.62	0.52	30.78	23.28	44.60	1.34	1.73	$I — I — 2 + Rb_2SO_4$
2	25.89	—	74.11	0.35	31.58	20.14	44.23	4.05	1.95	
3	23.04	0.02	76.94	0.30	31.57	20.08	44.45	3.90	1.91	
4	20.07	0.06	79.87	0.25	31.72	20.19	44.10	3.99	2.01	
5	15.03	0.04	84.93	0.18	31.81	19.89	44.51	3.79	1.96	$I — I — 2$
6	10.13	0.05	89.82	0.11	32.01	19.48	44.28	4.23	2.05	
7	10.16	0.07	89.77	0.11	32.09	19.42	44.34	4.15	2.05	
8	5.14	0.08	84.78	0.06	32.24	19.30	44.44	4.02	2.07	
9	1.27	0.38	98.35	0.01	33.97	17.83	44.31	3.89	2.48	
10	0.89	3.26	95.85	0.01	34.17	16.35	41.21	5.27	2.73	$I — I — 2 + Ce_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$
11	0.80	6.69	92.51	0.01	34.38	16.01	44.39	5.22	2.76	

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) Si vedano le varie Note di Zambonini e Carobbi, Zambonini e Caglioti, Zambonini e Restaino, Zambonini e Stolfi, pubblicate nei « Rendiconti » di questa Accademia a partire dal 2° semestre del 1924.

Composizione teorica dei composti ottenuti

	Ce	Rb	SO_4	H_2O
$Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 2H_2O$	32.17	19.61	44.08	4.14

Dalla Tabella I e dalla fig. 1 risulta chiaramente, che nelle nostre condizioni sperimentali si forma un solo composto, $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 2H_2O$ ovvero 1 — 1 — 2.

Questo sale si è ottenuto sempre sotto forma di polvere microcristallina, che al microscopio si presenta costituita da minutissimi granuletti cristallini, senza nitidi contorni, a birifrangenza abbastanza viva.

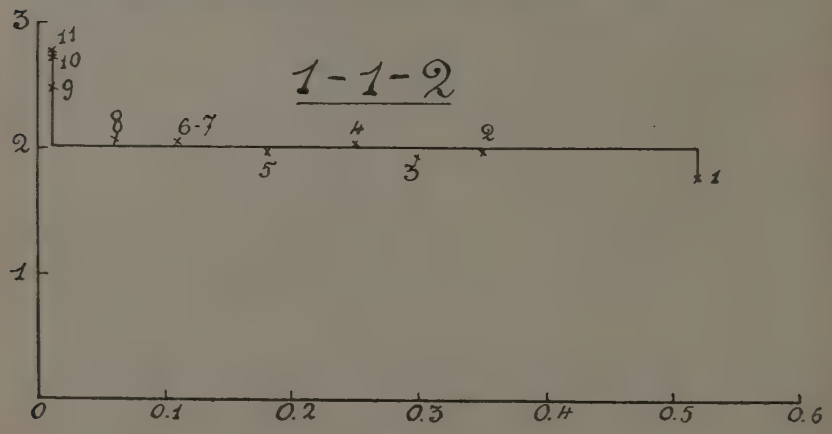


Fig. 1.

Il composto 1 — 1 — 2 possiede un vasto campo di esistenza, poichè alla temperatura di 25° è stabile, puro, in contatto di soluzioni che contengono da 34 % Rb_2SO_4 e niente solfato ceroso, a 1.3 % Rb_2SO_4 e 0.2 % $Ce_2(SO_4)_3$.

Come contributo allo studio dei solfati doppi del cerio ceroso e del rubidio, ricorderemo brevemente che, nel corso di tentativi eseguiti per ottenere il sale 1 — 1 — 2 in cristallini determinabili al goniometro, operando a temperature diverse da quella di 25°, abbiamo preparato due altri sali doppi, rispondenti, rispettivamente, alle formole $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$ — — 1 — 1 — 8 e $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4$ o 1 — 1 — 0.

Il composto $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$ che rappresenta il tipo 1 — 1 — 8 già ben noto da lungo tempo tra i solfati doppi dei metalli delle terre rare con i metalli alcalini, si è formato in nitidi cristallini, lasciando evaporare, alla temperatura di circa 10° C, delle soluzioni contenenti solfato ceroso e

solfato di rubidio nelle proporzioni (molecolari) di 1 : 4. L'analisi ha dato Ce 28.93 %; H_2O 14.57 %, mentre la formula 1 — 1 — 8 richiede 28.63 % Ce e 14.71 % H_2O.

I cristalli da noi ottenuti presentano un particolare interesse, per il fatto che, contrariamente a quanto abbiamo avuto occasione di osservare quasi sempre nei composti analoghi, (110) : (1$\bar{1}$0) ha un valore molto prossimo a quelli trovati da E. H. Kraus, da Wyrouboff e da Morton nei solfati doppî del lantanio, del cerio ceroso e del didimio con l'ammonio, rispondenti alla formula 1 — 1 — 8. Il prisma {110} nel solfato doppio di cerio ceroso e rubidio 1 — 1 — 8 non è, perciò, sostituito, almeno nei cristalli da noi studiati, da faccette vicinali. Non abbiamo mai osservato, invece il pinacoide {100}: esso è costantemente rimpiazzato da diversi prismi {h k o} (in uno stesso cristallo se ne sono trovati ben cinque diversi), i quali solo in parte hanno il carattere di faccie tipiche, mentre sovente possiedono simboli complicati, e rappresentano, perciò, sicuramente delle facce vicinali. I simboli che possiamo ritenere come corrispondenti a forme tipiche sono {540}, {310}, {510}: alcune faccette hanno una posizione intermedia fra {410} e {510}, ma piuttosto che come un altro prisma {920} vanno, a nostro avviso, considerate come appartenenti ora all'uno ora all'altro dei due prismi a simbolo semplice {410} e {510}. Di prismi tipici {o k l} erano sempre presenti {011} e {012}, dei quali il primo è costantemente più esteso. {011} è molto di frequente accompagnato da una vicinale, di posizione prossima a quella che spetta alle faccie di simbolo {056}.

Nella seguente tabella sono riuniti gli angoli misurati e quelli calcolati in base alle costanti

$$a : b : c : = 0.3479 : 1 : 0.9181 = 96° 7'$$

(010) : (110) = 70° 55′	misurato	70° 55′	calcolato
(110) : (1$\bar{1}$0) = 38° 10′	»	38° 10′	»
(010) : (540) = 74° 24′	»	74° 32′	»
(010) : (310) = 83° 41′	»	83° 25′	»
(010) : (410) = —	»	85° 3½′	»
(010) : (510) = 86° 4′	»	86° 2½′	»
(010) : (011) = 47° 36½′	»	47° 36½′	»
(011) : (01$\bar{1}$) = 95° 13′	»	95° 13′	»
(010) : (012) = 65° 20′	»	65° 28′	»
(010) : (056) = 52° 34′	»	52° 44′	»
(110) : (011) = 72° 52′	»	72° 51′	»
($\bar{1}$10) : (011) = 81° 37′	»	81° 36′	»

L'*habitus* dei cristalli è il solito da noi molte volte descritto, e corrisponde, per lo più, alla fig. 3 di un nostro precedente lavoro [1]; talvolta si ha un allungamento un po' maggiore nella direzione dell'asse verticale. Anche l'orientazione ottica è quella dei composti di uguale tipo 1 — 1 — 8 già descritti.

Il peso specifico, determinato col metodo della sospensione, è risultato uguale a 2.952 — 2.957.

Quanto al composto $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4$ anidro, si è ottenuto sotto forma di esili laminette, per evaporazione, alla temperatura di circa 30°, di una soluzione che conteneva il solfato di cerio e quello di rubidio nel rapporto molecolare di 1 : 2. È evidente, perciò, che la temperatura ha una grande importanza sulla formazione dell'uno o dell'altro idrato, perchè basta una oscillazione di 20° per avere il composto 1 — 1 cristallizzato o con $8H_2O$, o con $2H_2O$ ovvero anidro.

Che il composto ottenuto sia effettivamente anidro risulta dal fatto che, riscaldato anche a 240°, non subisce la minima perdita di peso: una determinazione di cerio ha dato 33.48 % Ce, mentre il valore calcolato è 33.56.

I cristallini sono tabulari, a contorno esagonale, ma mal conformati, sicchè non è stato possibile sottoporli a misure goniometriche. Appartengono probabilmente al sistema monoclino, perchè dalla faccia più estesa, che si può considerare come base {001}, esce inclinata sulla normale alla faccia stessa la bisettrice acuta, negativa: una direzione di massima estinzione è, almeno approssimativamente, parallela ad uno dei lati del contorno della base. L'angolo apparente degli assi ottici nell'aria, misurato con il micrometro oculare a vite ed utilizzando la formula di Mallard, è risultato uguale a 28° circa per la luce del sodio. In alcune laminette, che risultano da pile di cristallini, 2E può diventare più piccolo: in una di tali pile non raggiungeva che i 18°.

Il composto anidro $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4$ presenta un particolare interesse, perchè il sale doppio 1 — 1 anidro non era stato da noi ancora incontrato nei nostri studi sui solfati doppi delle terre rare e dei metalli alcalini: da ricerche eseguite da uno di noi insieme al dott. G. Carrobbi, e che verranno prossimamente pubblicate, risulta che un composto dello stesso tipo si forma nel sistema $La_2(SO_4)_3$ — Rb_2SO_4 — H_2O già alla temperatura di 25°.

Ci è grato ringraziare la signorina Buonoconto per l'aiuto datoci nella esecuzione delle analisi.

(1) Zambonini e Restaino, *Solfati di cerio (ceroso) e ammonio.* «Rend. R. Accad. Lincei», 6°, 1926, 1° sem., 181.

Geologia. — *La più giusta denominazione e la cartografia del massiccio cristallino sul quale è, in parte, fondata la città di Savona.* Nota [1] del Corrisp. S. Franchi.

Quando, nell'anno 1891, io feci le prime escursioni geologiche nei monti di Savona, erano da poco stampate tre carte geologiche [2] le quali, se rappresentavano notevoli progressi sulle carte geologiche più antiche di L. Pareto e di A. Sismonda [3], per i dintorni di Savona, segnavano invece un regresso un po' stupefacente, per la mancanza di ogni indicazione di affioramenti di rocce cristalline precarbonifere (gneis e micascisti) e di graniti, già indicati in quelle antiche carte e nei testi.

Difatti, nelle carte suddette, pel Savonese, sono stati indicati, tra i monti e il mare, grandi sviluppi del Permiano e del Carbonifero, con esclusione assoluta di gneis, di micascisti e di graniti, secondo concetti e contorni dati dall' ing. D. Zaccagna, con un semplicismo tanto più inesplicabile, dopo alcuni risultati del Congresso della Società geologica italiana, del settembre 1887 a Savona (« Boll. Soc. geologica italiana », 1887).

Due traversate compiute fra Altare e Savona e fra M. Greppino, M. Castellazzo, M. Pasasco e Savona, mi hanno subito convinto di essere in presenza di un esteso ed interessantissimo massiccio cristallino, del quale era urgente segnare con qualche approssimazione i limiti e dare i caratteri litologici principali.

Io dedicai a questo scopo due scorci di campagne geologiche, le quali io stavo svolgendo nelle Alpi Marittime. Raccolsi una serie di campioni delle rocce più fresche e più tipiche, gneisiche, micascistose e granitiche e ne diedi le diagnosi petrografiche, in una breve Nota [4], in base alle quali io concludevo all'esistenza di un importante massiccio cristallino gneisico-granitico, esteso circa 15 km. in direzione est-ovest e circa 10 nel senso nord-sud. Io ritenni questo massiccio costituire un tutto colle rocce verdi del « gruppo di Voltri » di A. Issel, il quale massicio perciò avrebbe avuto per limiti, ad occidente il torrente Quiliano e a levante il torrente Chiaravagna, sfociante a Sestri Ponente.

(1) Presentata nella seduta del 4 marzo 1928.

(2) *Carta geologica delle Riviere Liguri e delle Alpi Marittime,* di A. Issel, L. Mazzuoli e D. Zaccagna, Genova, 1887. *Carta geologica d'Italia ad 1.000.000,* del R. Ufficio geologico, Roma, 1889. *Carta geologica delle Riviere Liguri e territori confinanti,* di A. Issel e S. Squinabol, Genova, 1890.

(3) L. Pareto, *Descrizione di Genova e del Genovesato,* Genova, 1846. V. A. Sismonda, *Carta geologica del Piemonte e della Liguria,* Torino, 1866.

(4) *Nota preliminare sulla formazione gneisica e sulle rocce granitiche del Massiccio Cristallino Genovese.* « Boll. R. Comitato geologico », 1893.

Ancora convinto dell'antichità delle rocce cristalline del gruppo di Voltri, che avevo riconosciuto essere la prosecuzione della « zona delle Pietre Verdi » delle Alpi Cozie e Graie, anche per l'identità di tutti i tipi litologici, che io avevo avuto campo di esaminare rilevando le tavolette di Voltri e di Varazze, io diedi a quel tutto il nome di *Massiccio Cristallino Ligure*, e, pure rilevandone le notevoli differenze rispetto ai Massicci della « Zona del Monte Rosa » del Diener, ve lo aggregai.

Poco dopo io rilevai molti fatti pei quali la comprensione in un solo gruppo dei gneis del Savonese e delle rocce cristalline del gruppo di Voltri, non era più ammissibile, per cui quel nome, da me creato di « Massiccio Cristallino Ligure » si mostrava inesatto, anche indipendentemente dal fatto che i massicci cristallini delle Alpi Occidentali, secondo il concetto di B. Gastaldi, comprendevano esclusivamente i nuclei gneisico-micascistosi, sorgenti in mezzo alla grande e potentissima « Zona delle Pietre Verdi », dalla quale erano tenuti distinti.

Il mantenimento di quel nome si mostrò poi assolutamente inammissibile, quando, pel ritrovamento di fossili secondari nei calcescisti e nelle dolomie della suddetta zona, creduta arcaica da B. Gastaldi e da alcuni suoi seguaci, essa apparve inoppugnabilmente secondaria.

Io avrei dovuto allora prendere l'iniziativa di sostituire quel nome con un altro più giusto, tanto più dopo la miglior conoscenza dei rapporti delle rocce gneisiche e granitiche coi Calcescisti, ma le lotte che dovetti sostenere per difendere la nuova cronologia della Zona delle Pietre Verdi, mi impedirono di occuparmi di questo quesito, di importanza secondaria.

Così avvenne che, quando P. Termier e J. Boussac si occuparono del Savonese e degli importanti quesiti sollevati da G. Rovereto, coll'ipotesi dei carreggiamenti [1], essi accettarono senza riserva, e forse anche per cortesia, il nome da me dato nel 1893 [1].

Ora, dato il fatto che le masse rocciose gneissiche, micascistose e granitiche si sviluppano tra il torrente Quiliano e il Sansobbia, nei monti soprastanti a Savona, e che l'abitato stesso di questa città è in parte anche fondato sui gneis, il nome più adatto è certamente quello di *Massiccio Cristallino Savonese*, il quale sarà certamente accettato da P. Termier e da tutti i geologi che si occuperanno della geologia del Savonese.

*
* *

Dopo quel mio lavoro preliminare sul Savonese, il corso dei miei lavori di rilevamento geologico nelle Alpi Cozie, Graie e Pennine mi hanno impedito di condurre a termine il rilevamento della regione, al quale potei

(1) P. Termier et Jean Boussac, *Le Massif Cristallin Ligure*, « Bull. Soc. géol. de France », 4e série, p. 272, 1912. G. Rovereto, *La zona di ricoprimento del Savonese e la questione dei calcescisti*, « Boll. Soc. geol. it. », 1909.

solo dedicare, di sfuggita, qualche settimana, sì che, quando nel 1908 si trattò di stampare la carta geologica al 400.000, io riuscii appena a farvi inserire un abbozzo del Massiccio Cristallino Savonese, tratto da un rilevamento incompleto e perciò molto imperfetto. In esso però io ho indicata la importante zona di gneis anfibolico-pirossenici, a luoghi granatiferi, che lo attraversa da O.-NO. a O.-SE., con una potenza di circa 2 km., e con pendenza costante verso N.-NO. per l'estensione di 15 km., solo interrotta per un certo tratto; zona la quale non è stata mai indicata nelle carte e cartine geologiche degli importanti lavori successivi, sebbene esso abbia ovviamente una grandissima, e direi anche capitale, importanza nella tettonica del Massiccio Cristallino.

I lavori importantissimi di G. Rovereto e di P. Termier e J. Boussac, citati avanti, confermarono le diagnosi petrografiche dei tipi rocciosi freschi, da me date nel 1893, sebbene i secondi autori abbiano riconosciuto uno sviluppo dei fenomeni di laminazione straordinaria in tutti i tipi di rocce, che P. Termier, anche in lavori più recenti, afferma essere unico in tutti i massicci cristallini alpini.

Per lo scopo del mio lavoro preliminare del 1893, che era quello di dimostrare il gravissimo errore delle carte geologiche allora stampate, di far passare cioè come scisti permiani (besimauditi) tutte le rocce del bellissimo Massiccio Cristallino, io mi ero naturalmente limitato a raccogliere e descrivere petrograficamente i tipi più freschi e meglio conservati, tuttavia non mancai di notare i fenomeni di intensa laminazione, al punto da rendere indecisi di quali rocce si trattasse [1].

E a p. 8 dell'estratto di esso si può leggere un brano col quale io mi opponevo recisamente a quella concezione litologica erronea: « Che si tratti di veri gneis non si può rimanere in dubbio quando si percorra uno qualunque dei contrafforti compresi fra il torrente Riobasco ed il Quiliano. Dirò anzi che i gneis del Savonese sono fra i più tipici, e che meglio mostrano, anche al semplice esame ad occhio nudo, la composizione mineralogica classica e la struttura attribuita a quelle rocce. La ricchezza in biotite ben conservata in larghi clivaggi, è la caratteristica evidente di questi gneis, che, per ciò solo, si distinguerebbero dalle *besimauditi* le più gneisiche ».

Qualunque geologo che non fosse assolutamente digiuno di litologia, dopo la lettura di quel mio lavoro preliminare, col quale si confermava l'esistenza di graniti già indicati nelle carte di L. Pareto e di A. Sismonda, il quale anzi era stato colpito dai « gneis doviziosi di mica bruna », non avrebbe più avuto alcun dubbio sull'esistenza di un esteso ed interessante

(1) A p. 11 dell'estratto, io scrivevo: Abbiamo accennato a gneis senza biotite a M. Negino; a Tegia-Pertuso sonvi pure gneis verdicci che mancano di quell'elemento; di simili, aventi l'aspetto di roccia massiccia laminata e molto alterata, ne troviamo presso Magrania (Ellera) tra le anfiboliti e la roccia granitica; la loro vera natura è però ancora incerta.

massiccio gneisico–granitico nei monti di Savona, e tanto meno dopo gli importanti lavori di G. Rovereto e P. Termier e J. Boussac, che quell'esistenza confermarono luminosamente, pur dissentendo fra loro sulla tettonica di esso.

Tuttavia vi è stato chi quella esistenza volle negare, e insistette perchè si stampasse il foglio Albenga-Savona della carta geologica al 100.000, con criterî litologici completamente contrari a quelli dei lavori di tre petrografi, ed ispirati ad una litologia antiquata ed empirica, che si voleva mantenere, in dispregio dei moderni metodi della petrografia.

In qualche resoconto delle riunioni iemali della Società geologica italiana e negli atti ufficiali del « Bollettino del R. Comitato geologico » vi sono le tracce di vivaci discussioni su questo argomento; e alfine quell'illustre consesso decise di non ammettere la stampa di quel foglio.

Si trattava di decidere: 1° in una questione di stratigrafia, se si dovesse accettare una carta nella quale non era tenuto nessun conto di fossili caratteristici e 2° in una questione litologico–petrografica, se si dovesse accettare una carta nella quale non si teneva nessun conto degli studi petrografici di tre petrografi, di cui qualcuno di fama europea; fossili e studi petrografici dei quali si era tenuto invece buon conto nella carta al 400.000, precedentemente stampata.

Si trattava di scegliere fra l'empirismo e il rigoroso metodo scientifico, e la scelta non poteva essere dubbia. La saggia deliberazione di quel consesso evitò l'incomprensibile errore che lo stesso ufficio pubblicasse due carte, di cui la seconda, senza nessun argomento scientifico giustificativo, avrebbe contradetta gravemente la prima, su fatti positivi quali sono i dati paleontologici e le diagnosi petrografiche.

*
* *

Le roccie gneisiche e granitiche dei monti savonesi, già parzialmente indicate nelle carte geologiche del Pareto e del Sismonda (1846–1866), quindi soppresse, causa un erronea concezione della loro natura, in parecchie carte geologiche (1889-1900), da me descritte per la prima volta petrograficamente, nei tipi litologici più freschi, ed approssimativamente delimitate (1893), poscia cartografate nel 1908, come distinto massiccio cristallino, il quale venne riconfermato da G. Rovereto e quindi da P. Termier e J. Boussac, con un magistrale studio petrografico, anche delle forme profondamente milonitizzate, non saranno certamente più, d'ora innanzi, messe in dubbio da nessun geologo; e delle interpretazioni petrografiche empiriche ed arbitrarie di esse non rimarrà che il doloroso e umiliante ricordo.

Si dovrà ora completarne una esatta delimitazione, la quale permetta di tentare una interpretazione tettonica soddisfacente, non dimenticando

alcune considerazioni da me fatte in un precedente scritto [1], e dando tutta l'importanza che merita, sotto questo punto di vista, alla grande zona di gneis anfibolico-pirossenici, indicata nella carta al 400.000, *estesa rettilineamente 15 km.* (salvo una importante interruzione a sud del Santuario) *e con pendenza costante dai 60° ai 70° verso NNE*; e non dimenticando il massiccio gneisico-granitico del Monte Spinarda, fra Garessio e Calizzano, rappresentante la probabile prosecuzione, sotto il Permo-carbonifero, di questo nel Savonese.

Dopo una lotta sorda, ma tenace e ingrata, che dura da più di trent'anni, io mi riterrò soddisfatto, se i geologi crederanno che, col mio impegno nel sostenerla, io ho sempre ed esclusivamente avuto di mira il decoro della geologia italiana.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sul concetto di tensore costante in varietà qualunque.* Nota di A. Masotti, presentata [2] dal Corrisp. U. Cisotti.

Le considerazioni che sono oggetto di questa Comunicazione estendono, in armonia con ciò che esposi nella Nota, presentata all'Accademia nella scorsa seduta, *Sulla equivalenza dei tensori*, quelle che il prof. Cisotti, in una Nota presentata nella stessa seduta, ha svolte *Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee.*

1. *Costanza lungo una linea.* — Sia assegnata una distribuzione tensoriale in un campo C di una varietà qualunque ad n dimensioni, sia cioè assegnato per ogni punto di C un tensore emmuplo **T** mediante le sue componenti $X^{k_1 \cdots k_q}_{i_1 \cdots i_p}$ (con $p + q = m$) rispetto ad un certo sistema di coordinate generali x_i $(i = 1, \cdots, n)$.

Sia L una linea della varietà contenuta in C; il tensore **T** è *costante lungo* L se le sue determinazioni nei punti di L sono *equivalenti lungo* L, cioè se

$$(1) \qquad \sum_j^n X^{k_1 \cdots k_q}_{i_1 \cdots i_p j} \lambda^j = 0 , \qquad (i_1, \cdots, i_p \; ; \; k_1, \cdots, k_q = 1, \cdots, n),$$

(1) *I nuovi dati per la tettonica del Massiccio Cristallino Savonese.* « Boll. Soc. Geol. It. », vol. XLVI, 1927.

(2) Nella seduta del 19 febbraio 1928.

essendo $\lambda^j = dx_j / d\mathrm{L}$ $(j = 1, \cdots, n)$ i parametri della tangente positiva alla linea L [1].

Questo concetto assume forma più limpida se si adottano coordinate *localmente cartesiane lungo* L, che indicherò con ξ_ι $(\iota = 1, \cdots, n)$ [2]. Dette $\Xi^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p}$ le nuove componenti di $\mathbf{T}$ si ha che, nei punti di L,

$$\Xi^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p \, \iota} = \frac{\partial \Xi^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p}}{\partial \xi_\iota}, \tag{2}$$

per cui le (1), che divengono dapprima

$$\sum_1^n{}_\iota \, \Xi^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p \, \iota} \Lambda^\iota = 0, \qquad (\mu_1, \cdots, \mu_p \; ; \; \nu_1, \cdots, \nu_q = 1, \cdots, n), \tag{3}$$

essendo $\Lambda^\iota = d\xi_\iota / d\mathrm{L}$ $(\iota = 1, \cdots, n)$ i nuovi parametri della tangente positiva alla linea L, assumono infine la forma

$$\frac{d \Xi^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p}}{d\mathrm{L}} = 0, \qquad (\mu_1, \cdots, \mu_p \; ; \; \nu_1, \cdots, \nu_q = 1, \cdots, n). \tag{4}$$

Dunque *se un tensore è costante lungo una linea tali risultano, con un riferimento cartesiano lungo la linea, le sue componenti.* Siccome di questa proposizione vale la reciproca, la definizione data può esser sostituita dalla seguente: *un tensore si dirà costante lungo una linea se tali sono, con un riferimento cartesiano lungo la linea, le sue componenti.*

2. *Costanza assoluta.* — Il tensore $\mathbf{T}$, precedentemente considerato, si dirà *costante nel campo* C se è costante su ogni linea di C. Le (1) sono allora soddisfatte in ogni punto di C e per qualunque direzione, e ciò richiede che sia identicamente

$$\mathrm{X}^{k_1 \cdots k_q}_{i_1 \cdots i_p \, j} = 0, \qquad (i_1, \cdots, i_p \; ; \; k_1, \cdots, k_q \; ; \; j = 1, \cdots, n). \tag{5}$$

(1) V. la mia Nota *Sulla equivalenza dei tensori*, § 3.

(2) È noto che un sistema di coordinate generali dicesi *cartesiano* (o *geodetico*) *in un punto* se ivi si annullano tutte le derivate ordinarie dei coefficienti del ds^2 (o, ciò che è equivalente, tutti i simboli di Christoffel). La possibilità di determinare, ed in infiniti modi, coordinate cartesiane in un punto qualunque di una varietà, è stata messa in evidenza da Riemann; la possibilità di determinare, ancora in infiniti modi, coordinate cartesiane in tutti i punti di una linea della varietà è stata dimostrata dal Fermi, nelle Note *Sopra i fenomeni che avvengono in prossimità di una linea oraria* [questi «Rendiconti», vol. XXXI, ser. 5ª (1° sem., 1922), pp. 21-23 e 51-52], indi, con diverso metodo e maggiori dettagli, da Levi-Civita, nella Memoria *Sur l'écart géodésique* [«Mathematische Annalen», 97. Band (1926), pp. 291–320].

Nei primi membri delle (5) figurano le componenti del tensore $(m+1)$ plo $\mathbf{T}'$, derivato di $\mathbf{T}$; dunque *se un tensore è costante il suo derivato è nullo.*

Se ξ_ι $(\iota = 1, \cdots, n)$ sono coordinate *localmente cartesiane in un generico punto* P di C, e $\Xi^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p}$ designano le corrispondenti componenti di $\mathbf{T}$, le (5) divengono, in P,

$$(6) \qquad \frac{\partial \Xi^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p}}{\partial \xi_\iota} = 0, \qquad (\mu_1, \cdots, \mu_p \; ; \; \nu_1, \cdots, \nu_q \; ; \; \iota = 1, \cdots, n).$$

Dunque *se un tensore è costante in un campo si può ottenere che le sue componenti siano stazionarie in un punto qualunque scegliendo coordinate cartesiane in quel punto.* Siccome di questa proposizione vale la reciproca, la definizione data può essere sostituita dalla seguente: *un tensore si dirà costante in un campo se si può ottenere che le sue componenti siano stazionarie in un punto qualunque del campo scegliendo coordinate cartesiane in quel punto* (1).

È evidente che il tensore fondamentale, le cui componenti covarianti sono i coefficienti a_{ik} del ds^2, è un tensore costante (teorema di Ricci).

Matematica. — *Le sostituzioni pseudonormalizzanti e la normalizzazione nella teoria generale delle varietà abeliane reali.* Nota di S. CHERUBINO, presentata (2) dal Corrisp. G. SCORZA.

A base della teoria delle varietà abeliane reali, come è stata impostata dal Comessatti (3), vi sono le due nozioni di *cicli pseudonormali* e di integrali *normali* che sono intimamente legate alla struttura delle matrici di Riemann inerenti alle simmetrie ammesse dalla varietà.

La ricerca dei cicli pseudonormali dà luogo al problema della riduzione a forma tipica della simmetria S che si considera e quella degli integrali normali al problema della normalizzazione di una forma riemanniana alternata principale della matrice ω inerente alla S.

La soluzione del primo problema fu indicata dallo stesso Comessatti

(1) Nella mia Nota *Sulla derivazione di un vettore superficiale* [in corso di pubblicazione negli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei »], § 5, ho fatto rilevare che solo sopra le superficie sviluppabili si possono assegnare distribuzioni vettoriali uniformi; ciò mette in evidenza che non è sempre possibile assegnare certe distribuzioni tensoriali costanti in certe varietà.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) *Sulle varietà abeliane reali* (Memorie I e II). « Annali », serie IV, t. II (1924-1925) e t. III (1925-1926).

e, più recentemente, è stata riottenuta da me [1] connettendola ai concetti di parità e di successioni fondamentali di parità pei periodi simultanei di p integrali di prima specie inerenti ad S. In questa Nota, giovandomi della nozione di *matrici caratteristiche* per S ultimamente da me introdotta [2], indico il mezzo per conseguire di un sol colpo la riduzione di S a forma tipica, determinando anche tutte e sole le sostituzioni unimodulari ciascuna delle quali porta S nella sua forma tipica.

Il secondo problema deve intendersi *in senso reale*, cioè a dire occorre risolverlo in modo da conservare i vantaggi di una tabella pseudonormale o, per lo meno, realizzata. È questa necessità che rende notevolmente delicata la discussione aritmetica del problema, sì da impedire al Comessatti di risolverlo in generale. Tuttavia, questo A. riesce ad esaurire il caso del carattere reale nullo, mentre quello del carattere reale qualsiasi vien risoluto per una forma riemanniana alternata a divisori unitarii.

Questo problema vien qui riesaminato utilizzando solo in parte i risultati del Comessatti, mentre pel resto si impiegano procedimenti assai semplici e rapidi che si fondano ancora sulle proprietà delle *matrici caratteristiche* inerenti ad S.

La rapidità del ragionamento, che mi consente anche di abbreviare sensibilmente la prima parte della dimostrazione del Comessatti, è dovuta ad un notevole risultato che fu segnalato nel mio primo lavoro sulle varietà abeliane reali [3].

È bene subito rilevare che la normalizzazione di una forma riemanniana alternata principale trasformata in sè da S, com'è ottenuta in questa Nota, è effettuabile solo quando – come pel caso $\lambda = 0$ – esistano cicli normali che sono pure pseudonormali.

1. Sia V_p una varietà abeliana reale, cioè ammettente una simmetria S in sè. Siano $u_1 \cdots u_p p$ integrali semplici di prima specie *inerenti* ad S e $w = \| w_{s1} \cdots w_{s2p} \|$ la matrice di Riemann legata a questi integrali, sui cicli primitivi C_k fissati sulla riemanniana di V_p.

Sia $\begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix}$ una *matrice caratteristica unimodulare* [4] per S sui cicli C_k e si operi su questi la sostituzione

(1) *Sulla nozione di parità*, ecc. Note I e II, questi «Rendiconti», vol. VI, serie 6ª, ottobre e novembre 1927.

(2) *Le matrici caratteristiche delle simmetrie sulle varietà abeliane reali.* Questi «Rendiconti», questo volume, fasc. 3. Indicherò questa in seguito, con Nota III.

(3) *Sulle varietà abeliane reali e sulle matrici di Riemann reali.* Memoria I, nn. 13–14. [«Giorn. di Matem.», vol. XL, 1922]. Avremo anche occasione di citare la Memoria II dallo stesso titolo [stesso giornale, vol. XLI, 1923].

(4) Cfr. Nota III, n. 5.

$$(1)\quad \begin{cases} C'_s = m_{s1}C_1 + \cdots + m_{s2p}C_{2p} & s = 1 \cdots p \\ C'_{p+j} = g_{j1}C_1 + \cdots + g_{j2p}C_{2p} & j = 1 \cdots \lambda \\ C'_{p+\lambda+t} = n_{\lambda+t,1}C_1 + \cdots + n_{\lambda+t,2p}C_{2p} & t = 1 \cdots p-\lambda \end{cases}$$

che ha per matrice dei coefficienti la $\begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix}$, essendo λ il *carattere reale* di S.

Con questa sostituzione dico che si perviene direttamente a cicli pseudonormali, quindi ad una matrice riemanniana *pseudonormale* (1) (Comessatti) ovvero sia, ciò che è lo stesso, che la simmetria S si riduce alla forma tipica di Hurwitz-Comessatti.

Infatti, se S indica anche la matrice di intieri che dà l'antisostituzione riemanniana involutoria indotta da S sui cicli C_k, ha luogo la relazione (2) fra matrici:

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix}^{-1} = P_\lambda \left(\begin{array}{c|c} I & o \\ \hline o & -I \end{array}\right) \cdot P_\lambda^{-1} = I_\lambda$$

ove P_λ è la matrice dei coefficienti della sostituzione

$$P_\lambda \equiv \begin{cases} x'_s = x_s & s = 1 \cdots p \\ x'_{p+j} = \frac{1}{2}x_j - \frac{1}{2}x_{p+j} & j = 1 \cdots \lambda \\ x'_{p+\lambda+t} = x_{p+\lambda+t} & t = 1 \cdots p-\lambda \end{cases}$$

e quindi I_λ risulta essere la matrice dei coefficienti della sostituzione

$$I_\lambda \equiv \begin{cases} x'_s = x_s & s = 1 \cdots p \\ x'_{p+j} = x_j - x_{p+j} & j = 1 \cdots \lambda \\ x'_{p+\lambda+t} = -x_{p+\lambda+t} & t = 1 \cdots p-\lambda \end{cases}$$

che è appunto la forma tipica di un'involuzione razionale unimodulare di carattere reale λ.

Viceversa, se Q è una sostituzione unimodulare tale che

$$Q \cdot S \cdot Q^{-1} = I_\lambda$$

sarà anche

$$(P_\lambda^{-1}Q) \cdot S \cdot (P_\lambda^{-1}Q)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I & o \\ \hline o & -I \end{array}\right) = I_o$$

onde, ponendo $(P_\lambda^{-1}Q) = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, risulta $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} m \\ -n \end{pmatrix}$.

(1) Nella Nota II, n. 6, è già dimostrato che una sostituzione come quella che si considera riduce la w alla forma *realizzata*.

(2) Cfr. Nota III, nn. 5 e 6, relazioni (5) e (6).

Se questa $\begin{pmatrix} m \\ -n \end{pmatrix}$ è una *matrice caratteristica minima* per S: si avrà $Q = P_\lambda \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ e, quindi, Q riesce una matrice caratteristica unimodulare per S e si potrà enunciare che:

a) *tutte e sole le sostituzioni unimodulari che riducono una sostituzione unimodulare involutoria* S *(non degenere) di carattere reale* λ *alla forma tipica di Hurwitz-Comessatti sono quelle le cui matrici dei coefficienti sono matrici caratteristiche unimodulari per* S.

b) *le trasformazioni di cicli che hanno per matrice dei coefficienti una matrice caratteristica unimodulare di* S *sono tutte e sole quelle che trasformano i cicli* C_k *in cicli (primitivi) pseudonormali inerenti ad* S.

Queste sostituzioni saranno dette *pseudonormalizzanti.*

2. Per assicurarmi che $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = P_\lambda^{-1} \cdot Q$ è caratteristica minima per S, dimostrerò che:

una matrice intiera $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ *che soddisfi alla relazione* $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} m \\ -n \end{pmatrix}$ *è caratteristica minima per* S *allora e solo allora che moltiplicata a sinistra per* P_λ *dà una matrice unimodulare.*

Sulla necessarietà della condizione enunciata non occorre trattenersi.

Per la sufficienza si osservi che il prodotto $P_\lambda \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = Q$ risulta del tipo $\begin{pmatrix} m \\ g \\ n \end{pmatrix}$ con

$$g_{jr} = \frac{1}{2}(m_{jr} - n_{jr}) \qquad j = 1 \cdots \lambda \quad ; \quad r = 1 \cdots 2p$$

e che la matrice m che figura in Q coincide con quella di $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, mentre la matrice n che entra in Q è costituita dalle ultime $p - \lambda$ righe della matrice n che figura in $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

Se dunque Q è unimodulare, la matrice m avrà i minori di ordine massimo primi fra loro e quindi essa dà una base minima dello spazio razionale σ fondamentale per S.

Se ora, nella Q, dalle righe di numero d'ordine $1, \cdots \lambda$ si tolgono rispettivamente i doppi di quelle di numero d'ordine $p+1, \cdots p+\lambda$, la Q rimane unimodulare e viene a contenere esattamente la matrice n (le prime λ righe ai primi λ posti e le ultime $p - \lambda$ dove erano). Cosicchè questa n, per l'analoga ragione addotta per la m, dà luogo a una base minima per

l'altro spazio fondamentale razionale σ^* di S. Osservando infine che le prime λ righe di m, e queste soltanto, risultano della stessa parità di quelle di n, si conclude che $\binom{m}{n}$ è una matrice caratteristica minima per S.

3. Per raggiungere la normalizzazione reale, si consideri una *forma riemanniana alternata principale* A per w (Scorza), certo esistente [1], che sia trasformata in sè da S. Posto

$$A \equiv \sum_{jr} c_{rj} x_r y_j \qquad c_{rj} = -c_{jr} \tag{3}$$

$$S \equiv x'_r = a_{r1} x_1 + \cdots + a_{r2p} x_{2p} \qquad r = 1 \cdots 2p$$

si ottiene, *esattamente* [2]

$$\sum_{jr} c_{rj} a_{rt} a_{ju} = -c_{tu} = c_{ut}$$

cioè, indicando ancora con A la matrice dei coefficienti della (3), risulta

$$S_{-1} \cdot A \cdot S = -A = A_{-1}. \tag{4}$$

Da questa relazione, tenendo conto che [3] $S = \binom{m}{n}^{-1} \cdot I_0 \cdot \binom{m}{n}$ e ponendo

$$A^* = \binom{m}{n}_{-1}^{-1} \cdot A \cdot \binom{m}{n}^{-1}$$

si ottiene subito $I_0 A^* I_0 = -A^*$, cioè che la matrice A^* è del tipo [4]

$$A^* \equiv \left\| \begin{array}{c|c} 0 & c'_{sp+k} \\ \hline c'_{p+s,k} & 0 \end{array} \right\| \qquad c'_{sp+k} = -c'_{p+k,s}$$

Si è così visto che la trasformazione di cicli di matrice $\binom{m}{n}$ trasforma la A nella forma

$$A^* = \sum_{sk}^{1 \cdots p} c'_{sp+k} (x_s y_{p+k} - x_{p+k} y_s).$$

In pari tempo la matrice riemanniana w inerente ad S diventa del tipo $w' \equiv \| \alpha ; i\beta \|$, con α e β matrici quadrate reali.

(1) Cfr. Memoria I, n. 14, *b*).
(2) Ibidem, n. 14, prime righe.
(3) Cfr. Nota III, n. 1 (4).
(4) Si osservi che qui si è evitato il ragionamento di cui alla prima parte del n. 10 della citata Memoria I del Comessatti. Ciò si deve al che ho utilizzati i risultati dei numeri 13 e 14 della mia Memoria I, che mi hanno permesso di scrivere senz'altro la (4).

Se dunque S è di carattere reale nullo, questa w', con opportuno cambiamento dei parametri, diventa una matrice pseudonormale e, poichè $\binom{m}{n}$ risulta unimodulare, i cicli trasformati sono appunto pseudonormali e la A^* è a coefficienti intieri.

Se invece $\lambda > 0$, i coefficienti della A^* sono razionali.

4. Adoperando ora un noto ragionamento del Frobenins, con le opportune modificazioni apportatevi dal Comessatti [1], si può affermare, con questo A., che esiste una (almeno) matrice unimodulare del tipo

$$R \equiv \left\| \begin{array}{c|c} \mu & o \\ \hline o & \nu \end{array} \right\|$$

con μ, ν due matrici unimodulari di ordine p, tale che risulti

$$A^{**} = R_{-1} \cdot A^* \cdot R \equiv \sum_{h=1}^{p} e'_h (x_h y_{p+h} - x_{p+h} y_h)$$

dove, se A^* è intiera, i coefficienti $e'_1 \cdots e'_p$ sono anche essi intieri e sono i divisori elementari della matrice A^*.

Questa A^{**} è ancora alternata, principale e, dippiù, *normale* per la w'', trasformata di w' mediante il cambiamento di cicli di matrice R^{-1}.

E poichè, per $\lambda = 0$, la matrice $R^{-1} \cdot \binom{m}{n}$ è unimodulare, in tal caso il problema della normalizzazione reale è senz'altro risolto.

5. Sia invece $\lambda > 0$. Si esegua allora un nuovo cambiamento di cicli, la cui matrice dei coefficienti sia P_λ.

La matrice A^{**} si trasforma così in un'altra ancora normale

$$A^{(N)} = P_{\lambda-1}^{-1} \cdot A^{**} \cdot P_\lambda^{-1} = \sum_{h}^{1 \cdots p} e_h (x_h y_{p+h} - x_{p+h} y_h)$$

dove

$$e_j = -2 e'_j \ (j = 1 \cdots \lambda) \quad ; \quad e_{\lambda+t} = e'_{\lambda+t} \ (t = 1 \cdots p - \lambda).$$

E poichè risulta

$$A^{(N)} = \left[P_\lambda \cdot R^{-1} \cdot \binom{m}{n} \right]_{-1}^{-1} \cdot A \cdot \left[P_\lambda \cdot R \cdot \binom{m}{n} \right]^{-1}$$

(1) Memoria I, cit., n. 10. Cfr. anche FROBENINS, *Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten* [« Journ. von Crelle », Bd. 86], § 7, pp. 165 e sgg. Naturalmente, converrà operare su A^* moltiplicata pel minimo comune denominatore dei coefficienti $c'_{s\,p+k}$, per renderla intiera, e poi dividere per questo denominatore comune.

quando $P_\lambda \cdot R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ è una matrice unimodulare, la normalizzazione dei cicli primitivi è raggiunta.

Precisamente ciò accade se e solo se il prodotto $R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ è ancora una *matrice caratteristica minima* per S, e quindi

$$P_\lambda \cdot R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = P_\lambda \cdot \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ g' \\ n' \end{pmatrix}$$

è una *matrice caratteristica unimodulare* per S.

Si è dunque ottenuto che:

Se e solo se $R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ *è una matrice caratteristica minima per* S, *fra le sostituzioni pseudonormalizzanti di* S *ve ne è sempre (almeno) una che riduce alla forma normale la data forma riemanniana alternata principale (della matrice riemanniana w inerente ad* S*) trasformata in sè dall'antisostituzione riemanniana (principale) corrispondente alla simmetria* S.

È chiaro che in questo caso i coefficienti e_h della $A^{(N)}$ sono intieri e sono i divisori elementari della matrice A.

Si osservi infine che il cambiamento di cicli che ha per matrice dei coefficienti la $\begin{pmatrix} m' \\ g' \\ n' \end{pmatrix}$ porta i cicli C_k in altri (primitivi e) pseudonormali, cosicchè, normalizzando i parametri u_s sui cicli reali, si otterranno dei parametri v_s, ancora inerenti ad S, che, su quei cicli pseudonormali, ammettono una matrice di Riemann che è insieme normale e pseudonormale. Ad es. si può avere una matrice del tipo

$$R_N \equiv \left\| \begin{matrix} \frac{1}{e_1} & \cdots & 0 & \frac{1}{2e_1} + i\tau_{11} & \cdots & i\tau_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \frac{1}{2e_\lambda} + i\tau_{1\lambda} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{e_p} & i\tau_{p1} & \cdots & i\tau_{pp} \end{matrix} \right\| \qquad \tau_{rs} = \tau_{sr}$$

che pone in evidenza il carattere reale λ ed i divisori elementari della forma riemanniana alternata principale normale $A^{(N)}$.

Matematica. — *Intorno ad una classe di funzionali continui.* Nota di P. TORTORICI, presentata [1] dal Socio S. PINCHERLE.

1. Sia $A[f]$ un funzionale definito nell'insieme Ω delle funzioni continue in un medesimo intervallo (a, b).

È noto che $A[f]$ si dice *continuo* se per ogni successione di funzioni f_n di Ω, tendente uniformemente a f, si ha

$$\lim_{n, N_I} A[f_n] = A[f], \tag{1}$$

e si dice *distributivo* se, essendo f_1, f_2 due funzioni di Ω e c_1, c_2 due costanti arbitrarie, si ha:

$$A[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 A[f_1] + c_2 A[f_2]. \tag{2}$$

Il funzionale $A[f]$ si dice poi *lineare* se esso è distributivo ed è continuo.

In una Nota recente il dott. Caccioppoli asserisce [2] che il Riesz chiama lineare un funzionale che oltre alle proprietà (1) e (2) possegga anche quella di essere *limitato* di sodisfare cioè alla condizione:

$$|A[f]| \leq K \cdot \max |f| \tag{3}$$

f essendo sempre una qualsivoglia funzione di Ω e K una costante positiva indipendente da f, e dimostra che questa ultima proprietà è implicata dalle prime due.

Ma l'asserzione del Caccioppoli non è esatta perchè, nel lavoro di Riesz che egli cita [3], è definito lineare un funzionale sodisfacente alle condizioni (2) e (3) e si prescinde quindi dalla continuità, mentre in un lavoro antecedente [4] il Riesz definisce lineare un funzionale che possegga in Ω le proprietà (1) e (2) e deduce da queste la proprietà (3) in maniera sostanzialmente identica a quella esposta dal Caccioppoli nella sua Nota, intesa ad estendere altri teoremi noti dovuti pure al Riesz.

Io qui vorrei esporre qualche nozione che credo nuova sui funzionali continui; mi pare utile però insistere dapprima sulla equivalenza fra le con-

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(2) R. CACCIOPPOLI, *Sui funzionali lineari a più dimensioni*, « Rendiconti della Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », serie 3ª, vol. 32°, p. 42, 1926.

(3) F. RIESZ, *Démonstration nouvelle d'un théorème concernant des opérations fonctionnelles linéaires*, « Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure », T. XXXI, 1914, p. 10.

(4) F. RIESZ, *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales*, « Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure », T. XXVIII, 1911, p. 34.

dizioni (1), (2) e le (2), (3) riportando in modo preciso la dimostrazione di tale equivalenza anche per aggiungere qualche osservazione.

Mi limito a considerare funzioni continue di una variabile lasciando al lettore le immediate estensioni alle funzioni continue di più variabili.

2. *Se un funzionale* $A[f]$ *definito nello insieme* Ω *delle funzioni continue in* (a, b) *soddisfa alla condizione*

$$A[f+\varphi] = A[f] + A[\varphi], \tag{4}$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè esso sia limitato in Ω *è che sia continuo.*

Per dimostrare che la condizione è necessaria si osservi che, se c è un numero razionale, la proprietà (4) induce l'altra:

$$A[cf] = cA[f];$$

supposto allora il funzionale limitato in Ω si ammetta che esso vi sia discontinuo per una funzione ψ. Ciò significa che esiste in Ω qualche successione ψ_n di funzioni tendente uniformemente a ψ ed esiste un numero positivo k tale che, per ogni numero naturale n, si abbia:

$$|A[\psi_n - \psi]| > k.$$

Posto allora

$$\psi_n - \psi = \varphi_n,$$

si ha:

$$\lim_{n, N_1} \varphi_n = 0 \qquad , \qquad |A[\varphi_n]| > k.$$

Si ha poi:

$$|A[\varphi_n]| = (\operatorname{sgn} A[\varphi_n]) \cdot A[\varphi_n] = A[(\operatorname{sgn} A[\varphi_n])\, \varphi_n]$$

e però, posto:

$$\Phi = \sum_1^m{}_j (\operatorname{sgn} A[\varphi_j])\, \varphi_j,$$

risulta, in forza di (4):

$$A[\Phi] > mk. \tag{5}$$

Ma, essendo σ un numero positivo arbitrario, si può scegliere la successione φ_n in modo che sia

$$|\varphi_n| < \frac{\sigma}{2^n}$$

e quindi

$$\max \Phi < \sigma$$

ed allora la (5) è assurda perchè, per ipotesi, il funzionale $A[f]$ è limitato.

Per provare ora la sufficienza della condizione enunciata si osservi con Riesz che, nelle ipotesi che il funzionale A [f] sia continuo e non limitato, esiste una successione di funzioni f_n, contenuta in Ω, tale che sia:

$$|f_n| < 1 \qquad |A[f_n]| > n^2.$$

La serie

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} (\operatorname{sgn} A[f_n]) \cdot f_n$$

converge uniformemente ad una funzione continua F e poichè il funzionale A [f] è continuo si ha:

$$A[F] = \sum_1^{+\infty} \frac{|A[f_n]|}{n^2}$$

ciò che è assurdo perchè la serie a secondo membro è divergente mentre A [F] deve essere un numero ben determinato.

3. Da quanto precede risulta, in particolare, che un funzionale possedente la proprietà (4) e non continuo per una funzione ψ di Ω, supposto esistente, è necessariamente non limitato in ogni intorno di questa funzione. Il Caccioppoli [1] ha dimostrato anzi che, nelle ipotesi ora enunciate, il funzionale non è limitato ed assume valori prossimi quanto si voglia ad un numero α arbitrariamente prefissato in qualsivoglia intorno di ciascuna funzione di Ω.

Di questa proprietà può darsi una dimostrazione semplice senza far uso del teorema di Riemann-Dini sulle serie.

Si osservi anzitutto che il funzionale, sempre nelle ipotesi dette, non è limitato in qualsivoglia intorno dello zero.

Essendo, infatti, ε un numero positivo arbitrario, con le notazioni precedenti sia

$$|\varphi_n| < \frac{\sigma}{2^n} < \varepsilon.$$

Posto:

$$\Phi_{n,m} = \sum_{n+1}^{n+m} (\operatorname{sgn} A[\varphi_j]) \varphi_j$$

è

$$\max |\Phi_{n,m}| < \varepsilon \quad , \qquad |A[\Phi_{n,m}]| > mk$$

ciò che prova quanto si è asserito.

Di più, nello stesso intorno di ampiezza ε dello zero, il funzionale prende valori prossimi quanto si voglia ad un numero α arbitrariamente

(1) R. Caccioppoli, *Sopra i funzionali distributivi*, « Bollettino della U. M. I. », 1926, p. 128 e p. 144.

prefissato. Sia, infatti, η un numero positivo arbitrario e si scelga l'intero m in modo che si abbia

$$mk > |\alpha|$$

e perciò anche

$$|A[\Phi_{m,n}]| > |\alpha|.$$

Osservato che, in forza di (4), è

$$A[0] = 0$$

e che, essendo r un numero razionale, si ha

$$|A[r\Phi_{n,m}]| = |rA[\Phi_{n,m}]| > |r| \cdot mk,$$

si scelga r positivo e minore di 1 in modo che risulti

$$0 < r|A[\Phi_{n,m}]| - |\alpha| < \eta.$$

Allora è

$$|r\Phi_{n,m}| = r|\Phi_{n,m}| < r\varepsilon < \varepsilon,$$
$$|A[r\Phi_{n,m}]| - |\alpha| < \eta,$$

e, se α è diverso da zero:

$$|A[(r \operatorname{sgn}\alpha) \cdot \Phi_{n,m}] - \alpha| < \eta$$

come si doveva dimostrare.

Se il funzionale è definito per la funzione ψ, essendo ora β un numero arbitrario, pongasi in quanto precede:

$$\alpha = \beta - A[\psi]$$

e inoltre

$$\Psi = \psi + (r \operatorname{sgn}\alpha)\Phi_{n,m};$$

si ha allora:

$$|\Psi - \psi| < \varepsilon$$
$$A[\Psi] = A[\psi] + A[r \operatorname{sgn}\alpha) \cdot \Phi_{n,m}]$$
$$|A[\Psi] - \beta| = |A[(r \operatorname{sgn}\alpha) \cdot \Phi_{n,m}] - \alpha| < \eta$$

cioè, in ogni intorno di ψ, il funzionale si approssima quanto si vuole ad un numero β prefissato ad arbitrio.

Resta però sempre da dimostrare l'esistenza di funzionali possedenti le proprietà sopra indicate.

Proprietà analoghe a queste ora esposte possiede una funzione f di una variabile che in un intervallo (a, b) verifichi l'equazione:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$x, y, x + y$ essendo punti di (a, b); vale a dire: se una tale funzione è discontinua in un punto essa è non limitata in ogni intorno di ciascun punto di (a, b). Ciò risulta subito da quanto precede o dal fatto che la funzione è *lineare* secondo Jensen. Secondo una dimostrazione del Caccioppoli una funzione siffatta non è misurabile [1]. Ma l'esistenza di tale funzione non è, che io sappia, in alcun modo dimostrata ed il risultato del Caccioppoli acquisterebbe interesse soltanto quando si riuscisse a costruire la funzione stessa.

4. Estendendo una denominazione che si ha già per le funzioni, dirò il funzionale $A[f]$, definito nello insieme Ω delle funzioni continue in uno stesso intervallo (a, b), *convesso* in Ω se, per ogni coppia di funzioni f_1, f_2 di Ω si ha:

$$A[f_1] + A[f_2] \geqq 2A\left[\frac{f_1 + f_2}{2}\right] \tag{6}$$

e lo dirò *concavo* se il funzionale $-A[f]$ è convesso.

Ripetendo un notissimo ed ingegnoso artifizio dovuto a Cauchy, è facile provare che se $A[f]$ è un funzionale convesso in Ω ed $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sono n funzioni di Ω si ha:

$$\frac{1}{n}\{A[f_1] + A[f_2] + \cdots + A[f_n]\} \geqq A\left[\frac{1}{n}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)\right].$$

L'esistenza di funzionali convessi è assicurata da qualche esempio. Così, se ponesi in Ω,

$$A[f] = \max |f|,$$

poichè, essendo f_1, f_2 elementi di Ω, è

$$\max |f_1| + \max |f_2| \geqq \max |f_1 + f_2| = 2 \max \left|\frac{f_1 + f_2}{2}\right|,$$

si ha in $A[f]$ un funzionale convesso manifestamente limitato.

Similmente, denotando con $O[f]$ l'oscillazione di $f(x)$ in (a, b), $O[f]$ è un funzionale convesso perchè

$$O[f_1] + O[f_2] \geqq 2O\left[\frac{f_1 + f_2}{2}\right].$$

5. Sussiste il teorema:

Un funzionale $A[f]$ convesso e limitato in Ω è ivi continuo.

(1) R. Caccioppoli, *Sull'equazione funzionale* $f(x + y) = f(x) + f(y)$, «Bollettino della U. M. I.», 1926, p. 227.

Difatti, se il funzionale, per ipotesi convesso e limitato in Ω, fosse discontinuo per la funzione f, dovrebbe esistere qualche successione di funzioni:

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots \tag{7}$$

contenuta in Ω e tendente uniformemente a f, ed un numero positivo k tale che sia, per ogni intero n:

$$|A[\varphi_n] - A[f]| > k.$$

Io dico allora che, in qualsivoglia intorno della funzione f, il funzionale è non limitato.

Intanto, per ipotesi, esiste un numero positivo K tale che, per qualunque funzione F di Ω si abbia

$$|A[F]| < K \max |F|; \tag{8}$$

allora, poichè la successione (7) converge uniformemente a f, la successione $\max |\varphi_n|$ converge a $\max |f|$ e però esiste qualche numero positivo M tale che sia, per qualunque n:

$$\max |\varphi_n| < M$$

e quindi

$$|A[\varphi_n]| < KM.$$

Sia ora ε un numero positivo arbitrario; si ponga

$$H = K\{\max |f| + \varepsilon\}$$

e si scelga un numero naturale n, maggiore di 1, e tale che

$$n > \frac{H + KM}{k};$$

inoltre sia φ un termine della successione (7) per il quale risulti

$$|\varphi - f| < \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Posto

$$f - \varphi = \delta$$

si consideri la successione di funzioni continue

$$\varphi \ , \ \varphi + \delta \ , \ \varphi + 2\delta, \cdots, \ \varphi + n\delta, \cdots;$$

si ha

$$|A[\varphi + \delta] - A[\varphi]| > k$$

e quindi sussiste l'una o l'altra delle disuguaglianze:

$$(9) \qquad A[\varphi + \delta] - A[\varphi] > k \quad , \quad A[\varphi + \delta] - A[\varphi] < -k .$$

Allora:

a) Se sussiste la prima delle (9), essendo il funzionale per ipotesi convesso, sussistono pure le disuguaglianze:

$$A[\varphi + 2\delta] - A[\varphi + \delta] \geqq A[\varphi + \delta] - A[\varphi] > k ,$$

$$A[\varphi + 3\delta] - A[\varphi + 2\delta] \geqq A[\varphi + 2\delta] - A[\varphi + \delta] > k ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A[\varphi + n\delta] - A[\varphi + \overline{n-1}\,\delta] \geqq A[\varphi + \overline{n-1}\,\delta] - A[\varphi + \overline{n-2}\,\delta] > k$$

e però, sommando membro a membro, si ottiene:

$$A[\varphi + n\delta] - A[\varphi] > nk .$$

Posto

$$\varphi + n\delta = \psi$$

è

$$|A[\psi]| + |A[\varphi]| > nk$$

$$|A[\psi]| > nk - |A[\varphi]| > nk - KM = K\{\max|f| + \varepsilon\}.$$

Avendosi poi

$$\psi - f = \varphi + n\delta - f = (n-1)\,\delta ,$$

$$|\psi - f| = (n-1)\,|\delta| < (n-1)\,\frac{\varepsilon}{n+1} < \varepsilon ,$$

$$|\psi| < |f| + \varepsilon ,$$

$$\max|\psi| < \max|f| + \varepsilon ,$$

per le precedenti risulta infine:

$$|A[\psi]| > K \max|\psi| \quad , \quad |\psi - f| < \varepsilon$$

la prima delle quali disuguaglianze contradice la (8), mentre la seconda esprime che la funzione ψ appartiene all'intorno di ampiezza ε di f. Il teorema è dunque dimostrato in questo caso *a*).

b) Se sussiste la seconda delle (9):

$$A[\varphi + \delta] - A[\varphi] < -k ,$$

poichè, per la convessità del funzionale, è

$$A[\varphi + \delta] + A[\varphi - \delta] - 2A[\varphi] \geqq 0$$

risulta:

$$A[\varphi - \delta] - A[\varphi] > k$$

$$A[\varphi - 2\delta] - A[\varphi - \delta] \geqq A[\varphi - \delta] - A[\varphi] > k$$

.....

$$A[\varphi - n\delta] - A[\varphi - \overline{n-1}\,\delta] \geqq A[\varphi - \overline{n-1}\,\delta] - A[\varphi - \overline{n-2}\,\delta] > k$$

e quindi

$$A[\varphi - n\delta] - A[\varphi] > nk.$$

Posto ora

$$\psi = \varphi - n\delta,$$

si ha successivamente:

$$A[\psi] - A[\varphi] > nk,$$

$$|A[\psi]| + |A[\varphi]| > nk,$$

$$|A[\psi]| > nk - |A[\varphi]| > nk - KM > H = K\{\max|f| + \varepsilon\},$$

$$\psi - f = \varphi - n\delta - f = -(n+1)\delta,$$

$$|\psi - f| = (n+1)|\delta| < (n+1)\frac{\varepsilon}{n+1} = \varepsilon,$$

$$|\psi| < |f| + \varepsilon,$$

$$\max|\psi| < \max|f| + \varepsilon,$$

$$|A[\psi]| > K \max|\psi|$$

ed il teorema è dimostrato anche in questo secondo caso *b*) e, quindi, in generale.

6. La proposizione inversa di quella ora dimostrata non sussiste perchè si possono addurre esempi di funzionali continui, convessi e non limitati.

Sia, ad esempio, Ω l'insieme delle funzioni continue in $(0, 1)$ ed essendo f un elemento di Ω si ponga:

$$A[f] = \int_0^1 \sqrt{1 + f^2(x)}\, dx.$$

Non esiste alcun numero positivo K tale che, per qualsivoglia f di Ω, sia:

$$|A[f] \leqq K \max|f|$$

perchè, per una funzione costante di valore L in $(0, 1)$, si ha

$$A[L] = \sqrt{1 + L^2}$$

ed è sempre possibile, fissato K, determinare L in modo che sia:

$$\sqrt{1 + L^2} > KL.$$

Il funzionale ora definito è convesso perchè, se f_1 ed f_2 sono elementi di Ω, si ha:

$$\sqrt{1 + f_1^2} + \sqrt{1 + f_2^2} \geqq 2\sqrt{1 + \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)^2}$$

e però

$$A[f_1] + A[f_2] \geqq 2\,A\left[\frac{f_1 + f_2}{2}\right];$$

esso è inoltre continuo perchè, se la successione f_n tende uniformemente a f si ha:

$$\lim_{f_n \to f} \int_0^1 \sqrt{1 + f_n^2(x)}\,dx = \int_0^1 \lim_{f_n \to f} \sqrt{1 + f_n^2(x)}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + f^2(x)}\,dx$$

cioè

$$\lim_{f_n \to f} A[f_n] = A[f].$$

Matematica. — *Sul significato geometrico della derivazione intrinseca.* Nota di Maria Pastori, presentata [1] dal Corrispondente U. Cisotti.

Il prof. Cisotti introdusse nel calcolo differenziale assoluto la *derivazione intrinseca* equivalente tanto alla derivazione covariante che a quella contravariante [2]. Mi propongo di mettere in evidenza un significato geometrico di tale derivazione e precisamente di mostrare quanto segue.

È noto che partendo dalle n^m componenti invarianti di un tensore m^{plo} di una varietà V_n (componenti che si ottengono mediante il riferimento della varietà ad un'ennupla di congruenze ortogonali) e derivandole intrinsecamente si arriva alle n^{m+1} componenti invarianti del tensore $(m + 1)^{plo}$ derivato del dato.

Ora queste componenti si possono distribuire in n gruppi di n^m, ciascuno dei quali costituisce l'insieme delle componenti di un nuovo tensore m^{plo}, che si può interpretare come il derivato del dato in una delle direzioni dell'ennupla.

Da questa osservazione discende immediatamente, come caso particolare, il significato geometrico dei coefficienti di rotazione di Ricci e di altri invarianti, ad essi intimamente legati, e introdotti da Levi-Civita.

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(2) U. Cisotti, *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto.* Questi «Rendiconti», serie V, vol. XXVII (1° sem. 1918), pp. 387-391.

Nei risultati indicati sono contenute le equazioni di trasporto per equivalenza o parallelismo sotto forma intrinseca [1].

1. *Componenti invarianti del derivato di un tensore in una data direzione.* - Sia $\mathbf{X}$ un tensore m^{plo} funzione dei punti di una qualunque varietà V_n, e ne siano $X_{i_1 \cdots i_p}^{k_1 \cdots k_q}$ $(i_1, \cdots i_p, k_1, \cdots k_q = 1, 2 \cdots n;\ p + q = m)$ le componenti miste. Consideriamone inoltre le componenti invarianti [2]

$$(1) \qquad \underset{r_1 \cdots r_m}{X} = \sum_{1}^{n}{}_{i_1 \cdots i_p\ k_1 \cdots k_q} X_{i_1 \cdots i_p}^{k_1 \cdots k_q} \lambda_{r_1}^{i_1} \cdots \lambda_{r_p}^{i_p} \lambda_{r_{p+1}}^{k_1} \cdots \lambda_{r_m}^{k_m}$$

dove le $\lambda_r^i, \lambda_{ir}$ $(r, i = 1, 2 \cdots n)$ sono rispettivamente i parametri e i momenti relativi alle linee di una generica ennupla di congruenze ortogonali della V_n, ossia le componenti contravarianti e covarianti dei versori tangenti, in ogni punto della V_n, alle linee dell'ennupla.

Il sistema derivato intrinsecamente del sistema (1) ha per elementi [3]:

$$(2) \qquad \underset{r_1 \cdots r_m | r_{m+1}}{X} = \frac{d \underset{r_1 \cdots r_m}{X}}{ds_{r_{m+1}}} - \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{q} \gamma_{r_l q r_{m+1}} \underset{r_1 \cdots r_{l-1} q r_{l+1} \cdots r_m}{X}$$

dove $ds_{r_{m+1}}$ è l'elemento d'arco di una generica linea della r_{m+1}^{esima} congruenza e:

$$(3) \qquad \gamma_{r_l q r_{m+1}} = -\gamma_{q r_l r_{m+1}} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} \lambda_q^h \lambda_{r_{m+1}}^k \lambda_{h|k r_l} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} \lambda_{hq} \lambda_{r_{m+1}}^k \lambda^{h|k}{}_{r_l}$$

sono i coefficienti di rotazione di Ricci [4] e sostituiscono i simboli di Christoffel delle formole di derivazione covariante.

Consideriamo ora, in un generico punto di V_n una direzione di parametri μ^j e di momenti μ_j $(j = 1, 2 \cdots n)$ e sia $\mathbf{M}$ il versore corrispon-

(1) Mi valgo dei risultati contenuti in una Nota del dott. A. Masotti, dal titolo: *Sull'equivalenza dei tensori*, in corso di pubblicazione presso questi «Rendiconti». In essa l'A. introduce molto semplicemente il concetto di trasporto per equivalenza, di un tensore lungo una linea di una qualunque varietà e, in base ad esso, la definizione del derivato di un tensore in una data direzione.

(2) Metto gli indici di invarianza sotto alle lettere corrispondenti per distinguerli da quelli di covarianza. Segno con ciò le notazioni usate dal prof. Cisotti nel suo attuale corso di Meccanica Superiore presso la R. Università di Milano.

(3) U. Cisotti, loc. cit., form. (1′) p. 388.

(4) Mantengo per essi la notazione ormai entrata nell'uso, per quanto gli indici di cui sono affetti non siano di covarianza.

dente. Le componenti miste del tensore ennuplo **U** derivato di **X** in questa direzione sono:

$$(4) \qquad U^{k_1 \cdots k_q}_{i_1 \cdots i_p} = \sum_j^n X^{k_1 \cdots k_q}_{i_1 \cdots i_p \, | \, j} \, \mu^j = \sum_1^n X^{k_1 \cdots k_q \, | \, j}_{i_1 \cdots i_p} \, \mu_j \, (1) .$$

Le sue componenti invarianti sono per le (1)

$$U_{r_1 \cdots r_m} = \sum_1^n X^{k_1 \cdots k_q}_{i_1 \cdots i_p \, | \, j} \, \lambda^{i_1}_{r_1} \cdots \lambda^{i_p}_{r_p} \, \lambda_{k_1 \, r_{p+1}} \cdots \lambda_{k_q \, r_m} \, \mu^j$$

Introduciamo ora anche per **M** le componenti invarianti $\underset{h}{\mu}$ (coseni degli angoli formati con le varie direzioni dell'ennupla) mediante le formole

$$(5) \qquad \mu^j = \sum_1^n {}_h \, \underset{h}{\mu} \, \lambda^j_h .$$

(1) A. Masotti, loc. cit., form. (16). Le formole (4) si possono anche ottenere direttamente nel seguente modo che sviluppiamo per semplicità per un tensore doppio.

Supponiamo dapprima che V_n sia euclidea e ne siano y_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) coordinate cartesiane ortogonali, x_i coordinate generali. Indichiamo con Y^s_r le componenti cartesiane di **X**, legate alle sue componenti miste dalle note formole:

$$(a) \qquad Y^s_r = \sum_1^n {}_{tl} \, X^t_l \, \frac{\partial y_s}{\partial x_t} \, \frac{\partial x_l}{\partial y_r} .$$

Per la direzione considerata i coseni direttori sono legati ai parametri dalle formole

$$\frac{dy_\nu}{ds} = \sum_1^n {}_j \, \frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} \, \mu^j .$$

Si ha dunque, in virtù di queste ultime, per le componenti cartesiane Z^s_r di **U**:

$$(b) \qquad Z^s_r = \sum_1^n {}_\nu \, \frac{\partial Y^s_r}{\partial y_\nu} \, \frac{dy_\nu}{ds} = \sum_1^n {}_j \, \frac{\partial Y^s_r}{\partial x_j} \, \mu_j .$$

E finalmente per le sue componenti miste:

$$U^k_i = \sum_1^n {}_{rs} \, Z^s_r \, \frac{\partial x_k}{\partial y_s} \, \frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \sum_1^n {}_j \, X^k_{ij} \, \mu_j .$$

A quest'ultimo risultato si giunge in virtù delle (b), delle (a) e delle seguenti:

$$\sum_1^n {}_r \, \frac{\partial x_l}{\partial y_r} \, \frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \varepsilon^l_i \qquad \left(\varepsilon^l_i = 1 \text{ per } i = l \; ; \; \varepsilon^l_i = 0 \text{ per } i \neq l \right)$$

$$\sum_1^n {}_r \, \frac{\partial x_l}{\partial y_r} \, \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} = - \sum_1^n {}_r \, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_l}{\partial y_r} \right) \frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \left\{ \begin{matrix} i \, j \\ l \end{matrix} \right\} .$$

Le formole (4) danno dunque, se la varietà è euclidea, le componenti miste del derivato del tensore dato nella direzione considerata. Se la varietà non è euclidea ad esse si può attribuire per definizione il medesimo significato.

Avremo:

$$(6)\qquad \underset{r_1\cdots r_m}{U} = \sum_{1}^{n}{}_h \mu_h \sum_{1}^{n}{}_{i\cdots i_p k_1\cdots k_q j} \underset{i_1\cdots i_p\,|\,j}{X^{k_1\cdots k_q}} \underset{r_1}{\lambda^{i_1}} \cdots \underset{r_p}{\lambda^{i_p}} \underset{r_p+1}{\lambda_{k_1}} \cdots \underset{r_m}{\lambda_{k_q}} \underset{h}{\lambda^{j}}$$

e per le (2):

$$(7)\qquad \underset{r_1\cdots r_m}{U} = \sum_{1}^{n}{}_h \underset{r_1\cdots r_m\,|\,h}{X}\ \underset{h}{\mu}{}^{(1)}.$$

Se supponiamo che la direzione considerata coincida con una delle direzioni dell'ennupla, che si abbia ad es. $\underset{1}{\mu} = \cdots \underset{t-1}{\mu} = \underset{t+1}{\mu} = \cdots \underset{n}{\mu} = 0\,;\ \underset{t}{\mu} = 1$ le (7) diventano:

$$(8)\qquad \underset{r_1\cdots r_m}{U} = \underset{r_1\cdots r_m\,|\,t}{X}.$$

Esse dicono che: *le derivate intrinseche rispetto all'indice t delle componenti invarianti di un tensore sono le componenti invarianti del derivato del tensore nella direzione della* t^{esima} *linea dell'ennupla.*

E le (7) costituiscono una estensione ai tensori emmupli delle formole che legano, nello spazio ordinario, le componenti di un vettore secondo una data direzione alle sue componenti cartesiane.

2. *Casi particolari.* - I secondi membri delle (7) eguagliati a zero danno, sotto forma intrinseca, le equazioni del trasporto per equivalenza del tensore **X** lungo una linea *l* tangente ad **M** (2).

Consideriamo il caso particolare del tensore semplice, o vettore.

Le (7) diventano:

$$(7')\qquad \underset{r}{U} = \sum_{1}^{n}{}_h \underset{r|h}{X}\ \underset{h}{\mu} \qquad (r = 1, 2 \cdots n)$$

con

$$(2')\qquad \underset{r|h}{X} = \frac{d\,\underset{r}{X}}{ds_h} - \sum_{1}^{n}{}_q \gamma_{rqh} \underset{q}{X}.$$

Se supponiamo che il vettore **X** sia unitario, ossia che anche le $\underset{r}{X}$ siano invarianti di direzione, i secondi membri delle (7') eguagliati a zero dànno

(1) Che la seconda sommatoria del secondo membro della (6) sia $\underset{r_1\cdots r_m|h}{X}$ si può vedere rifacendo lo sviluppo che trovasi, per l'analoga sommatoria con le componenti covarianti, nella citata Nota del prof. Cisotti, pp. 390 e 391, n. 1.

(2) V. la citata Nota del dott. A. Masotti.

la legge con cui variano i coseni della direzione individuata dal versore $\mathbf{X}$ che si trasporta per parallelismo lungo l (1).

Invarianti della forma (7′) sono le p_{sr} introdotte da Levi-Civita (2). Si ha infatti per la (5) e la (3)

$$p_{sr} = \sum_{ij}^{n} \lambda_{i|j} \lambda^i_r \mu^j = \sum_{h}^{n} \gamma_{srh} \mu_h = - \sum_{h}^{n} \gamma_{rsh} \mu_h \text{ (3)}.$$

Ora se si suppone che il versore $\mathbf{X}$ individui la s^{esima} linea dell'ennupla, le (2′) dànno (per $\underset{1}{X} = \cdots \underset{s-1}{X} = \underset{s+1}{X} = \cdots \underset{n}{X} = 0 ; \underset{s}{X} = 1$):

$$\underset{r|h}{X} = - \gamma_{rsh} = \gamma_{srh} .$$

Queste ultime dicono che, al variare di r, le γ_{srh} dànno le componenti invarianti del derivato, nella direzione della h^{esima} linea dell'ennupla, del versore che individua la linea s^{esima}; e per le precedenti le p_{sr} dànno, pure al variare di r, le componenti del derivato del medesimo versore nella direzione di invarianti $\underset{h}{\mu}$.

L'annullarsi di questi invarianti per qualunque r esprime la corrispondente legge di trasporto per parallelismo, così, ad es., le equazioni $\gamma_{srs} = 0$ $(r = 1, 2 \cdots n)$ esprimono le condizioni di autoparallelismo della linea s^{esima} (geodetica) (4).

(1) A. Carpanese, *Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque.* « Annali di Mat. », ser. III, t. XXVIII (1919), pp. 147–168, § 7 form. (14). Questa formola coincide, salvo le notazioni, con la nostra (7′) in virtù della (2′), osservando che:

$$\sum_{1}^{n}{}_h \frac{d\underset{r}{X}}{ds_h} \underset{h}{\mu} = \sum_{1}^{n}{}_{hj} \frac{\partial \underset{r}{X}}{\partial x_j} \lambda^j_h \mu_h = \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial \underset{r}{X}}{\partial x_j} \mu^j = \frac{d\underset{r}{X}}{ds_1} .$$

(2) T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto, raccolte da E. Persico.* Roma, Stock, 1925, p. 286, form. (11″). Cfr. nota (2). V. anche dello stesso A., *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana.* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XLII (1917), §§ 11–13.

(3) A. Carpanese, loc. cit., p. 161, form. (17).

(4) T. Levi-Civita, loc. cit., p. 291, form. (18′).

Matematica. — *Sul parametro differenziale secondo generalizzato.* Nota di A. Colucci, presentata [1] dal Corrisp. L. Tonelli.

1. In questa breve Nota mi propongo di estendere, al caso di n variabili, il teorema di Schwarz [2] relativo all'annullamento, in tutto un intervallo, della derivata seconda generalizzata di una funzione di una sola variabile.

Tale estensione, nel caso di due variabili, mi si è presentata del tutto spontanea quando mi sono proposto il problema, suggeritomi dalla lettura della fondamentale Memoria di L. Tonelli: *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier* [3], di sapere se sussiste per queste serie il teorema analogo di quello di Heine–Cantor, ben noto dalla teoria delle serie trigonometriche in un solo argomento [4].

Conto di potere, tra breve, rispondere a tale interessante questione. Per il momento, mi occupo soltanto dell'accennata estensione; la quale, anche se considerata isolatamente, mi sembra degna di nota.

2. In un dominio $\mathcal{T}$ dello spazio euclideo ad n dimensioni sia definita una funzione reale $f(\mathrm{P})$ del punto $\mathrm{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Detti $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_{2^n}$ i vertici di un dominio quadrato [5] di centro P e semidimensione h contenuto in $\mathcal{T}$, porremo per brevità

$$[f(\mathrm{P}), h] = \sum_r^{1, 2^n} f(\mathrm{P}_r) - 2^n \cdot f(\mathrm{P}).$$

Sussiste il teorema:

Se la funzione $f(\mathrm{P})$ possiede in $\mathcal{T}$ derivate parziali dei primi due ordini, finite e continue, in ogni punto P *interno a $\mathcal{T}$ ha luogo la relazione*

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(\mathrm{P}), h)}{h^2} = 2^{n-1} \cdot \Delta_2 f(\mathrm{P}), \tag{1}$$

dove Δ_2 è il solito simbolo del parametro differenziale secondo.

(1) Nella seduta del 18 marzo 1928.

(2) Picard, *Traité d'Analyse*, t. I (1922), pp. 355–357.

(3) « Annali di Matematica pura ed applicata », serie 4ª, t. IV (1927), pp. 29–72.

(4) Picard, loc. cit., pp. 357–360.

(5) Seguo la nomenclatura e le notazioni adottate dal prof. M. Picone nelle sue *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, « Circolo Matematico di Catania », Catania, 1923.

Infatti, per un punto P interno a $\mathcal{T}$ e per un opportuno h, qualunque siano gli interi $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$, vale la formula

$$f[x_1 + (-1)^{\nu_1} h, \cdots, x_n + (-1)^{\nu_n} h] =$$

$$= f(x_1, \cdots, x_n) + h \cdot \sum_i^{1,n} (-1)^{\nu_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{h^2}{2} \cdot \sum_{i,j}^{1,n} (-1)^{\nu_i + \nu_j} \frac{\partial^2 f(Q^{(\nu)})}{\partial x_i \, \partial x_j},$$

$Q^{(\nu)}$ essendo un certo punto *interno* al dominio quadrato di centro P e semidimensione h; punto che dipende naturalmente da f, P, h e dalle quantità ν_i.

Immaginando sostituite, nella formula precedente, in luogo di $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$, successivamente, tutte le disposizioni complete di classe n dei numeri 0 ed 1, e sommate membro a membro le formule corrispondenti, ricaviamo

$$[f(P), h] = \frac{h^2}{2} \cdot \sum_{\nu}^{1,2^n} \Delta_2 f(Q^{(\nu)}) + h^2 \cdot \sum_{\nu}^{1,2^n} \sum_{i<j}^{1,n} (-1)^{\nu_i + \nu_j} \frac{\partial^2 f(Q^{(\nu)})}{\partial x_i \, \partial x_j},$$

dove ogni valore dell'indice ν deve pensarsi associato ad una, e ad una soltanto di quelle disposizioni.

Dividendo primo e secondo membro per h^2 e passando poi al limite per $h \to 0$, tutti i punti $Q^{(\nu)}$ tendono a P, e per la supposta continuità delle derivate seconde si perviene facilmente alla (1) [1].

In particolare: *se $f(P)$ è armonica in $\mathcal{T}$, in ogni punto interno a tale dominio vale la relazione*

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(P), h]}{h^2} = 0.$$

Se nulla si suppone circa la continuità della funzione $f(P)$, l'esistenza delle derivate e la continuità delle medesime, (quando esistono), la forma stessa del risultato ottenuto ci guida a definire come valore del *parametro differenziale secondo generalizzato* di $f(P)$ in un punto P, il limite del primo membro della (1), *purchè questo limite esista e sia finito.*

3. Ammesso che il dominio $\mathcal{T}$ sia *limitato* vale il seguente

TEOREMA. - *Se una funzione $f(P)$, definita e continua in $\mathcal{T} + F\mathcal{T}$, è nulla in tutti i punti di $F\mathcal{T}$, ed inoltre nell'interno di $\mathcal{T}$ verifica la relazione*

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(P), h]}{h^2} = 0,$$

tale funzione è nulla anche in $\mathcal{T}$.

(1) Il secondo sommatorio tende a zero perchè per ogni fissata coppia di indici i e j, la somma $\nu_i + \nu_j$ prende $2^n - 2$ volte ciascuno dei due valori: 0 e 2, e 2^{n-1} volte il valore 1.

Infatti, supponiamo per un momento che in un punto Q *interno* a $\mathcal{T}$ sia, ad esempio, $f(Q) > 0$.

Consideriamo allora un dominio circolare di centro O $(0, 0, \cdots, 0)$ e raggio r contenente $\mathcal{T}$, e poniamo

$$\varphi(P) = f(P) + \omega^2 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - r^2),$$

dove ω è una costante assoggettata alla sola condizione di rendere $\varphi(Q) > 0$.

La funzione testè introdotta gode inoltre delle seguenti proprietà: è continua in $\mathcal{T} + F\mathcal{T}$; assume valori *non positivi* nei punti di $F\mathcal{T}$; in ogni punto P interno a $\mathcal{T}$ il parametro differenziale secondo generalizzato di essa vale $2^n n\omega^2$.

Dall'ipotesi fatta su ω, e dalle prime due proprietà enunciate si trae che $\varphi(P)$ deve raggiungere il massimo valore (positivo) *almeno* in un punto A *interno* a $\mathcal{T}$. Ma ciò è assurdo, perchè in virtù della terza proprietà, per un opportuno intorno quadrato di centro A e per tutti quelli concentrici e di dimensioni minori, deve risultare

$$[\varphi(A), h] > 0,$$

e questa non è compatibile con le relazioni

$$\varphi(A_i) \leq \varphi(A) \qquad (i = 1, 2, \cdots, 2^n).$$

Dunque non può essere $f(Q) > 0$. Analogamente si prova che non può aversi $f(Q) < 0$; onde ne segue che dev'essere $f(P) = 0$ in tutto $\mathcal{T}$.

Una semplice ed importante conseguenza del teorema ora dimostrato è espressa dal seguente enunciato:

Se due funzioni $f_1(P), f_2(P)$, *definite e continue in* $\mathcal{T} + F\mathcal{T}$, *prendono valori eguali su* $F\mathcal{T}$, *ed inoltre nell'interno di* $\mathcal{T}$ *verificano le relazioni*

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f_1(P), h]}{h^2} = g(P), \quad \lim_{h \to 0} \frac{[f_2(P), h]}{h^2} = g(P)$$

dove $g(P)$ *è una funzione limitata in* $\mathcal{T}$, *tali due funzioni debbono coincidere anche nell'interno di* $\mathcal{T}$.

Invero, basta prendere $\varphi(P) = f_1(P) - f_2(P)$, ed applicare a $\varphi(P)$ il teorema testè dimostrato.

Nel numero seguente faremo un'importante applicazione di quest'ultima proprietà al caso in cui $g(P) = 0$ in tutto $\mathcal{T}$.

4. Il dominio limitato del numero precedente si riduca ad un'ipersfera Σ. Vale allora il TEOREMA DI SCHWARZ GENERALIZZATO: *Se una funzione* $f(P)$ *finita e continua in* $\Sigma + F\Sigma$, *nell'interno di* $\mathcal{T}$ *verifica la relazione*

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(P), h]}{h^2} = 0, \tag{2}$$

essa è una funzione armonica in tale dominio.

Infatti, detta $f_1(P)$ la funzione *armonica* in Σ, che su $F\Sigma$ si identifica con $f(P)$ (funzione che è perfettamente determinata dall'integrale di Poisson relativo alla soluzione del problema di Dirichlet per l'isperfera), in virtù di un teorema enunciato nel n. 2, risulterà

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f_1(P), h]}{h^2} = 0$$

in ogni punto interno a Σ.

Ma, allora le due funzioni $f_1(P)$ e $f_2(P) = f(P)$ si trovano nelle condizioni del teorema precedente. Dunque, in $\Sigma + F\Sigma$ si ha

$$f(P) = f_1(P) \qquad \text{(c. d. d.)}.$$

La proprietà ora dimostrata ci pone in grado di dare una nuova definizione di funzione armonica, la quale richiede sulla $f(P)$ ipotesi molto più larghe di quelle fatte di consueto [1].

Matematica. — *Sur l'écart géodésique, la courbure riemannienne et la courbure associée de Bianchi.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata [2] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Soit V_n une variété riemannienne à n dimensions et B une géodésique quelconque. Soit g une autre géodésique appartenant au voisinage immédiat de B; c'est-à-dire, qu'à tout point M de B on peut faire correspondre un point P de g de telle façon que le vecteur $\overline{MP}$ et les écarts des directions des tangentes à B et g, en M et P, soient infiniment petits. Les équations aux variations de l'*écart géodésique* MP, dues à M. Levi-Civita, ont été publiées dans un « Mémoire des Mathematische Annalen » [vol. 97, 1926].

Soient

$$x^i = \varphi_i(\sigma) \tag{1}$$

les équations de la géodésique *base* B, et

$$x^i = \varphi_i(\sigma) + \xi^i \tag{2}$$

celles de la géodésique g.

Les ξ^i peuvent être regardées comme les composantes contrevariantes du vecteur élémentaire $\overline{MP}$.

(1) Non sarebbe privo di interesse sapere se sostituita l'ipotesi della continuità della $f(P)$ con qualche altra ipotesi meno restrittiva (ad es., supponendo $f(P)$ limitata in Σ) e supposto verificata la (2) per *qualunque orientamento degli assi*, si ricade oppur no sulle ordinarie funzioni armoniche.

(2) Nella seduta del 18 marzo 1928.

Si ds est l'arc élémentaire de g et $d\sigma$ l'arc correspondant de B, faisons

$$\frac{ds}{d\sigma} = 1 + \lambda. \tag{3}$$

L'allongement λ résulte infiniment petit avec les ξ^i et leurs dérivées.

Les équations de l'écart géodésique sont (formule (42) de p. 315 du Mémoire de M. le prof. Levi-Civita):

$$(D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} b^r = -\sum_{ihk} \{ir, hk\} b^i b^h \xi^k, \tag{4}$$

où les $(D^2\xi)^r$ sont les composantes contrevariantes du *deuxième dérivé* du vecteur $\overline{MP}$ et $b^i = \varphi_i'(\sigma)$ les paramètres de la direction tangente à B.

Si l'on suppose

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = 0,$$

les équations (4) peuvent s'écrire

$$(D^2\xi)^r = -\sum_{ihk} \{ir, hk\} b^i b^h \xi^k. \tag{5}$$

Nous nous proposons d'établir quelques relations très simples entre l'écart géodésique $\overline{MP}$, la courbure riemannienne de V_n dans l'orientation définie par les directions tangentes à B et MP, et la courbure *associée* avec la direction de MP.

a) Sur la surface géodésique S, de pôle M, tangente aux directions de $\overline{MP}$ et B en M, considérons un cycle infinitésimal MM'PM, auquel appartiennent MP et un arc infiniment petit MM' de B.

Soient:

α l'angle $M'\widehat{M}P$;

(v^i) les paramètres de la direction MP;

ΔA l'aire du cycle;

k la courbure de V_n dans l'orientation définie par (b^i) et (v^i).

Quand on déplace la direction (b^i) par parallélisme le long du cycle, la variation $\Delta\alpha$ de l'angle α vérifie l'équation

$$k = -\frac{\Delta\alpha}{\Delta A} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \sum_{ijhk} (ij, hk)\, b^i v^i b^h v^k. \tag{6}$$

En appelant ξ la grandeur de MP,

$$\xi^i = \xi v^i.$$

On a donc

$$-k\xi^2 \operatorname{sen}^2\alpha = -\sum_{ijhk}(ij\,,\,hk)\,b^i\,b^h\,\xi^j\,\xi^k = -\sum_j \xi^j \sum_{ihkr} a_{rj}\{ir\,,\,hk\}\,b^i\,b^h\,\xi^k =$$

$$= -\sum_{rj} a_{rj}\,\xi^j \sum_{ihk}\{ir\,,\,hk\}\,b^i\,b^h\,\xi^k;$$

ou

$$-k\xi^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \sum_r \left[(\mathrm{D}^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma}\,b^r\right]\xi_r \quad (7)$$

(1).

Dans l'hypothèse $\frac{d\lambda}{d\sigma} = 0$, on a

$$-k\xi^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \sum_r (\mathrm{D}^2\xi)^r\,\xi_r. \quad (8)$$

b) Soit

$$\Omega^i = \frac{dv^i}{d\sigma} + \sum_{\lambda\mu}\left\{\begin{matrix}\lambda\,\mu\\ i\end{matrix}\right\} v^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma}.$$

On appelle *courbure associée* avec la direction (v^i), comme on sait, le scalaire

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\sum_{ik} a_{ik}\,\Omega^i\,\Omega^k} \qquad \text{(Bianchi)}$$

a_{ik} étant les coefficients du tenseur fondamental. Mais

$$(\mathrm{D}\xi)^r = \frac{d\xi^r}{d\sigma} + \sum_{ih}\left\{\begin{matrix}i\,h\\ r\end{matrix}\right\} b^i\,\xi^h = \xi\Omega^r + v^r\,\frac{d\xi}{d\sigma}.$$

On aura, par suite,

$$\Omega^r = \frac{1}{\xi}\,(\mathrm{D}\xi)^r - \frac{1}{\xi}\,\frac{d\xi}{d\sigma}\,v^r.$$

Multiplions cette équation par $a_{rk}\,(\mathrm{D}\xi)^k$. On trouvera, après sommation,

$$\sum_{rk} a_{rk}\,\Omega^r\left[\xi\Omega^k + v^k\frac{d\xi}{d\sigma}\right] = \frac{1}{\xi}\sum_{rk} a_{rk}\,(\mathrm{D}\xi)^r\,(\mathrm{D}\xi)^k - \frac{1}{\xi}\,\frac{d\xi}{d\sigma}\sum_{rk} a_{rk}\left[\xi\Omega^k + v^k\frac{d\xi}{d\sigma}\right]v^r.$$

Ou

$$\frac{\xi}{R^2} = \frac{1}{\xi}\,(\mathrm{D}\xi)^2 - \frac{1}{\xi}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2,$$

parce que $\sum_{rk} a_{rk}\,v^r\,\Omega^k = 0$ (comme on vérifie aisément) et $\sum_{rk} a_{rk}\,v^r\,v^k = 1$.

(1) Cette formule est analogue à celle de M. U. Crudeli. Cfr. ces « Rendiconti », 1927, 5^1, p. 249.

C'est-à-dire

$$\frac{\xi^2}{R^2} = (D\xi)^2 - \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2. \tag{9}$$

c) En posant

$$\Theta^i = \frac{d\Omega^i}{d\sigma} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ i \end{matrix} \right\} \Omega^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma},$$

on a

$$(D^2\xi)^r = \frac{d}{d\sigma}(D\xi)^r + \sum_{ih} \left\{ \begin{matrix} ih \\ r \end{matrix} \right\} b^i (D\xi)^h = \frac{d}{d\sigma}\left[\xi\Omega^r + v^r \frac{d\xi}{d\sigma}\right] +$$

$$+ \sum_{ih} \left\{ \begin{matrix} ih \\ r \end{matrix} \right\} b^i \left[\xi\Omega^h + v^h \frac{d\xi}{d\sigma}\right] = \xi\Theta^r + 2\frac{d\xi}{d\sigma}\Omega^r + \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} v^r.$$

Donc

$$\sum_r \xi_r (D^2\xi)^r = \xi \sum_r \xi_r \Theta^r + 2\frac{d\xi}{d\sigma} \sum_r \xi_r \Omega^r + \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \sum_r \xi_r v^r =$$

$$= \xi \sum_{rk} a_{rk} \xi^k \Theta^r + 2\frac{d\xi}{d\sigma} \sum_{rk} a_{rk} \xi^k \Omega^r + \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \sum_{rk} a_{rk} \xi^k v^r =$$

$$= \xi^2 \sum_{rk} a_{rk} v^k \Theta^r + 2\xi\frac{d\xi}{d\sigma} \sum_{rk} a_{rk} v^k \Omega^r + \xi\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \sum_{rk} a_{rk} v^r v^k.$$

Mais

$$\sum_{rk} a_{rk} \Theta^r v^k = -\sum_{rk} a_{rk} \Omega^r \Omega^k = -\frac{1}{R^2},$$

parce que

$$\frac{d^2}{d\sigma^2} \sum_{rk} a_{rk} v^r v^k = 2 \sum_{rk} a_{rk} (\Theta^r v^k + \Omega^r \Omega^k) = 0$$

comme on peut aisément vérifier.

On a donc

$$\sum_r \xi_r (D^2\xi)^r = -\frac{\xi^2}{R^2} + \xi\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}.$$

L'équation (8) devient alors,

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + k\xi \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\xi}{R^2}. \tag{10}$$

D'ailleurs

$$\sum_r b^r \xi_r = \sum_{rk} a_{rk} b^r \xi^k = \xi \sum_{rk} a_{rk} b^r v^k = \xi \cos\alpha.$$

Et l'équation (7) se réduit à

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + k\xi \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\xi}{R^2} + \frac{d\lambda}{d\sigma}\cos\alpha. \tag{11}$$

En coordonnées localement cartésiennes, on a $\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2$, si v est le verseur de MP, et la formule (11) devient la (6) de M. Crudeli [1]

d) Quand au $a \cos\alpha = \text{const.}$,

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + k\xi\right) \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\xi}{R^2} \tag{12}$$

parce que $\frac{d\lambda}{d\sigma} = (\xi\cos\alpha)'' = \frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\cos\alpha$.

Si l'on déplace MP parallèlement, tout le long de B, au aura $\frac{1}{R} = 0$, et $\cos\alpha = \text{const.}$ Donc

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + k\xi = 0, \tag{13}$$

formule analogue à celle de Jacobi [2].

M. Crudeli avait supposé que la condition $\cos\alpha = \text{const.}$ était suffisante pour le déplacement parallèle de MP. M. Cartan [3] a montré, en exemplifiant avec l'écart de deux droites infiniment voisines de l'espace ordinaire, que ce n'est pas vrai; et M. Crudeli lui même l'a reconnu [4].

On peut voir facilement que, si la condition $\cos\alpha = \text{const.}$ est vérifiée, ou le déplacement de MP, tout le long de B, est parallèle, *ou la direction associée de* MP *est normale à* B. En effet, si l'on désigne par β l'angle de la direction associée de MP avec B, on aura

$$\frac{d(\cos\alpha)}{d\sigma} = \frac{\cos\beta}{R} \tag{14}$$

formule analogue à celle de M. Levi-Civita [5].

Donc, si $\cos\alpha = \text{const.}$, será $\frac{1}{R} = 0$, ou $\cos\beta = 0$.

Dans l'exemple de M. Cartan, $\frac{1}{R} \gtrless 0$, parce que le déplacement n'est pas parallèle; mais $\cos\beta = 0$, comme ou peut facilement vérifier.

(1) Cfr. la Note citée.
(2) Cfr. la Note citée de M. Crudeli.
(3) Cfr. ces « Rendiconti », 1927, 5, p. 610, note 1.
(4) Cfr. ces « Rendiconti », 1927, 6, p. 572.
(5) La formule (14) est un cas particulier de l'équation $\frac{d(\cos\alpha)}{d\sigma} = \frac{\cos\beta}{R} + \frac{\cos\beta'}{R'}$ entre l'angle α de deux directions quelconques (b^i) et (v^i), définies tout le long d'une courbe Γ, les courbures associées $\frac{1}{R}$ (avec (b^i)) et $\frac{1}{R'}$ (avec (v^i)), et les angles β (de (b^i) avec la direction associée de (v^i)) et β' (de (v^i) avec la direction associée de (b^i)). Voir la Note de l'auteur *Sobre a curvatura associada* (Congresso das associações espanhola e portugueza para o progresso das sciencias, Coimbra, 1925).

Meccanica. — *La piastra piana e la legge di Kutta-Joukowski*[1]. Nota di C. Ferrari, presentata [2] dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una Nota[3] pubblicata recentemente nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », il prof. Cisotti calcolò l'azione di una corrente piana irrotazionale di densità ρ, di velocità assintotica c, in presenza di una circuitazione C, sopra una lamina piana, inclinata dell'angolo β alla direzione assintotica della velocità, determinando le pressioni sulle due faccie opposte della piastra per mezzo della formola di Bernoulli. La forza risultante riesce così necessariamente perpendicolare alla lamina e non alla velocità all'infinito come vorrebbe il teorema di Kutta-Joukowski; il suo valore è inoltre $\rho c C \cos\beta$.

Tale eccezione è però soltanto apparente e diretta conseguenza del metodo di calcolo usato che non tiene conto della pressione agli orli [4]. Agli estremi della piastra si ha infatti velocità infinita e quindi pressione negativa, che si esercita sopra un'area infinitamente piccola, ma la cui grandezza è infinita dello stesso ordine.

Ne risulta una forza finita che giace nel piano della lamina e che composta colla forza normale trovata già dal prof. Cisotti dà una risultante normale alla direzione della velocità della corrente, come appunto vuole il teorema di Kutta-Joukowski. La dimostrazione è stata già data da Kutta per l'ala circolare e si può ripetere per l'ala piana.

(1) La presente Nota era già stata redatta prima che fosse a conoscenza dello scrivente la Comunicazione del prof. Straneo, *Intorno al teorema di Kutta-Joukowski*, inserita nel terzo fascicolo del corrente anno di questi « Rendiconti ».

In essa il risultante delle pressioni viene calcolato per un'ellissi abbracciante il doppio segmento sezione della lamina e a tale ellisse è senza dubbio applicabile il teorema di Kutta-Jonkowski, mentre qualcuno, almeno sotto l'aspetto analitico, potrebbe ancora dubitare che non sia lecita senz'altro l'estensione al limite quando l'ellissi si trasforma nel doppio segmento. Mi pare pertanto non privo di interesse dimostrare lo stesso risultato operando su linee intimamente legate alla presenza dei punti singolari, che permettono di separare le azioni snlla piastra già calcolate dal prof. Cisotti da quelle sugli orli che risultano separatamente dalla presente Nota.

(2) Nella seduta del 18 marzo 1928.

(3) U. Cisotti, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », vol. V, serie 6ª, 1° sem., fasc. 1, 1927.

(4) Questo è stato per la prima volta osservato da Kutta e più recentemente dal prof. Pistolesi, *A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », vol. VII, serie 6ª, fasc. 1, 1928.

2. Si ottiene [1] la rappresentazione conforme del piano Z del circolo nel piano ζ della lamina di larghezza $2l$ ponendo

$$\zeta = l e^{i\beta}\left\{\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{Z}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{Z}\right)\right\}. \tag{1}$$

I punti delle due faccie della lamina hanno per corrispondenti punti del contorno del cerchio $|Z| = 1$: in particolare all'orlo A della piastra corrisponde il punto del circolo $Z = e^{i\beta}$, ed all'orlo B il punto $Z = e^{i(\beta+\pi)}$.

È innanzi tutto facile dimostrare che le linee di corrente in prossimità degli orli A e B sono parabole che hanno il fuoco negli orli stessi. Il potenziale complesso del flusso attorno al cilindro di raggio uno è infatti

$$W = -c\left(Z + \frac{1}{Z}\right) - i\frac{C}{2\pi}\log Z. \tag{2}$$

In prossimità del punto A′ del circolo corrispondente all'orlo A si ha

$$Z = e^{i\beta} + ke^{i\mu} \tag{3}$$

essendo mod $|k|$ molto piccolo.

Sostituendo la (3) nella (2) si ottiene

$$W = -c\left[e^{i\beta} + ke^{i\mu} + e^{-i\beta}\left(1 - ke^{i(\mu-\beta)}\right)\right] - \frac{iC}{2\pi}\left[i\beta + ke^{i(\mu-\beta)}\right] = \Phi + i\Psi$$

da cui

$$\Psi = -ck\left[\operatorname{sen}\mu - \operatorname{sen}(\mu - 2\beta)\right] - \frac{C}{2\pi}k\cos(\mu - \beta).$$

Ma $\operatorname{sen}\mu - \operatorname{sen}(\mu - 2\beta) = 2\operatorname{sen}\beta\cos(\mu - \beta)$ e quindi l'equazione delle linee di corrente nelle vicinanze del punto A′ è

$$\Psi = -2kc\operatorname{sen}\beta\cos(\mu - \beta) - \frac{C}{2\pi}k\cos(\mu - \beta) = \text{costante}$$

alla quale si soddisfa ponendo

$$k\cos(\mu - \beta) = \text{costante} = h.$$

Si otterrà l'equazione delle linee di corrente in prossimità di A nel piano ζ ponendo nella (1) la (3). Si ha

$$\zeta = le^{i\beta}\left\{\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\beta} + ke^{i\mu}}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{e^{i\beta} + ke^{i\mu}}\right)\right\} = le^{i\beta}\left(2\cos^2\frac{\beta}{2} + k^2e^{2i(\mu-\beta)}\right).$$

(1) U. Cisotti, *Idromeccanica piana*, parte I, cap. IV.

Trasportando gli assi coordinati in A e ruotandoli dell'angolo β, in guisa da portare l'asse x a coincidere colla giacitura della lamina, si ottiene

$$Z = k^2 l e^{2i(\mu-\beta)} = \frac{h^2 l}{\cos^2(\mu-\beta)} e^{2i(\mu-\beta)}$$

ed in coordinate polari, posto

$$\theta = 2(\mu-\beta) \quad , \quad \varepsilon = \frac{h^2 l}{2}$$

$$\mathrm{mod}\,|Z| = \Delta = \frac{\varepsilon}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

equazione della parabola di parametro ε e di fuoco A.

Analogamente per l'altro orlo B.

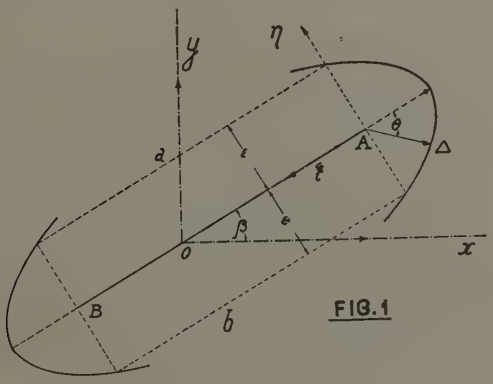


FIG. 1

3. Per determinare l'azione che la corrente esercita sulla piastra considero un circuito racchiudente nel suo interno la lamina e calcolo il valore limite del risultante delle pressioni su di esso quando si faccia rinserrare detto circuito attorno alla piastra. Alla tesi da svolgere riesce particolarmente vantaggioso considerare come circuito quello costituito da due parabole di uguale parametro ε e di fuochi A e B (vedi fig. 1) e dai due segmenti a e b di retta che risultano paralleli alla lamina e distanti da essa di ε.

Calcolo innanzi tutto l'azione sugli archi di parabola.

La velocità in un punto di essi si deduce dalla [1]

$$w = \frac{dW}{dz} = c\frac{Z^2-1}{Z^2-e^{2i\beta}} + \frac{C}{i\pi l e^{i\beta}\left(\frac{Z}{e^{i\beta}} - \frac{e^{i\beta}}{Z}\right)}$$

(1) U. Cisotti, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, loc. cit.

ponendo

$$Z = e^{i\beta} + ke^{i\mu}.$$

Si ha

$$w = c\,\frac{(e^{i\beta} + ke^{i\mu})^2 - 1}{(e^{i\beta} + ke^{i\mu})^2 - e^{2i\beta}} + \frac{C}{i\pi l e^{i\beta}\left(\dfrac{e^{i\beta} + ke^{i\mu}}{e^{i\beta}} - \dfrac{e^{i\beta}}{e^{i\beta} + ke^{i\mu}}\right)}$$

e a meno d'infinitesimi di ordine superiore al primo rispetto a k

$$w = c\,\frac{e^{2i\beta} - 1}{2ke^{i(\beta+\mu)}} + \frac{C}{2\pi l i k e^{i\mu}}$$

il cui modulo risulta

$$|w|_A = \frac{c}{k}\operatorname{sen}\beta - \frac{C}{2\pi l k}.$$

In modo analogo si deduce

$$|w|_B = \frac{c}{k}\operatorname{sen}\beta + \frac{C}{2\pi l k}.$$

Si deducono le pressioni, a meno d'una costante, all'orlo superiore A

$$p_A = {}^1/_2\,\rho\left(\frac{c}{k}\operatorname{sen}\beta - \frac{C}{2\pi l k}\right)^2$$

e all'orlo inferiore B

$$p_B = {}^1/_2\,\rho\left(\frac{c}{k}\operatorname{sen}\beta + \frac{C}{2\pi l k}\right)^2.$$

Posto $q = \Delta \operatorname{sen}\theta = \varepsilon \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ la pressione sugli archi di parabola, compresi fra $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$, proiettata su AB, è

$${}^1/_2\,\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cC\operatorname{sen}\beta}{\pi l k^2}\,dq = \rho\,\frac{cC\operatorname{sen}\beta}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \rho c C\operatorname{sen}\beta = f_1$$

indipendente dal parametro ε delle parabole considerate; si può pertanto ritenere che lo stesso risultato valga anche quando si faccia tendere ε a zero, cioè per gli orli della lamina. È poi facile verificare che la pressione risultante sugli stessi archi normale ad AB è sempre nulla qualunque sia ε.

Indicando pertanto con $\bar{f}_2$ la forza risultante sui tratti rettilinei a, b l'azione totale sul circuito considerato sarà

$$\bar{F}_\varepsilon = \bar{f}_1 + \bar{f}_2.$$

Facendo tendere a zero ε gli archi di parabola considerati tendono agli orli A e B, mentre a e b si accostano indefinitamente alla lamina mantenendosi sempre ad essa paralleli, fino a coincidere colle due faccie opposte della lamina stessa per $\varepsilon = 0$. L'azione risultante F sulla piastra sarà pertanto

$$\overline{F} = \lim_{\varepsilon=0} \overline{F}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon=0} \overline{f}_1 + \lim_{\varepsilon=0} \overline{f}_2 .$$

Ma $\lim_{\varepsilon=0} \overline{f}_1$ non è altro che la forza sopra calcolata, che giace nel piano della lamina e la cui grandezza è $\rho c C \operatorname{sen} \beta$, mentre $\lim_{\varepsilon=0} \overline{f}_2$ è la pressione normale alla piastra già calcolata dal prof. Cisotti, e la cui grandezza è $\rho c C \cos \beta$.

Se ne deduce che $\overline{F}$ è normale alla direzione assintotica della velocità e $\operatorname{mod} | F | = \rho c C$, come appunto vuole il teorema di Kutta-Joukowski.

Fisica. — *Sulle interferenze nelle propagazioni corpuscolari.* Nota di V. Ronchi, presentata [1] dal Socio A. Garbasso.

I fenomeni d'interferenza, che hanno costituito finora il sostegno incrollabile della teoria classica della propagazione luminosa, sono ritenuti caratteristici delle propagazioni ondulatorie e incompatibili con qualunque teoria corpuscolare.

In questa Nota discuteremo un caso di interferenze che presenta un andamento assai ostico ad essere spiegato secondo le idee classiche sulla continuità e sulla propagazione dell'energia radiante, e mostreremo, dopo, che lo stesso procedimento energetico è invece necessario, sempre secondo le idee classiche, in una particolare propagazione corpuscolare, in modo che i fenomeni interferenziali, sotto un certo aspetto non risultano più caratteristici delle propagazioni ondulatorie.

Due treni d'onde piane, identici e polarizzati nel piano della figura, vengano a interferire sotto un angolo β, nella regione rappresentata in sezione dal quadrilatero A B C D, della fig. 1. Se la propagazione ha luogo nel senso delle freccie, si suol dire che l'energia pervenuta da P continua per P', e analogamente continua per Q' quella che proviene da Q. Per quanto le due zone P' e Q' siano percorse identicamente (nelle nostre ipotesi) dall'energia e sia difficile poter distinguere fisicamente fra loro due cose identiche, per spiegare il senso del nostro ragionamento occorre met-

(1) Nella seduta del 18 marzo 1928.

tere in evidenza che è un postulato della teoria classica il propagarsi la radiazione (e quindi l'energia) in linea retta, nei mezzi isotropi e omogenei, e indipendentemente da altre manifestazioni energetiche che possa incontrare sul percorso.

Questo postulato rimane alla base di tutti i calcoli che si fanno sulle interferenze di qualsiasi specie.

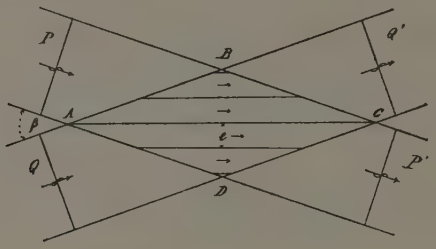


Fig. 1.

Ma nel tratto A B C D si formano delle onde stazionarie piane normali al piano della figura, parallele ed equidistanti, la cui equidistanza è

$$(1) \qquad e = \lambda/2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} .$$

Colle nostre ipotesi, nei piani nodali l'ampiezza di vibrazione è nulla; perciò essi non sono mai sede di energia e non sono quindi mai attraversati dall'energia. Allora vuol dire che l'energia proveniente da P si incanala nei piani ventrali della zona A C B, si propaga nella direzione A C e infine riesce per la direzione Q'. Il primo piano nodale prossimo ad A C agisce come uno specchio perfetto.

Analogamente per l'altra parte A C D della figura.

La cosa si presenta, classicamente, assurda. Che l'energia proveniente da Q si rifletta e faccia deviare quella proveniente da P è un concetto che non trova nessun riscontro nelle idee e nei calcoli generalmente eseguiti per le onde stazionarie. I vettori propagantisi sono additivi algebricamente e indisturbatamente.

D'altra parte il fenomeno ha già attratto l'attenzione di altri fisici, ma non ha ricevuto ancora nessuna spiegazione.

Un comportamento di questo genere è invece molto naturale nell'urto di corpi materiali perfettamente elastici. Se nelle direzioni P e Q procedono con egual velocità due masse identiche, e le loro traiettorie sono complanari, nella regione A B C D può aver luogo l'urto e la massa proveniente da P è quella che procede per Q'.

Con questo però non si può ancora giungere a nulla che abbia corrispondenza nelle onde stazionarie e non ci si può giungere se anche si immagina una moltitudine di corpuscoli animati di moto concorde ma senza particolare distribuzione.

Il fenomeno invece assume un aspetto interessantissimo quando si immagini una propagazione regolare di corpuscoli uguali, ugualmente veloci e distribuiti uniformemente su linee (*linee d'ordine*) normali alla traiettoria o leggermente inclinate su questa. Infatti se nella fig. 2 con $a\,b\,c\,\cdots$ indichiamo una schiera di corpuscoli della regione P e con $a'\,b'\,c'\,\cdots$ ne indichiamo altrettanti nella regione Q, nel primo punto di contatto A dopo il primo urto a devia da una parte e a' dall'altra scambiandosi le direzioni del moto; ma a va ad urtare in b, e ritorna verso la direzione primitiva, finchè incontra di nuovo a', che a sua volta è stato deviato da b'; e così

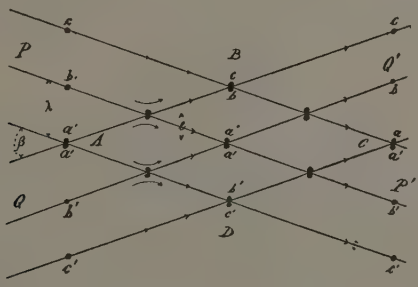


Fig. 2.

via, sia per i primi come per tutti gli altri corpuscoli; mentre appena sono finiti gli urti, continua la propagazione rettilinea dei corpuscoli provenienti da P lungo la direzione Q' e quelli di Q procedono per P'.

Se dunque i corpuscoli considerati sono di energia (e se anche sono materiali hanno seco l'energia cinetica), si conclude che il percorso di un elemento energetico deve essere proprio quello verificato nella formazione delle onde stazionarie discusso sopra.

Questa serie di percorsi a zig–zag lungo traiettorie medie inclinate di $\beta/2$ su quella di propagazione dei singoli corpuscoli prima e dopo gli urti presenta una struttura energetica e anche geometrica del tutto corrispondente a quella delle onde stazionarie e potrebbe identificarsi addirittura con queste. Ossia si può concludere che le propagazioni ondulatorie e le propagazioni corpuscolari in certe condizioni presentano dei fenomeni energeticamente simili.

In questo senso le onde stazionarie non sono più un fenomeno caratteristico delle propagazioni ondulatorie.

Continuando lo studio del fenomeno nei suoi particolari, mentre da una parte si arriva a delle conclusioni seducenti, dall'altra si arriva a delle circostanze contrarie all'esperienza a meno che non si introducano delle ipotesi molto strane.

Crediamo interessante esporre le principali considerazioni favorevoli e contrarie, data l'importanza dell'argomento.

Innanzi tutto la equidistanza delle onde stazionarie corpuscolari (chiamando così quel processo di riflessioni successive sopra descritto) è proporzionale alla equidistanza dei corpuscoli sulle loro linee di ordine $a\,b\,c\cdots$; cioè la larghezza delle frange d'interferenza verrebbe a risultare inversamente proporzionale alla frequenza dei corpuscoli sulle linee d'ordine, come col linguaggio ordinario essa è inversamente proporzionale alla frequenza della radiazione. Ciò porterebbe a far corrispondere la equidistanza dei corpuscoli alla lunghezza d'onda, in una maniera molto naturale.

Disgraziatamente l'equidistanza delle onde stazionarie dipende da β secondo la legge

$$e = \lambda/2 \cos\frac{\beta}{2}$$

ben diversa dalla (1). Ed in questo sta l'obiezione piu grave che si può muovere al nuovo modo di considerare le onde stazionarie.

Nell'ultima formula abbiamo messo λ al numeratore, intendendo di attribuirgli il nuovo significato di equidistanza dei corpuscoli sulle loro linee. Ma la corrispondenza è puramente formale, e, se vogliamo, numerica.

Non è privo di interesse a questo proposito osservare che in un'onda sferica i corpuscoli debbono aumentare la loro equidistanza sulle linee d'ordine, mentre la lunghezza d'onda non aumenta. Ma se si considerano le onde stazionarie fra onde sferiche, con grande approssimazione esse pure si allargano linearmente al crescere della loro distanza dai centri di radiazione, in modo che rimane costante la relazione fra larghezza delle frange e equidistanza dei corpuscoli sulle linee d'ordine.

Concludendo:

Nella prima parte di questa Nota si è posto in rilievo un fenomeno energetico che dal punto di vista classico non ha ancora avuto una spiegazione esauriente, e ciò proprio nel pieno delle manifestazioni interferenziali.

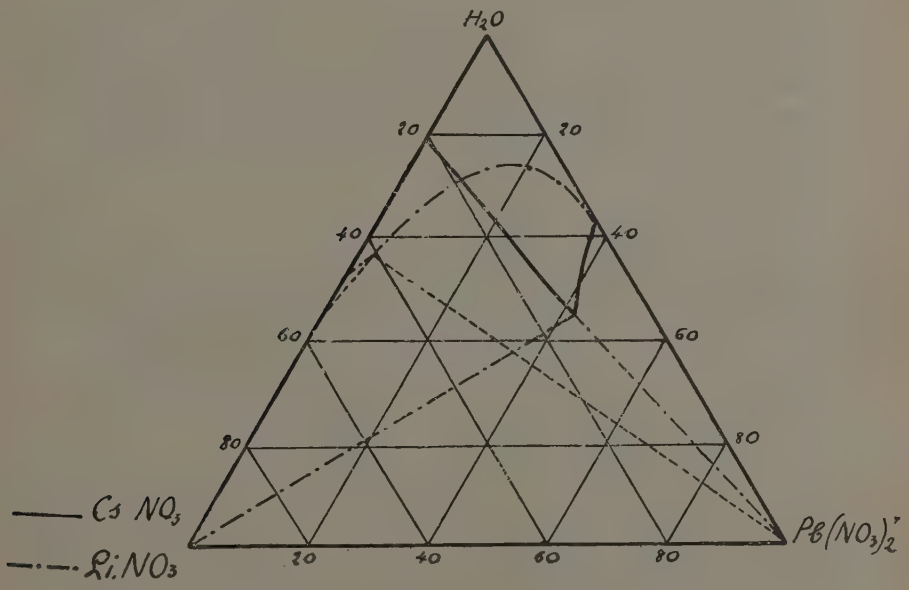
Nella seconda parte si è mostrato che delle propagazioni di corpuscoli regolarmente distribuiti possono presentare dei fenomeni paragonabili con quelli delle onde stazionarie, per cui il processo energetico prima osservato è addirittura necessario. Sotto questa forma si può dire che i fenomeni interferenziali non sono caratteristici delle propagazioni ondulatorie.

Nella terza parte si mettono in evidenza alcuni pregi e alcune deficienze di questo nuovo modo di considerare le cose.

Chimica. — *I sistemi:* $Pb(NO_3)_2 - LiNO_3 - H_2O$ e $Pb(NO_3)_2 - CsNO_3 - H_2O$ *a* 25°. Nota di G. Malquori[1], presentata[2] dal Socio N. Parravano.

In una Nota precedente[3] ho comunicato i risultati ottenuti nello studio del sistema: $NH_4NO_3 - Pb(NO_3)_2 - H_2O$ a diverse temperature.

Quelle ricerche hanno messo in evidenza che la presenza di nitrato di ammonio accresce la solubilità del nitrato di piombo, e che l'aumento di solubilità diminuisce con il crescere della temperatura.



L'osservato aumento di solubilità, ed in particolare la sua variazione con la temperatura, non può non farsi risalire alla formazione di complessi, come già Le Blanc e Noyes[4] e Gladstone e Saunders[5] hanno ammesso per le soluzioni di nitrato di piombo e nitrato potassico.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 4 dicembre 1927.
(3) « Atti II Congresso Chim. pura e appl. », p. 1135 (1926).
(4) « Zeit. Phys. Chem. », *6*, 385 (1890).
(5) « Journ. Chem. Soc. », *123*, 2134 (1923).

Ho voluto pertanto estendere la ricerca anche ad altri nitrati alcalini, e precisamente a quelli dei due metalli a peso atomico massimo e minimo: il cesio e il litio. Ho così studiato a 25° i sistemi: $Pb(NO_3)_2$ — $LiNO_3$ — H_2O e $Pb(NO_3)_2$ — $CsNO_3$ — H_2O.

I risultati sono indicati nella figura.

Se si confrontano i valori ottenuti, con quelli di Gladstone a Saunders [1] per i sistemi: KNO_3 — $Pb(NO_3)_2$ — H_2O e $NaNO_3$ — $Pb(NO_3)_2$ — H_2O a diverse temperature, si vede nettamente che l'idratazione dei cationi alcalini esercita una evidente influenza sulle osservate variazioni di solubilità, in quanto l'aumento di solubilità del nitrato di piombo causato dall'aggiunta del nitrato alcalino, cresce con il raggio ionico del catione.

D'altra parte il fatto che gli aumenti di solubilità sono tanto maggiori quanto più bassa è la temperatura sta a dimostrare l'esistenza di formazioni complesse.

Queste deduzioni saranno svolte ampiamente in un'altra Nota nella quale riferirò anche i risultati di uno studio dettagliato delle conducibilità e delle viscosità in funzione della temperatura e della concentrazione. Questo studio conferma pienamente le previsioni che possono trarsi dalle curve di solubilità.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* – VI. *I Molibdovanadotioacquati.* Nota di L. Fernandes, presentata [2] dal Corrisp. L. Rolla.

In una precedente Nota [3] ho descritto una serie di polisolfomolibdati derivanti da un ipotetico acido tioacquico di formula

$$\left[H_2(S)_6\right]H_{10}$$

tali composti erano stati derivati sostituendo i sei atomi di solfo di questo acido con sei aggruppamenti bivalenti MoS_4.

A questi complessi era stata assegnata una formula del tipo:

$$\left[H_2(MoS_4)_6\right]\begin{matrix}R'_5\\H_5\end{matrix}.$$

(1) Loc. cit.
(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.
(3) «Rend. Acc. Lincei», 165, (1927), II.

Tale formula di costituzione faceva prevedere la possibilità di ottenere in modo analogo, dei composti nei quali i sei atomi di solfo fossero sostituiti da aggruppamenti non eguali. In altre parole si sarebbero dovuti ottenere degli eteropolitioacquati.

Per la genesi di questi occorreva far reagire aggruppamenti facilmente coordinabili dai due atomi di idrogeno dell'acido tioacquico.

La letteratura degli eteropoliacquati ossigenati ci insegna come solo il molibdeno, il volframio e il vanadio non abbiano tendenza a fungere da atomi coordinanti, ma diano luogo invece ad aggruppamenti anionici facilmente coordinabili da altri elementi quali l'arsenico, il silicio, il boro o l'aggruppamento H_2.

Derivati di quest'ultimo si conoscono solo tre serie di composti: i molibdovanadati, i volframovanadati e i molibdovolframati.

Nel caso attuale però l'acido solfovolframico va scartato perchè la sua polimerizzazione avviene in condizioni che sono incompatibili con le condizioni di stabilità dei solfomolibdati e solfovanadati.

Questi due composti, per azione dell'idrogeno solforato in forte concentrazione, vengono polimerizzati e dànno lugo ai polisali. I solfovolframati invece presentano una stabilità molto superiore e per azione dell'idrogeno solforato, non vengono polimerizzati; la colorazione gialla, caratteristica di questi composti, non viene per nulla alterata.

Tale polimerizzazione si raggiunge soltanto per azione di acido acetico concentrato in forte eccesso, si ottiene allora una colorazione rosso sangue e dopo un certo tempo si separano i prodotti della polimerizzazione.

Date le grandi difficoltà sperimentali, tali prodotti non sono stati ancora identificati.

La presenza di acido acetico è però incompatibile con la stabilità dei solfomolibdati e solfovanadati: esso provoca la completa decomposizione di questi sali. In base a queste considerazioni, ho tentato la preparazione di composti molibdovanadici, formandosi in condizioni analoghe gli isopoliderivati dei due solfosali.

La stabilità del solfovanadato di ammonio è molto inferiore a quella del solfomolibdato, e si può conservarlo solo tenendolo immerso nella propria acqua madre. Non appena spremuto esso comincia ad emettere grandi quantità di ammoniaca e separa solfo.

La rapidità di decomposizione è tale che il sale si riscalda spontaneamente. Questa grande instabilità è dovuta al fatto che il vanadio si riduce ed ossida l'idrogeno solforato a solfo.

Anche in soluzione, il solfovanadato si decompone rapidamente con separazione di un precipitato marrone amorfo; in presenza di qualche goccia di ammoniaca la decomposizione avviene molto più lentamente.

Per la sintesi dei solfomolibdovanadati si prepara la soluzione acquosa del solfomolibdato e si satura con idrogeno solforato; a questa si aggiunge

la soluzione del solfovanadato preparata sciogliendo il sale in poca acqua resa alcalina con alcune gocce di ammoniaca. Si prosegue ancora per alcune ore la saturazione con idrogeno solforato in bottiglia a pressione.

Quando si è raggiunto il punto giusto di saturazione con l'idrogeno solforato, si nota sulle pareti della bevuta una caratteristica iridescenza; a questo punto la saturazione va interrotta. Si copre allora la bevuta con un tappo di gomma e si lascia a sè per qualche minuto in modo che il sale possa depositarsi completamente. Si spreme bene alla pompa e poi si lava con alcool ed etere.

L'acqua decompone rapidamente questi sali e non possono quindi essere lavati con questa.

Se si esagera nella saturazione con idrogeno solforato o se la soluzione del solfovanadato non è sufficentemente alcalina, si separano dei prodotti marroni amorfi che inquinano fortemente il sale, o questo si separa sotto forma di precipitato non cristallino che è impossibile spremere e lavare.

I sali di ammonio sono gli unici che si possono preparare per sintesi diretta, perchè non si può per ragioni sperimentali preparare altri solfovadanati che quello di ammonio. I sali alcalini sono troppo solubili e non si riesce a cristallizzarli, quello di guanidina invece è insolubile. Dai sali di ammonio furono preparati i sali di guanidina e quelli di tallio, per doppio scambio, tenendo immersi quelli di ammonio in una soluzione concentrata di cloruro di guanidina o di nitrato di tallio.

Tanto i sali di guanidina che quelli di tallio sono molto più stabili dei sali di ammonio. Questi si decompongono assai rapidamente con sviluppo di idrogeno solforato, separazione di solfo e riduzione del vanadio.

Non appena spremuti e asciugati i sali, venivano immediatamente eseguiti i prelevamenti per l'analisi perchè dopo pochi minuti si iniziava una parziale decomposizione. Tale decomposizione poteva essere notata durante le operazioni analitiche eseguite per il dosaggio dello solfo. Appena preparato, il complesso si scioglie completamente nell'acqua ossigenata ammoniacale; dopo 30-40 minuti la solubilità non è completa e si separano quantità rilevanti di solfo. I sali di guanidina e di tallio possono essere invece conservati per parecchie ore senza che subiscano una visibile decomposizione.

Fu da me eseguita una serie di preparazioni partendo da piccole concentrazioni di solfovadanato in presenza di un eccesso di solfomolibdato e arrivando a valori inversi di concentrazione. I composti ottenuti furono soltanto tre:

1. – $4MoS_3 \cdot V_2S_5 \cdot 2.5(NH_4)_2S \cdot 2.5H_2S \cdot 10H_2O$
2. – $3MoS_3 \cdot 1.5V_2S_5 \cdot 2.5(NH_4)_2S \cdot 2H_2S \cdot 12H_2O$
3. – $2MoS_3 \cdot 2V_2S_5 \cdot 2.5(NH_4)_2S \cdot 1.5H_2S \cdot 25H_2O$.

Anche in numerose preparazioni nelle quali molibdeno e vanadio si trovavano nel rapporto di:

$$3(NH_4)_2MoS_4 : 1(NH_4)_3VS_4$$
$$4(NH_4)_2MoS_4 : 1(NH_4)_3VS_4$$
$$5(NH_4)_2MoS_4 : 1(NH_4)_3VS_4$$
$$6(NH_4)_2MoS_4 : 1(NH_4)_3VS_4$$
$$7(NH_4)_2MoS_4 : 1(NH_4)_3VS_4$$

fu ottenuto il composto 1.

Per concentrazioni superiori di molibdeno, fu ottenuto del parasolfomolibdato impuro per piccole traccie di vanadio (0.5 — 1.5 %).

Lo stesso nel corso delle preparazioni ricche di vanadio. Fu ottenuto il composto 3 fino alla concentrazione di

$$1(NH_4)_2MoS_4 : 6(NH_4)_3VS_4 .$$

Per concentrazioni superiori di vanadio, furono ottenuti prodotti contenenti molibdeno solo come impurezza.

Se riprendiamo in considerazione l'ipotesi dell'acido tioacquico e sostituiamo i sei atomi di solfo con gli aggruppamenti degli acidi solfomolibdico e solfovanadico otterremo dei derivati la cui composizione coincide con quella dei tre composti da me preparati e dei quali ho già riportato le formule brute.

$$\begin{bmatrix} (MoS_4)_4 \\ H_2 \\ (VS_3)_2 \end{bmatrix} (NH_4)_5 \\ H_3 \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} (MoS_4)_3 \\ H_2 \\ (VS_3)_3 \end{bmatrix} (NH_4)_5 \\ H_2 \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} (MoS_4)_2 \\ H_2 \\ (V_3S)_4 \end{bmatrix} (NH_4)_5 \\ H \qquad (3)$$

Mentre che nel caso dei sali ossigenati e in particolare dei molibdovanadati, nessuna misura nè chimica, nè chimico-fisica aveva in modo sicuro avvalorato l'ipotesi dell'esistenza di una molecola di idrogeno, coordinante di aggruppamenti anionogeni; la presenza di molecole di idrogeno solforato di costituzione facente parte della molecola complessa, determinate analiticamente, avvalora anche nel caso attuale tale ipotesi e porta un nuovo contributo alla teoria degli acidi acquici e tioacquici.

Per l'analisi dei molibdovanadotioacquati, veniva operato separatamente su tre campioni.

Sopra un campione veniva dosato lo solfo ossidando il sale con acqua ossigenata ammoniacale e precipitando poi nella soluzione acidificata con acido cloridrico il solfato di bario.

Un altro campione veniva sciolto in acido cloridrico contenente acqua ossigenata; scacciata poi completamente quest'ultima per ebollizione, nella soluzione ancora acida veniva precipitato il molibdeno come solfuro; nella

soluzione di questo, dopo successiva ossidazione e neutralizzazione con carbonato sodico veniva precipitato il vanadio come vanadato mercuroso e pesato poi come anidride vanadica previa calcinazione.

Nei sali di ammonio l'ammoniaca veniva spostata con idrato sodico all'ebollizione e raccolta poi su acido solforico titolato.

Per i sali di guanidina veniva dosato l'azoto gasvolumetricamente per combustione del sale. Nel caso invece dei sali di tallio, questo veniva precipitato con ioduro potassico dalla soluzione del sale in acqua ossigenata ammoniacale, nella soluzione veniva poi dosato il molibdeno e il vanadio.

Resultati analitici.

$$\left[\begin{matrix}(MoS_4)_4\\(VS_3)_2\end{matrix}\right]\begin{matrix}(NH_4)_5\\H_3\end{matrix} \cdot 10H_2O$$

Microcristallino nero con riflessi marroni.

Trovato °/o	Mo	26.17	V	7.0	S	47.96	NH_4	6.19	H_2O 13.3
Calcolato °/o	Mo	26.21	V	6.96	S	48.06	NH_4	6.14	H_2O 12.7

$$\left[\begin{matrix}(MoS_4)_3\\(VS_3)_3\end{matrix}\right]\begin{matrix}(NH_4)_5\\H_2\end{matrix} \cdot 12H_2O$$

Nero microcristallino.

Trovato °/o	Mo	19.11	V	10.52	S	46.19	NH_4	4.50	H_2O 21.1
Calcolato °/o	Mo	19.73	V	10.48	S	46.03	NH_4	4.94	H_2O 20.8

$$\left[\begin{matrix}(MoS_4)_2\\(VS_3)_4\end{matrix}\right]\begin{matrix}(NH_4)_5\\H\end{matrix} \cdot 25H_2O$$

Nero microcristallino con riflessi violacei.

Trovato °/o	Mo	11.81	V	11.50	S	39.48	NH_4	4.95	H_2O 29.3
Calcolato °/o	Mo	12.1	V	12.9	S	40.5	NH_4	5.56	H_2O 29.1

$$\left[\begin{matrix}(MoS_4)_4\\(VS_3)_2\end{matrix}\right]\begin{matrix}Gu_5\\H_3\end{matrix} \cdot 15H_2O$$

Microcristallino, marrone cupo.

Trovato °/o	Mo	20.78	V	6.1	S	40.01	N	11.51	H_2O 15.6
Calcolato °/o	Mo	21.74	V	5.77	S	39.84	N	11.88	H_2O 15.2

$$\left[\begin{matrix} H_2 & (MoS_4)_3 \\ & (VS_3)_3 \end{matrix}\right] \begin{matrix} Gu_5 \\ H_2 \end{matrix} \cdot 22H_2O$$

Nero violaceo microcristallino.

Trovato °/o	Mo	15.60	V	8.56	S	37.5	N	11.3	H_2O	23.10
Calcolato °/o	Mo	15.90	V	8.46	S	37.11	N	11.60	H_2O	22.8

$$\left[\begin{matrix} H_2 & (MoS_4)_2 \\ & (VS_3)_4 \end{matrix}\right] \begin{matrix} Gu_5 \\ H \end{matrix} \cdot 15H_2O$$

Viola cupo microcristallino.

Trovato °/o	Mo	11.87	V	13.10	S	39.6	N	13.07	H_2O	16.3
Calcolato °/o	Mo	11.91	V	12.7	S	39.8	N	13.18	H_2O	16.89

$$\left[\begin{matrix} H_2 & (MoS_4)_2 \\ & (VS_3)_4 \end{matrix}\right] \begin{matrix} Tl_5 \\ H \end{matrix} \cdot 60H_2O$$

Viola scuro microcristallino.

Trovato °/o	Mo	6.3	V	6.9	S	20.25	Tl	32.22	H_2O	34.2
Calcolato °/o	Mo	6.1	V	6.5	S	20.40	Tl	32.50	H_2O	34.4

Colgo l'occasione per ringraziare i dottori C. Orlandi e F. Palazzo che mi hanno validamente coadiuvato nella parte sperimentale di questa ricerca.

Chimica. — *Sul solfuro di zinco precipitato.* Nota [1] di G. R. Levi e C. G. Fontana, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Il solfuro di zinco precipitato apparirebbe di struttura o, per lo meno, di dimensioni di granuli cristallini assai diverse secondo i metodi con i quali viene precipitato. Infatti sono ben noti gli accorgimenti che si dànno in analisi quantitativa per la precipitazione di questa sostanza.

Inoltre, dato il dimorfismo del solfuro di zinco, parecchi AA. si sono preoccupati di verificare le condizioni di formazione delle due forme. Per quanto riguarda la formazione del solfuro di zinco allo stato secco, se ne occuparono Allen e Crenshaw [3] e poi Scheede e Gantzckow [4], fissando il limite di trasformazione blenda-wurzite ad una temperatura attorno a 1020°.

Per il nostro caso dobbiamo piuttosto riferirci alla formazione da soluzioni acquose a diverse condizioni; di tale formazione si occuparono diversi sperimentatori stabilendo le condizioni di acidità, il limite di tale acidità per la precipitazione completa, il tempo di precipitazione in funzione della concentrazione degli ioni idrogeno [5].

Gli autori Allen e Crenshaw precedentemente citati ritennero di aver ottenuto, a seconda delle condizioni di acidità e di temperatura, una quantità maggiore o minore di prodotto amorfo accanto alle due forme cristalline blenda e wurzite. Essi stabilirono che, ad una determinata temperatura, la quantità di wurzite cresce con l'acidità e, per una determinata acidità, la quantità di blenda cresce con la temperatura. Questo avviene in soluzione solforica. In soluzione cloridrica gli AA. citati ottennero un prodotto, così detto amorfo; va da sè che la denominazione « amorfo » cade completamente, quando si esamina la sostanza con i raggi X.

La precipitazione sotto pressione [6] e sotto pressione ridotta [7] venne pure accuratamente studiata. Inoltre la precipitazione completa in soluzione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) « Z. anorg. Chem », *79* (1913), 125.

(4) « Z. phys. Chem. », *106* (1923), 43.

(5) Villiers, « C. R. », *120* (1895), 97 e 149; Treadwell, « Analyt. Chemie », *1°* (1918), 170; Fales e Ware, « J. Am. Soc. », *41* (1919), 488; Bruner e Glixelli, « Z. anorg. Chem. », *55* (1907), 297.

(6) Bruni e Padoa, « Lincei », *5* (1905), II, 525.

(7) Padoa e Cambi, « Lincei », *5* (1906), II, 787.

acida per acido acetico e acido formico è stata studiata da Viliers [1] e da Fales e Ware [2], mentre la precipitazione da soluzioni acide per acido benzensolfonico e per acido cloroacetico in presenza di SO_2 venne studiata da Schilling [3].

La precipitazione del solfuro di zinco da soluzioni alcaline mediante solfuro e polisolfuri di ammonio non presenta difficoltà e, secondo l'opinione più diffusa, si formerebbe del solfuro di zinco amorfo idrato; la capacità poi di sciogliersi del solfuro di zinco in ambiente alcalino sarebbe dovuto alla formazione del solfidrato [4]. Altri mezzi di precipitazione noti sono l'impiego del tiosolfato sodico, l'azione dello zinco sull'acido solforoso; inoltre il solfuro di zinco è stato ottenuto da soluzioni di $ZnSO_4$ sotto pressione con idrogeno e per elettrolisi.

Il solo autore che abbia esaminato il solfuro di zinco precipitato con i raggi X è Haber [5], il quale ha dimostrato che il preteso solfuro amorfo è cristallino. Tale esame è stato fatto in occasione di uno studio di alcuni geli e perciò non in modo specifico con il solfuro di zinco.

Per ottenere del solfuro di zinco facilmente filtrabile, sono stati proposti diversi accorgimenti, come quello di agitare la sospensione con carta da filtro spappolata prima della filtrazione e quello di aggiungere alcune goccie di acetato di piombo [6] o di cloruro mercurico [7].

Ci siamo proposti nel presente lavoro di esaminare il solfuro di zinco precipitato nelle diverse condizioni che possono venir usate nell'analisi chimica allo scopo di verificare: 1° quale forma cristallina si ottenga nei diversi casi; 2° se i granuli cristallini risultino di diverse dimensioni.

Sono stati quindi studiati quattro preparati precipitati a freddo da una soluzione di $ZnSO_4$ normale con H_2S in ambiente alcalino per idrato sodico, alcalino per ammoniaca, acido per acido acetico e senza aggiunta di altri reattivi. I precipitati ottenuti in queste singole preparazioni sono stati lasciati depositare per 24 ore, filtrati, lavati ed asciugati in essicatore a vuoto. Di ognuno di essi fu poi fatto un fotogramma col metodo delle polveri, usando la radiazione X del rame ($\lambda_\alpha = 1.5400$ Å ; $\lambda_\beta = 1.389$ Å); dei fotogrammi venne eseguita la registrazione microfotometrica per stabilire dall'allargamento delle linee più importanti le dimensioni dei granuli. I risultati ottenuti vengono qui sotto riportati; per le modalità dei calcoli e per il significato dei simboli usati rimandiamo ai precedenti lavori.

(1) « C. R. », *108* (1889).
(2) « J. Am. Soc. », *41* (1919), 488.
(3) « Chem. Zeit. », *36* (1912), 1352.
(4) « C. R. », *120* (1895), 149, 97.
(5) « Ber. », *55* (1922), 1730.
(6) Liebschutz, « Chem. », N. *102* (1910), 213.
(7) Murmann, « Monatshefte », *19* (1898), 404.

I. — *Prodotto precipitato in ambiente alcalino per* NaOH ; $ZnSO_4$ n ; NaOH n.

Tabella I.

N	θ	K	i	h_1 h_2 h_3	C	B
1	27.2	β_2	d	111	0.1354	—
2	30.0	α	ff	111	0.1492	3.083
3	40.6	α	dd	—	—	—
4	44.2	β_5	md	220	0.1326	—
5	48.8	α	ff	220	0.1456	3.173
6	51.8	β_7	d	311	0.1316	—
7	57.8	α	ff	311	0.1456	3.355
8	70.6	α	d	400	0.1443	—
9	78.0	α	md	331	0.1443	—
10	85.0	β_{12}	dd	333 511	0.1297	—
11	90.0	α	m	422	0.1443	—
12	97.0	α	mf	333 511	0.1441	4.005
13	100.4	β_{15}	dd	531	0.1296	—
14	108.0	α	d	440	0.1430	—
15	115.6	α	md	531	0.1430	—
16	128.8	α	d	620	0.1424	—

Da questa tabella si calcola per A il valore di 19.74 Å.

II. — *Prodotto precipitato in ambiente alcalino per* NH_4OH ; $ZnSO_4$ n ; NH_4OH n .

Tabella II.

N	θ	i	K	$h_1\ h_2\ h_3$	C	B
1	26.5	d	β_2	111	0.1317	—
2	29.7	ff	α	111	0.1445	2.965
3	43.1	d	β_4	220	0.1299	—
4	48.0	ff	α	220	0.1436	3.080
5	51.3	md	β_6	311	0.1298	—
6	56.8	ff	α	311	0.1432	3.250
7	70.0	mf	α	400	0.1430	—
8	77.8	md	α	331	0.1438	—
9	84.6	dd	β_{11}	333 511	0.1294	—
10	89.5	f	α	422	0.1420	—
11	97.0	mf	α	333 511	0.1441	3.95
12	99.8	dd	β_{14}	531	0.1290	—
13	107.9	d	α	440	0.1430	—
14	115.0	md	α	531	0.1424	—
15	128.3	d	α	620	0.1422	—

Da questa tabella si calcola per A il valore 18.60 Å .

III. — *Prodotto precipitato in ambiente acido per acido acetico*; $ZnSO_4$ n; $CH_3 \cdot COOH$ n ; $CH_3 \cdot COO \cdot NH_4$ n .

Tabella III.

N	θ	K	i	$h_1\ h_2\ h_3$	C	B
1	26.4	β_2	md	111	0.1316	—
2	29.4	α	ff	111	0.1463	2.970
3	39.9	α	dd	—	—	—
4	43.4	β_5	md	220	0.1305	—
5	48.0	α	ff	220	0.1434	3.150
6	51.0	β_7	md	311	0.1297	—
7	57.0	α	ff	311	0.1436	3.263
8	69.8	α	md	400	0.1429	3.360
9	77.2	α	mf	331	0.1436	3.568
10	84.8	β_{12}	dd	333 511	0.1296	—
11	87.8	α	f	422	0.1412	3.761
12	95.6	α	m	333 511	0.1426	—
13	99.4	β_{15}	dd	531	0.1288	—
14	107.6	α	md	440	0.1424	—
15	115.0	α	f	531	0.1423	—
16	128.0	α	md	620	0.1457	—
17	138.6	α	d	533	0.1426	—
18	159.0	α	md	444	0.1417	—

Da questa tabella si calcola per A il valore di 22.00 Å .

IV. — *Prodotto precipitato senza aggiunta di reattivi e perciò in ambiente acido per l'acidità spontanea che si libera (precipitazione incompleta).*

Tabella IV.

N	θ	K	i	h_1 h_2 h_3	C	B
1	26.5	β_2	d	111	0.1316	—
2	29.8	α	ff	111	0.1481	2.822
3	36.8	α	dd	—	—	—
4	40.0	α	dd	—	—	—
5	43.4	β_6	m	220	0.1305	—
6	48.2	α	ff	220	0.1440	3.009
7	51.0	β_8	md	311	0.1298	—
8	57.2	α	ff	311	0.1441	3.198
9	70.0	α	d	400	0.1434	—
10	77.4	α	m	331	0.1432	—
11	89.0	α	mf	422	0.1428	—
12	95 8	α	m	333 511	0.1425	3.569
13	108.0	α	md	440	0.1430	—
14	115.0	α	mf	531	0.1424	4.615
15	128.0	α	md	620	0.1457	—
16	160.0	α	md	440	0.1421	—

Da questa tabella si calcola per A il valore 20.60 Å.

I valori delle quattro tabelle sopraesposte sono calcolati per il lato del granulo supposto cubico, omettendo la determinazione della costante reticolare, che non era scopo del presente lavoro, essendo già nota per misure di precisione compiute da diversi AA. Piuttosto vogliamo far osservare che alcune linee, sia pur deboli, ma nettamente visibili ad occhio nudo ed alla registrazione microfotometrica, non poterono essere ordinate. Appare verosimile che tale fatto, riscontrato ripetutamente su prodotti di differenti preparazioni, sia da attribuirsi a leggere alterazioni del solfuro stesso.

Ciò che appare netto, per quanto imprevisto, è l'accordo tra le dimensioni dei granuli dei diversi preparati:

I	preparazione	$\Lambda = 19.74$ Å
II	»	$\Lambda = 18.60$ Å
III	»	$\Lambda = 22.00$ Å
IV	»	$\Lambda = 20.60$ Å

con oscillazioni dunque fra 18.60 Å e 22.00 Å, oscillazioni, che, dati i limiti di esattezza di questo metodo, permettono, a nostro avviso, di concludere per un'identità. Tale risultato è tanto più rimarchevole ed inaspettato, se si considera che, dal punto di vista pratico, essi si comportano in modo profondamente diverso: mentre alcuni si lavano e si filtrano con estrema facilità, altri presentano un comportamento opposto. Se, del resto, si considera che un artificio, come l'aggiunta di carta da filtro serve a rendere facile la filtrazione, si viene a concludere che questa operazione non può essere considerata in parallelo alla reale dimensione dei granuli cristallini; del resto l'esame röngtenografico ci rivela l'esistenza delle singole unità cristalline e non degli eventuali loro conglomerati. Così uno di noi ha già avuto occasione di osservare, almeno qualitativamente, che l'esame röngtenografico delle dimensioni dei granuli di carbonati basici di magnesio dà risultati contrastanti con i risultati dell'esame microscopico [1].

Deve perciò ritenersi relativamente frequente il caso dei precipitati in cui ad ogni granulo non corrisponde un individuo cristallino.

Dall'esame delle tabelle sopraesposte si deduce che tutti e quattro i preparati hanno la struttura della blenda.

Riassumendo: Viene dimostrata l'uguaglianza delle dimensîoni degli individui cristallini di solfuro di zinco precipitato in modi diversi; le dimensioni di detti individui risultano attorno a 20 Å e cioè attorno a quelle che possono essere le dimensioni dei pori della carta da filtro.

La forma cristallina di tutti questi precipitati è risultata essere quella della blenda.

(1) G. R. Levi, «Ann. Chim. Appl.», VIII (1924) 274.

Chimica. — *Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche* [1]. Nota VI di G. Scagliarini ed E. Brasi, presentata [2] dal Corrisp. G. Boeris.

Continuando le ricerche, già da tempo intraprese e riassunte in diverse Note [3], sull'influenza che hanno la costante dielettrica del solvente e la concentrazione dei corpi che reagiscono sulla formazione dei prodotti di addizione, siamo venuti studiando i composti che gli alogenuri del cadmio fanno colla urotropina sia in soluzione acquosa che in acetone. Quantunque la letteratura riguardante i composti di addizione che si separano da soluzioni acquose di sali metallici e urotropina sia estesissima, tuttavia non erano ancora conosciuti gli alogenuri di cadmio con tale base. A questi, da noi preparati, spettano rispettivamente le seguenti formole:

$$2CdCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4 \quad ; \quad CdBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4 \quad ; \quad CdJ_2 \cdot 8H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$$

È da notare che eccezion fatta dello joduro di cadmio che cristallizza con 8 molecole d'acqua, gli altri sali sono anidri, ciò che li riavvicina ai composti di addizione fra sali di mercurio ed esametilentetramina che sono anche essi assai poco o affatto idratati contrariamente ai sali degli altri metalli.

Comparativamente abbiamo preparato gli stessi composti di addizione anche da soluzioni acetoniche variando inoltre le concentrazioni rispettivamente o del sale o della base allo scopo di modificare così le azioni intermolecolari e interioniche che secondo il nostro modo di vedere presiedono alla formazione dei composti di addizione che si separano dal seno delle soluzioni. Abbiamo così ottenuto i seguenti composti:

$$CdCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4 \qquad \text{e} \qquad 2CdJ_2 \cdot C_6H_{12}N_4$$

aventi una composizione del tutto differente di quelli ottenuti facendo reagire i medesimi corpi, anzichè in acetone, in ambiente acquoso. Dal bromuro di cadmio ed urotropina, sempre in soluzione acetonica, secondo che

(1) Lavoro eseguito nei laboratori di Chimica Generale delle Università di Bologna e Ferrara.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) « R. Acc. Lincei », Serie VI, vol. I, p. 382; id. Serie VI, vol. II, p. 269; id. Serie VI, vol. IV, p. 318; id. Serie VI, vol. IV, p. 387; « Accademia Scienze Mediche e Naturali di Ferrara ». Seduta 3 aprile 1927.

si agiva o con eccesso di sale o con eccesso di base si poterono ottenere i composti delle formole rispettive:

$$3CdBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4 \quad \text{e} \quad CdBr_2 \cdot C_6H_{12}N_4$$

Fra questi composti di addizione del cadmio, e quelli degli altri metalli già descritti in Note precedenti (loc. cit.) non si intravvedono per ora speciali analogie. Forse l'ulteriore sviluppo di queste ricerche potrà metterle in evidenza.

Preparazione del composto di addizione $2CdCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$.

A una soluzione acquosa non troppo concentrata di cloruro di cadmio se ne aggiunge un'altra pure non molto concentrata di esametilentetramina; si separano immediatamente cristalli costituiti da tavole ben formate. Il precipitato raccolto alla pompa e lavato ripetutamente con acqua venne posto ad asciugare fra carta da filtro.

Per $2CdCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$	%	Calcolato	Cd 44.36	Cl 27.99	N 11.06
	%	Trovato	» 44.39	» 27.86	» 11.32

Preparazione del composto di addizione $CdBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$.

Si prepara come il precedente. Il precipitato cristallino costituito da aghi ben formati venne raccolto alla pompa e lavato diverse volte con acqua. Asciugato fra carta da filtro venne sottoposto all'analisi:

Per $CdBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$	%	Calcolato	Cd 20.34	Br 28.93	N 20.28
	%	Trovato	» 20.55	» 28.60	» 20.60

Preparazione del composto di addizione $CdJ_2 \cdot 8H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$.

Si prepara come il precedente. Il precipitato cristallino costituito da bei prismi splendenti venne filtrato alla pompa, lavato diverse volte con acqua e messo ad asciugare fra carta da filtro. Sottoposto all'analisi dette i seguenti risultati:

Per $CdJ_2 \cdot 8H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$	%	Calcolato	Cd 17.28	J 39.02	N 8.61
	%	Trovato	» 17.15	» 39.30	» 8.75

Preparazione del composto di addizione $CdCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$.

A una soluzione concentrata a freddo di cloruro di cadmio in acetone venne aggiunta a poco a poco una soluzione pure concentrata e fredda di

esametilentetramina in acetone. Si separarono tosto cristalli che al microscopio si presentavano in piccolissime tavolette splendenti. Il precipitato cristallino raccolto come al solito alla pompa e lavato ripetutamente con acetone, venne messo ad asciugare fra carta da filtro, indi analizzato.

Per $CdCl_2 \cdot C_6H_{12}N_4$ °/o Calcolato Cd 34.75 Cl 21.92 N 17.32
°/o Trovato » 34.21 » 21.75 » 17.15

Preparazione dei composti di addizione:
$3CdBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$ e $CdBr_2 \cdot C_6H_{12}N_4$.

Una soluzione concentrata a freddo di bromuro di cadmio in acetone venne trattata con una soluzione di urotropina pure in acetone, cessando di aggiungerla quando al microscopio incominciò a manifestarsi la separazione di cristalli costituiti da tavole aghiformi, diversi dal prodotto che da prima si precipita Questo, costituito da polvere microcristallina venne raccolto su filtro, lavato diverse volte con acetone, asciugato fra carta da filtro indi sottoposto all'analisi.

Per $3CdBr_2 \cdot 2C_6H_{12}N_4$ °/o Calcolato Cd 30.74 Br 43.71 N 10.22
°/o Trovato » 30.54 » 44.20 » 10.05

Se al contrario ad una soluzione concentrata di esametilentetramina si aggiunge una soluzione concentrata di bromuro di cadmio in modo che questa si trovi in difetto, si separa un precipitato cristallino costituito da tavole aghiformi. Il precipitato raccolto alla pompa e lavato diverse volte con acetone, venne messo ad asciugare fra carta da filtro, indi sottoposto all'analisi.

Per $CdBr_2 \cdot C_6H_{12}N_4$ °/o Calcolato Cd 27.26 Br 38.76 N 13.59
°/o Trovato » 27.22 » 38.75 » 13.61

Quest'ultimo composto si può pure ottenere facendo reagire a caldo soluzioni equimolecolari di bromuro di cadmio ed esametilentetramina disciolti in acetone.

Preparazione del composto di addizione $2CdJ_2 \cdot C_6H_{12}N_4$.

Ad una soluzione satura a freddo di joduro di cadmio in acetone se ne aggiunge un altra pure satura a freddo di esametilentetramina in acetone. Si va separando istantaneamente una massa costituita da piccoli cristalli ben formati. Il precipitato cristallino raccolto alla pompa e lavato diverse volte con acetone fu posto ad asciugare fra carta da filtro. All'analisi dette i risultati seguenti:

Per $2CdJ_2 \cdot C_6H_{12}N_4$ °/o Calcolato Cd 25.76 J 58.18 N 6.42
°/o Trovato » 25.74 » 57.60 » 6.20.

Biologia. — *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina.* – IV. *Modificazioni della struttura ultramicroscopica nel processo di cataratta.* Nota di D. Cattaneo, presentata [1] dal Socio A. Dionisi.

Per la particolare struttura del cristallino l'esame microscopico dei preparati fissati e colorati non può dare risultati tali da illustrare in modo esauriente le alterazioni che intervengono nella cataratta.

Poichè le moderne conoscenze di biologia si indirizzano specialmente allo studio della chimica dei colloidi, ho creduto che per indagare l'intima costituzione del cristallino anche in condizioni patologiche fosse utile il metodo ultramicroscopico coll'esame allo stato fresco.

Ricorrendo quindi agli stessi procedimenti usati per i cristallini normali e per i cristallini trattati sperimentalmente, ho studiato la struttura ultramicroscopica dei cristallini umani cataratiosi.

I casi di cataratta da me esaminati riguardano forme diverse, sia in rapporto ai fattori eziologici, sia alle particolarità anatomo–morfologiche rilevabili nei singoli casi.

L'esame ultramicroscopico è stato praticato immediatamente dopo, o al massimo ad un'ora circa dall'estrazione. Per la comparazione dei reperti i preparati, allestiti in soluzione fisiologica o in liquido di Ringer, sono stati sottoposti anche all'esame microscopico comune.

Ho così constatato come alcune particolarità che si rilevano coll'osservazione in campo oscuro non sono affatto visibili colla comune osservazione microscopica anche ricorrendo a forte ingrandimento, che altre particolarità si possono vedere coi metodi comuni, ma appaiono con molta maggior evidenza all'esame ultramicroscopico.

Solo in 5 casi nei quali si è fatta l'estrazione in toto del cristallino ho potuto osservare l'epitelio. In tutti e 5 i casi i nuclei erano regolarmente rotondi od ovali, omogenei, otticatamente vuoti e quindi oscuri, il citoplasma talvolta appariva più rifrangente, talvolta meno rifrangente, talvolta nel corpo protoplasmatico si osservavano granuli distinti, piuttosto grossi, rifrangenti, in numero scarso.

Le maggiori alterazioni in tutti i casi sono state riscontrate nelle fibre lenticolari, sia nella corteccia anteriore, che nella corteccia posteriore. Anche quando ho avuto la possibilità di osservare gli strati più superficiali, dove in condizioni normali numerosi sono i condriosomi sotto l'aspetto di filamenti brillanti, ho riscontrato una trasformazione più o meno completa dei condriosomi, notevole diminuzione, talvolta scomparsa totale.

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

Così nei casi di cataratta senile in cui si è fatta l'estrazione in toto notai nelle fibre sottocapsulari presenza di scarsi granuli rifrangenti, ben distinti dal protoplasma fondamentale, i quali verosimilmente si possono interpretare come prodotti della regressione della parte differenziata del citoplasma lenticolare, cioè di condriosomi, assenza assoluta di formazioni a filamenti.

In un caso di cataratta congenita i condriosomi erano ridotti a catene di granuli distinti, disposti in serie lineari nella sostanza fondamentale otticamente vuota.

In una cataratta non matura con sublussazione e aniridia congenita, oltre granuli distinti si notavano filamenti granulosi e anche filamenti regolari più o meno lunghi tanto nella corteccia anteriore che nella posteriore.

Dall'insieme delle osservazioni è lecito dedurre che coll'opacificazione del cristallino i condriosomi tendono a scomparire, e, quando la cataratta è giunta a maturazione, essi non sono più visibili nel citoplasma lenticolare sotto il loro caratteristico aspetto morfologico di filamenti.

La parte fondamentale delle fibre corticali può essere più o meno alterata.

Mentre in certi punti si trova una disgregazione completa di tutta la fibra, in altri punti non solo si osservano tratti in cui esse conservano ancora la loro integrità morfologica, ma anche l'aspetto, all'esame ultramicroscopico, non appare visibilmente modificato dalla norma, cioè la sostanza fondamentale che costituisce il protoplasma si conserva omogenea, otticamente vuota. Le linee longitudinali che delimitano i margini delle fibre appaiono più rifrangenti della sostanza fondamentale, spesso però non sono regolari ed hanno uno spessore maggiore di quello che si trova in condizioni normali.

Abitualmente si riscontrano nella sostanza propria delle fibre varie forme di alterazioni:

1° Aumento diffuso *in toto* della rifrangenza: tutta la fibra diviene leggermente opalescente per un intorbimento più o meno uniforme del colloide protoplasmatico.

2° La sostanza fondamentale si conserva ancora, almeno in parte, otticamente vuota e quindi oscura, ma qua e là si notano delle piccole masse più o meno rotonde costituite da granuli rifrangenti strettamente avvicinati. Queste piccole masse sembrano nuclei cellulari; che non lo siano, lo dimostra il fatto che esistono anche in zone del cristallino dove non si trovano nuclei e che le dimensioni e la forma, pur essendo in generale costanti e regolari, possono però subire talvolta delle variazioni più o meno spiccate.

Data la mancanza di stadi di passaggio e la sede, la quale può essere anche nelle fibre profonde, si può escludere che questi ammassi di granuli derivino da trasformazione dei condriosomi.

3° Infine per tratti più o meno estesi il colloide protoplasmatico cambia completamente il suo normale aspetto ed appare rifrangente e con una struttura che si rileva a forte ingrandimento più o meno regolarmente granulosa; in altre parole si ha un *processo di granulificazione* dovuto a precipitazione della massa colloidale normalmente a struttura omogena.

4° Tanto nella sostanza propria delle fibre quanto negli interstizi tra le singole fibre, si riscontrano spesso formazioni simili a vacuoli e gocciole ad orlo splendente, a contenuto omogeneo, di grandezza diversa. Spesso intorno ad un vacuolo più grosso si trovano raggruppate goccioline più piccole cogli stessi caratteri ottici.

Frequentemente al di fuori delle fibre si riscontrano masse per lo più regolarmente rotonde, di grandezza diversa che danno un riflesso grigio ceruleo e presentano una struttura finemente e regolarmente granulosa.

Tali formazioni sferiche corrispondono verosimilmente alle cosidette sferule di Morgagni.

Le fibre delle parti nucleari del cristallino presentano costantemente un aumento notevolissimo della rifrangenza per cui appaiono come nastri grigio-argentei brillanti. Talvolta non lasciano riconoscere nessuna differenziazione strutturale, talvolta in certi punti si osserva coll'obbiettivo speciale ad immersione una evidente granulificazione del protoplasma fondamentale.

Ricordo da ultimo che in qualche caso con l'osservazione in campo oscuro appaiono con piena evidenza formazioni che hanno l'aspetto di cristalli.

In un caso di cataratta ipermatura ho trovato, assai numerosi negli strati corticali, poco numerosi nelle parti nucleari, tipici cristalli di colesterina con la caratteristica forma di tavolette rombiche, ad angoli come spezzati, sottili, quasi sempre sovrapposte.

A seconda delle modalità di illuminazione e specialmente oscurando convenientemente il campo di osservazione, alcuni cristalli presentano vivissimi colori di iridescenza con eleganti tonalità che vanno dall'azzurro chiaro al bleu cupo, dal giallo oro al marrone, alle diverse gradazioni di rosso, verde, violetto.

Come è noto, all'esame colla lampada a fessura sono stati riscontrati in certi casi di cataratta formazioni a bastoncini, aghiformi, colorati variamente (Vogt, Alaimo, Moscardi) e interpretati come cristalli di colesterina.

Anch'io ho avuto occasione di fare analoghe osservazioni alla lampada a fessura. L'esame ultramicroscopico dimostra con assoluta certezza che si tratta realmente di cristalli di colesterina.

*
* *

Dalle mie ricerche si possono dedurre alcune considerazioni sulla costituzione del cristallino normale in rapporto al suo stato fisico-chimico ed alle modificazioni che intervengono nel processo di cataratta.

È noto che ciò che caratterizza essenzialmente i sistemi colloidali artificiali inorganici è la loro eterogeneità, cioè l'essere costituiti da una fase dispersa (o interna o discontinua) e di un'altra esterna o continua; invece carattere fondamentale per la vita sarebbe nei colloidi organici protoplasmatici la omogeneità (Bottazzi).

Secondo questo A. il cristallino si formerebbe sotto l'influenza di pressioni o tensioni agenti secondo linee determinate, per una coalescenza delle micelle protoplasmatiche primitive, le quali in tal modo determinerebbero la costituzione di un sistema solido, trasparente e però appropriato alla funzione.

Dalle mie osservazioni ultramicroscopiche risulta che le fibre cristalliniche per se stesse rappresentano in condizioni normali un sistema otticamente omogeneo. Questo fatto risulta chiaramente all'esame delle fibre della parte nucleare. Nelle fibre corticali, nei preparati allestiti a fresco, si rende visibile una fase più rifrangente che si differenzia otticamente da quella omogenea fondamentale.

Se con Bottazzi distinguiamo il concetto di *protoplasma indifferenziato* da quello di *citoplasma*, intendendo per citoplasma quel sistema polifasico, in cui una delle fasi, la fase liquida per eccellenza, è il protoplasma indifferenziato, se nelle fibre del cristallino riteniamo che il protoplasma sia rappresentato essenzialmente dalla sostanza fondamentale otticamente omogenea, si può veramente considerare il protoplasma lenticolare come un sistema otticamente omogeneo.

Il passaggio da questo sistema omogeneo ad uno eterogeneo, porta ad opacificazione del cristallino.

Nella cataratta all'esame ultramicroscopico appaiono, è vero, nelle fibre corticali modificazioni della parte differenziata (condrioma) oltre che della parte indifferenziata (protoplasma fondamentale), ma mentre le modificazioni della parte differenziata sono compatibili con una perfetta trasparenza dell'organo, come si osserva per esempio coll'imbibizione in H_2O o in soluzioni di NaOH, nelle quali i condriosomi scompaiono e il cristallino rimane trasparente, le alterazioni della parte indifferenziata portano costantemente ad una opacificazione delle fibre.

Possiamo così concepire la cataratta come un passaggio da un sistema omogeneo ad un sistema eterogeneo per precipitazione sotto forma di granuli, o goccioline, delle proteine che costituiscono il protoplasma fondamentale.

Nello stesso senso agiscono i fattori sperimentali, come per esempio le soluzioni acide, il calore, ecc., i quali determinano opacificazione del cristallino.

BIBLIOGRAFIA

Bottazzi, *I sistemi colloidali dell'organismo vivente*, « Atti Soc. Progr. delle Scienze », XII Riun. Catania, 1923.

Cattaneo D., *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. I. La struttura ultramicroscopica del cristallino normale*, Atti R. Accad. Lincei, « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche », 1927.

Cattaneo D., *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina.* II. *Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione di sali, alcali e acidi*, Atti R. Accad. Lincei, «Rendiconti della Classe di Scienze fisiche», 1927.

Cattaneo D., *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina.* III. *Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione della disimbibizione in aria secca e della idratazione in* H_2O, *delle basse e delle alte temperature*, Atti R. Accad. Lincei, «Rendiconti della Classe di Scienze fisiche», 1927.

Biologia. — *Sulla possibilità di ordinare sistematicamente le specie larvali dei Murenoidi.* Nota di U. D'Ancona [1], presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

Comunque esse possano essere valutate dal punto di vista filogenetico e trasformistico, quando noi compariamo delle forme zoologiche, ci troviamo sempre nella necessità di distinguere condizioni che ci indicano delle affinità e condizioni che rispecchiano degli adattamenti funzionali, ci troviamo in altre parole di fronte a formazioni omologhe ed a formazioni analoghe. Ora nell'ordinamento sistematico è principalmente alle prime che deve esser data importanza, mettendo per così dire in seconda linea quanto si può presumere dovuto a condizioni di adattamento ambientale e funzionale. Attualmente si tende a limitare o a negare l'importanza di questi adattamenti; anche senza entrare nella discussione del loro significato filogenetico, mi pare però che non si possa negarne l'esistenza, ce ne forniscono esempi fin troppo evidenti gli animali parassiti: i Rizocefali, i Copepodi parassiti, ecc.

Perciò in molti casi la comparazione degli stadi larvali e giovanili, quando tali adattamenti funzionali non si sono ancora manifestati, fornisce alla sistematica degli elementi più sicuri che non la comparazione degli adulti.

È da ritenere che su tale via si potrebbe perfezionare anche l'ordinamento sistematico dei Teleostei. Attualmente la sistematica di questo gruppo di pesci si basa principalmente sui caratteri osteologici ed è noto che ci sono sempre molte incertezze sull'affinità tra i vari ordini, sottordini, famiglie, ecc.

Se infatti noi compariamo gli stadi giovanili e larvali dei Teleostei, che conducono in genere condizioni di vita più uniformi che gli adulti, rileviamo delle assomiglianze tra forme giovanili appartenenti a famiglie poste lontane nel sistema e viceversa risaltano differenze tra specie ritenute affini. In molti casi la comparazione degli stadi giovanili ci mostra accen-

(1) Dall'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

tuate delle assomiglianze o delle differenze che nell'esame degli adulti possono sfuggire alla nostra attenzione. È perciò probabile che l'ordinamento sistematico dei Teleostei potrà trarre degli utili perfezionamenti accoppiando al criterio della comparazione osteologica quello della comparazione degli stadi giovanili.

Per quanto riguarda i Murenoidi sappiamo che le larve pelagiche conducono per lo più un genere di vita uniforme e se confrontiamo tra loro le 90 o più specie di leptocefali note finora e che possono essere ritenute distinte [1], rileviamo subito che parecchie presentano tra loro notevoli caratteri di assomiglianza e che alcune sono perfettamente simili e si differenziano soltanto per il costante diverso numero di miomeri.

Se poi confrontiamo le specie larvali corrispondenti a specie adulte di Murenoidi appartenenti alla stessa famiglia, notiamo tra esse dei caratteri comuni che ci inducono ad ammettere che alle specie adulte appartenenti alle singole famiglie corrispondano specie larvali tra loro simili.

Fra i Congridi noi conosciamo le forme larvali delle specie mediterranee *Ophisoma balearicum*, *Conger conger* e *Congermuraena mystax*. Ora i leptocefali di queste tre specie presentano in comune un corpo lungo relativamente basso, altezza massima contenuta 8-12 volte nella lunghezza totale, coda più o meno in punta, intestino molto lungo senza ingrossamenti o festonature, ano posto a poca distanza dall'apice codale, punteggiatura generalmente minuta. Tra le tre specie notiamo poi dei caratteri differenziali caratteristici: *Ophisoma balearicum* presenta una punteggiatura sottolaterale formata da serie di lineette oblique poste nei miocommi, *Conger conger* ha una punteggiatura sottolaterale costituita da cromatofori superficiali stellati piuttosto radi, in *Congermuraena mystax* manca la punteggiatura laterale.

Fra i leptocefali noti per altri mari troviamo numerose forme che assomigliano strettamente ai leptocefali suddetti, specialmente ai due primi. Così sono molto simili al leptocefalo di *Ophisoma balearicum* il *L. humilis* Strömman, il *L. caudomaculatus* Eig. et Kenn., il *L. Eigenmanni* Lea (= *L. Morrisii* Eig. et Kenn.), il *L. mauritianus* Pappenheim, ecc. Fra le specie eritree da me studiate e cui ho accennato nella Nota precedente [2], sono molto simili al leptocefalo di *O. balearicum* il *L. Sanzoi*, il *L. macrenteron* e un individuo identificato con *L. mauritianus*, oltre a una specie che, per presentare un numero di miomeri press'a poco uguale all'*Ophisoma anago* comune nell'Oceano Indiano, ritengo sia la forma larvale di questo.

Analogamente sono molto simili al leptocefalo di *Conger conger* l'*Atopichthys lychnus* Garman, l'*A. sicarius* Garman, l'*A. dentatus* Garman, il

(1) Come espongo dettagliatamente nella mia Memoria in pubblicazione negli « Annali Idrografici », molte delle specie di leptocefali descritte finora devono essere considerate sinonime di altre.

(2) « Rendiconti » R. Accad. Lincei, questa stessa seduta.

L. Hjorti Blegvad, il *L. lacrymatus* Franz, il *L. acuticeps* Regan. Fra quelli del Mar Rosso trovo simili quelli che chiamo *L. congroides* e *L. Magnaghii*, oltre a quello che, per presentare lo stesso numero di miomeri di *Conger cinereus*, ritengo sia la forma larvale di questo.

Il rilevare queste grandi assomiglianze in diverse specie di leptocefali e il riscontrarle in forme larvali di specie affini e il ritrovare gli stessi numeri di miomeri e vertebre in specie larvali e adulte viventi nelle stesse località e ritenute per gli anzidetti criteri corrispondenti, mi pare diano fondamento all'induzione che *le specie di leptocefali tra loro affini corrispondano a specie adulte affini.*

Dalla comparazione di tutte le specie di leptocefali finora descritti risulta che ci sono alcuni gruppi di specie simili che, assomigliando a qualche specie identificata, si può ammettere che, come nel caso dei Congridi suaccennati, appartengano alla stessa famiglia cui appartiene la specie identificata. Mi pare che in tal modo sia possibile riconoscere i tipi larvali propri delle più importanti famiglie di Murenoidi e talvolta, come nel caso già citato dei Congridi, anche dei gruppi minori, sottofamiglie o generi.

Comparazioni delle specie di leptocefali e attribuzioni di specie in base alle assomiglianze sono già state fatte, però non si è mai fatto un tentativo complessivo di coordinazione. Può darsi che in un tale tentativo si incontrino notevoli difficoltà e si commettano non pochi errori, però ritengo che esso possa essere utile, sia per dare un orientamento nel grande numero di leptocefali finora, spesso caoticamente, descritti, sia per facilitare la conoscenza delle specie larvali dei singoli Murenoidi, su cui ancora troppo poco è noto.

Le famiglie di cui è possibile riconoscere su questi criteri le specie larvali sono quasi tutte le più importanti famiglie dei Murenoidi e precisamente: *Anguillidae*, *Congridae*, *Nettastomidae*, *Ophichthyidae* e *Echelidae*, *Nemichthyidae* e *Muraenidae*.

Alla famiglia *Anguillidae* appartengono i leptocefali identificati di *Anguilla anguilla* e *A. rostrata*, caratterizzati dal corpo relativamente breve, alto, a forma di foglia d'ulivo, intestino rettilineo, senza festonature o ingrossamenti, esteso circa per $^2/_3$ della lunghezza, muso corto, nessuna pigmentazione.

Dei leptocefali attribuibili alla famiglia *Congridae* ho già detto precedentemente. A quelli nominati possono essere aggiunti: *L. immaculatus* Strömman, *L. lanceolatus* Strömman, *Atopichthys cingulus* Garman, *L. rex* Eigenmann et Kennedy, *L. ingolfianus* Schmidt, *L. taeniodes* Pappenheim e *L. oxycephalus* Pappenheim.

Il Jordan [1] riunisce nella famiglia *Nettastomidae* i generi *Nettastoma*, *Saurenchelys*, *Chlopsis*, ciascuno dei quali ha un rappresentante di cui si co-

(1) Jordan D. S., *A classification of fishes*. « Stanford Univ. Publ. », California, vol. III, 1923.

nosce la forma larvale. Grassi [1] invece mette questi tre generi in tre famiglie distinte. La comparazione delle forme larvali dimostra in esse i seguenti caratteri comuni: corpo allungato più o meno alto, intestino rettilineo corto, talvolta con ispessimenti allo stomaco e all'ano. Le tre specie larvali mediterranee dei generi anzidetti presentano però anche dei notevoli caratteri differenziali, per cui, pur riconoscendo che si deve trattare di specie affini, penso che forse è giusta la distinzione di Grassi in famiglie o sottofamiglie diverse. Altre specie affini alle suddette e attribuibili a questo gruppo sono pure *L. latissimus* Schmidt, *L. urosema* Lea e *L. stylurus* Lea, inoltre le mie specie indicate coi nomi di *L. Bellottii*, *L. saurencheloides* e *L. lateromaculatus*.

Nella specie larvale *L. Kefersteini* Kaup il Grassi è riuscito a distinguere le forme larvali di ben 4 Ofictidi e di un Echelide, presentanti fra loro solo lievi differenze. È lecito perciò ritenere che tra le larve di queste due famiglie ci siano notevoli caratteri di assomiglianza denotanti una affinità delle famiglie stesse. I caratteri comuni alle larve di queste famiglie sono dati dal corpo allungato relativamente basso, intestino festonato con gruppi di cromatofori sopraintestinali, macchie sottolaterali profonde nella regione codale. A queste due famiglie ritengo possano essere attribuiti pure il *L. caudomaculatus* e il *L. mucronatus* di Eig. e Kenn., il *L. hexastigma* di Regan e i miei *L. ophichthoides* e *L. echeloides* del Mar Rosso.

I *Nemichthyidae* hanno forme larvali caratterizzate da un corpo molto allungato, talvolta con una estremità caudale filiforme, un numero di miomeri molto grande. Secondo Roule e Bertin [2] in *Nemichthys scolopaceus* a due stadi larvali del tipo dei soliti leptocefali, seguono due del tipo dei tiluri. Sono verosimilmente larve di questa famiglia tutte le specie di tiluri e simili ai tiluri finora note, inoltre alcune specie di leptocefali che presentano i caratteri suddetti, come il *L. canaricus* e il *L. polymerus* di Lea, il *L. Andreae* di Schmidt e il *L. curvirostris* di Strömman, che secondo Roule e Bertin sono appunto forme larvali della sunnominata specie di *Nemichthys*.

Si possono attribuire, con la larva di *Mureana helena*, ai *Muraenidae* i leptocefali a corpo relativamente corto, mediocremente alto, con pinna dorsale iniziantesi più in avanti dell'ano, intestino rettilineo senza festonature o ingrossamenti esteso in genere per $^1/_2 - ^2/_3$ della lunghezza del corpo, coda rotondeggiante. La pigmentazione è in essi rappresentata da punteggiatura minuta più o meno presente lungo la pinna impari e lungo l'intestino; manca la punteggiatura laterale, è invece generalmente visibile per trasparenza una punteggiatura perispinale. Credo siano larve di Murenidi, oltre al leptocefalo di *Muraena helena* e il *L. muraenae unicoloris* di Regan, il *L. subinornatus* Strömman, il *L. Dussumieri* Kaup, il *L. latus* Eig. et Kenn.,

(1) Grassi B., *Metamorfosi dei Murenoidi*, 1923.
(2) Roule L. et Bertin L., «C. R. Acad. Sc.», t. CLXXXIII, 1926.

il *L. euryurus* Lea, il *L. similis* Lea, il *L. vermicularis* Southwell et Prashad e i miei *L. grassianus, L. muraenae undulatae, L. muraenae hepaticae, L. muraenoides, L. erythraeus.*

Non ritengo invece siano tutte affini le specie a occhi telescopici, potendo essere questo un carattere di adattamento alla vita a grandi profondità. Sono infatti noti leptocefali a occhi telescopici appartenenti a specie di famiglie diverse, così il leptocefalo di *Todarus brevirostris*, il *L. synaphobranchi pinnati* Schmidt, il *L. histiobranchi infernalis* (o *L. iliophidis Brunnei*) Lea, inoltre, non identificati, il *L. mirabilis* Brauer, il *L. Schmidti* Weber, il *L. rostratus* Schmidt, il *L. proboscideus* Lea e il *L. dolychorhynchus* Lea, oltre al mio *L. synaphobranchoides* e al *Tiluropsis* di Roule. Verosimilmente i leptocefali di varie famiglie presentano questo carattere.

È sperabile che, facendo ampio uso di questo criterio comparativo, sia possibile inquadrare nelle singole famiglie di Murenoidi tutte le forme larvali finora note. Per una esatta identificazione con le specie adulte è però indispensabile la conoscenza del numero di vertebre di queste, per cui con questo carattere dovrebbe essere completata la diagnosi di tutti i Murenoidi finora descritti.

Biologia. — *Modificazioni del sangue, dell'apparato emolinfatico e dei reni in conigli trattati con trasfusione di sangue omogeneo.* Nota di A. DE LOLLIS, presentata[1] dal Corrisp. A. DIONISI.

Scopo delle presenti ricerche sperimentali è lo studio anatomico dell'apparato linfatico-emopoietico e dei reni dopo la trasfusione di sangue completo omogeneo, reso incoagulabile col citrato di sodio.

Le trasfusione di sangue totale, da cui sono stati allontanati i maggiori pericoli con la determinazione dei gruppi sanguigni, si è largamente diffusa in questi ultimi anni nella terapia di vari stati morbosi, per quanto non esista ancora nè chiarezza nè unità di vedute riguardo alla sua azione.

La grande maggioranza dei chirurgi che si sono occupati dell'argomento attribuisce alla trasfusione di sangue effetti di gran lunga superiori a quelli della semplice infusione di soluzioni isotoniche.

Nella più tipica idnicazione alla trasfusione, nell'anemia post-emorragica, il sangue omogeneo introdotto, oltre ai beneficî comuni alle soluzioni isotoniche (ossia l'aumento della massa sanguigna deficiente e la successiva diminuzione delle cattive condizioni di circolo e dell'essiccameuto dei tessuti) si oppone in un primo momento alla morte per asfissia, portando nel circolo nuove emazie le quali agirebbero non tanto per l'ossigeno dissocia-

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

bile da loro portato, ma quanto per l'aumento della superficie respiratoria dei globuli rossi (Wildegans). Ma questo concetto dell'attecchimento dei globuli rossi introdotti che assumerebbero subito le funzioni di quelli normali, è ancora molto discusso, tanto più che non è facile riconoscere i globuli rossi donati nel sangue del ricevente.

Per questo i diversi autori si sono serviti di molti artifici: trasfusione di sangue colorato, determinazione precisa ripetuta del numero delle emazie, trasfusione di sangue in anemici perniciosi, determinazione dell'emoglobina, della bilirubina, dell'azoto residuo nel plasma, dell'urobilina e dell'azoto nelle urine, studio del cambiamento della capacità in ossigeno prima e dopo le trasfusioni. Altri ancora hanno seguito complesse vie sierologiche, sul fondamento dei gruppi sanguigni.

Le conclusioni di queste esperienze sulla permanenza delle emazie donate sono state diverse. Ashby, Wean, Warren, sostengono di aver trovato nel sangue, per oltre tre mesi, i globuli rossi iniettati. Questo appare veramente strano quando è indiscusso che la vita dell'emazia non supera normalmente le quattro settimane.

Altri diminuiscono questo periodo di durata, pur affermando la permanenza degli eritrociti per un certo tempo (Schustroff e Dimitrieff, Opitz, Morawitz, Torii, Wildegans, Bürger, Plehn). Altri dicono invece che tutto si distrugge rapidamente (Knöpfelmacher, Weinstein, Kühl, Weicksel, Khoor).

Molti altri hanno un punto di vista di mezzo: solo una parte si distruggerebbe (Nather e Ochsner, Zielke, Zervell, Sachs e Widrich).

Altri due vantaggi quasi universalmente attribuiti dai chirurgi alla trasfusione di sangue sono la potente azione emostatica, dovuta con probabilità all'introduzione di piastrine, e la più rapida rigenerazione del sangue per l'eritropoiesi eccitata dai prodotti di distruzione dei globuli rossi.

Scorrendo le statistiche degli ultimi anni, si trova che i chirurgi in centinaia e centinaia di trasfusioni hanno spesso avuto buoni risultati, ma essi mettono in rilievo che non ostante la più accurata scelta del donatore e non ostante la più accurata tecnica, sono frequentissimi accidenti, a volte soltanto spiacevoli, a volte gravi e mortali.

Gli accidenti gravi che possono condurre a morte sono quasi sempre accompagnati da emolisi, manifestantesi clinicamente con emoglobinuria. (Opitz, de Jongle, Copher, Oehleker, Schumacher, Heim, Bancroft, Lemke, Metzeler, Gram, Hellström, Mac–Clun e Dunne, Sebastiani, ecc.) (1).

(1) Lemke fece l'autopsia di due individui morti in seguito a trasfusione; trovò nel primo reni emoglobinurici e necrosi miliari nel fegato; nel secondo solo necrosi miliari epatiche.

Sebastiani ebbe un caso di morte dopo una trasfusione eseguita in un'emoglobinuria da chinino. Egli potè fare l'esame anatomo-patologico dei soli reni che macroscopicamente avevano il tipico aspetto dei reni emoglobinurici; microscopicamente si osservò presenza

I fenomeni più lievi che si manifestano dopo la trasfusione di sangue omogeneo consistono in brivido, febbre, cefalea, cianosi, vomito, diarrea, oppressione precordiale, herpes, dolori lombari, orticaria.

Questi fatti furono dapprima attribuiti al citrato di sodio, ma le esperienze eseguite dimostrarono che questo, alle dosi in cui viene ad essere inoculato nella trasfusione di sangue, non solo non è tossico, ma produce minori reazioni del sangue defibrinato. (Meleney, Steans, Joannides e Cameron, Torii).

Inoltre si è pensato alle modificazioni che si vengono a portare nel sangue durante l'operazione, alla incompatibilità dei globuli bianchi e più di tutto ad un lieve grado di emolisi che non diverrebbe clinicamente evidente. (de Pemberton, Hunt). Oehlecker ha trovato un aumento dell'emoglobina nel sangue dopo la trasfusione.

In complesso, i clinici considerano l'intervento come molto utile ma non scevro di pericoli, spesso imprevedibili.

Molto meno benevoli verso la trasfusione sono alcuni autori che hanno eseguito in proposito esperienze accurate (Bulliard, Lusena, Kühl, Hammerschlag e Khoor). Bulliard afferma che in animali salassati e trasfusi con sangue omogeneo i globuli rossi aumentano meno rapidamente che negli animali salassati soltanto. Lusena, facendo esperimenti di autotrasfusione di sangue citratato, osservò negli organi emopoietici segni di emolisi, e nel sangue alterazioni dei globuli rossi; conclude che il sangue una volta sottratto dal circolo non è più capace di vita, nemmeno nello stesso animale, anzi è dannoso.

Carmona ha studiato gli organi emopoietici di animali trasfusi e afferma di avere osservata una eritrocateresi massima al 5° giorno ed un'emopoiesi massima al 10°.

Insomma, da tutto questo risulta evidente come sono ancora controverse le idee sull'azione della trasfusione di sangue.

Le esperienze eseguite furono sempre precedute dalla prova microscopica dell'isoagglutinazione tra gli animali donatori e gli animali riceventi. A tale scopo si prelevava dal donatore qualche goccia di sangue che veniva fatta cadere in 5-6 cc. di soluzione fisiologica. Si centrifugava, si decantava e le emazie sedimentate erano sospese in soluzione fisiologica. Si prendevano dal ricevente alcune gocce di sangue che si lasciavano sierare. Poi su di un vetrino coprioggetti lavato con alcool e passato alla fiamma, si mescolavano due piccole gocce di sospensione di globuli rossi del donatore con una goccia di siero del ricevente. Il vetrino era capovolto su di un porta-

di emazie nelle capsule di Bowmann, di cilindri emoglobinici e di residui di globuli rossi nei tubuli. Oltre a ciò erano evidenti infiltrati infiammatori nella corticale e nella midollare.

oggetti per goccia pendente spalmato di vasellina e dopo 20–40 m' a temperatura ambiente, si osservava al microscopio. Non fu mai trovata isoagglutinazione fra i conigli usati.

Il sangue da trasfondere era prelevato dalla carotide, dalla quale esso cadeva direttamente in un piccolo matraccio contenente 10 cc. di soluzione di citrato di sodio al 4 per cento (soluzione isotonica). Ogni volta si raccoglievano così circa 50 cc. di sangue. Il sangue così ottenuto, conservato caldo, era iniettato con una comune siringa, sterilizzata e lavata in soluzione di citrato di sodio, nelle vene dell'orecchio in quantità di circa 25 cc. per animale. Vennero così trasfusi conigli normali e conigli a ciascuno dei quali subito prima della trasfusione erano stati tolti 25 cc. di sangue dalla giugulare.

Di questi, i conigli normali e alcuni dei salassati vennero uccisi al 9° giorno; altri salassati, al 5°.

Fu fatta giornalmente la conta dei globuli rossi. Dagli organi prelevati e fissati in alcool furono allestiti preparati colorati con ematossilina-eosina.

I conigli normali trasfusi mostrarono un aumento dei globuli rossi che cominciava dopo circa sei ore e raggiungeva il massimo verso il sesto giorno. All' 8°-9° giorno le emazie erano in numero di poco superiore al normale.

I conigli salassati e trasfusi mostrarono una diminuzione di globuli rossi massima verso il 3° giorno; al 6° cominciava l'aumento che perdurava fino al 9°, quando il numero primitivo appariva reintegrato.

All'esame istologico degli organi si osservarono i seguenti fatti.

Il midollo osseo degli animali normali trasfusi dimostrava notevole ectasia dei vasi sanguigni e scarsa reazione midollare; nei conigli salassati e trasfusi esso appariva al 5° giorno con scarsa eritrocateresi ed eritropoiesi, al 9° giorno invece esso era ricco di elementi specifici che dimostravano la sua notevole attività eritro- e leucopoietica. All'osservazione delle glandole linfatiche l'eritrocateresi appariva modica negli animali normali trasfusi, ed invece accentuata negli altri, specialmente in quelli uccisi al 9° giorno.

L'esame dei reni fu di notevole interesse. Nei normali trasfusi le anse glomerulari erano notevolmente ectasiche, nelle capsule di Bowmann e nei tubuli si trovavano globuli rossi più o meno alterati in piccolo numero. Più abbondante appariva l'eliminazione dei globuli rossi e dei loro residui nei reni degli altri animali (quelli salassati e trasfusi). Infatti si rinvenivano emazie piuttosto abbondanti nelle capsule di Bowmann, nei tubuli retti ed anche nella pelvi. Nei tubuli contorti si trovava a preferenza emoglobina in granuli.

L'esame istologico della milza, del fegato e del timo non dette risultati di speciale importanza; non si trovò in nessun caso accentuazione dei processi eritrocateretici.

In conclusione, perciò, da queste esperienze si può desumere che l'iniezione di sangue citratato in animali normali produce una lieve pletora che persiste per 9 giorni, accompagnata da una lieve eccitazione eritrocateretica e da una modica eliminazione di sangue per i reni. L'eritropoiesi non è eccitata.

Negli animali salassati, invece, dopo un certo periodo di tempo si osserva l'eliminazione per le urine di globuli rossi (con tutta probabilità quelli introdotti) ed accentuata eritrocateresi nelle glandole linfatiche. È poi manifesta una notevole reazione midollare poco evidente al 5° giorno.

Questi risultati sulla dibattuta questione degli effetti della trasfusione di sangue, conducono alla persuasione che i globuli rossi del donatore agiscano solo eccitando il midollo osseo, probabilmente con i prodotti della loro demolizione.

Dalle presenti esperienze risulta pure che l'eliminazione dal circolo degli eritrociti trasfusi è più evidente negli animali prima salassati che negli animali normali.

La spiegazione di questo fatto si può cercare partendo da quello già noto, che dopo un salasso i globuli rossi continuano ancora a diminuire durante un certo tempo, per la distruzione ulteriore di parte delle emazie rimaste in circolo; distruzione che è probabilmente prodotta dal plasma alterato per la sua mescolanza col liquido dei tessuti, assorbito nel letto vasale (Chanel, Ehrlich).

E allora, se dopo un salasso subiscono danni i globuli rossi dello stesso animale, a maggior ragione ne subiranno quelli trasfusi appartenenti a un altro individuo. Questa ipotesi, poi, può essere estesa dall'anemia da salasso a tutte le forme di anemie umane a tipo emolitico, in cui la causa che distrugge i globuli rossi del ricevente deve anche accelerare la distruzione di quelli donati.

E i frequenti fenomeni morbosi che si osservano nell'uomo dopo la trasfusione di sangue potrebbero essere messi in rapporto alla più o meno rapida distruzione del sangue introdotto. Ma essa si manifesta raramente con l'evidenza osservata in questi esperimenti, a causa della quantità proporzionalmente minore di sangue trasfuso.

BIBLIOGRAFIA

Ascarelli, *Ricerche su alcune proprietà dei sieri emolitici.* « Policlinico », Sez. Med., vol. VIII, Roma 1903.

Besançon et Labbé, *Tr. d'hématologie.* Paris, Steinheil 1904.

Bongiorno, *Sul comport. delle gland. emol. nelle anemie da sal.* VI Congr. Med. Sicil. 1921. « Riv. San. Sic. », 306, 1921.

Brown, *Blutabbau währ. körperl. Uebungen u. s. w.* « Centr. bl. f. All. Path. u. Path. An. », Bd. XXXIV, p. 19.

Carmona, *Sulla tr. del sangue.* « Arch. It. di Chir. », vol. VIII, fasc. 5°, novembre 1923.

Id., *Altre ricerche sulla trasf. del sangue.* « Arch. It. di Chir. », vol. X, fasc. 2°, settembre 1924.

« Centr. Org. F. ges. Chir. », 1920–1927 Berlin, Springer,

Clairmont und Mueller, *D. Bluttr. in ihrer heut. Asfuehrung.* « Deut. Mediz. Woch. », n. 22, 28 maggio 1926.

Conheim, *Lez. di Pat. Gen. tradotte da Napolitani.* Jovene e C. Napoli 1883.

Dionisi, *Lez. sull'Anat. patol. del sangue.* Roma 1925–1926.

Goldzieher u. Makai, *Regener. Transpl. u. Parabiose.* « Erg. d. Allg. Path. u. Path. An. », vol. XVI, Abt. II, 1912.

Hunt, *React. foll. the Bl. transf.* « Coll. papers of the Mayo Clin. », 532, 1918.

Kanzenstein, *Biologie d. Knochenmarks.* « Virch. Arch. », 258, H. 1/2.

Klieneberger, *Die Blutmorph. d. Laboratoriumstiere.* Barth, Leipzig 1912.

Krause, *Die An. d. Kaninchens.* Engelmann, Leipzig 1868.

Krehl, u. Marchand, *Hbuch d. Allg. Path.* Hirsel, Leipzig 1912.

Lattes, *Die individualität d. Blutes in d. Biologie u. s. w.* Springer, Berlin 1925.

Lusena, *St. Sperimen. sulla tr. di s.* « Sperimentale », 460, 1921.

Mino, *Gruppi sanguigni di isolisi nell'uomo.* « Riforma Medica », Anno 40°, n. 5, 1924.

Id., *Recherches expérim. sur la question des groups sanguins.* « Art. Médical », n. 8, 1924.

Id., *Hémothérapie et crise hémoclasique.* « Presse Médicale », n. 90, novembre 1923.

Id., *Incompatibilità biologiche nella tr. d. s. nell'uomo e modo di riconoscerle.* « Min. Medica », anno III, n. 12, 1923.

Mino e Garlasco, *Ric. sperim. sulla tr. d. s. umano nell'uomo.* « Arch. per le Scienze Med. », vol. XLVI, 1923.

Id., *Ric. sul meccanismo dell'autoemoterapia.* « Gazz. degli Osped. e delle Cliniche », n. 23, 1924.

Mino e Canaperia, *Sul modo di determinare i gruppi sanguigni.* « Policlinico », Sez. pratica, 1924.

Panisset et Verge, *Sur l'exist. d. Groupes Sanguins chez les animaux.* « C. R. Soc. Biol. ». Paris 1922, vol. 87, n. 28.

Pauchet et Becart, *Transfusion du sang.* Doin, Paris 1924.

Pemberton (De), *Bl. transf.* « Coll. papers of the Mayo Clin. », 508, 1918.

Id., *Practic. Consid. of the dangers ass. with Bl. transf.* « Coll. papers of the Mayo Clin. », 635, 1918.

Plehn, *Die Behandl. d. Magen. u. Duodenalgeschwuere mit grossen Bluttr.* « Deut. Mediz. Woch. », n. 27, 2 luglio 1926.

Rossius, *Ein t'ere exp. Beit. z. Frage d. Bluttr.* « Arch. f. Klin. Chirurgie », 22 dez, 1925, 137, 3/4.

Sachs u. Widrich, *Ueber die Veraend. d. Blutes nach d. Bluttr.* «Wien. Klin. Voch.», n. 48, 26 nov. 1925.

Schittenhelm, *Hbuch d. Kr. d. Blutes u. d. Blutbid. Organe.* Springer, Berlin 1925.

Sebastiani, *Emoglobinuria tratt. con tr. e seguito da morte.* « Pathologica », p. 20, 1926.

Stewart, *Surg. gyn. a. Obst.* Bd. 38.

Wildegans, *Die Bluttr. in Dienste d. Chirurgie.* « Deut. Mediz. Woch. », n. 50, 11 decembre 1925.

Zervell, *Lebensdauer d. transf. rot Blutkorp. b. Menschen.* « Deut Mediz. Woch. », n. 29, 17 luglio 1925.

Biologia. — *Cultura ascendente e dissociazione microbica.* Nota di C. Gorini, presentata dal Socio O. Mattirolo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool* [1]. *Azione sul ricambio azotato di ratti albini alimentati con dieta insufficente subproteinica, sublipinica, ipercarboidrosica.* Nota V di A. Galamini [2], presentata [3] dal Corrisp. S. Baglioni.

Molti AA. hanno sperimentato sull'alcool per stabilire se l'energia eventualmente sviluppata colla sua combustione fosse o no utilizzata dall'organismo. Lavori riassuntivi e critici sono stati pubblicati in proposito da Rosenfeld, Rosemann e Baglioni. Da questi lavori sono tratte in gran parte le notizie qui riferite. Secondo l'opinione di molti, Strassmann, Atwater, Benedict, ecc., l'alcool nell'organismo è in gran parte bruciato e soltanto il 3 % circa della quantità ingerita è eliminata dagli emuntori. Geppert e Zuntz, insieme con Bordez dimostrarono nell'uomo che l'escrezione di Co^2 e l'assorbimento di O, dopo l'ingestione di alcool, non subiscono variazioni e pensarono che le calorie svolte dalla sostanza fossero utilizzate dall'organismo per la sua economia, perchè esse non compaiono come aumento di consumo. Secondo Baglioni l'alcool non può esercitare una sensibile azione di risparmio sugli idrati di C perch'essi si accumulano nell'organismo soltanto in piccola quantità in confronto dei grassi e delle sostanze proteiche. Strassmann ha osservato che l'aggiunta di alcool a una dieta sufficente fa accumulare nell'organismo grasso capace di svolgere calorie in quantità uguale a quella dell'alcool somministrato: se la dieta è insufficente la perdita di grasso dell'organismo diminuisce di una quantità corrispondente in calorie all'alcool aggiunto. Secondo Benedict e Atwater l'azione di risparmio dell'alcool sui grassi corrisponderebbe in valore a quella degli idrati di C. Sull'azione di rjsparmio delle sostanze proteiche gli esperimenti sono più numerosi. Mogilianski, Neumann, Atwater e Benedict, Rosenfeld, Clopatt, osservarono che l'alcool fa risparmiare le proteine: però è necessario per osservare tale azione, che gli esperimenti siano compiuti per un certo tempo. Precede il risparmio un periodo di aumentato consumo, forse in rapporto con l'azione tossica dell'alcool, che presto scompare. Questo fatto si osserva sopratutto quando sono somministrate forti quantità di alcool in soggetti non abituati. Le quantità di alcool somministrate dagli AA. furono abbastanza forti: Mogilianski 49–60 cc., Rosemann 145 gr., Bjerre 167 gr. Secondo Rosenfeld l'azione di risparmio dell'alcool sulle proteine può essere maggiore di quella degli idrati di C., anche quando la quantità somministrata provoca disturbi dell' intelligenza, dei muscoli e del cuore. Munk in cani ha osservato che piccole quantità di alcool diminuiscono l'eliminazione di N.: quantità maggiori l'aumentano. Weiske e Flechsig non osservarono azione di risparmio di alcool sulle proteine, sperimentando sulle pecore. Questa azione invece fu dimostrata nei diabetici da Hirschfeld: Benedict e

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

(2) Nella esecuzione delle ricerche fui aiutato dal laureando signor Angelo Filippi e dalla signorina Nennele Raimondi.

(3) Nella seduta del 4 marzo 1928.

Toroc osservarono che l'alcool diminuisce l'eliminazione dei corpi acetonici non solo nei sani con dieta priva di idrati di C., ma anche nei diabetici. Negli uomini a digiuno l'alcool eserciterebbe piuttosto un' azione dannosa che un' azione di risparmio sulle proteine. Secondo gli esperimenti di Rosemann e di Romeyn, per azione dell'alcool, la secrezione di N. aumenta. Questo fatto sarebbe indipendente dall'azione diuretica della sostanza. Nei conigli in digiuno si è osservato che piccole dosi di alcool, per via sottocutanea, aumentano la loro resistenza al digiuno, mentre forti dosi la diminuiscono. Circa l'ucido urico Rosemann ricorda che non si conosce ancora bene l'azione dell'alcool sul ricambio purinico. Sembra che l'azione di risparmio, osservata sul ricambio proteico in generale, non si osservi nel ricambio purinico in particolare.

Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana mostrarono che un ratto alimentato con dieta ipercarboidrosica sublipinica subproteinica con aggiunta di alcool (gr. 1.8 per kgr. di peso) resistette all'inanizione parziale molto più di un altro, che subì lo stesso trattamento senz'alcool. Si pensò che l'azione dell'alcool si fosse esercitata, « o agendo come alimento di risparmio o favorendo i processi digestivi, riducendo al minimo il consumo di azoto sì da rendere sufficente alla vita, o almeno di poco insufficente la piccola quantità di esso ingerito col lievito di birra, ecc. ».

Per controllare i risultati suddetti e per meglio approfondire l'azione dell'alcool si sono ripetute le ricerche suddette su altri due ratti albini, somministrando loro però quantità decrescenti di lievito di birra e determinando, col metodo di Kjeldahl l'N ingerito e l'N escreto dagli animali colle feci e colle urine. I risultati sommariamente descritti furono:

Ratto D, ♂, adulto.

Fu tenuto dal 2-3-27 al 5-5-27 in laboratorio per abituarlo all'ambiente. Gli si somministrò a volontà la seguente miscela: pane gr. 10, amido di mais gr. 7, formaggio, ovalbumina, burro anagr. 2: Nacl, carta, lievito di birra anagr. 0.2: acqua potabile cc. 60: limone cc. 05. La miscela si preparava così: all'amido cotto con acqua e raffreddato si aggiungevano pane, formaggio, ovalbumina sgrassata, carta, cloruro di sodio, lievito di birra, limone e si mescolava, rendendo la poltiglia omogenea. Durante questo periodo il ratto si mantenne in ottime condizioni di salute, crescendo da gr. 196.5 a gr. 238. Ingerì con la miscela nei giorni 27-4-27, 2-5-27, 3-5-27 gr. 0.939; 0.03; 2.2 di azoto ed eliminò con le urine gr. 0.0504, 0.127; 0.0785 di N e con le feci gr. 0.0311; 0.03; 0.0447. In media dunque l'N ingerito fu di gr. 1.723, quello eliminato con le feci gr. 0.853, con le urine 0.353, in complesso gr. 1. 206. L'animale, come si vede, era in equilibrio di N. Il 5-5-27 il ratto fu sottoposto a digiuno parziale. Gli si somministrarono giornalmente gr. 30 di amido di mais cotto, e, a parte per assicurarsi che fosse completamente ingerita, una poltiglia: lievito di birra gr. 0.2: cavolo gr. 1: burro gr. 0.2, più piccolissima quantità di amido, sufficente ad agglutinare le diverse sostanze. Il ratto, avidissimo della poltiglia, l'ingeriva, subito dopo somministrata, completamente. In aggiunta alla dieta si somministravano all'animale gocce 30 di alcool a 95 % al giorno, in tre volte, corrispondenti a piccole calorie 2.72 e a circa gr. 2.10 per kgr. di peso. Il giorno 25-5-27 la razione di lievito di birra fu ridotta a gr. 0.15; il 29-5-27 a gr. 0.11; il 5-6-27 a gr. 0.05; il 2-7-27 a gr. 0.03. Durante tutto il periodo degli esperimenti dal 5-5-27 al 18-7-27, quando si sospesero le ricerche, il ratto è diminuito da gr. 238 a gr. 131.3, cioè di gr. 106.7, pari a 44.8 % del peso iniziale e a gr. 0.0079 per gr. di peso e per giorno. Esaminando la curva delle variazioni del peso si possono distinguere tre periodi. Il 1° va dal 5-5-27

al 23-5-27, giorni 18, durante i quali il ratto è diminuito da gr. 238 a 189 pari al 20.6 % e a gr. 0.0144 per gr. di peso e per giorno. Le calorie ingerite in questo periodo furono complessivamente 1120.05 pari a 62.20 per giorno e a 29 per giorno e per gr. di peso. Se però si tiene conto dell'alcool ingerito le calorie ascendono a 0.30 per gr. di peso e per giorno. Durante questo periodo si determinò l'azoto nei giorni 17, 18, 19 maggio: colle urine furono emessi gr. 0.0174; 0.0133; 0.0232; in media gr. 0.0179: colle feci gr. 0.0062; 0.0043; 0.013; in media 0.0078. In media il ratto eliminò gr. 0.0257 di azoto; poichè col lievito di birra ne ingerì gr. 0.0150 ebbe giornalmente la perdita di circa gr. 0.1 di azoto. Nel secondo periodo, che va dal 23-5-27 al 21-6-17 il ratto diminuì ancora di peso da gr. 189 a gr. 149, perse cioè il 22 % del peso iniziale: il 38.2 % del peso iniziale di questo periodo. La perdita quotidiana di peso per gr. fu di gr. 0.0075. Le calorie ingerite complessivamente 1366, pari a 48.8 per giorno e 0.29 per giorno e per grammo di peso, a 0.30 se si tien conto dell'alcool ingerito. Durante questo periodo determinazioni di N furono fatte nel giorni 6-7-8 giugno. L'azoto eliminato colle urine fu di gr. 0.0124; 0.0221; 0.00518; in media di gr. 0.0132: l'azoto eliminato colle feci fu di gr. 0.0032; 0.00933; 0.01; in media di 0.0074. In complesso il ratto eliminò in media ogni giorno gr. 0.02 di N: poichè ne ingerì gr. 0.00375 con il lievito di birra, ebbe una perdita di gr. 0.0169. Nel terzo periodo il ratto dal 21-6-27 al 18-7-27 in giorni 27, diminuì da gr. 147 a 131,3, pari al 10.9 % e a gr. 0.0042 per gr. di peso e per giorno. Il numero delle calorie ingerite durante questo periodo fu di 40 per giorno, pari a 0.28 per gr. di peso e per giorno e a 0.30 se si tiene conto dell'alcool. Determinazioni di azoto furono fatte nei giorni 13, 14, 15-6-27 e 24, 25, 26, 28, 29-6-27. In questi ultimi cinque giorni si determinò solo l'azoto delle urine. I valori trovati per le urine furono rispettivamente gr. 0.0132; 0.00966; 0.0063; 0.00879; 0.007; 0,00126; 0.0131; 0.00756: per le feci gr. 0.0083; 0.011; 0.015. Nei primi 3 giorni l'azoto emesso in media colle urine fu di gr. 0.00973: quello emesso colle feci gr. 0.0147: in complesso l'azoto escreto ascese a gr. 0.02443: poichè quello ingerito fu sempre di gr. 0.00375 la perdita giornaliera ascese in media a gr. 0.020. Negli altri 5 giorni l'eliminazione di azoto superò sempre l'ingestione. Colle urine furono eliminati in media gr. 0.00754 di N: col lievito di birra ne furono ingeriti gr. 0.00375. Al termine dell'esperienza il ratto stava apparentemente bene: rimaneva calmo nella gabbia, mostrando come ogni ratto normale, le abituali fasi di attività e di riposo.

Ratto D_{II}, ♂, adulto.

Dal 12-3-27 al 5-5-27 fu tenuto in gabbia in laboratorio, per abituarlo all'ambiente. Ebbe la stessa miscela descritta pel ratto D_I. Aumentò di peso da gr. 239 a 315.5. Determinazioni di azoto furono fatte i giorni 28, 29, 30-4-27. Il ratto ingerì gr. 0.256; 0.492; 1.23 di N; ne emise colle urine gr. 0.220; 0.393; 0.257: colle feci gr. 0.036; 0.048; 0.032. L'azoto ingerito in media fu di gr. 0.659: quello emesso colle urine di gr. 0.29; colle feci di gr. 0.027. L'azoto emesso fu molto minore di quello ingerito. Il 5-5-27 il ratto fu sottoposto al regime ipercarboidrotico suddetto, senz'alcool. Dividendo la durata degli esperimenti in 3 periodi, come pel ratto D_I, si osserva che nel primo periodo il ratto D_{II} diminuì di peso da gr. 315 a 271, cioè del 14 % e di gr. 0.0077 per gr. di peso e per giorno. Le calorie ingerite furono complessivamenti 1872, pari a 93 per giorno e a 0.31 per grammo di peso e per giorno. Determinazioni di N furono fatte nei giorno 17, 18, 18-5-27. Il ratto ingerì quotidianamente gr. 0.015 di N: ne eliminò colle urine gr. 0.0266; 0.0409; 0.0295; in media gr. 0.097; colle feci eliminò gr. 0.023; 0.029; 0.015 di N, in media gr. 0.067. In complesso il ratto eliminò, in media, gr. 0.017 di N in più di quanto ne ingerì. Nel secondo periodo, dal 23-5-27 al 21-6-27 il ratto diminuì di peso di 60 gr., da 271 a 217, pari al 33 % rispetto all'inizio delle esperienze e al 22 % al primo, rispetto al peso iniziale di questo periodo. La perdita fu di gr. 0.0075 per gr. di peso e per giorno. L'animale ingerì alimenti corrispondenti a calorie 2133, pari a 76

per giorno e a 0.31 per gr. e per giorno. La determinazione dell'azoto fu fatta nei giorni 6, 7, 8-6-27. Colle urine se ne eliminarono gr. 0.0137; 0,0128; 0.0294, in media gr. 0.0186; colle feci gr. 0.00366; 0.024; 0.017; in media gr. 0.0148. L'azoto emesso fu in media di gr. 0.0344, cioè di gr. 0.0281 in più di quello ingerito, ascendente a gr. 0.00525. Nel terzo periodo di esperimento il ratto diminuì di peso da gr. 211 a gr. 180, gr. 31, pari al 14.7 % e a gr. 0.006 per gr. di peso e per giorno. La perdita del peso, riferita all'inizio delle esperienze, fu del 42.8 %. Le calorie ingerite furono in media 55, pari a 0.28 per giorno e per gr. di peso. Determinazioni di azoto furono fatte nei giorni 13, 14, 15-6-27. Furono ingeriti gr. 0.000525 di azoto: furono eliminati con le urine gr. 0.011; 0.0098; 0.00769; in media gr. 0.00949: con le feci gr. 0.0098; 0.006: in media gr. 0.0158. In complesso in ciascun giorno il ratto emise azoto in eccesso, pari a gr. 0.012 Si determinò anche l'azoto emesso colle urine nei giorni 24, 25, 26, 29-7-27: i valori trovati furono gr. 0.00677; 0.00945; 0.00924; 5.00525: in media 0.00767. Anche in questi giorni il ratto emise più azoto di quanto ne ingerì: tuttavia si è osservata la tendenza a ridurne le perdite giornaliere. Al termine delle esperienze il ratto viveva apparentemente in buona salute: si mostrava soltanto un po' più eccitabile del ratto D_I.

Prima di fare il confronto dei risultati ottenuti con i 2 ratti, bisogna osservare che volendosi fare esperienze di controllo, essendo da ricerche precedenti emerso che l'alcool esercitava un' azione benefica sull'alimentazione insufficente ipercarboidrosica sublipinica e subproteinica, si sottopose a questa dieta più alcool il ratto D_I, che all'inizio delle esperienze pesava meno, era meno grasso del ratto D_{II}, lasciando supporre che, meno di questo, avrebbe offerto resistenza al trattamento speciale. Osservando i dati ottenuti si nota che tutti e due i ratti, a differenza di quanto si osservò con ricerche precedenti, diminuirono di peso fino a circa il 49 % del peso iniziale. La differenza probabilmente è in rapporto col fatto che nelle presenti ricerche furono somministrate ai ratti quantità decrescenti e sempre molto piccole di lievito di birra. Può darsi che la carenza di azoto fosse troppo forte perchè si potesse manifestate evidente l'azione benefica dell'alcool. Ricerche simili eseguite somministrando maggiori quantità di lievito di birra potranno illuminarci in proposito.

Però, anche nelle presenti condizioni di esperimento sembra che l'alcool abbia agito, sebbene tardivamente, aumentando la resistenza del ratto all'inanizione parziale. Il ratto D_I, che prese alcool nel primo periodo, diminuì giornalmente per gr. di peso gr. 0.0114, cioè più del ratto D_{II}, che diminuì solo gr. 0.0077: nel secondo periodo il ratto D_I ebbe una quota di diminuzione giornaliera uguale a quella del ratto D_{II}, e cioè di gr. 0.0075 per gr. di peso e per giorno. Nel terzo periodo D_I, anzichè perdere di più, perse di meno, e cioè gr. 0.0042 invece di gr. 0.006 per gr. di peso e per giorno.

Se ci si pone la domanda sul meccanismo di azione dell'alcool, si deve rispondere, tenendo conto dei risultati delle analisi di N, che l'alcool non ha agito risparmiando le sostanze proteiche. Riferendo il *deficit* di azoto, durante l'inanizione parziale al gr. di peso medio, si vede che in D_{II} esso fu minore che in D_I e che nel primo ratto, a differenza del secondo, ci

fu la tendenza ad equilibrare il bilancio dell'azoto. I risultati dei calcoli sono i seguenti:

Ratto D_I:

Giorni	*Deficit* di N per gr. di peso medio e per giorno
17, 18, 19-5-27	gr. 0.000054
6, 7, 8-6-27	» 0.0001
13, 14, 15, 15-6-27 . . .	» 0.00011
24, 25, 26, 28, 29-6-17 . .	» 0.00013

(mancando la determinazione dell'azoto emesso colle feci ci si valse del valore medio ottenuto nei giorni 13, 14, 15-6-27).

Ratto D_{II}:

Giorni	*Deficit* di N per gr. di peso medio e per giorno
17, 18, 19-5-27	gr. 0.00014
6, 7, 8-6-27	» 0.00012
13, 14, 15-6-27	» 0.000053
24, 25, 26, 29-6-27 . . .	» 0.00005

(per questo dato si è proceduto come sopra).

Escluso il risparmio di N, si può pensare, ricordando che i ratti, nei tre periodi di esperimento, ingerirono sempre alimenti corrispondenti a circa 0.3 calorie per gr. di peso e per giorno, che l'alcool abbia agito migliorando i processi digestivi e d'assorbimento o, fors' anche attenuando il il ricambio materiale, considerato complessivamente.

Concludendo, secondo le presenti ricerche, sembra:

1° Che l'alcool abbia agito favorevolmente sulla resistenza dei ratti albini, alimentati con amido di mais, con aggiunta di quantità decrescenti di lievito di birra da gr. 0.20 a gr. 0.03;

2° Che tale azione non sia consistita nel risparmio di sostanze proteiche, che nel ratto trattato con alcool, furono consumate in quantità maggiore.

BIBLIOGRAFIA.

Rosenfeld–Wiesbaden, 1901.
Rosemann, «Pflüger Archiv», Bd. LXXXVI, S. 307.
Luciani L. e Baglioni S., *Alimentazione umana*, Milano, 1917.
Baglioni S. e Galamini A., «Atti R. Acc. Lincei», vol. V, fasc. 4°, serie VI.

N. P.

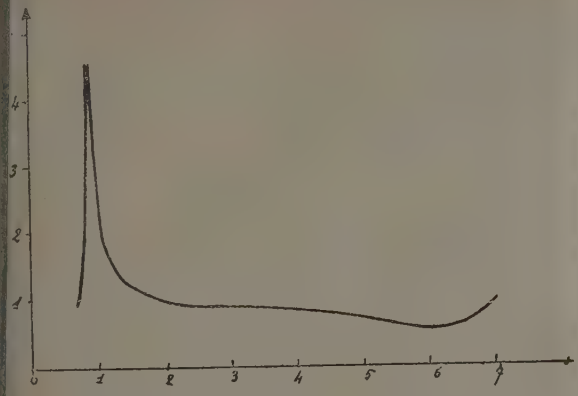


Fig. 1.

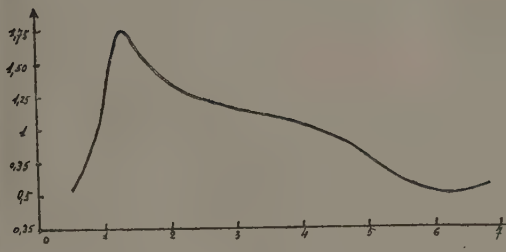


Fig. 2.

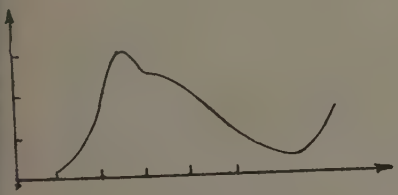


Fig. 2 *a*.

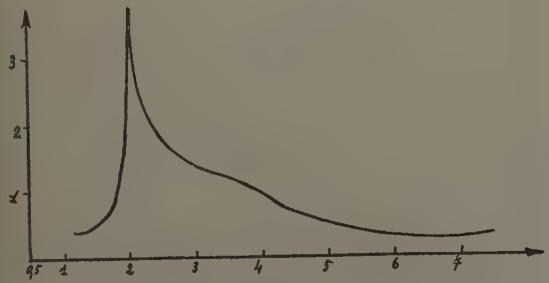


Fig. 3.

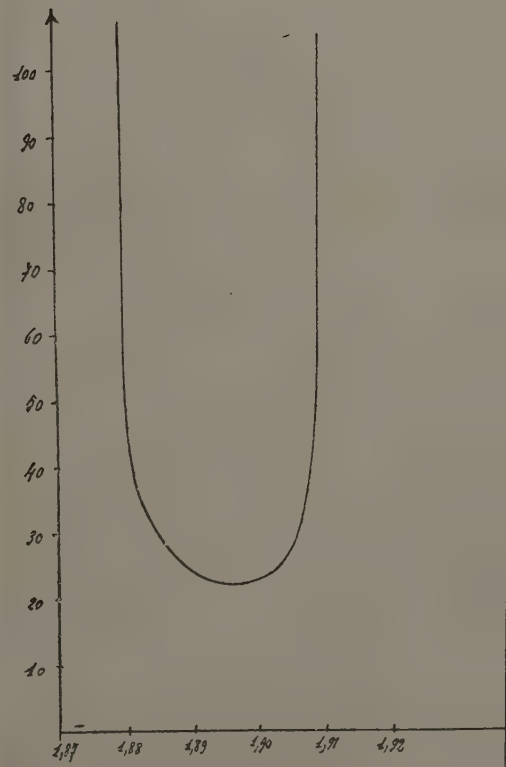


Fig. 3 *a*.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° aprile 1928 (Anno VI)

Presidenza del socio anziano sen. prof. E. PATERNÒ

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geofisica. — *Sulla gravità normale e la formola di Helmert.* Nota [1] del Socio C. SOMIGLIANA.

Mi occuperò anzitutto in questa Nota della determinazione del campo della gravità superficiale per l'ellissoide di rotazione, quando si considerano come elementi caratteristici del campo le due costanti geometriche dell'ellissoide (semiasse maggiore a e schiacciamento s) ed un valore della gravità ad una latitudine qualsiasi φ.

È questa la determinazione che appare come la più opportuna per la gravità normale, secondo quanto si è visto nella Nota precedente [2]. Ma altre, come sappiamo, sono parimenti possibili; in particolare presentano interesse i seguenti due casi, quando cioè si prendono come elementi caratteristici, o fondamentali, del campo:

1° una costante geometrica (ad es. lo schiacciamento od il semiasse maggiore) e due valori della gravità, corrispondenti a due latitudini arbitrariamente scelte;

2° tre valori qualsiansi della gravità a tre latitudini differenti.

Dalle considerazioni da noi svolte in lavori precedenti risulta subito che anche in questi casi il campo della gravità è completamente determinato. Ce ne occuperemo brevemente in fine di questa Nota.

(1) Presentata nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) *Sulla definizione della gravità normale.* « Rend. Acc. Lincei », 1° sem. 1928, p. 184.

I.

In tutti i casi sopra indicati noi considereremo come formola fondamentale per rappresentare la gravità alla superficie del geoide ellissoidico di rotazione, la formola finita e rigorosa

$$(1) \qquad g = \frac{j g_e \cos^2\varphi + g_p \operatorname{sen}^2\varphi}{\sqrt{j^2 \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}} \qquad j = \frac{a}{c} = \frac{1}{1-s}$$

in cui g_e, g_p rappresentano la gravità all'equatore ed al polo rispettivamente [1]. Quindi in ogni caso la quistione della ricerca della formola fondamentale atta a rappresentare la gravità normale si riduce a quella di esprimere le tre costanti g_e, g_p, j mediante gli elementi fissati come fondamentali.

Nel caso che dobbiamo dapprima considerare, essendo noto j, tutto si riduce ad esprimere g_e, g_p mediante un valore generico g della gravità ad una certa latitudine φ.

Serve a questo scopo la forma generalizzata del teorema di Clairaut, che abbiamo dimostrata nella Nota: *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche e i valori della gravità* (« Rend. Acc. Lincei », 1° sem. 1927, p. 11). Se g_1, g_2 sono i valori della gravità alle latitudini φ_1, φ_2 e si pone

$$\zeta_1 = \sqrt{1 + i^2 \cos^2\varphi_1} \qquad \zeta_2 = \sqrt{1 + i^2 \cos^2\varphi_2} \qquad i = \sqrt{j^2 - 1}$$

essendo i la eccentricità aggiunta, il teorema generalizzato di Clairaut è rappresentato dalla relazione

$$\frac{g_1}{\zeta_1} - \frac{g_2}{\zeta_2} = \frac{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}{\zeta_1^2 \zeta_2^2}\, 2\omega^2 c\, \frac{i^2 + 1}{i^2}\, C(i)$$

ove $C(i)$ è la funzione che ho chiamato *di Clairaut*. Questa relazione permette quindi, nel nostro caso, di trovare il valore g_2 della gravità ad una latitudine qualsiasi φ_2, quando sia nota la gravità g_1 ad un'altra qualsiasi latitudine φ_1. Si ha così

$$(2) \qquad g_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} g_1 + 2\omega^2 c \zeta_2\, \frac{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{\zeta_1^2 \zeta_2^2}\, \frac{i^2 + 1}{i^2}\, C(i) .$$

Se supponiamo $\varphi_2 = 0$ poi $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ avremo le espressioni di g_e, g_p, gravità all'equatore ed al polo, mediante il valore g della gravità alla latitudine φ.

(1) *Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità.* « Rendiconti Acc. Lincei », 1° sem. 1927, p. 319.

Si trova così

$$(3)\qquad \begin{cases} g_e = g\dfrac{\sqrt{1+i^2}}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}} - 2\omega^2 a\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{1+i^2\cos^2\varphi}\,C(i) \\ g_p = \dfrac{g}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}} + 2\omega^2 a\dfrac{\cos^2\varphi}{1+i^2\cos^2\varphi}\sqrt{1+i^2}\,C(i). \end{cases}$$

Queste due formole risolvono la quistione proposta.

Sostituendo questi valori di g_e, g_p nella (1) avremo l'espressione della gravità normale, mediante i valori delle costanti geometriche a, i ed un valore qualsiasi g della gravità alla latitudine φ.

Particolarmente interessanti sono i casi in cui si prenda $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Si ha nel primo caso $g = g_e$, gravità all'equatore, e siamo nelle condizioni proposte dal prof. E. Bianchi per la definizione della gravità normale. Per la gravità al polo abbiamo allora dalla seconda delle (3)

$$(4)\qquad g_p = \frac{g_e}{\sqrt{1+i^2}} + 2\omega^2 c\,C(i).$$

Nel secondo si ha invece come valore fondamentale della gravità quello corrispondente alla latitudine di 45°. Una proposta di questo genere si trova indicata nell'*Annuaire* pel 1926 del *Bureau des longitudes* (p. 146), come deliberazione della Quinta Conferenza generale dei pesi e misure, dell'ottobre 1913. Il valore ivi assegnato per la gravità a 45° è

$$g_q = 980{,}665 \text{ C. G. S.}$$

Dalle nostre formole (2) ricaviamo in questo caso

$$(5)\qquad \begin{cases} g_e = g_q\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{i^2+1}{i^2+2}} - \dfrac{2\omega^2 a^4}{i^2+2}C(i) \\ g_p = g_q\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{i^2+2}} + 2\omega^2 a\dfrac{\sqrt{i^2+1}}{i^2+2}C(i). \end{cases}$$

Si hanno così i valori della gravità all'equatore ed al polo mediante il valore della gravità a 45°.

II.

Sviluppo in serie dell'espressione della gravità.

Se nella formola (1) poniamo

$$j g_e\cos^2\varphi + g_p\operatorname{sen}^2\varphi = j\,C(1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi) + j\,D$$

troviamo per le costanti C, D le espressioni

$$(6)\qquad \begin{cases} je^2 C = jg_e - g_p \\ je^2 D = g_p - \frac{1}{j} g_e \end{cases}$$

e poichè

$$j\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = j^2(1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi)$$

sostituendo in (1) si ottiene

$$(7)\qquad g = C\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi} + \frac{D}{\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Ora si hanno i noti sviluppi

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^n$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^n$$

per cui ponendo $x = e^2\operatorname{sen}^2\varphi$ e sostituendo nella (7) si trova per g uno sviluppo in serie della forma

$$(8)\qquad g = \beta_0 + \beta_1 e^2\operatorname{sen}^2\varphi + \beta_2 e^4\operatorname{sen}^4\varphi + \cdots$$

nel quale

$$\beta_0 = C + D \qquad \text{e per } n = 2, 3, 4, \cdots$$

$$(9)\quad \beta_1 = -\frac{1}{2}(C - D) \qquad \beta_n = -\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}(C_n - (2n-1)D)$$

Arrestandoci al terzo termine nello sviluppo otterremo per g una espressione di forma simile a quella di Helmert, purchè si introduca $\operatorname{sen}^2 2\varphi$ invece di $\operatorname{sen}^4\varphi$.

Si trova così

$$(10)\qquad g = \beta_0 + (\beta_1 + e^2\beta_2)e^2\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{1}{4}\beta_2\operatorname{sen}^2 2\varphi.$$

Calcolati i coefficienti β mediante le costanti C, D e in ultima analisi mediante i valori di g_e, g_p colle formole (6), potremo confrontare la formola ottenuta con quella di Helmert, colla quale è formalmente identica, quantunque abbia un significato diverso; poichè la nostra è una formola di approssimazione, suscettibile quindi di infiniti perfezionamenti, mentre quella di Helmert deve considerarsi come una rappresentazione globale della gravità. Tuttavia il confronto è possibile entro i soliti limiti di approssimazione numerica.

III.

Confronto con la formola di Helmert.

Fissato come valore fondamentale della gravità il valore della gravità all'equatore secondo la formola di Helmert (1901), cioè

$$g_e = 978{,}030$$

dovremmo anzitutto calcolare il valore g_p della gravità al polo mediante la relazione

$$g_p = \frac{c}{a} g_e + 2\omega^2 c\, C(i)$$

che non è altro che la formola classica di Clairaut nella sua forma rigorosa. Ora questa relazione si intende generalmente verificata dai valori accettati ordinariamente per la gravità al polo ed all'equatore, e non è difficile verificare che effettivamente il valore che essa dà per g_p nel caso nostro si può avvicinare a quello della formola di Helmert

$$g_p = 918{,}030\,(1 + 0{,}005302) = 983{,}215 \qquad (11)$$

spingendo sufficentemente l'approssimazione numerica, fino a differirne di quantità dello stesso ordine di grandezza delle incertezze esistenti nei coefficienti della formola di Helmert. Perciò mi è sembrato inutile tener conto di queste differenze ed ho fissato senz'altro pel valore di g_p quello stesso (11) della formola di Helmert [1].

Mediante questi valori di g_e, g_p possiamo colle equazioni (6) determinare i coefficienti C, D. Si ha

$$s = \frac{1}{297} \qquad j = \frac{297}{296} \qquad e^2 = \frac{1}{297}\cdot\frac{593}{297} \qquad je^2 = \frac{1}{296}\frac{593}{297}$$

e le equazioni (5) divengono

$$\frac{593}{297} C = g_e - 296\,(g_p - g_e)$$

$$\frac{593}{296} D = g_p + 296\,(g_p - g_e)\,.$$

Nel nostro caso

$$g_p - g_e = 5{,}185$$

(1) Una insufficiente approssimazione mi aveva dapprima condotto a trovare per g_p un valore minore di poco più di un millimetro di quello di Helmert, come è detto in fine alla Nota precedente (« Rend. Lincei », 1° sem. 1928, p. 189). Quella affermazione deve quindi essere modificata nel senso sopraindicato.

e si trova così

$$C = -278{,}834417 \qquad D = 1256{,}864417 .$$

Quindi

$$\beta_0 = C + D = 978{,}030 \qquad \beta_1 = -\frac{1}{2}(C - D) = 767{,}849417$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}(C - 3D) = 506{,}178458 .$$

Tenendo conto dei valori

$$e^2 = 0{,}00672278 \qquad e^4 = 0{,}00004519$$

e scrivendo la formola (10) della gravità nella forma

$$g = a + b \operatorname{sen}^2\varphi + c \operatorname{sen}^2 2\varphi$$

si trova

$$a = 978{,}030 \qquad b = 5{,}184956 \qquad c = -0{,}005178 .$$

I coefficienti corrispondenti della formola di Helmert sono

$$a = 973{,}030 \qquad b = 5{,}185515 \qquad c = -0{,}006846 .$$

Nella forma solita si ha invece nel nostro caso

(12) $$g = 978{,}030(1 + 0{,}005301 \operatorname{sen}^2\varphi - 0{,}0000058 \operatorname{sen}^2 2\varphi)$$

mentre secondo Helmert (1901)

(13) $$g = 978{,}030(1 + 0{,}005302 \operatorname{sen}^2\varphi - 0{,}0000070 \operatorname{sen}^2 2\varphi) .$$

Le differenze fra i coefficienti delle due formole sono quindi assai piccole. Ed è un fatto assai notevole che l'elaborazione dei dati delle osservazioni abbia potuto condurre Helmert ad una formola che differisce così poco dalla formola teorica approssimata, che risulta dalla soluzione del problema meccanico del geoide. Questa corrispondenza può considerarsi come una conferma dei principi che stanno a base della teoria; la quale inoltre, come si è visto, con poche e semplici formole conduce a risultati, che solo con un enorme lavoro di osservazione e di calcolo sono stati raggiunti, mediante l'applicazione del metodo dei minimi quadrati.

IV.

Quando si prendano come costanti fondamentali del campo due valori g_1 , g_2 della gravità alle latitudini φ_1 , φ_2 e lo schiacciamento, oppure l'eccentricità, i valori di g_e , g_p si ricavano immediatamente dalla relazione

lineare che ho dimostrato esistere sempre fra tre valori qualsiansi della gravità. Questa relazione si può scrivere

$$(14)\qquad \begin{aligned} & g_1 \operatorname{sen}(\varphi_2 + \varphi_3)\operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_3)\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_1} + \\ & + g_2 \operatorname{sen}(\varphi_3 + \varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi_3 - \varphi_1)\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_2} + \\ & + g_3 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_3} = 0 \end{aligned}$$

e da essa ponendo successivamente

$$\varphi_3 = 0 \qquad g_3 = g_e \qquad \text{e} \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \qquad g_3 = g_p$$

si ricava

$$(15)\qquad \begin{cases} g_e = \dfrac{g_2 \operatorname{sen}^2\varphi_1\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_2} - g_1 \operatorname{sen}^2\varphi_2\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}}{\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ g_p = \dfrac{g_1 \cos^2\varphi_2\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_1} - g_2 \cos^2\varphi_1\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_2}}{\sqrt{1 - e^2}\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{cases}$$

Sono questi i valori che devono essere sostituiti nel caso nostro nella formola generale (1), nella quale tutte le costanti restano così determinate.

Meno semplice è il caso in cui, insieme ai due valori della gravità, è dato uno dei semiassi. Conviene allora ricorrere alla forma generalizzata del teorema di Clairaut, rappresentato dalla relazione (2) nella quale in questo caso vi è una sola quantità incognita, l'eccentricità. Essa determina così questa costante, ma si richiede per ciò la risoluzione di un'equazione trascendente. Trovata l'eccentricità, i due valori di g_e, g_p possono essere determinati mediante le stesse formole (15) del caso precedente.

Finalmente quando si prendano come costanti fondamentali tre valori g_1, g_2, g_3 della gravità, l'eccentricità può essere determinata mediante l'equazione (14), che, come ho dimostrato in altra occasione (*Sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità*, « Atti della Acc. di Torino », vol. LXII, 1927) può essere trasformata in un'equazione di 2° grado nella e^2, la quale ha le radici sempre reali.

Trovata la eccentricità, potremo ancora far uso delle formole (15) con una coppia di valori di g scelti fra i tre che sono dati.

Così in ognuno dei casi considerati arriviamo alla determinazione delle costanti della formola fondamentale (1) per la gravità. Ciò è quanto era richiesto dalla quistione che avevamo da risolvere. Però è facile vedere che anche le rimanenti costanti del campo gravitazionale possono sempre essere completamente determinate in ognuno dei casi considerati. Così la densità media risulta determinata dal teorema di Pizzetti ed i semiassi, quando non sono noti, si possono avere linearmente dal teorema generalizzato di Clairaut. Nulla quindi resta sconosciuto nella rappresentazione del campo della gravità, in tutti i casi che abbiamo preso in esame.

Nell'ultima assemblea dell'Unione internazionale geodetica e geofisica, tenutasi a Praga nel settembre del 1927, è stata discussa la questione seguente:

Est-il opportun et possible d'adopter une formule pour l'intensité de la pesanteur théorique et doit-elle ou non reposer sur la considération de l'ellipsoïde international?

Io credo che le considerazioni svolte in questa Nota e nella precedente contengano gli elementi necessari per una soluzione esauriente di tale quistione.

Idromeccanica. — *Osservazioni sulla Nota di P. Straneo: « Intorno al teorema di Kutta-Joukowski »* [1]. Nota [2] del Corrispondente U. Cisotti e di B. Finzi.

I. — Osservazioni di U. Cisotti.

Per quanto concerne la *ortodossia* della deduzione del caso eccezionale, da me rilevato, non ho che da riferirmi alla mia recente Nota [3], pubblicata in occasione di osservazioni fatte dal prof. Pistolesi [4], sostanzialmente equivalenti a quelle sollevate dal prof. P. Straneo.

Non ho che da aggiungere due osservazioni.

1° Scrive l'A. a proposito del paradosso di d'Alembert e del teorema di Kutta-Joukowski (p. 229): « Tutto ciò è sempre stato fino qui considerato come *indipendente dal profilo della sezione del cilindro* ».

Osservo che l'asserzione non è esatta perchè il Bickley [5] trattando il moto di una corrente investitrice una lamina foggiata ad arco di circonferenza aveva già rilevato la possibilità di esistenza di una azione diretta (contrariamente al paradosso di d'Alembert), dovuta alla circostanza che la velocità diviene infinita agli estremi della lamina [6] e, si noti bene, anche in assenza di circolazione [7].

L'asserzione dell'A. - astrazione fatta da questa osservazione – trova la sua ragione nel fatto che i teoremi a cui si riferisce sono validi in base alle ipotesi con cui furono stabiliti e cioè di *perfetta regolarità* del movimento

(1) Questi « Rendiconti », vol. VII, 1° sem., 1928, p. 229.

(2) Presentata nella seduta del 1° aprile 1928.

(3) Ibidem, p. 17.

(4) Ibidem, p. 53.

(5) *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the Circular Arc.* (« Phil. Mag. », 1918, vol. XXXV, p. 396; vol. XXXVI, p. 273).

(6) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*. Parte prima (Milano, Tamburini, 1921), p. 126.

(7) Cfr. Finzi, *Potenza della corrente che investe un arco di circonferenza.* (« Boll. dell'Un. Mat. It. », vol. VI, 1927, p. 169).

in tutta la regione del moto esterna all'ostacolo. *Non c'è quindi da meravigliarsi che la introduzione di singolarità modifichi teoremi che furono stabiliti in base a ipotesi di regolarità incondizionata.*

2° La seconda osservazione è di più grave rilievo. L'A. nel III paragrafo della sua Nota fa una « nuova impostazione della questione » (p. 231). Invece che riferirsi al profilo laminare prende in esame il caso di un profilo ellittico molto schiacciato e ritrova il teorema di Kutta-Joukowski. Il profilo ellittico è caratterizzato da un parametro δ, il cui annullarsi fa divenire laminare il profilo stesso. L'A. si riferisce al profilo ellittico e alla fine del paragrafo IV (p. 233) trattando della spinta in questione dice che essa è « eguale a $-\rho c C$ *indipendentemente dal valore particolare di* δ; la qual cosa ci dispensa dal passaggio al limite che ci eravamo proposto ». Il limite a cui allude l'A. è, naturalmente, per $\delta \to 0$, cioè è relativo al passaggio dal profilo ellittico a quello laminare. La spinta viene così considerata come funzione del profilo (funzione di linea nel senso introdotto da Volterra).

Ora io dico che non è affatto legittima *la dispensa dal passaggio al limite*, per esprimermi colle parole dell'A. Abbiamo esempi classici, e nello stesso tempo elementari, che lumeggiano la illegittimità di siffatto procedimento. Di un triangolo ABC (fig. 1) sieno M, N, P i punti medi dei lati.

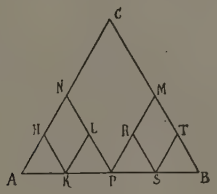


Fig. 1.

Si ha: AN + NP + PM + MB = AC + CB; analogamente operando sopra ciascuno dei triangoli APN e PMB si ottiene:

$$AH + HK + KL + LP + PR + RS + ST + TB =$$
$$= AN + NP + PM + MB = AC + CB$$

e così via con ulteriori analoghe suddivisioni; in conclusione la lunghezza del percorso da A a B lungo una qualsiasi delle infinite spezzate è *costante* ed uguale ad AC + CB, dunque (per dirla come l'A.) *è indipendente dalla particolare spezzata prescelta*. Se il lato AB del triangolo si considera limite della spezzata quando il numero dei lati aumenta indefinitamente, accettando come buono il procedimento dell'A. si giunge alla conclusione

$$AB = AC + CB!$$

Altro esempio classico è offerto dalla successione delle 2^n, per n uguale a $1, 2, 3 \cdots$, semicirconferenze indicate nella fig. 2. Portandosi da A in B seguendo uno qualunque dei cammini composti o della semicirconferenza di diametro AB, oppure delle due semicirconferenze di diametri AC e CB, oppure ecc., il percorso è sempre di lunghezza *costante* ed eguale alla semicirconferenza di diametro AB. Se si ammette che il limite per $n \to \infty$ sia

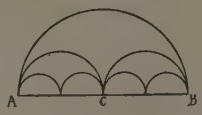


Fig. 2.

il diametro AB, l'applicazione del criterio biasimato porterebbe alla conclusione che la lunghezza di una semicirconferenza eguaglia il suo diametro!

Concludendo, la citata *dispensa* è base della dimostrazione dello Straneo, *non essendo essa ammissibile* a priori, cade la dimostrazione del risultato che l'A. si proponeva di raggiungere, per cui *l'eccezione da me rilevata nel caso laminare, continua finora a sussistere come la sola ortodossa.* Essa apre la via a una revisione critica sulla introduzione di certe forze variamente denominate: di *costa*, di *risucchio, aspirazione allo spigolo* le cui oscure origini mal si accordano colla limpidezza delle equazioni classiche dell'idromeccanica e coi metodi classici dell'analisi, ed hanno tutta l'aria di servire al mistico ufficio di accomodare certe cose quando non vanno come si vorrebbe!

II. — Osservazioni di B. Finzi.

L'A. sembra imputare a me una « inesatta interpretazione fisica di qualche punto del procedimento formale impiegato ». Dice l'A.: dissipazione di energia ai bordi della lamina c'è soltanto quando ai bordi stessi si verificano « effettivi assorbimenti di energia, di tipo assolutamente incompatibile col semplice flusso di un fluido perfetto, sia pure di velocità infinita in una regione infinitesima ».

Osservo che io mi sono limitato a determinare una formula tuttaffatto generale atta a calcolare la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica di un liquido perfetto, in moto stazionario, piano, irrotazionale, allorchè in qualche punto del campo la velocità diviene infinita. All'uopo ho isolato i punti di irregolarità con circonferenze ω, aventi centro nei punti stessi. Ho valutato quindi la potenza della corrente nel campo di moto, da cui ho escluso i circoletti ω. Ho supposto infine che i raggi delle circonferenze ω tendano a zero, così che la potenza calcolata esprime (come è classico) la potenza

entro *tutto* il campo di moto [1]. Se ω rappresenta una generica circonferenza di raggio infinitesimo, isolante una singolarità; se p è la pressione, ψ la funzione di corrente, T l'energia cinetica, t il tempo: ho trovato [2]:

$$(1) \qquad \frac{dT}{dt} = \Sigma \int_{\omega} p d\psi .$$

Sulla (1) mi pare che anche Straneo non abbia nulla a dire. Se non vi sono singolarità nel campo di moto, la (1) dà potenza nulla, come è pacifico; non così (in generale almeno) se vi sono singolarità.

Della (1) ho fatto due applicazioni:

Nella prima non ho fatto altro che sostituire nel secondo membro della (1) al posto di p e ψ i valori formitemi dalla soluzione cinematica di Cisotti [3], *che concorda con quella ottenuta da Straneo* [4], e ciò *astraendo* dal procedimento con cui Cisotti calcola l'azione dinamica sulla lamina. A *conti fatti* [5] ho trovato che la potenza *è* diversa da zero, e precisamente uguale alla potenza necessaria a far avanzare la lamina in seno al liquido, qualora la resistenza da esso opposta al moto fosse quella trovata da Cisotti. *A posteriori* quindi ho interpretato il mio risultato come una giustificazione energetica del caso eccezionale di Cisotti.

Ho fatto una seconda applicazione della (1) valutando la potenza di una corrente stazionaria, piana, irrotazionale, *non circolatoria*, investente un arco di circonferenza [6]. Anche in questo caso la (1) mi ha dato una potenza non nulla: precisamente uguale a quella necessaria a far avanzare l'arco di circonferenza in seno al liquido, qualora la resistenza da esso opposta al moto fosse quella trovata da Bickley [7]. *A posteriori* ho quindi interpretato il mio risultato come una giustificazione energetica dell'eccezione al paradosso di d'Alembert dovuta al Bickley.

Mi permetto di aggiungere ora alle applicazioni fatte della mia (1) una terza applicazione: consideriamo il « caso di Straneo ». Poichè la soluzione cinematica di questo caso *coincide* con quella relativa al « caso di Cisotti », otterrò per la potenza lo *stesso* valore ottenuto nel « caso di Cisotti »:

(1) Il prof. Pistolesi (loco citato) osservò che la potenza nello spazio τ da me considerato non coincide con la potenza nel campo di moto ottenuto aggiungendo allo spazio τ lo spazio τ' da me escluso, cioè i circoletti con centro nei punti singolari e raggio infinitesimo. Se l'osservazione del prof. Pistolesi fosse vera verrebbe meno il concetto di integrale improprio e cadrebbe, ad esempio, la teoria del potenziale.

(2) Questi « Rendiconti », vol. V, 1° sem., 1927, p. 666.

(3) Ibidem, p. 16.

(4) Loco citato, p. 232.

(5) Gli sviluppi di calcolo furono svolti, oltre che da me, anche (per altra via) da A. Rosenblatt (Questi « Rendiconti », vol. VI, p. 404).

(6) Loco prima citato.

(7) Loco citato.

$\rho c^2 C \cos\beta \operatorname{sen}\beta$. Ma il « caso di Straneo » comporta - nella trattazione del suo autore (contestata da Cisotti [1]) – una resistenza diretta nulla: manifesta è dunque la contraddizione con il principio di conservazione dell'energia. *La introduzione delle « forze di costa » se può dunque ristabilire nel caso eccezionale la validità del teorema di Kutta–Joukowski, distrugge il principio di conservazione dell'energia.*

Tornando ora al « caso di Cisotti », e constatato che nel campo di moto *c'è* accumulo d'energia cinetica ai bordi della lamina, si può discutere il *risultato* dal punto di vista fisico. Pur dichiarandomi agnostico di fronte a tal questione, osservo quanto segue: *se* (come dice lo Straneo) si vuol negare la possibilità fisica di assorbimento di energia dovuta al flusso di un fluido perfetto, sia pure di velocità infinita in una regione infinitesima, si dovrà concludere che il « caso di Cisotti » non può realizzarsi fisicamente. E si concluderà: dal punto di vista *fisico* non possono sussistere *contemporaneamente* le ipotesi in cui fu dedotta la soluzione *cinematica* di Cisotti; cioè, dal punto di vista logico, non possono sussistere *contemporaneamente* le seguenti ipotesi: *a*) ipotesi di Straneo; *b*) ipotesi di liquido perfetto; *c*) ipotesi di corrente traslo-circolatoria, piana, irrotazionale; *d*) profilo foggiato a lamina rettilinea. Non introducendo l'ipotesi *a*) (estranea ai postulati dell'idromeccanica classica) si ha il « caso di Cisotti », e tutto in esso è logicamente conseguente.

L'accumulo di energia ai bordi della lamina che si *constata* nel « caso di Cisotti » mi ha fatto pensare che il regime del problema in discorso possa essere quello che precede il regime del Prandtl; e anzi le conclusioni del problema in esame possano giustificare l'ipotesi del Prandtl del distacco di vortici dalla lamina: distacco dovuto appunto all'accumulo di energia ai bordi della lamina stessa [2]. Non attribuisco però a questa mia *visione fisica del risultato acquisito* altro valore se non quello di lumeggiare il caso eccezionale in discorso; perchè preferisco attenermi alle verità logiche (matematiche se si vuole), lasciando le ipotesi fisiche ai fisici, che, attraverso

(1) Mi permetto a tale proposito di aggiungere un'altra argomentazione che mostra la fallacia del criterio adottato dall'A. nella sua dimostrazione. Sia $\zeta = x + iy$ e γ una circonferenza del suo piano; l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

è notoriamente nullo se il punto $\zeta = 0$ è esterno a γ è invece $= 2\pi i$ se è interno, e infine $= \pi i$ se trovasi su γ.

Adunque il fatto che il predetto integrale è nullo per una circonferenza con centro in un punto $\zeta = a$ e raggio $r < |a|$ non autorizza affatto a concludere che, il risultato essendo costante e indipendente dal raggio, l'integrale è nullo anche per $r \geq |a|$! Ciò sarebbe invece conforme al ragionamento di Straneo.

(2) Cfr. le ultime righe della mia Nota citata, inserita in questi « Rendiconti ».

l'esperienza, hanno saputo maturare tale veggenza da enunciare verità nuove non ancora logicamente dimostrate.

A mo' di conclusione, questo voglio rilevare: io ho dimostrato direttamente che nel « caso di Cisotti » la potenza della corrente è uguale a quella necessaria a far avanzare la lamina in seno al liquido, qualora essa incontrasse la resistenza calcolata da Cisotti. In questo fatto io vedo una conferma ed una interpretazione energetica della notevole eccezione al teorema di Kutta-Joukowski.

Meccanica. — *Sulla resistenza e sulla rigidezza a torsione delle ali degli aeroplani.* Nota del Corrisp. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Fattori e indici nei gruppi lineari di operazioni.* Nota del Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla sufficienza delle equazioni differenziali della Fisica matematica.* Nota del Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *L'allumina Blanc.* Nota del Socio N. Parravano e di V. Montoro.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina* [1]. Nota II [2] del Socio straniero L. A. Herrera.

Continuando le mie ricerche sistematiche su questo argomento [3] ho esperimentato dopo l'acido solforico, l'acido cloridrico, che in soluzione normale è due volte più energico del precedente [4].

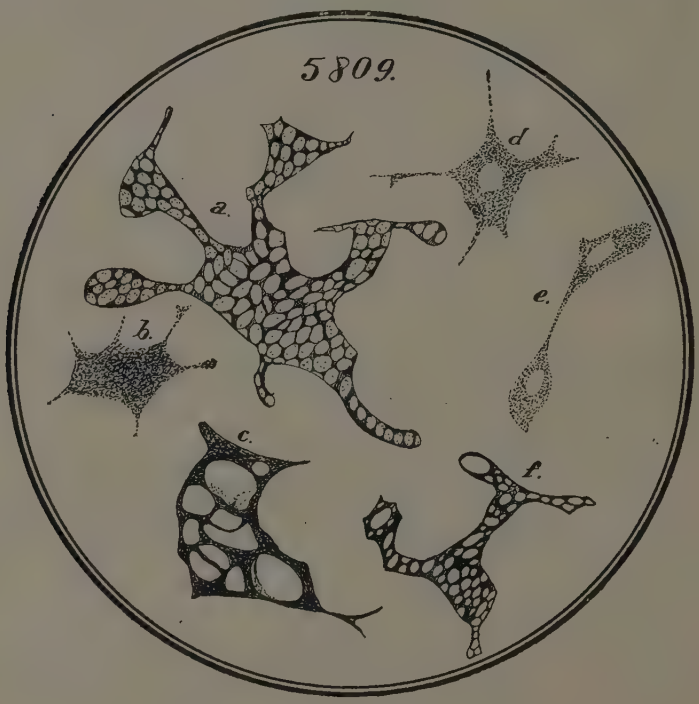


Fig. 1. – Assai ingrandita Zeiss $\frac{2}{D.D}$.
Forme organiche prodotte con l'ovalbumina e l'acido solforico.
Colorite e montate con balsamo del Canadà.

(1) Presentata nella seduta del 1° aprile 1928.
(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio degli Alti Studi Biologici de Messico.
(3) Questi «Rendiconti».
(4) Swarts, *Chimie inorganique*. Gand. Hoste éditeur, 1907, p. 154.

La tecnica impiegata è la stessa: goccie d'albumina *in natura* si fanno cadere su uno strato di acido da un'altezza di 2-3, 8 metri direttamente o attraverso un setaccio fino. Oppure si deposita ovo-albumina Merk, solida, o le scaglie del bianco d'uovo secco, sull'acido.

Bisogna impedire una diluizione eccessiva di quest'ultimo, diluizione che si opporrebbe all'azione idrolitica e coagulante. Si dovrà aggiungere

Fig. 2. – Zeiss $\frac{\text{bc. 4}}{\text{cb. D. D}}$.

Forme organiche prodotte con l'ovalbumina e l'acido cloridrico.
Colorite e montate con balsamo del Canadà.

acqua alle strutture appena formate per evitare un attacco eccessivo dell'acido. Il preparato viene lavato, fissato, colorato e montato su balsamo di Canadà coi metodi istologici abituali [1].

(1) Contemporaneamente a questa Nota vengono inviati all'Accademia i preparati microscopici.

Risultati. — Confrontando i disegni con quelli che corrispondono all'azione dell'acido solforico (fig. 1 : Forme ottenute coll'ovo-albumina e acido solforico - vedi Nota precedente [1]) - si riscontra una finezza ed una complicazione maggiore nelle forme del gele cloridrico. Si producono grandi vacuoli, e ciglia paragonabili perfettamente a quelle degli infusori.

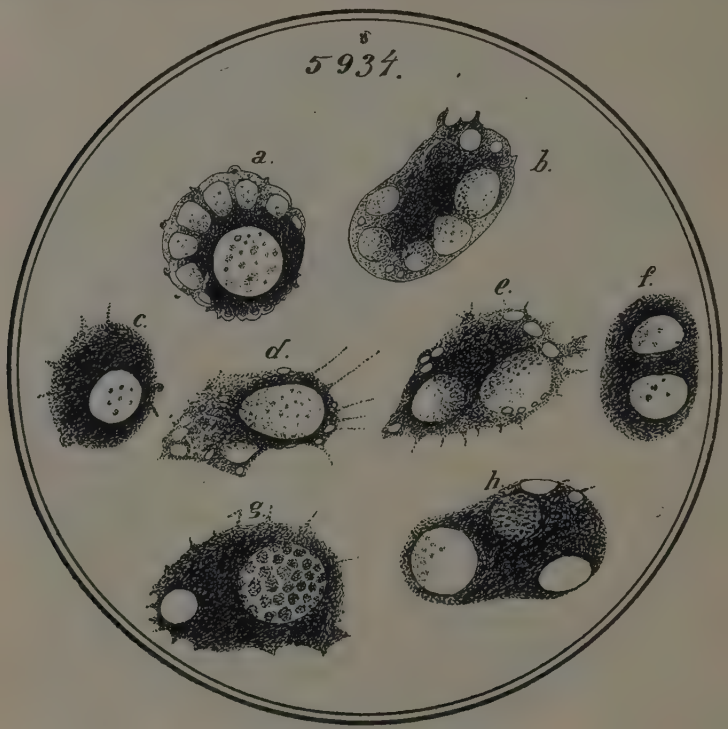


Fig. 3. - Zeiss $\frac{II}{D.D}$.

Forme organiche prodotte con l'ovalbumina e l'acido cloridrico.
Colorite e montate con balsamo del Canadà. Una goccia di chiara d'uovo *in natura* cadente da una altezza di 2 metri su l'acido cloridrico di una densità di 1.19.

Fig. 2. 2832: Ovalbumina solida polverizzata su acido cloridrico. Analogie coi protozoi: la forma *a*) presenta un reticolato di pseudopodi, simili a quelli dell'Allogromia [2].

Questa forma si è assai presto indurita, come tutte le forme prodotte coll'acido cloridrico, senza manifestare alcuna evoluzione nè movimento,

(1) Questi « Rendiconti »
(2) G. N. Calkings, *Protozoology*. Lea and Febiger, New York 1909, p. 75, fig. 23.

dopo il periodo brevissimo di formazione: la coagulazione è stata eccessiva. Vi è una membrana e due vuoti centrali:

I pseudopodi di *c* ricordano quelli dell'*Actinosphaerium eichornii* (1), *f* mostra delle analogie con un infusorio comunissimo il *Paramoecium caudatum* (2). Tali somiglianze non significano affatto una identità, poichè tali imitazioni sono ancora troppo imperfette.

Probabilmente le ciglia ed i pseudopodi son dovuti ad una rapida diffusione dell'albumina nell'acqua dell'acido, seguita da una ugualmente rapida gelificazione.

Fig. 3. 5934. Forme ottenute coll'ovo-albumina *in natura* e l'acido cloridrico. Qui si ha l'impressione di masse granulari di protoplasma; *g* ha un nucleo a struttura esagonale visibile appena con un forte ingrandimento e dopo colorazione e montaggio su balsamo. Vi sono dei grandi vacuoli senza movimento; *a* è confrontabile con un vecchio disegno di sferula dell'Arcella (3). Questi granuli diffusi d'albumina arieggiano alle amebe in generale (4).

Tali vaghe analogie saranno, io lo spero, più intime e precise se si arriverà a perfezionare la mia tecnica ancora troppo imperfetta e che dovrà badare ad un contatto più intimo delle sostanze.

Queste forme sono composte, come gli esseri viventi, di albumina più o meno idrolizzata, d'acqua, di sali, di tracce di silice ecc.

Data che l'ovalbumina è meno complicata del protoplasma si dovrà ancora aggiungere nucleine, lipoidi, colesterina ecc. (5).

(1) Parker and Haswell, *A Text-book of Zoology*. Macmillan and Co., London 1921. t. I, p. 58, fig. 41.

(2) Id. Iid., p. 91, fig. 70.

(3) Kunstler et Prévost, *La Matière vivante*. Masson et Cie, 1924, Paris, p. 206, fig. LXIII.

(4) P. Kammeres, *Allgemeine Biologie*, « Deutsche Verlags. Anstalt. », Stuttgart. und Berlin, 1920, p. 94, fig. 15.

(5) L'albumina contiene sempre tracce di silice, che dà stratture colle tracce di ferro dell'acido cloridrico. *Dove si trova l'albumina si troverà la silice* che esiste anche sempre nelle piante e negli animali. (Io mi domando spesso se essa non sia stata la base della vita ed il substratto dei primi organismi: questo concetto sarà svolto in un libro in preparazione « Silice e vita »). Le cellule artificiali di fluosilicati hanno una grande rassomiglianza morfologica colle cellule naturali (vedi Herrera, *Una nueva ciencia, La Plasmogenia*, Maucci editore, Barcellona). Le proprietà assorbenti della silice hanno applicazione sempre crescenti, e non è inverosimile pensare che le micelle siliciche abbiano assorbito i prodotti delle fotosintesi all'apparizione della vita. Questa ipotesi, tuttavia, non è nè ben studiata nè ancora dimostrata. Ultimamente io ho osservato in un minerale silicizzato – la rhyolithe di Michoacan (Messico) magnifiche figure cellulari e su ciò farò presto una comunicazione all'Accademia.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Areodinamica. — *Sul profilo laminare rettilineo.* Nota di M. Pascal, presentata [1] dal Socio R. Marcolongo.

Della insussistenza dell'eccezione al teorema di Kutta-Joukowski che il prof. Cisotti [2] aveva creduto di trovare nel caso di una lamina piana investita da una corrente circuito-traslatoria, si sono già occupati in due Note recenti il Pistolesi [3] e lo Straneo [4].

In risposta al primo, il Cisotti [5] ha poi pubblicata una breve Nota in cui, dopo aver richiamata la formola (conosciuta perchè da essa appunto si deduce la formola di Blasius) che dà la spinta su una linea non di flusso [6], accenna ad una via che può seguirsi per superare la difficoltà che si incontra nel calcolo per la presenza di due punti singolari per la funzione w^2 agli estremi della lamina. La via è quella di calcolare la spinta lungo una linea *non di flusso* circondante la lamina e poi passare al limite quando tale linea tende alla lamina.

È interessante quindi far vedere come la via indicata dal Cisotti porti ad una nuova prova della non esistenza dell'eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) U. Cisotti, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* « Rendiconti R. Acc. Lincei », (6), v. 5, 1927.

(3) E. Pistolesi, *A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski.* « Rend. R. Acc. Lincei », (6), v. 7, 1928.

(4) P. Straneo, *Intorno al teorema di Kutta-Joukowski.* « Rend. R. Acc. Lincei », (6), v. 7, 1928. In questo lavoro l'A. è incorso in una svista che, se non pregiudica la esattezza della conclusione, muta però formalmente l'andamento del calcolo. La formola (6) infatti deve essere sostituita con la (3) del presente lavoro: in conseguenza debbono essere modificate le formole (8), (9) e le seguenti. A questo proposito il prof. Straneo mi ha scritto: « ... nella formola (6) mi è effettivamente sfuggito un errore che si ripercuote sui valori delle costanti in alcune delle formole seguenti, senza per altro alterare il risultato e la conclusione finale. Mi farà piacere se nell'occasione della sua pubblicazione darà atto di ciò; così io non avrò da ritornare sull'argomento e potrò limitarmi a mandare una errata-corrige ».

(5) U. Cisotti, *Ancora su un'eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* « Rendiconti R. Acc. Lincei », (6), v. 7, 1928.

(6) Cfr. per es.: R. Grammel, *Ueber ebene Zirkulationsströmungen und die von ihnen erzeugten Kräfte.* « Jahr. Deutsc. Math. Verein. », v. 25, 1917; oppure: M. Pascal, *Le ricerche aerodinamiche di Kutta e di Joukowski.* Napoli, Pellerano, 1924.

La rappresentazione conforme del piano z della lamina rettilinea di lunghezza $2l$ ed inclinata dell'angolo β sulla direzione della velocità assintotica della corrente, sul piano ζ di un cerchio di raggio unitario col centro nell'origine, è ottenuta secondo il solito mediante la trasformazione

$$(1) \qquad z = le^{i\beta}\left\{\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)\right\}.$$

Il segmento rappresentativo della lamina sul piano z ed il cerchio unitario sul piano ζ si corrispondono (immaginando il piano z tagliato lungo la lamina) e sono linee di flusso per le correnti sui rispettivi piani.

Poichè la (1) trasforma le circonferenze concentriche esterne a quella di raggio uno sul piano ζ in ellissi omofocali (coi fuochi nei due estremi della lamina) sul piano z, consideriamo una qualunque di queste ellissi, per es. quella che è la trasformata della circonferenza di raggio $r(>1)$.

La spinta su tale linea *che non è di flusso*, è data allora dalla formola

$$(2) \qquad P_y + iP_x = -\frac{\rho}{2}\int_\gamma w^2\,dz + \rho i\int_\gamma w(u\,dy - v\,dx).$$

L'espressione di w per la corrente circuito-traslatoria che investe la lamina, in funzione della variabile ζ, è

$$(3) \qquad w_z = u - iv = \left\{V_\infty\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} + \frac{C}{\pi il}\right\}\frac{e^{-i\beta}}{\frac{\zeta}{e^{i\beta}} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta}}$$

in cui V_∞ è il valore della velocità assintotica e C la circuitazione.

Sul contorno ellittico circondante la lamina si avrà perciò

$$w_\gamma = u - iv = \left\{V_\infty re^{i\sigma} - \frac{V_\infty}{r}e^{-i\sigma} + \frac{C}{\pi il}\right\}\frac{re^{-i\beta}}{r^2\frac{e^{i\sigma}}{e^{i\beta}} - \frac{e^{i\beta}}{e^{i\sigma}}}$$

avendo posto $\zeta = re^{i\sigma}$. Ponendo quindi per brevità

$$A = (r^2 - 1)\operatorname{sen}\beta\cos(\sigma - \beta) + (r^2 + 1)\cos\beta\operatorname{sen}(\sigma - \beta)$$

$$B = (r^2 - 1)\cos\beta\cos(\sigma - \beta) - (r^2 + 1)\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\sigma - \beta)$$

$$A_1 = V_\infty(r^2 - 1)\cos\sigma \quad ; \quad B_1 = V_\infty(r^2 + 1)\operatorname{sen}\sigma - \frac{Cr}{\pi l},$$

$$E = (r^2 - 1)^2 + 4r^2\operatorname{sen}^2(\sigma - \beta) = A^2 + B^2,$$

si ha

$$u = \frac{A_1B + AB_1}{E} \quad , \quad v = \frac{AA_1 - BB_1}{E}.$$

D'altra parte si ottiene facilmente

$$dx = -\frac{l}{2r} A\, d\sigma$$

$$dy = \frac{l}{2r} B\, d\sigma .$$

Perciò

$$u\,dy - v\,dx = \frac{l}{2r}\frac{A_1\{A^2 + B^2\}}{E} d\sigma = \frac{l}{2r} A_1\, d\sigma .$$

Si ha quindi per il secondo integrale del secondo membro della (2)

$$\rho i \int_\gamma w(u\,dy - v\,dx) = \frac{l\rho i}{2r}\int_\beta^{\beta+2\pi} \{A_1 B + A B_1\}\frac{A_1}{E} d\sigma + \frac{l\rho}{2r}\int_\beta^{\beta+2\pi} \{A A_1 - B B_1\}\frac{A_1}{E} d\sigma .$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}\{A_1 B + A B_1\}\frac{A_1}{E} = \frac{V_\infty^2}{E}[&(r^2-1)^3 \cos\beta \cos^2\sigma \cos(\sigma-\beta) - \\ &-(r^2-1)^2(r^2+1)\operatorname{sen}\beta\cos^2\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta) + \\ &+(r^2-1)^2(r^2+1)\operatorname{sen}\beta\cos\sigma\operatorname{sen}\sigma\cos(\sigma-\beta) + \\ &+(r^2-1)(r^2+1)^2\cos\beta\cos\sigma\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta)] - \\ &-\frac{V_\infty}{E}\frac{Cr}{\pi l}(r^2-1)[(r^2-1)\operatorname{sen}\beta\cos\sigma\cos(\sigma-\beta) + \\ &+(r^2+1)\cos\beta\cos\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{A A_1 - B B_1\}\frac{A_1}{E} = \frac{V_\infty^2}{E}[&(r^2-1)^3 \operatorname{sen}\beta \cos^2\sigma \cos(\sigma-\beta) + \\ &+(r^2-1)^2(r^2+1)\cos\beta\cos^2\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta) - \\ &-(r^2-1)^2(r^2+1)\cos\beta\cos\sigma\operatorname{sen}\sigma\cos(\sigma-\beta) + \\ &+(r^2-1)(r^2+1)^2\operatorname{sen}\beta\cos\sigma\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta)] + \\ &+\frac{V_\infty}{E}\frac{Cr}{\pi l}(r^2-1)[(r^2-1)\cos\beta\cos\sigma\cos(\sigma-\beta) - \\ &-(r^2+1)\operatorname{sen}\beta\cos\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta)] .\end{aligned}$$

È subito chiaro che gli integrali fra β e $\beta + 2\pi$ di tutti i termini delle due precedenti espressioni che hanno per fattore V_∞^2 sono nulli: non rimangono perciò che i termini che hanno per fattore $V_\infty \frac{Cr}{\pi l}(r^2-1)$.

Ma

$$\int_\beta^{\beta+2\pi} \frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{E} d\sigma = \frac{\pi\cos\beta}{r^2(r^2-1)} \quad ; \quad \int_\beta^{\beta+2\pi} \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\beta)}{E} d\sigma = -\frac{\pi\operatorname{sen}\beta}{r^2(r^2+1)}$$

dunque

$$(4) \qquad \rho i \int_{\gamma} w(u\,dy - v\,dx) = \frac{1}{2}\rho V_\infty C \frac{r^2 - 1}{r^2}.$$

In quanto al primo integrale del 2° membro della (2) esso, calcolato come è su una linea chiusa che circonda tutte le singolarità della funzione w^2, è evidentemente uguale alla somma dei residui relativi ai poli di tale funzione interni al contorno: è cioè

$$-\frac{\rho}{2}\int_{\gamma} w^2\,dz = -V_\infty \rho C.$$

Se ne può avere una riprova - se è necessario - calcolandolo direttamente con lo stesso metodo già usato; si ottiene in tal caso

$$-\frac{1}{2}\rho\int_{\gamma} w^2\,dz = -\rho\frac{V_\infty C}{2r^2}[(r^2+1)+(r^2-1)] = -\rho V_\infty C.$$

In definitiva si ha dunque come spinta sul contorno ellittico che non è linea di flusso e che circonda la lamina piana

$$(5) \qquad P_y + iP_x = -\rho V_\infty C + \frac{1}{2}\rho V_\infty C \frac{r^2 - 1}{r^2}.$$

Se poi il contorno fosse linea di flusso l'integrale

$$\rho i \int_{\gamma} w(u\,dy - v\,dx)$$

sarebbe identicamente nullo. In effetti è linea di flusso quella che corrisponde al valore $r = 1$, cioè la lamina piana: per essa dunque

$$P_y + iP_x = -\rho V_\infty C.$$

Matematica. — *Espressione analitica delle grandezze fisiche discontinue o funzioni di variabili discontinue e diagrammi che ad esse corrispondono.* Nota di L. Laboccetta, presentata [1] dal Corrisp. G. A. Crocco.

In alcune precedenti Note [2] ho già mostrato in qual modo si possano rappresentare mediante equazioni dominii del piano o dello spazio, limitati da linee, o superfici, che finora erano stati definiti soltanto con diseguaglianze o limitazioni, ed anzi, più generalmente, ho mostrato come si possano costruire funzioni rappresentanti delle grandezze che in un complesso di detti dominii, di forma, grandezza e posizione arbitrariamente date, hanno espressioni analitiche diverse, anch'esse assegnate ad arbitrio, la diversità dipendendo sia da una semplice variazione, discontinua, dei parametri, sia da una variazione della natura stessa della funzione.

L'insieme dei detti metodi costituisce un completamento ed insieme l'estensione ad un nuovo campo della geometria analitica in quanto che nel mentre le equazioni da questa adoperate nella rappresentazione dello spazio geometrico consentono, date che siano due delle coordinate di un punto del luogo, di trovare i valori della terza che ad esse corrisponde, le nuove equazioni invece che intendono di rappresentare lo spazio fisico, date che sieno tutte e tre le coordinate di un punto di un certo dominio consentono di determinare il valore che una certa grandezza esistente in quel dominio prende nel punto dato.

Nessuna ipotesi però è stata fatta nei precedenti scritti circa la continuità o la discontinuità delle funzioni esistenti in ciascuno dei dominii considerati, nel mentre, trattandosi di grandezze fisiche, può avvenire che sia la funzione, sia la variabile, od anche l'una e l'altra insieme, siano essenzialmente discontinue. Il caso più importante da esaminare qui è quello in cui la discontinuità sia dovuta alla condizione imposta a taluna delle grandezze considerate di assumere solo valori intieri o multipli intieri di grandezze elementari come masse atomiche o molecolari, protone, elettrone, ecc.

Finora si è usato in tali casi di indicare con delle lettere particolari le grandezze suscettibili di prendere solo valori intieri, o di aggiungere alle equazioni una dichiarazione indicante quali sono le grandezze in esse contenute che prendono solo valori intieri. Evidentemente non si consegue con

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) « R. C. », vol. XXXI, fasc. 12, seduta del 18 giugno 1922; vol. XXXII, fasc. 8, seduta del 22 aprile 1923 e fasc. 12, seduta del 17 giugno 1923; vol. I, fasc. 9 maggio 1925.

ciò una soddisfacente rappresentazione analitica della discontinuità particolare di cui si tratta.

Mi propongo in questo scritto di mostrare come, data fra due grandezze una relazione della forma

$$y = f(x) \tag{1}$$

che è anche la rappresentazione analitica di un luogo costituito da una linea continua, nel senso ordinario della parola, si possa ottenere che dalla relazione stessa apparisca la discontinuità della funzione rappresentata, per quali valori essa effettivamente esista e per quali altri non esista ed in qual modo si modifica la forma del luogo che ad essa corrisponde.

1. - Supponiamo dapprima che sia y a variare discontinuamente e, precisamente, conservando un valore costante nel mentre x percorre l'intervallo compreso fra due valori interi successivi. Si dovrà porre allora

$$y = f(\mathrm{I}x) \tag{2}$$

e si scorge che il luogo risulta formato da un diagramma scalariforme, costituito da tanti trattini paralleli all'asse delle x, tutti di lunghezza uno e con il loro estremo sinistro sulla linea rappresentata dalla equazione (1).

2. - E reciprocamente, se è x che varia discontinuamente, conservando un valore costante, nel mentre y percorre l'intervallo compreso fra due valori interi successivi, bisognerà porre invece

$$\mathrm{I}y = f(x) \tag{3}$$

ed il diagramma risulta formato da tanti trattini paralleli all'asse delle y, di lunghezza costante uno, ed i cui estremi inferiori cadono in quei punti della linea (1) le cui ascisse x_i sono tali che in esse la funzione $f(x_i)$ prende un valore intiero.

3. - Se la discontinuità di y dipende dalla condizione ad essa imposta di assumere soltanto valori interi, ne segue che la funzione non deve esistere in corrispondenza di tutti quei punti del luogo (1) le cui ordinate non hanno valori interi. Si soddisfa a tale condizione sostituendo ad $f(x)$ una nuova funzione godente la proprietà di prendere il valore $f(x)$ nei punti del luogo (1) le cui ordinate hanno valori interi e di essere invece uguale all'unità immaginaria $+ i$ nei punti le cui ordinate hanno valori non interi. Si può scrivere ad esempio [1]

$$y = f(x)\,\mathrm{I}\cos^2 \pi f(x) + i\{1 - \mathrm{I}\cos^2 \pi f(x)\} \tag{4}$$

(1) Possono formarsi in altro modo funzioni dotate della stessa proprietà, così invece della (4) si potrebbe scrivere

$$y = f(x)\, i^{1-1\frac{1}{y}}.$$

poichè infatti il primo termine del secondo membro è nullo per valori di $f(x)$ non intieri mentre il secondo termine è in tal caso $= +i$, e viceversa per valori intieri di $f(x)$ il primo termine è $= f(x)$ ed il secondo zero.

Con tale procedimento però si introducono dei valori immaginari; questi si evitano sostituendo al secondo membro una funzione la quale *esista* ed abbia il valore $f(x)$ solo per i valori della x che rendono intiera $f(x)$ e *non esista* [1] invece, senza perciò diventare immaginaria, per i valori non intieri di $f(x)$. Poichè la funzione $\mathrm{I}^{-1}x$ e cioè *il numero la cui parte intiera è* x, così definita nella seconda delle mie precedenti Note, non esiste se non per valori intieri di x, essa dà modo di costruire la funzione cercata scrivendo ad esempio

$$(5) \qquad y = f(x)\,\mathrm{I}\frac{\mathrm{I}f(x)}{f(x)} + \left\{1 - \mathrm{I}\frac{\mathrm{I}f(x)}{f(x)}\right\}\mathrm{I}^{-1}f(x).$$

Infatti per $f(x)$ intiero è $\dfrac{\mathrm{I}f(x)}{f(x)} = 1$ cosicchè il secondo membro della (5) si riduce a $f(x)$ e per $f(x)$ non intiero è $\dfrac{\mathrm{I}f(x)}{f(x)} = 0$ cosicchè il secondo membro si riduce a $\mathrm{I}^{-1}f(x)$ che non esiste [2].

Il diagramma rappresentativo della (4), o della (5) risulta perciò costituito dall'insieme dei punti della linea (1) le cui ordinate hanno valori intieri.

4. – Se è la x che non può prendere altri valori fuorchè quelli intieri, si avrà, operando una trasformazione analoga a quella della (5)

$$(6) \qquad y = f(x)\,\mathrm{I}\frac{\mathrm{I}x}{x} + \left(1 - \mathrm{I}\frac{\mathrm{I}x}{x}\right)\mathrm{I}^{-1}x$$

equazione che rappresenta l'insieme di quei punti della linea (1) le cui ascisse hanno valori intieri.

5. – Se entrambe le grandezze variano in modo discontinuo come indicato ai §§ 1 e 2 cosicchè debba aversi

$$(7) \qquad \mathrm{I}y = f(\mathrm{I}x)$$

allora bisogna distinguere due casi.

(1) Quantunque si abbiano altre funzioni ben note che non esistono per certi valori della variabile, così arc sen x e arc cos x per $|x| > 1$ pure non mi è noto che si sia fatto finora uso metodico di questa loro proprietà.

(2) Se y deve sussistere anche per valori negativi di $f(x)$ allora invece di $\dfrac{\mathrm{I}f(x)}{f(x)}$ bisognerebbe porre $\dfrac{\mathrm{I}|f(x)|}{|f(x)|}$.

Se per nessun valore intiero di x la funzione $f(x)$ prende valori intieri, è impossibile trovar coppie di valori che, verifichino la relazione (7), la quale perciò è incompatibile e non esiste diagramma che la rappresenti.

Se esistono valori intieri di $f(\mathrm{I}x)$ allora il luogo rappresentato dalla equazione è costituito da una serie di quadrati tutti con i lati di lunghezza uno, paralleli ai due assi e con i loro vertici inferiori a sinistra sulla linea rappresentata dalla equazione (1) in posizione tale che le differenza delle ascisse di due vertici consecutivi, su detta linea, corrisponde all'intervallo che la x deve percorrere affinchè $f(\mathrm{I}x)$ passi da un valore intiero ad un altro pure intiero.

È questo un esempio di diagramma *superficiale* costituito dall'insieme di una successione di dominii rettangolari.

6. – Se poi entrambe le grandezze sono di natura tale da non potere assumere altri valori fuorchè quelli intieri, si avrà

$$y\,\mathrm{I}\frac{\mathrm{I}y}{y} = f(x)\,\mathrm{I}\frac{\mathrm{I}x}{x} + \left(1 - \mathrm{I}\frac{\mathrm{I}x}{x}\right)\mathrm{I}^{-1}x \tag{8}$$

il secondo membro essendo lo stesso del secondo membro della (6) ed al primo membro essendo stata posta una funzione che è zero per i valori di y non intieri ed è y per i valori intieri di y. Questa equazione rappresenta l'insieme di quei punti della linea (x), quando esistono, dei quali entrambe le coordinate hanno valori intieri.

Idromeccanica. — *Sopra la Nota del prof. Pistolesi: « A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski ».* Nota di A. Rosenblatt, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

Il prof. Pistolesi, nella Nota sua, critica la mia dimostrazione della non applicabilità del teorema di Kutta-Joukowski nei casi eccezionali. Debbo pertanto insistere sul significato della formola (6) nella mia prima Nota

$$\mathrm{P}_y + i\mathrm{P}_x = \frac{\rho}{2}\int_k w^2\,dz + \rho\pi i\,\Sigma\,\mathrm{Res}_p\,(w^2) \tag{1}$$

la quale è il risultato del passaggio al limite. Sia k^* il contorno chiuso formato dai cerchietti γ circondanti i punti singolari e degli archi A

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

rimanenti del profilo k del corpo. A questo contorno k^* si applica la formula

$$\int_{k^*} w^2\, d\zeta = 2\, w_\infty \mathrm{C}. \tag{2}$$

Passando al limite si ha

$$\lim \frac{\rho}{2} \int_{\mathrm{A}} w^2\, d\zeta = \mathrm{P}_y + i\, \mathrm{P}_x, \tag{3}$$

la pressione totale essendo considerata come limite della pressione che ha luogo sopra gli archi A quando questi tendono al contorno k totale. Poi

$$\lim \int_{\Sigma\gamma} w^2\, d\zeta = -\, 2\pi i\, \Sigma\, \mathrm{Res}_p\, (w^2), \tag{4}$$

dunque

$$\rho w_\infty \mathrm{C} = \mathrm{P}_y + i\, \mathrm{P}_x - \rho\pi i\, \Sigma\, \mathrm{Res}_p\, (w^2), \tag{5}$$

cioè (1).

Meccanica. — *Limiti del cimento dinamico nei sistemi dissipativi.* Nota di G. Krall, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

§ 1. - Richiamandoci ad una Nota [2] precedente, qui ci proponiamo di assegnare il limite superiore P_2 dell'energia elastica complessiva di un corpo, vibrante nell'intorno d'una configurazione naturale, soggetto a forze dissipative interne.

L'utilità spettante alla nozione del limite suddetto fu già illustrata, coi debiti richiami, nella Nota or nominata e non è quindi il caso di rilevarla ulteriormente.

Sia dunque S un corpo elastico, N i suoi gradi di libertà.

Con riferimento a coordinate normali φ_ρ ($\rho = 1, 2, \cdots, N$;) scriviamo il potenziale delle forze elastiche W e l'energia cinetica T nella forma

$$\mathrm{W} = -\frac{1}{2} \sum_1^N{}_\rho\, \sigma_\rho^2\, \varphi_\rho^2 \qquad , \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_1^N{}_\rho\, \dot{\varphi}_\rho^2, \tag{1}$$

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) G. Krall, *Limiti superiori del cimento dinamico*, questi «Rendiconti», vol. VII, serie 6ª, 1° sem., fasc. 3, 1928.

e, sempre con riferimento alle suddette coordinate, supponiamo che il sistema si trovi soggetto a resistenze passive interne. Le quali vogliamo caratterizzare con una *funzione di dissipatività* (3) (nel senso noto di Rayleigh) della forma

$$\Psi = \sum_{1}^{N}{}_{\rho} \, j_\rho \, \dot{\varphi}_\rho^2 \tag{2}$$

i coefficienti j_ρ essendo costanti positive.

Riservandoci di rilevare tra poco quelle ragioni che giustificano una siffatta posizione, notiamo che, se con $X^{(\rho)}$ $(\rho = 1, 2, \cdots, N;)$ indichiamo le forze esterne sollecitanti il sistema, la descrizione del moto resta affidata alle equazioni

$$\ddot{\varphi}_\rho + 2 j_\rho \dot{\varphi}_\rho + \sigma_\rho^2 \varphi_\rho = X^{(\rho)}, \qquad (\rho = 1, 2, \cdots, N;).$$

Delle quali, ove si suppongano, come vogliamo, le $X^{(\rho)}$ indipendenti dal tempo t, si ha subito un integrale particolare del tipo,

$$\varphi'_\rho = \frac{X^{(\rho)}}{\sigma_\rho^2} = a_\rho,$$

e quindi, a seconda che sia, $\sigma_\rho^2 \gtrless j_\rho^2$, l'integrale generale nelle tre forme

$$\varphi_\rho = e^{-j_\rho t} \left\{ \varepsilon_1^{(\rho)} \sin \omega_\rho t + \varepsilon_2^{(\rho)} \cos \omega_\rho t \right\} + a_\rho \tag{3}$$

con

$$\varepsilon_1^{(\rho)} = \frac{B_\rho \sigma_\rho + (A_\rho - a_\rho) j_\rho}{\omega_\rho} \quad , \quad \varepsilon_2^{(\rho)} = (A_\rho - a_\rho) \quad , \quad \omega_\rho^2 = \sigma_\rho^2 - j_\rho^2 > 0 \, ;$$

$$(3\,a) \quad \varphi_\rho = e^{-j_\rho t} \left\{ \varepsilon_2^{(\rho)} + [B_\rho \sigma_\rho + (A_\rho - a_\rho) j_\rho] \, t \right\} + a_\rho \, , \quad \text{per} \quad \sigma_\rho^2 = j_\rho^2 \, ,$$

ed infine

$$(3\,b) \quad \varphi_\rho = e^{-j_\rho t} \left\{ \varepsilon_1^{(\rho)} \operatorname{Sh} \omega_\rho t + \varepsilon_2^{(\rho)} \operatorname{Ch} \omega_\rho t \right\} + a_\rho \quad \text{per} \quad \omega_\rho^2 = j_\rho^2 - \sigma_\rho^2 > 0 \, .$$

Le costanti A_ρ e B_ρ sono qui, in modo evidente, costanti arbitrarie di integrazione, fatte intervenire in tutti i tre casi (di *periodicità* per $\sigma_\rho^2 > j_\rho^2$ ed *aperiodicità*, per $\sigma_\rho^2 \lesseqgtr j_\rho^2$;) con lo stesso significato, corrispondente ai valori di φ_ρ e $\dot{\varphi}_\rho$ nell'istante $t = 0$ per la generica A_ρ rispettivamente $B_\rho \sigma_\rho$.

Con queste intese, il nostro problema resta ormai circoscritto alla determinazione del limite superiore P_d dell'espressione

$$P = \frac{1}{2} \sum_{1}^{N}{}_{\rho} \, \sigma_\rho^2 \varphi_\rho^2 \tag{4}$$

(3) T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte I, cap. VI (Bologna 1926, Zanichelli).

con le φ_ρ determinate, a seconda delle circostanze, secondo le (3) o le (3 *a*) e (3 *b*), o, parte con le une, parte con le altre, in conformità con l'entità della dissipazione.

Ora, fissando l'attenzione sulla determinazione periodica (smorzata) di φ_ρ, applicando le regole elementari del calcolo, troviamo

$$(5)\quad \left[\varphi_\rho^2\right]_{\max} = a_\rho^2 \left\{ 1 + e^{-j_\rho T_\rho} \sqrt{1 + \frac{B_\rho^2 \sigma_\rho^2 - 2 a_\rho A_\rho \sigma_\rho^2 + A_\rho^2 \sigma_\rho^2}{a_\rho^2 \sigma_\rho^2} + \frac{2 (A_\rho - a_\rho) B_\rho \sigma_\rho j_\rho}{a_\rho^2 \sigma_\rho^2}} \right\}$$

dove T_ρ designa il valore di t che verifica l'equazione

$$\operatorname{tg} \omega_\rho t = \frac{\varepsilon_1^{(\rho)} \omega_\rho - \varepsilon_2^{(\rho)} j_\rho}{\varepsilon_1^{(\rho)} j_\rho + \varepsilon_2^{(\rho)} \omega_\rho} = \frac{B_\rho \omega_\rho}{B_\rho j_\rho + (A_\rho - a_\rho) \sigma_\rho}.$$

La soluzione dovendo esser scelta per modo che, oltre ad aversi un valore positivo sia, nell'istante di massimo, $\ddot{\varphi}_\rho^2 < 0$, vale a dire (per esser in quest'istante $\dot{\varphi}_\rho = 0$) $\varphi_\rho \ddot{\varphi}_\rho < 0$.

Nelle due altre circostanze, $\sigma_\rho^2 = j_\rho^2$ e $\sigma_\rho^2 < j_\rho^2$, tipiche dell'*aperiodicità*, troviamo ancora la stessa espressione (5) per il massimo, eccezione fatta per l'istante T_ρ in cui esso ha luogo, risultante da una delle espressioni

$$T_\rho = \frac{1}{\sigma_\rho} \frac{B_\rho}{B_\rho + (A_\rho - a_\rho)}, \quad T_\rho = \infty$$

per $\sigma_\rho^2 = j_\rho^2$, e,

$$\operatorname{Th} \omega_\rho t_\rho = \frac{\varepsilon_1^{(\rho)} \omega_\rho - \varepsilon_2^{(\rho)} j_\rho}{\varepsilon_1^{(\rho)} j_\rho - \varepsilon_2^{(\rho)} \omega_\rho} = \frac{B_\rho \omega_\rho}{B_\rho j_\rho + (A_\rho - a_\rho) \sigma_\rho}, \quad T_\rho = \infty$$

per $\omega_\rho^2 = j_\rho^2 - \sigma_\rho^2 > 0$; con le stesse osservazioni concernenti la scelta.

Richiamando qui il significato attribuito nella citata Nota al secondo termine del radicando che interviene nella (5), di rapporto tra la componente spettrale $E^{(\rho)}$ dell'energia iniziale E e la componente $P_s^{(\rho)}$ dell'energia elastica corrispondente alla configurazione d'equilibrio sotto ai carichi $X^{(\rho)}$, convenendo d'indicare con $\Delta^{(\rho)}$ il termine $B_\rho \sigma_\rho j_\rho (A_\rho - a_\rho)$, interpretabile come componente spettrale dell'energia di posizione all'istante $t = 0$ delle forze dissipative $B_\rho \sigma_\rho j_\rho$ per rispetto alla posizione di equilibrio $\varphi_\rho = a_\rho$, troviamo in luogo della (5)

$$P'_d \leqq \frac{1}{2} \sum_1^N{}_\rho \sigma_\rho^2 \left[\varphi_\rho^2\right]_{\max} = \sum_1^N{}_\rho P_s^{(\rho)} \left\{ 1 + e^{-j_\rho T_\rho} \sqrt{1 + \frac{E^{(\rho)} + \Delta^{(\rho)}}{P_s^{(\rho)}}} \right\}^2 =$$

$$= P_s + 2 \sum_1^N{}_\rho e^{-j_\rho T_\rho} \sqrt{P_s^{(\rho)} \left(P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)} + \Delta^{(\rho)}\right)} + \sum_1^N{}_\rho e^{-2 j_\rho T_\rho} \left(P_s^{(\rho)} + E^{(\rho)} + \Delta^{(\rho)}\right).$$

Purtroppo però, non è qui possibile, in linea generale almeno, riportare a forma più compendiosa (affrancata in primo luogo dalla nozione di *distribuzione spettrale*) il limite P'_d; che se è pur noto il limite superiore ($= 1$) del fattore esponenziale, a questo corrisponde l'istante di massimo $t = 0$, relativamente al quale, come facilmente si riconosce, non ha senso l'espressione di P'_d testè trovata, essendo, in quest'istante, al più, $P'_d = E$.

Però, ove sia, per ogni valore di ρ, $B_\rho = 0$, cioè, quando all'inizio del moto il sistema si trovi in quiete, risulta, per le soluzioni periodiche,

$$\omega_\rho T_\rho = \pi$$

e quindi

$$T_\rho = \frac{\pi}{\omega_\rho},$$

mentre, per i casi *aperiodici* si avrebbe $T_\rho = 0$ o $T_\rho = \infty$.

Si ottiene perciò in conformità, dopo aver vagliata la possibilità dei massimi $P'_d = E$, $P'_d = P_s$ corrispondenti agli istanti $T = 0$ rispettivamente $T = \infty$,

$$P_{max} \leq P'_d = \sum_1^N{}_\rho P_s^{(\rho)} \left\{ 1 + e^{-\frac{j_\rho}{\omega_\rho}\pi} \sqrt{1 + \frac{E^{(\rho)}}{P_s^{(\rho)}}} \right\}^2$$

ed osservando che, per la natura stessa delle forze dissipative, come rileveremo tra poco, si ha $e^{-\frac{j_\rho \pi}{\omega_\rho}} > e^{-\frac{j_\tau}{\omega_\tau}\pi}$ per $\rho < \tau$, impiegando in modo adeguato la formola di Cauchy-Schwarz come nella Nota precedente, otteniamo in definitiva,

$$P'_d \leq P_d = P_s \left\{ 1 + e^{-\frac{j_1 \pi}{\omega_1}} \sqrt{1 + \frac{E}{P_s}} \right\}^2.$$

Ove si consideri in particolare una inversione totale dei carichi agenti in condizioni d'equilibrio, avendosi ovviamente in tal caso $E = 3 P_s$, risulta

$$P_d = P_s \left\{ 1 + 2 e^{-\frac{j_1 \pi}{\omega_1}} \right\}^2 \tag{6}$$

in luogo di $P_d = 9 P_s$ come si troverebbe in assenza ($j_\rho = 0$ per $\rho = 1, 2, \cdots, N$;) di dissipatività.

§ 2. Caratterizzazione qualitativa e quantitativa delle forze dissipative. - Richiamiamo qui una legge dovuta al Routh. Secondo questa, nel caso elementare di una deformazione Γ, variabile col tempo e avente luogo secondo una direzione sola, lo sforzo Φ non è più legato ad essa

secondo la legge di Hoocke, $\Phi = E\Gamma$ (E essendo il modulo d'elasticità) bensì secondo la relazione

$$\Phi = E\Gamma + F\frac{d\Gamma}{dt},$$

in cui F è un coefficiente, cosidetto di dissipatività, il quale, secondo recenti ricerche dei signori Honda e Konno, in 10^8 unità C. G. S. risultò così determinato: Acciaio da 5 a 7; Alluminio 0.822; Nichel 3.05; Ottone 1.55; Rame 4.83 (il tutto alla temperatura di 15° C).

Ora risulta in modo immediato che, ove nel corpo abbiano sede stati di sollecitazione schematizzabili tutti al tipo descritto (si pensi ad esempio agli sforzi nelle aste d'una travatura reticolare), se $W = W(\Gamma)$ è il potenziale delle forze elastiche, la funzione dissipativa Ψ avrà la forma

$$\Psi = \frac{F}{E} W(\dot{\Gamma}).$$

Epperciò, se con riferimento a coordinate normali φ_ρ, la W ha la forma canonica (1), la Ψ assumerà anch'essa l'aspetto canonico

$$\Psi = \frac{F}{2E}\sum_1^N{}_\rho \sigma_\rho^2 \dot{\varphi}_\rho^2.$$

Per confronto con la (2) risulta quindi $j_\rho = \frac{F}{2E}\sigma_\rho^2$; una relazione che, come facilmente si vede, caratterizza in modo completo la dissipatività. Ove si ricordi infine, che per ogni corpo si ha in generale $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \cdots$; resta senz'altro giustificata l'asserzione concernente i rapporti quantitativi tra i fattori esponenziali fatta nel precedente paragrafo.

Per quanto si riferisce poi alla estensione al continuo, anche qui, come nel caso conservativo, è legittimo, sotto le consuete riserve, il passaggio al limite per $N \to \infty$, pur che si ammetta però, nei sistemi a due o tre dimensioni, uno stesso coefficiente di contrazione (ovvero, le stesse costanti di Poisson) per le deformazioni d'origine elastica come per quelle del tipo dissipativo. L'ipotesi appare del resto ragionevole, per valutazioni di primo approccio almeno, ove si pensi al lieve effetto che una divergenza anche notevole (allo stato attuale dei mezzi sperimentali, certo mal controllabile) tra le costanti suddette potrebbe avere su questi risultati.

A titolo d'illustrazione concreta consideriamo, concludendo, una colonna di acciaio fissa ad un estremo sollecitata assialmente da carichi di cui il senso, supponiamo, venga bruscamente invertito. Trattandosi in questo caso di vibrazioni longitudinali, il primo autovalore σ_1 resta fornito dalla relazione $\sigma_1 = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\mu}}$, l essendo la lunghezza, μ la densità specifica, E il modulo d'elasticità. Applicando la (6), posto

$= 250$ cm. , $\sqrt{\frac{E}{\mu}} = 5 \cdot 10^5$ cm. sec.$^{-1}$, $F = 600$ Kg. cm.$^{-2}$ sec.

risulta $P_d = 1.88\, P_s$, mentre si avrebbe, per $F = 0$, $P_d = 9\, P_s$.

Conviene però rilevare che una riduzione così forte del limite P_d ha luogo trattandosi di moti oscillatori longitudinali, perciò tutti a frequenze elevate e quindi in conformità, a forte dissipazione.

Idromeccanica. — *Sui moti piani di un fluido incomprimibile nei quali le linee di corrente sono isotachie.* Nota di F. Sbrana, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra l'allargamento delle righe spettrali.* Nota [1] di F. Rasetti, presentata [2] dal Socio O. M. Corbino.

Fra le diverse cause di allargamento delle righe spettrali, oltre a quelle ben note e studiate da tempo, e cioè, la larghezza naturale della riga dovuta allo smorzamento dell'oscillatore, lo smorzamento per urto, l'effetto Doppler dell'agitazione termica, e l'effetto Stark dovuto ai campi elettrici molecolari, ne è stata recentemente messa in rilievo un'altra, alla quale forse si era pensato già precedentemente, ma non si era attribuita la dovuta importanza nel determinare allargamenti di righe.

Vogliamo alludere alla perturbazione prodotta, sopra un atomo emittente, da atomi vicini *uguali*, la quale, per un fenomeno analogo alla risonanza, risulta molto più grande di quella dovuta ad atomi aventi frequenze proprie diverse; in modo da produrre una sensibile alterazione delle frequenze proprie emesse, osservabile come un allargamento della riga.

Il calcolo di questo effetto è stato fatto da L. Mensing [3] per un atomo di un metallo alcalino, schematizzato mediante un'orbita kepleriana animata da un moto di precessione; e calcolando, con la teoria delle perturbazioni, l'azione di due tali atomi uno sull'altro. Invece, J. Holtsmark [4] calcola le frequenze proprie di un sistema costituito di un gran numero di oscillatori classici della stessa frequenza, ponendo la perturbazione prodotta da un oscillatore sopra un altro proporzionale al momento elettrico del primo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 1° aprile 1928.
(3) L. Mensing, « ZS. f. Phys. », 34, 611, 1925.
(4) J. Holtsmark, ibid., 34, 723, 1925.

Le conferme sperimentali dell'esistenza del fenomeno sono soltanto qualitative. B. Trumpy [1] ed R. Minkowsky [2], osservando la larghezza delle righe del sodio in assorbimento, trovano, col crescere della pressione del vapore, un allargamento maggiore di quello che sarebbe da attendersi per le altre cause, e lo attribuiscono al nuovo effetto. W. Schutz [3] osserva una azione analoga per la riga di assorbimento λ 2537 del mercurio.

Evidentemente, l'allargamento per risonanza sarà osservabile soltanto sulle righe di assorbimento; infatti, affinchè un atomo sia circondato da atomi uguali di densità sufficiente a produrre una perturbazione è necessario che esso si trovi nello stato normale, e quindi le sole righe su cui si avrà azione saranno quelle che partono da questo stato; in particolare, negli alcalini, le righe della serie principale.

Per mettere bene in chiaro l'esistenza dell'effetto di risonanza ho creduto opportuno osservarlo in emissione, confrontando righe della serie principale con righe di altra serie; allora tutte le altre cause di allargamento agiranno sulle diverse righe in modo analogo, mentre l'effetto in questione si presenterà soltanto per le righe di assorbimento.

Alla descrizione delle esperienze premetterò una breve teoria del fenomeno, allo scopo di far vedere come l'azione fra atomi uguali sia più grande che fra atomi diversi, ciò che non è messo in chiaro nei lavori citati, dove la teoria è fatta soltanto per atomi uguali; e inoltre, come allo stesso risultato si giunga con la meccanica ondulatoria.

Consideriamo per semplicità due oscillatori, di frequenze proprie ν_1 e ν_2, oscillanti nella stessa direzione. La forza agente sopra uno degli oscillatori sarà la somma della forza di restituzione propria, e di una forza proporzionale al momento elettrico dell'altro; e quindi, per il sistema, potremo scrivere le equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 4\pi^2\nu_1^2 m x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 4\pi^2\nu_2^2 m x_2 + \alpha x_1 = 0 \end{cases}$$

Per calcolare le frequenze proprie del sistema, poniamo la soluzione come somma di moti sinusoidali:

$$x_1 = \Sigma A e^{2\pi i \nu t} \qquad ; \qquad x_2 = \Sigma B e^{2\pi i \nu t}$$

e sostituendo nelle equazioni (1), troviamo come condizione perchè esistano valori non tutti nulli, delle ampiezze A e B:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 4\pi^2 m(\nu_1^2 - \nu^2) & \alpha \\ \alpha & 4\pi^2 m(\nu_2^2 - \nu^2) \end{vmatrix} = 0 .$$

(1) B. Trumpy, ibid., 34, 715, 1925.
(2) R. Minkowsky, ibid., 36, 839, 1926.
(3) W. Schutz, ibid., 35, 260, 1925.

Si trova così che il sistema ha due frequenze proprie, radici della equazione (2), e che espresse esplicitamente sono:

$$(3) \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + \frac{\alpha^2}{4\pi^4 m^2}}$$

e naturalmente, per $\alpha = 0$, si riducono a ν_1 e ν_2.

Se $\nu_1 > \nu_2$, e la perturbazione, e quindi α, è piccola, possiamo sviluppare il radicale, e abbiamo le due frequenze proprie del sistema:

$$\bar{\nu}_1^2 = \nu_1^2 + \frac{\alpha^2}{16\pi^4(\nu_1^2 - \nu_2^2)m^2}$$

$$\bar{\nu}_2^2 = \nu_2^2 - \frac{\alpha^2}{16\pi^4(\nu_1^2 - \nu_2^2)m^2}$$

quindi, la variazione della frequenza propria contiene come termine principale un termine in α^2.

Se invece $\nu_1 = \nu_2$, abbiamo

$$\bar{\nu}^2 = \nu_1^2 \pm \frac{\alpha}{4\pi^2 m}$$

cioè la perturbazione è proporzionale ad α.

Allo stesso risultato si giunge trattando il sistema dei due oscillatori con la meccanica ondulatoria. L'equazione di Schroedinger si scrive evidentemente:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - 2\pi^2\nu_1^2 m x_1^2 - 2\pi^2\nu_2^2 m x_2^2 - \alpha x_1 x_2]\psi = 0.$$

Se per mezzo di una sostituzione lineare cambiamo x_1, x_2 in altre due variabili ξ e η, possiamo ridurre la forma quadratica che figura in questa equazione alla forma ortogonale:

$$2\pi^2 m(\bar{\nu}_1^2 \xi^2 + \bar{\nu}_2^2 \eta^2)$$

dove $\bar{\nu}_1^2$ e $\bar{\nu}_2^2$ saranno notoriamente le radici dell'equazione secolare:

$$\begin{vmatrix} 2\pi^2 m(\nu_1^2 - \bar{\nu}^2) & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 2\pi^2 m(\nu_2^2 - \bar{\nu}^2) \end{vmatrix} = 0$$

che è identica alla (2), di modo che $\bar{\nu}_1$ e $\bar{\nu}_2$ saranno date dalla (3).

L'equazione di Schroedinger si scinde allora in due equazioni:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \dfrac{8\pi^2 m}{h^2}\left[\varepsilon_1 - 2\pi^2 m \bar{\nu}_1^2 \xi^2\right]\varphi_1 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \dfrac{8\pi^2 m}{h^2}\left[\varepsilon_2 - 2\pi^2 m \bar{\nu}_2^2 \eta^2\right]\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

e sarà $\psi = \varphi_1 \varphi_2$, $E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, essendo ε_1 e ε_2 i noti autovalori delle (5):

$$\varepsilon_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\bar{\nu}_1 \quad ; \quad \varepsilon_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right) h\bar{\nu}_2 \quad ; \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots$$

da cui risulta per gli autovalori della (4):

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\bar{\nu}_1 + \left(m + \frac{1}{2}\right) h\bar{\nu}_2$$

ciò che dà le stesse frequenze ottenute col calcolo classico.

Le esperienze sono state fatte sul sodio. Per osservare l'effetto di risonanza, ho fotografato contemporaneamente le righe D e il doppietto $3^2P - 4^2D$, λ 5682, 5688, in diverse condizioni di eccitazione.

Un tubo di vetro Pyrex veniva in parte scaldato entro una stufa elettrica, in modo da portarlo alla temperatura desiderata; questa si leggeva mediante una coppia termoelettrica unita a un millivoltmetro Siemens. La parte del tubo riscaldata era limitata da due strozzature, in modo da diminuire la diffusione del vapore di sodio nelle parti fredde; tale diffusione veniva inoltre ritardata lasciando nel tubo una pressione di 2 a 3 mm. di azoto.

Il vapore nel tubo era eccitato mediante una corrente alternata di circa 15 mA., con una tensione di 10 a 20 kV.

Lo spettro era osservato o fotografato mediante un grande spettrografo di Hilger ad autocollimazione, avente una dispersione nel giallo di circa 6 Å/mm.

Alla temperatura di 300°, corrispondente a una pressione di vapore del sodio di mm. 0,012, le righe D e quelle della serie accessoria si presentano ancora sottilissime; la pressione di alcuni millimetri di azoto non ha una influenza osservabile. Col crescere della pressione del sodio, le righe λ 5682, 5688 rimangono sempre ugualmente sottili, le D invece cominciano ad allargarsi, così che, alla temperatura di 440°, corrispondente alla tensione di vapore di 1 mm., esse formano una banda luminosa continua larga circa 20 Å, in cui appaiono le due righe in inversione.

Osserviamo ora, che fra le altre cause di allargamento, larghezza naturale, urti ed effetto Doppler agiscono presso a poco ugualmente sulle diverse righe. L'effetto Stark dei campi molecolari agirà più sulle combinazioni $p - d$ (serie accessoria *diffusa*) perchè i termini d del sodio sono già molto vicini

a quelli dell'idrogeno (il termine in questione è $4^2D = 6859$, contro $R/16 = 6897$); e dobbiamo concluderne, che l'allargamento osservato per le D è dovuto quasi interamente all'effetto di risonanza.

Potrebbe sorgere il dubbio che la larghezza delle righe D fosse soltanto apparente, in quanto dovuta allo spessore del vapore luminoso, che, assorbendo più la parte centrale della riga, altera la distribuzione dell'intensità a favore delle zone lontane dal centro. Ma osserviamo, che a grande distanza dal centro della riga si avrà una certa intensità soltanto per effetto dello smorzamento dell'oscillatore e non per effetto Doppler, in quanto quest'ultima causa dà una distribuzione decrescente rapidissimamente con la distanza. Ora, la larghezza dovuta allo smorzamento proprio [1] e a quello per urto, alla pressione di 1 mm., è circa $\Delta\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$ A. Poichè l'intensità decresce col quadrato della distanza dal centro, a 10 Å di distanza si avrebbe una intensità $\frac{1}{2}(6 \cdot 10^{-4})^2/10^2 = 1{,}8 \cdot 10^{-9}$ volte minore che nel centro, e quindi assolutamente inosservabile.

Ne concludiamo, che lo spessore del vapore luminoso non può spiegare la larghezza osservata, se non si ammette l'esistenza dell'effetto di risonanza; impedisce però osservazioni quantitative, perchè altera completamente la distribuzione dell'intensità nella riga.

Che le altre cause siano insufficienti a spiegare la notevole larghezza delle D, si può osservare in diverse esperienze. La densità di corrente, e la pressione di un gas qualsiasi hanno pochissima azione; infatti, ho potuto osservare le D sottilissime in una scarica condensata con una grossa capacità, pur di aver cura che vi sia pochissimo sodio (scintilla fra carboni da arco non animati); e in queste condizioni la pressione è quella atmosferica, e la densità di corrente (e quindi i campi elettrici degli ioni) straordinariamente più grande che nelle esperienze del tubo (densità di corrente 0.01 A/cm.^{2}). Nella scarica condensata si può invece osservare un notevole allargamento delle combinazioni $p - d$, per densità di corrente più piccole asimmetrico (effetto Stark quadratico), poi simmetrico (effetto Stark lineare).

Analogamente, si possono avere le D sottili nell'arco o nella fiamma con poco sodio; appena la quantità di sodio cresce, le D si allargano. In qualunque modo si produca l'eccitazione, appare dunque che la condizione essenziale per avere l'allargamento delle D è una forte densità del vapore di sodio; ciò che dimostra che l'effetto di risonanza è il fattore predominante nel determinare la larghezza delle righe di assorbimento, per densità elevate.

(1) R. Minkowsky, loc. cit.

Fisica. — *Sulla relatività a cinque dimensioni.* Nota di A. Carrelli, presentata [1] dal Socio M. Cantone.

La teoria di Einstein sulla gravitazione porta alla conclusione che nel caso del moto gravitazionale si può completamente eliminare la nozione di forza ritenendo invece il postulato seguente: il moto di un punto materiale è sempre per geodetiche. Il campo gravitazionale si riduce in tal modo ad una modificazione delle proprietà metriche dello spazio. Il moto che si osserva nel caso di un corpo elettrizzato, per esempio di un elettrone, non può considerarsi allo stesso modo perchè vi sono le forze elettromagnetiche sotto l'azione delle quali la carica elementare non può più descrivere una geodetica. Ora in base ai lavori di Kaluza [2] e di Klein [3] si può considerare anche il moto di una carica elettrica in un campo elettromagnetico come moto per geodetiche eliminando così completamente il concetto di forza dalla teoria con l'ammissione del postulato seguente: il moto di un punto avviene sempre per geodetiche di uno spazio a cinque dimensioni di cui noi non possiamo concepire che quattro.

Questo postulato che è la generalizzazione di quello sopracennato permette di racchiudere in uno schema unico e in modo molto più soddisfacente di quanto abbia fatto Weyl, i fenomeni elettromagnetici e i fenomeni gravitazionali; inoltre in base al principio della non misurabilità della quinta dimensione si può ricavare l'esistenza di una carica fondamentale di elettricità. La nuova variabile introdotta da Klein [4] nell'universo quadridimenzionale è la grandezza x_0 che non è per noi percettibile, il cui momento coniugato p_0 è secondo Klein proporzionale appunto alla carica elettronica fondamentale e.

In tale teoria vi sono dunque cinque coppie di grandezze coniugate, le tre coordinate spaziali $x_1\, x_2\, x_3$ i tre impulsi relativi $p_1\, p_2\, p_3$, la coordinata temporale x_4 e la quantità coniugata p_4 l'energia ed infine la coordinata x_0 e la sua coniugata p_0,

$$p_0 = \frac{E}{\beta c}$$

dove c è la velocità della luce e β una costante di proporzionalità. La variabile x_0, non misurabile, in base a recenti considerazioni sarebbe da

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.
(2) Kaluza, «Sitzung. Ber. der Ber. Accad.» (1921) s. 966.
(3) Klein, «Zeit. für Phys.», 36, s. 835 (1926).
(4) Klein, «Zeit. für Phys.», 46, s. 188 (1927).

collegare con la rotazione dell'elettrone su sè stesso, rotazione che rende la carica elettrica elementare anche un magnete elementare. Scopo di questa Nota è di portare qualche elemento per lumeggiare tale concezione.

La teoria della relatività a cinque dimensioni nella forma datale ultimamente da Klein non comprende ancora in sè la meccanica quantistica. Vediamo quindi se i concetti caratteristici di questa teoria possono portare un contributo alla questione che c'interessa. Ora recentemente Heisenberg ha ottenuto un risultato importantissimo sul significato da attribuire alla cinematica, risultato che gli ha permesso di trovare il perchè della limitazione caratteristica nella grandezza delle cellette dello spazio di fase. Egli infatti ha ricavato che fra le due quantità Δp e Δq che rappresentano gli errori che si possono commettere nella determinazione sperimentale di p e q, e cioè di due coordinate coniugate, passa la relazione seguente

$$\Delta p \, \Delta q \sim h.$$

Tale relazione sussiste dunque per le tre coordinate spaziali, la coordinata tempo i tre momenti e l'energia. Supponiamo allora di estendere la stessa relazione anche per la quinta coppia di variabile; ammettiamo cioè che

$$\Delta p_0 \, \Delta x_0 \sim h$$

poichè

$$p_0 = \frac{e}{\beta c}$$

otteniamo

$$x_0 \sim \frac{h \beta c}{e}$$

Ora h è proporzionale al momento dell'impulso dell'elettrone ruotante; la quinta coordinata x_0 in base a queste considerazioni risulterebbe quindi proporzionale al momento dello impulso dell'unità di carica ruotante. Si ottiene così che assumendo p_0 proporzionale alla carica elettronica e facendo l'estensione della relazione di Heisenberg la x_0 è in relazione con la rotazione dell'elettrone, e questa quinta coordinata più particolarmente risulta proporzionale alla suddetta grandezza non osservabile direttamente.

Fisica. — *Contributo allo studio dei contatti imperfetti metallici.* Nota di G. Todesco e B. Rossi, presentata [1] dal Socio Q. Majorana.

1. Il sig. Pélabon ha, di recente, mostrato che un contatto imperfetto costituito da elettrodi dello stesso metallo, ma di forma diversa, si presta alla rettificazione delle correnti oscillanti e può sostituire un detector a cristallo o a valvola termojonica, nelle ordinarie recezioni r. t. [2].

Il passaggio della corrente attraverso un contatto puramente metallico, si può presumere avvenga con modalità più semplici e meglio definite di quelle inerenti agli ordinari contatti rettificanti del tipo metallo-galena ed è perciò che uno studio fisico delle loro proprietà, ci è sembrato non privo di interesse, anche dal punto di vista della possibilità di ottenere per questa via qualche ragguaglio sulla natura intima del fenomeno della rettificazione che non appare sinora, attraverso le numerose teorie proposte, chiaramente delucidato.

Abbiamo iniziato allo scopo, una serie di ricerche tendenti a determinare sperimentalmente le curve caratteristiche dei contatti in parola, mantenendo fissa la posizione degli elettrodi ed applicando ad essi una tensione continua gradualmente variabile [3].

2. Dopo vari tentativi abbiamo potuto costruire un apparecchio che, grazie alla semplicità ed alla solidità della sua struttura, ci ha permesso di ottenere resistenze di contatto comprese fra qualche migliaio e qualche centinaio di migliaia di ohms, di una stabilità del tutto soddisfacente (mantenendosi il loro valore inalterato anche nel corso di alcune ore).

In questo apparecchio gli elettrodi sono costituiti da una sferetta di acciaio fissa di 4 mm. di diametro e da un piano pure di acciaio portato da una vite micrometrica accuratamente lavorata, la quale permette il graduale avvicinamento dei due elettrodi.

Gli elettrodi stessi sono sostenuti da due blocchetti di ottone rigidamente uniti fra loro mediante due sbarrette di ferro, isolate dai blocchetti sia termicamente che elettricamente, e munite di un avvolgimento di costantana in cui può essere inviata una corrente riscaldante.

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) H. Pélabon, *Onde Electrique*, vol, V, p. 464, 1926.

(3) Sulla variazione di resistenza dei contatti imperfetti metallici, in funzione dell'intensità di corrente che li traversa, vedasi il pregevole studio del Blanc, *Sur les résistences de contact.* (« Journ. de Phys », 1905, p. 743) che riguarda resistenze di contatto relativamente basse. In tale studio non si prendono peraltro in considerazione fenomeni di rettificazione.

L'avvicinamento graduale dei due elettrodi può quindi essere ottenuto in due modi: manovrando a mano la vite micrometrica che porta il piano di acciaio, oppure mediante la dilatazione termica delle due sbarrette di ferro, la quale provoca il graduale allontanamento dei due blocchetti di ottone che sorreggono gli elettrodi. Il dispositivo termico, previsto per ottenere piccolissime variazioni di distanza fra gli elettrodi, fu usato in pratica rare volte, essendosi riscontrato più efficace, in ordine alla stabilità del contatto ottenibile, il regolaggio a mano della vite micrometrica.

L'apparecchio descritto, di piccole dimensioni (cm. 4 × 5), è fissato ad un supporto elastico destinato ad attenuare gli effetti delle trepidazioni ed il tutto è racchiuso in una scatola metallica messa al suolo (1).

Agli elettrodi del contatto, è attiva una d. d. p. variabile con continuità mediante un potenziometro; l'intensità della corrente che traversa il contatto è misurata mediante un galvanometro: speciali accorgimenti nella

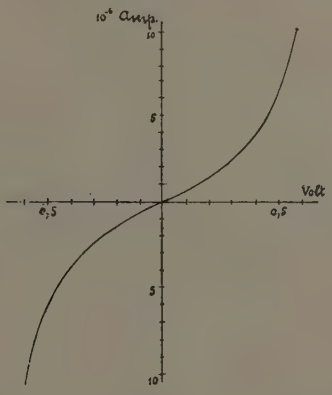


Fig. 1.

realizzazione dei circuiti, permettono di raggiungere per ciascun valore della resistenza di contatto, la massima sensibilità consentita dagli apparecchi di misura.

Le curve sperimentalmente ottenute con la disposizione descritta, sono del tipo di quella rappresentata in fig. 1 (ascisse: d. d. p. agli elettrodi, ordinate: intensità della corrente che traversa il contatto), la quale si riferisce ad una resistenza iniziale di 180.000 ohms. Queste curve sono state descritte partendo da un valore determinato V, della d. d. p. e facendo percorrere a questa variabile un ciclo chiuso, compreso fra V e — V.

Esse presentano tutte i seguenti caratteri:

(1) Ogni contatto imperfetto costituisce, come è noto, un coherer di grande sensibilità.

a) volgono la concavità verso l'asse delle I;

b) si ricoprono esattamente quando vengono tracciate per valori successivamente decrescenti e crescenti della d. d. p.;

c) sono perfettamente simmetriche rispetto all'origine.

Il contatto in esame non segue quindi la legge di Ohm (ovviamente la curva $I = f(V)$ sarebbe in tal caso una retta), ma la sua resistenza va diminuendo al crescere della intensità della corrente. Questa variazione di resistenza è perfettamente reversibile: a d. d. p. eguali e di senso contrario, corrispondono intensità di corrente pure eguali e di senso contrario. Non si ritrova quindi, nelle caratteristiche dei contatti imperfetti metallici, quella dissimmetria che presentano, per es., le caratteristiche dei contatti galena–acciaio. Da un confronto delle curve caratteristiche tracciate per un contatto

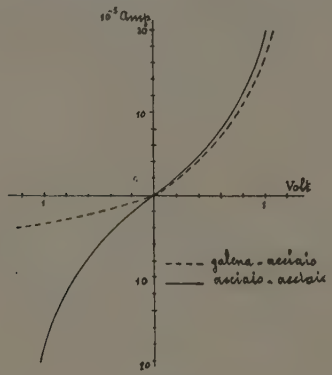


Fig. 2.

imperfetto acciaio–acciaio e per un contatto imperfetto galena–acciaio, di resistenza iniziale dello stesso ordine di grandezza, si rileva di più (vedi fig. 2) che le due curve hanno un andamento perfettamente simile nel ramo superiore, mentre diversificano notevolmente nel ramo inferiore. Ciò conduce a pensare che il meccanismo del passaggio della corrente dalla galena all'acciaio (ossia degli elettroni dall'acciaio alla galena) sia analogo a quello con cui avviene il passaggio della corrente fra due elettrodi di acciaio; mentre nel passaggio della corrente dall'acciaio alla galena (o degli elettroni dalla galena all'acciaio) intervenga qualche altro fenomeno a modificare l'andamento della caratteristica.

Tutto quanto abbiamo detto vale finchè non si aumenti la d. d. p. attiva agli elettrodi del contatto, oltre al valore V che essa aveva all'inizio della esperienza. Se invece, dopo aver tracciato come si è detto, la curva ed esser tornati al valore V da cui eravamo partiti, portiamo la d. d. p. ad un valore $V_1 > V$ (fig. 3), la corrente assume dapprima un valore $I_1 > I$,

corrispondente ad un punto del diagramma posto sul naturale prolungamento della curva precedentemente descritta; ma poi va gradatamente aumentando durante alcuni minuti finchè raggiunge il valore stabile $I_1' > I_1$. Se ora, partendo da questo punto del diagramma, si diminuisce la d. d. p. e si determina di nuovo la curva $I = f(V)$, questa presenta i medesimi caratteri di quella precedentemente tracciata partendo da V. Però non si sovrappone ad essa: ad una medesima d. d. p. corrisponde ora una intensità di corrente maggiore di quella prima ottenuta. Un fenomeno analogo si ripete quando si porti la d. d. p. ad un valore $V_2 > V_1$.

Possiamo dunque concludere che accanto alla variazione reversibile di resistenza di cui abbiamo prima parlato, *i contatti imperfetti metallici subiscono una diminuzione irreversibile di resistenza ogniqualvolta la intensità della corrente che li traversa, supera (in valore assoluto) il valor massimo precedentemente raggiunto nel corso dell'esperienza.* Questo fenomeno presenta tutte le caratteristiche del fenomeno di coerizzazione. Vi è però questo di notevole: che non conduce necessariamente a valori bassi della resistenza, come nel caso della coerizzazione ordinaria [1], ma a valori che, in certi casi, possono essere ancora elevati.

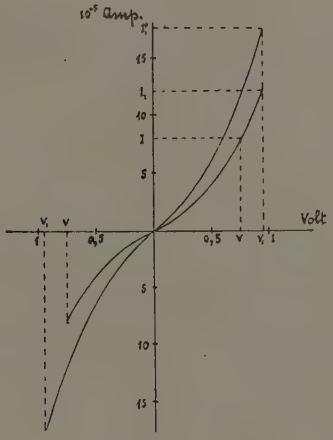


Fig. 3.

3. Il fatto che le caratteristiche dei contatti imperfetti metallici sono simmetriche, contrasta con le proprietà rettificatrici di cui essi sono dotati. Era quindi interessante ripetere le esperienze del Pélabon sui nostri contatti, per vedere se la rettificazione fosse legata a qualche particolare condizione sperimentale.

(1) Vedi la citata Memoria del Blanc.

Abbiamo inserito perciò il contatto imperfetto in un opportuno circuito oscillante, eccitato per mezzo di un vibratore elettromagnetico a cicala, ad esso accoppiato induttivamente. La corrente raddrizzata veniva misurata al galvanometro. Abbiamo in tal modo potuto constatare che *la proprietà rettificante del contatto imperfetto metallico, è legata ad una certa mobilità degli elettrodi.* Si ottiene infatti una notevole corrente raddrizzata, per quanto non stabile, quando gli elettrodi vengono con precauzione avvicinati a mano, o leggermente appoggiati uno sull'altro, o ancora strofinati lievemente uno contro l'altro; mentre non si ha alcun effetto di raddrizzamento constatabile, quando gli elettrodi sono rigidamente fissati agli apparecchi descritti (quello di cui si è tenuto parola precedentemente ed altri consimili che non si descrivono per brevità), e ciò qualunque sia la distanza alla quale essi elettrodi vengono portati, mediante la manovra della vite micrometrica. Nelle anzidette condizioni di mobilità, non è stato naturalmente possibile tracciare una curva caratteristica: abbiamo però potuto valutare approssimativamente la resistenza del contatto quando esso mostra più spiccata la proprietà rettificatrice ed abbiamo trovato che essa resistenza è, in generale, inferiore a 1000 ohms. La corrente raddrizzata va sempre dal piano alla sfera.

Per terminare la descrizione delle esperienze diremo che abbiamo anche tentato di studiare la variazione di resistenza dei contatti in esame in funzione della distanza fra gli elettrodi [1], servendoci all'uopo del dispositivo termico precedentemente descritto, mantenendo fissa la d. d. p. agli elettrodi ed osservando le indicazioni del galvanometro durante il periodo di riscaldamento o di raffreddamento delle sbarrette. Abbiamo trovato che la resistenza varia al variare della distanza, assumendo via via tutti i valori fra zero e infinito, ma non in modo regolare e continuo. Ad un resultato analogo eravamo giunti anche adoprando un altro apparecchio, in cui gli spostamenti relativi degli elettrodi erano ottenuti agendo su di essi mediante una vite micrometrica ed attraverso una leva demoltiplicatrice.

4. Vediamo ora quali conclusioni possono trarsi dalle esperienze precedentemente descritte.

La diminuzione irreversibile di resistenza, che si presenta in tutti i casi studiati, fa pensare ad una modificazione permanente che la corrente produce sulla superficie di contatto degli elettrodi, ed induce per conseguenza a ritenere che quando la corrente passa, gli elettrodi debbano necessariamente toccarsi. Non si vede infatti come il passaggio della corrente possa produrre una modificazione permanente in una atmosfera di elettroni, come quella che certe teorie sulla rettificazione farebbero intervenire.

(1) Come sarà meglio specificato in seguito, siamo portati a ritenere che gli elettrodi si tocchino quando attraverso al contatto passa corrente. Perciò, qui ed in seguito, anzichè parlare di *distanza* fra gli elettrodi, sarebbe forse più appropriato parlare di *pressione* esercitata da uno degli elettrodi sull'altro.

Riesce difficile d'altronde pensare che nei casi da noi studiati, gli elettrodi effettivamente si tocchino (contatto francamente contundente), mentre nei contatti rettificanti le loro superfici siano ad una certa distanza e la conduzione sia operata dall'atmosfera elettronica. Giacchè allora evidentemente questi ultimi dovrebbero avere una resistenza maggiore dei primi, mentre si verifica appunto il contrario.

Si potrebbe allora forse, formarsi del fenomeno la seguente rappresentazione.

Quando gli elettrodi vengono a leggero contatto e fra essi si stabilisce una certa d. d. p., il sistema presenta inizialmente una certa resistenza funzione della pressione che gli elettrodi esercitano uno sull'altro e che dipende dal senso della corrente quando essi hanno forma diversa pur essendo formati dallo stesso metallo. Il passaggio della corrente va producendo una modificazione nella zona di contatto (probabilmente una saldatura) e questa modificazione è tanto più notevole quanto maggiore è l'intensità della corrente. I due elettrodi vengono in tal modo ad esser collegati da un conduttore di natura particolare, di resistenza specifica assai elevata. Questo conduttore non segue la legge di Ohm, ma la sua resistenza, pur essendo funzione dell'intensità della corrente, non dipende dal senso di questa. Se dunque gli elettrodi sono perfettamente fissi, il contatto perde, dopo un tempo assai breve, la proprietà rettificatrice che inizialmente possedeva. Perchè tale proprietà si conservi, occorre che gli elettrodi godano di una certa mobilità, in modo che il processo di coerizzazione possa venire di continuo interrotto.

In altre parole, *il passaggio di una corrente, anche di intensità debolissima, attraverso un contatto imperfetto metallico, lo coerizza rendendolo inatto alla rettificazione. Affinchè questa si manifesti, occorre che il contatto riprenda immediatamente la sua resistenza primitiva, il che potrà avvenire in particolare quando,* come è ad es. il caso dei contatti alla Pélabon, *gli elettrodi, non essendo rigidamente connessi ai supporti di sostegno, godono di una certa mobilità che permette la continua interruzione dell'incipiente processo di coerizzazione.*

Sotto quest'aspetto, le esperienze descritte in questa Nota ci appaiono non del tutto prive di interesse, in quanto permettono di stabilire almeno una delle condizioni che sembrano dover essere soddisfatte, affinchè sia possibile la rettificazione di correnti pulsanti mediante l'uso di contatti imperfetti puramente metallici [1].

(1) Il presente lavoro è stato eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Bologna. Il dr. Todesco ha suggerito l'argomento e guidato la ricerca. Al dr. Rossi si deve anche la realizzazione degli apparecchi descritti.

Fisica. — *Un metodo interferenziale per la misura della suscettività magnetica dei liquidi.* Nota del dott. O. Specchia, presentata [1] dal Socio Q. Majorana.

È noto come uno dei metodi che più si prestano alla misura della suscettività magnetica dei liquidi e eventualmente anche dei gas, è il metodo del dislivello dovuto a Quincke. Se un liquido di suscettività χ e di densità δ è contenuto in due vasi comunicanti, dei quali uno è posto in un campo magnetico uniforme di intensità H e l'altro in una regione dove il campo magnetico sia praticamente nullo, fra le due superfici libere nei due vasi, si stabilisce un dislivello h tale che è soddisfatta la relazione $\frac{1}{2}\chi H^2 = h\delta g$. Sicchè se son note H e δ, la determinazione di χ dipende dalla misura del dislivello h. In genere questa misura si effettua col catetometro, e se ne aumenta la precisione rendendo capillare uno dei vasi comunicanti, e precisamente quello disposto nel campo. Più recentemente, l'Ollivier e il Sève han perfezionato questo metodo rendendolo un metodo di zero: con opportuni artifici il menisco nel tubo capillare è ricondotto, quando agisce il campo, nella posizione che esso occupava in assenza del campo; eliminando in questo modo complicazioni di natura capillare che intervengono nella misura del dislivello.

In sostituzione del metodo catetometrico, il Fabry, nella sua monografia sulle applicazioni delle interferenze luminose, propone un metodo interferenziale per la misura del dislivello. Il liquido di cui si vuol misurare la suscettività magnetica, è contenuto in una vaschetta sufficientemente estesa e un campo magnetico agisce su una regione di essa. In questa regione si realizzi un sistema di frangie localizzate (anelli di Newton) tra la superficie superiore, leggermente argentata, di una lente di piccolissima curvatura immersa nel liquido, e la superficie libera del liquido. Se il liquido è diamagnetico, il campo avrà per effetto di abbassarne il livello nella regione dove esso agisce e di farlo montare nelle altre regioni della vaschetta; e questa ascensione sarà naturalmente tanto più piccola quanto maggiori sono le dimensioni della vaschetta. L'opposto avverrà se il liquido è paramagnetico. In una regione opposta della vaschetta si disponga un secondo sistema ottico identico: l'osservazione delle frangie nei due sistemi farà conoscere il dislivello.

Da questo metodo, di cui il Fabry s'è limitato solo a provare la sensibilità riuscendo a mettere in evidenza con un campo di 250 unità, il diama-

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

gnetismo dell'acqua, deriva la disposizione sperimentale da me realizzata. Invece delle frangie localizzate prodotte dal sottile strato liquido che sovrasta la lente argentata della disposizione del Fabry, io realizzo un sistema di anelli all'infinito tra due lastre di vetro disposte parallelamente con le faccie affacciate semiargentate. Una di queste lastre costituisce la parte centrale del fondo di un recipiente cilindrico di ottone, mentre l'altra è fissata anch'essa nella parte centrale di un disco di ottone che copre il recipiente. Il disco è sostenuto da tre molle ad elica che circondano tre viti fissate rigidamente nel fondo della vaschetta ed esternamente a questa; tre madreviti mobili sulle viti fisse permettono di regolare la posizione dello specchio superiore rispetto a quello del fondo del recipiente. L'apparecchio è munito inoltre di tre viti calanti disposte pure nel fondo della scatola ed esternamente a questa, a 60° dalle viti fisse. Il dispositivo interferenziale descritto è in sostanza una lamina d'aria a faccie semiargentate, regolabile, che può contenere una lamina liquida: le frangie vengono osservate per trasmissione e hanno, come è noto, l'aspetto di anelli brillanti su fondo oscuro. Un altro recipiente cilindrico, di sezione circa uguale a quello descritto, è collocato fra le espansioni polari di un elettromagnete disposto con l'asse verticale, e comunica, mediante un sottile tubo, col recipiente che porta il dispositivo interferenziale; questo è collocato invece lontano dal magnete, in località dove il campo magnetico da questo generato possa ritenersi praticamente nullo. Si viene così a realizzare la disposizione dei vasi comunicanti di Quincke.

Nelle determinazioni si procede in questo modo. Si regola l'apparecchio interferenziale, senza liquido, portando in coincidenza le immagini multiple di una sorgente lontana date dai due specchi. Si ottengono le frangie. Si introduce nelle vaschette il liquido da esaminare: le frangie generalmente scompaiono. Si opera allora sulle viti calanti in modo da farle ricomparire. Così è realizzato il parallelismo rigoroso fra le due superfici speculari e la superficie libera del liquido. La condizione del parallelismo delle tre superfici, non è però necessaria allo scopo di ottenere le frangie. Queste possono ottenersi egualmente anche se non esiste alcuna coppia di superfici parallele, qualora si produca un compenso tra l'inclinazione delle due faccie semiargentate e la prismaticità della lamina liquida. Regolato l'apparecchio, si eccita il campo e si contano le frangie che passano. Il numero di frangie contate ci permette solo di conoscere la variazione di cammino ottico. Per risalire da questa alla variazione geometrica di spessore dello strato liquido, in base alla quale si potrà poi determinare, conoscendo le costanti dell'apparecchio e l'intensità del campo magnetico, il valore di χ, occorre conoscere l'indice di rifrazione del liquido relativo alla radiazione monocromatica impiegata (la 5460, 746 nelle mie esperienze). Questa determinazione si può effettuare servendosi dello stesso apparecchio interferenziale. Si supponga noto con precisione l'indice di

rifrazione n di un liquido per una radiazione monocromatica λ. Allora ad una variazione Δh del livello di questo liquido, corrisponderà il passaggio di un numero k di frangie in modo che sia soddisfatta la relazione:

$$k\lambda = 2(n - 1)\Delta h$$

Per un liquido di indice n' allo stesso dislivello Δh corrisponderà il passaggio di un numero k' di frangie e si avrà la relazione analoga:

$$k'\lambda = 2(n' - 1)\Delta h .$$

Dalle due equazioni si ricava:

$$\frac{k}{k'} = \frac{n - 1}{n' - 1}$$

dove n è noto e k e k' sono dati dall'esperienza.

Per ottenere un dislivello costante, Δh, nel tubo di comunicazione delle due vaschette, era innestato un secondo tubo portante a una certa altezza un rubinetto e al disopra di questo un recipiente riempito fino a un segno di affioramento, dello stesso liquido contenuto nelle due vaschette. Aprendo il rubinetto il liquido si distribuiva nei due recipienti producendo un innalzamento di livello e un corrispondente passaggio di frangie.

Il metodo descritto per la misura del coefficiente χ presenta però un'inconveniente: l'instabilità delle frangie. Ma a questo inconveniente si può ovviare con l'artificio adottato da Michelson nelle sue ricerche sulle variazioni di livello prodotte dall'attrazione del sole e della luna. Basta che lo spessore del liquido che sovrasta lo specchio inferiore sia abbastanza piccolo perchè le trepidazioni siano smorzate dalla viscosità dello strato liquido. E non è difficile con opportune precauzioni ridurre le oscillazioni a una piccola frazione di frangia.

Ho effettuato sull'acqua la prova della sensibilità del descritto metodo, ottenendo per un campo di 4600 unità, il passaggio di 90 frangie, il che corrisponde ad una precisione, nella determinazione del valore di χ, superiore a quella consentita dagli altri metodi conosciuti, a parità di intensità di campo. Inoltre il metodo interferenziale descritto mi sembra presenti su quello di Fabry i seguenti vantaggi: rende la nitidezza della frangia indipendente dal potere riflettente della superficie liquida, e consente la determinazione rapida e precisa dell'indice di rifrazione del liquido sul quale si sperimenta.

Fisica. — *La fase della corrente di saturazione termoionica in un circuito a tensione pulsante.* Nota di C. Dei, presentata dal Socio Lo Surdo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Considerazioni sopra uno studio critico del dottore F. P. Mazza.* Nota di M. L. Pagliarulo, presentata[1] dal Socio M. Cantone.

Dopo aver letto nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » la Nota del dott. F. P. Mazza, *Ancora sulla dispersione rotatoria degli aspartati alchilici*, pervenuta all'Accademia stessa il 9 agosto 1927, vedo la opportunità di insistere su alcuni dettagli per cui forse non sono stata sufficientemente chiara nei miei lavori sullo stesso argomento.

Riassumo intanto in breve le osservazioni che il dott. Mazza ha creduto di poter fare nei riguardi delle esperienze da me eseguite.

Il dott. Mazza deduce la poca attendibilità dei miei risultati dalle seguenti circostanze:

1ª Io non ho adoperata la riga 5209 Å dello spettro d'arco dell'argento, in corrispondenza della quale il dott. Mazza aveva osservato il massimo del potere rotatorio.

2ª Le mie curve di dispersione sono tracciate in base agli angoli di rotazione direttamente osservati e non in base alle rotazioni specifiche.

3ª Mi sono servita di un polarimetro di Laurent nel quale era stata soppressa la lamina di quarzo mezz'onda ed ho perciò eseguite le misure leggendo col massimo di oscurità, pur avendo impiegate le piccole intensità luminose fornite dalle righe della luce di tubi Geissler, decomposta con lo spettroscopio, nonchè dello spettro di fiamma di litio e del sodio e di alcune linee dello spettro d'arco del mercurio e del rame.

4ª Ho adoperata una soluzione di aspartato monoetilico al 0.748 %, che mi dava angoli di rotazione compresi fra 2′ e 8′.

Prendiamo ora in esame queste osservazioni:

1° Non ho creduto di adoperare la riga 5209 Å dello spettro d'arco dell'argento, perchè, intendendo di continuare in questo lavoro le mie ricerche su di una possibile relazione esistente fra la dispersione rotatoria e la dispersione rifrattiva, mi sono attenuta allo stesso procedimento sperimentale seguito negli altri precedenti[2] (in cui non avevo tenuto conto di detta riga), cercando di migliorare i dettagli del metodo, senza però modificarlo essenzialmente. Ho preso, è vero, in esame le due sostanze studiate

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) M. L. Pagliarulo, *Sulle leggi di variazione del potere rotatorio e dell'indice di rifrazione*, ecc. « Il Nuovo Cimento », anno III, nn. 1–2; *Della dispersione rotatoria e rifrattiva delle soluzioni acquose dell'acido tartarico destrogiro.* « Rend. della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IV, serie 6ª, 2° sem.

dal dott. Mazza, indotta a farlo dalle anomalie che si presentavano nella dispersione rotatoria di alcune loro soluzioni acquose, ma lo scopo del mio studio è stato ben diverso da quello propostosi dai dottori Mazza e Dello Jojo.

2° I diagrammi di dispersione furono tracciati in base agli angoli direttamente osservati e non in base alle rotazioni specifiche perchè, per il mio studio, il calcolo dei rapporti incrementali, di cui ho parlato in tutte le mie Note, va fatto su quelle curve e non sulle altre.

In quanto alla terza ed alla quarta osservazione, io mi son reso perfettamente conto delle difficoltà sperimentali che mi si presentavano, provenienti dalla piccola concentrazione delle soluzioni adoperate e dal dover leggere gli angoli di rotazione mediante l'apprezzamento del massimo di oscurità, che non è facile ottenere (e non ho mancato di far cenno di queste cose nelle mie Note). Ma non bisogna dimenticare che ognuno dei valori da me riportati è frutto di numerosissime determinazioni eseguite tutte con speciale accuratezza e con la massima attenzione.

Affinchè si possano giudicare convenientemente i miei risultati sperimentali, è bene sapere che per ogni riga io eseguivo al polarimetro un grandissimo numero di letture; sceglievo poi, fra i valori letti, i 100 che presentavano il minimo scarto e dalla media di questi cento ottenevo l'α assunto come angolo di rotazione corrispondente alla riga in esame. Le letture erano fatte senza interruzione e dopo aver abituato l'occhio alla perfetta oscurità. Posso assicurare che quando si lavora nelle condizioni dette, il polarimetro di Laurent può dare risultati soddisfacentissimi.

Le poche volte in cui le letture non mostravano quella regolarità che si riteneva necessaria io preferivo non tener conto della determinazione, come feci appunto nel lavoro sull'acido tartarico destrogiro a cui il dottore Mazza accenna. Mi pare che nella Nota relativa al detto lavoro io dica chiaramente quale sia stata la ragione per cui scartai la riga 4046 Å dello spettro d'arco del mercurio.

Del resto le mie affermazioni sono saldamente confermate dai fatti. Non si può non notare come le mie curve di dispersione hanno un andamento regolarissimo; ora, secondo il mio modo di vedere, non è assolutamente possibile ottenere diagrammi così regolari quando le misure, di cui essi sono l'esponente, siano grossolanamente errate.

Farò rilevare inoltre che nel secondo mio lavoro riguardante l'argomento in questione [1] ho ottenuto risultati affini perfettamente con quelli del primo e non si può ammettere che risultati ognuno dei quali è poco o niente attendibile si combinino poi in maniera da non contraddirsi menomamente.

(1) M. L. Pagliarulo, *Ulteriori ricerche sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale.* «Rend. della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. VI, serie 6ª, 2° sem.

Questi ultimi argomenti esposti mi sembrano sufficienti a dimostrare che durante la ricerca non si è trascurata nessuna delle rigorose precauzioni necessarie per evitare alterazioni di qualsiasi natura delle soluzioni e che si può stare anche tranquilli per ciò che riguarda l'influenza della temperatura; poiche, anche senza aver adoperato uno speciale dispositivo, si è cercato di non avere scarti sensibili, cosa che si ottiene facilmente quando si lavora in periodi di tempo relativamente brevi, stando sempre in una stanza e lavorando sempre con i medesimi accorgimenti.

E mi pare anche risulti chiaramente come il metodo seguito nel Laboratorio di Fisica per la ricerca in questione meriti di essere preso in più seria considerazione, perchè, a parte qualche dettaglio sperimentale che si potrà in seguito perfezionare, esso può dare risultati attendibilissimi.

Chimica. — *Distillazione nel vapore dei liquidi diversi dall'acqua.* I. *Distillazione dell'acido borico nel vapore degli acidi del Roscoe.* Nota di G. Banchi, presentata dal Socio R. Nasini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* V. *Composti di addizione con l'urotropina.* Nota di F. Rodolico, presentata dal Corrisp. L. Rolla.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *I terreni miocenici tra la valle del Senio e quella del Sillaro.* Nota di P. Principi, presentata[1] dal Corrisp. G. Rovereto.

La formazione arenacea langhiana, che costituisce l'alta valle del Lamone [2], si estende pure nell'alta valle del Santerno e lungo tutto il margine orientale del bacino di Firenzuola [3], venendo interrotta a Nord dall'ampio affioramento di argille scagliose compreso tra la valle del Sillaro e quella dell'Idice.

Immediatamente ad Est di Firenzuola, nel M. Coloreta, Poggio Caprile, M. di Frena, si diffondono considerevolmente delle arenarie in grossi banchi

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) Principi P., *I terreni miocenici tra la valle del Lamone e quella del Bidente.* «Rend. R. Accad. dei Lincei», 1927.

(3) Principi P., *Osservazioni geologiche sul bacino di Firenzuola in provincia di Firenze.* «Boll. Soc. Geol. Ital.», 1928.

con inclinazione di 18°–25°, ora ad ONO, ora ad OSO, in alcuni punti anche decisamente ad Ovest. In corrispondenza del km. 5 della strada carrozzabile, che si svolge parallelamente al Santerno, i banchi di arenaria presentano curiose arricciature e contorsioni; ma subito dopo S. Pellegrino essi danno origine ad una anticlinale quasi regolare, diretta da NO a SE, che è la prosecuzione di quella, la cui cerniera si può seguire attraverso il Cimone della Bastia, Poggio Castellaccio, Poggio Cavalmagra, M. di Villanova, fino a SE di Marradi. Oltrepassato il torrente Diaterna le arenarie si presentano in strati meno spessi ed alternanti con potenti zone marnose o scistoso–arenacee; tra Canovetta e le Campore affiorano delle arenarie di colore verdastro per la presenza di granuli di glauconite e le stesse arenarie si ritrovano pure verso le pendici occidentali del M. del Fabbro.

Lungo il Fosso di Mantigno i letti marnosi, intercalati tra le arenarie compatte, contengono resti di Pteropodi (*Balantium* cfr. *pedemontanum, Cavolinia* cfr. *bisulcata*); altre marne con Pteropodi si riscontrano nel fianco orientale del M. dell'Incisa, dove affiora anche una lente di calcare grigio con *Lucina Doderleini* Di Stef., e presso Piedimonte degli strati di calcare grigio-giallastro contengono frammenti di conchiglie, riferibili all'*Aturia Aturi* Bast.

A Coniale gli strati arenacei formano una piccola anticlinale, i cui fianchi presentano svariate contorsioni, ed un'altra piccola anticlinale asimmetrica appare in corrispondenza del km. 12, di faccia alla Rimessa, la cui cerniera diretta da ONO a ESE giunge sino a Bibbiana e Visano presso Palazzuolo.

Tra S. Michele e Castiglioncello gli strati marnoso-arenacei sono interessati da numerose arricciature, le quali probabilmente rappresentano l'effetto della intrusione di una lingua di argille scagliose, che si vedono affiorare presso S. Michele entro la formazione miocenica.

Le arenarie marnose langhiane, per lo più in grossi banchi e sfaldantisi spesso prismaticamente, si estendono pure tra il Diaterna ed il Sillaro, raggiungendo l'altezza di quasi 1000 m. nel M. Alafine, dove gli strati inclinano uniformemente a Nord. Nei pressi di Visignano si riscontrano fra gli strati arenacei marne grigie con Pteropodi, a frattura scagliosa, mentre nei dintorni della Croce affiorano delle marne di colore bruno con impronte di *Ostrea langhiana* Trab.

*
* *

Anche nella zona compresa tra la valle del Sillaro e quella del Senio è arduo stabilire il limite esatto tra il Miocene inferiore ed il Miocene medio, non esistendo tra queste due formazioni notevoli differenze litologiche. Si può, tuttavia, affermare che ad Est di una linea, che da Giugnola si diriga per M. Pratolungo, Moraduccio al M. della Faggiola, per proseguire,

sempre verso SE, fino a Sarsina [1], gli strati marnoso-arenacei si sono dimostrati costantemente privi delle specie caratteristiche del Langhiano, mentre ad Ovest della linea stessa sono frequenti i resti di *Aturia Aturi* e di *Ostrea langhiana.*

Discendendo la valle del Santerno, a Moraduccio si scorgono strati, con spessore variabile, di arenaria micacea giallastra a frammentazione globulare, che fa frequente passaggio a marne sabbiose grigie con intercalazioni di scisti arenacei e di calcari marnosi. Tale complesso litologico si estende sulla sinistra del Santerno fino al M. Pratolungo ed il Poggio, mentre sulla destra lo troviamo grandemente sviluppato sino al di là del torrente Senio. In tutta questa zona gli strati inclinano per lo più ad OSO, ma, oltrepassata Valsalva, l'immersione avviene verso Nord o NNE; siamo quindi in presenza di un'altra anticlinale, che si ritrova più a SE a costituire i rilievi sopra Baffadi entro la valle del Senio e tra S. Martino di Gattara e S. Cassiano lungo la valle del Lamone [2]. Presso Ponte Nuovo è ben visibile il nucleo di questa piega, i cui fianchi mostrano inclinazioni non molto accentuate (20°-30°), quantunque nel fianco SO poco lungi da Castiglioncello gli strati siano interessati da una frattura con lieve rigetto. Nella valle del Senio il nucleo della stessa piega si riscontra tra Rivacciola e Baffadi e quivi i fianchi dell'anticlinale si presentano assai ripidi cogli strati talora addirittura verticali. È interessante anche rilevare come il fianco occidentale di questa anticlinale tra Mercatale e Rivacciola nella valle del Senio mostra numerose ripiegature e ondulazioni secondarie.

Dopo Castel del Rio gli strati del Miocene medio presentano una costante immersione a NNE, fino a che vengono ricoperti dalla formazione gessosa. Lungo la valle del Sillaro tra M. Alafine e Sassoleone le argille scagliose cretacee appariscono intruse entro le arenarie marnose mioceniche ed anzi presso Sassoleone e Belvedere risultano addirittura sovrapposte a queste ultime.

Negli strati marnoso–arenacei del M. Cappello sulla destra del Santerno si osservano lenti calcaree con *Lucina De Stefanii* Rov. e *Solenomya Doderleini* May., e nei calcari marnosi, che affiorano nell'incisione del Rio della Nave a SO di Casola Valsenio, ho riscontrato due frammenti di *Carcharodon megalodon* Agass.

Presso l'abitato di Gaggio sul Santerno le arenarie diventano più marnose, fintantochè, dopo Fontanelice, sono sostituite da marne grigiastre talora sabbiose, con rare intercalazioni di straterelli arenacei e calcarei, le quali poi si immergono sotto la zona dei gessi del Sarmaziano. La stessa formazione si estende verso Sassoleone e S. Apollinare, dove gli strati includono lenti calcaree con *Lucina Doderleini* Di Stef. e *Lucina De Stefanii*

(1) Principi P., *I terreni miocenici tra la valle del Lamone e quella del Bidente.*
(2) Principi P., *I terreni miocenici tra la valle del Lamone e quella del Bidente.*

Rov. e si può seguire nella valle del Senio da Casola sino alla Vena del Gesso. Talora queste marne, aventi generalmente un colore grigio e giallastro per l'abbondanza di sostanze calcaree, assumono un colore più scuro per la presenza di elementi serpentinosi e cloritici e tendono a sfaldarsi in straterelli sottilissimi. Alcuni banchi di queste marne sono costituiti quasi interamente da enormi accumuli di Globigerine e si arricchiscono spesso di elementi minerali in modo da assumere l'aspetto di vere e proprie arenarie. Per la quantità di Globigerine presenti questa formazione marnosa potrebbe a prima vista essere interpretata come un sedimento avvenuto a notevole profondità; ma, risultando assai abbondanti i materiali sabbiosi, è più logico considerarla come un deposito di mare largamente aperto, indipendente dalle condizioni batimetriche.

Nel corso superiore del Rio dell' Inferno a Sud del Borgo di Tossignano il Sangiorgi [1] ha trovato i seguenti fossili: *Jupiteria Brocchii* Bell., *Macomopsis elliptica* (Br.), *Anthale vitreum* (Schrot.), *Cavolinia trispinosa* Les. sp., *Balantium Fallauxi* Kittl., *Vaginella rzehaki* Kittl. Questa fauna, se attesta in modo indubbio l'età miocenica delle marne in questione, non permette però di trarre alcuna deduzione più precisa; ma avendo io riscontrato in un banco argilloso, che presso Casola Valsenio racchiude esigue lenti di lignite picea, alcune conchiglie riferibili al *Potamides lignitarum*, ed in altre zone argillose presso il M. Battagliola dei frammenti di *Cardita Jouanneti* e di *Ostrea crassissima*, risulta in modo evidente l'età tortoniana della formazione marnosa in questione.

Il Miocene medio può così essere diviso in due parti: una inferiore dell'Elveziano, con arenarie intercalate a marne arenacee od a scisti marnoso-arenacei, litologicamente analoga alla serie del Miocene inferiore, ma priva dei fossili caratteristici di quest'ultima; ed una superiore del Tortoniano, prevalentemente marnosa.

* * *

Come abbiamo già rilevato per i dintorni di Brisighella [2], anche nella regione ora in esame gli strati marnosi del Tortoniano appariscono limitati verso l'alto da un calcare marnoso compatto talota ricco di impregnazioni silicee ed a stratificazione indistinta. Questo calcare è, però, in lembi discontinui; così lo si riscontra a SE di Tossignano presso il M. del Casino con resti di *Lucina De Stefanii* Rov., *Modiola ex-Brocchii* Sacco e di *Euthria Hoernesi* Bell. (*Chrysodomus*); e tra il M. della Volpe ed il M. Mauro, dove si mostra piuttosto tenero e quasi spugnoso. È, invece, scarsamente

(1) Sangiorgi D., *Lo Schlier nell'Imolese*, «Riv. it. di Paleont.», anno X, Perugia, 1904.

(2) Principi P., *I terreni miocenici tra la valle del Lamone e quella del Bidente.*

rappresentato sulla sinistra del Santerno, dove anche la formazione gessosa si presenta in lenti isolate.

Sopra questi calcari, che stanno verosimilmente a rappresentare la parte più alta del Tortoniano, oppure direttamente sulle marne del Miocene medio, riposa in concordanza una serie di altre sabbie gialle micacee con straterelli di marne argillose grigie-azzurrastre, che presso Tossignano contengono avanzi di *Hyalaea* (*Cavolinia*) *gypsorum* e di *Lebias crassicauda*. Al di sopra di questi strati sabbioso-argillosi, od intercalati ad essi, si presentano banchi di gesso, i quali, nella parte più elevata, includono lenti di calcare e zone selciose: tutto questo complesso è senza dubbio riferibile al Sarmaziano.

La formazione gessosa raggiunge il massimo spessore e notevole continuità sulla sinistra del Senio, mentre, procedendo verso il Santerno ed il Sillaro, i banchi di gesso diventano meno potenti e finiscono col costituire dei lembi isolati compresi entro gli strati marnoso-arenacei. A Cà Sassatelli trovasi uno di questi lembi, rappresentato da gesso compatto quasi alabastrino e di colore giallo rossastro, che riposa sulle marne tortoniane. Interstratificati fra i gessi si osservano straterelli argillosi con resti vegetali (*Sequoia Langsdorfi* H., *Planera Ungeri* Kov., *Cinnamomum polymorphum* H., *Cassia phaseolites* Ung.), e lungo la linea Cà Sassatelli-C. Pra dell'Aia le argille scagliose cretacee per un fenomeno di trabocco risultano sovrastanti alla serie sarmaziana.

Altri lembi gessosi isolati sono quelli di Gesso e di Pieve del Gesso [1]: nella prima di queste località la roccia è per lo più compatta a struttura saccaroide e di colore biancastro, mentre a Pieve del Gesso prevale una varietà lamellare con lucentezza sericea; i banchi gessosi hanno una potenza complessiva inferiore agli 80 metri ed appariscono costantemente immersi a NNE di circa 40°.

Avvicinandoci al Santerno la formazione gessosa diviene più continua e regolare [2], originando una specie di ripida cresta - nota sotto il nome di « Vena del gesso » - e raggiunge uno spessore complessivo di quasi 100 metri. Ad Ovest del Borgo di Tossignano presso C. del Gesso il Sarmaziano inferiormente è costituito da marne argillose o sabbiose, talora dotate di una scistosità assai spiccata, con *Lebias crassicauda* e *Balanus*, a cui succedono dei banchi di gesso saccaroide o lamellare, dapprima assai potenti, ma diminuenti di spessore verso l'alto e gradualmente sostituiti da un calcare biancastro – conosciuto sotto il nome di « travertino » [3] – di aspetto concrezionare ed includente cristalli di selenite isolati o aggregati in

(1) Toldo G., *Note preliminari sulle condizioni geologiche dei contrafforti appenninici fra il Sillaro ed il Lamone*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XXIV, 1905.

(2) Sacco F., *L'Appennino della Romagna*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XVIII; *L'Appennino settentrionale e centrale*, Studio geologico, 1904.

(3) Scarabelli e Foresti, *Sopra alcuni fossili raccolti nei colli fiancheggianti il fiume Santerno nelle vicinanze di Imola*, « Boll. Geol. Ital. », vol. XVI, 1897.

minutissime druse. Questo calcare, spesso di aspetto cavernoso per la scomparsa dei suddetti cristalli, si presenta non di rado riccamente impregnato di silice e venendo a formare delle lenti od anche delle vene entro la formazione gessosa [1], rappresenta con molta probabilità un deposito di origine chimica. Esso, cioè, proviene dalla trasformazione del solfato di calcio in carbonato di calcio per opera forse di idrocarburi, mentre la silice può derivare dall'azione che soluzioni cariche di carbonato di sodio hanno esercitato sui silicati esistenti nelle rocce contigue ai gessi.

Entro la valletta del Rio dell' Inferno e del Rio Sgarba a SO di Tossignano si ripete la stessa serie ora descritta: i banchi di gesso, con spessore variabile dai 10 ai 15 metri, inclinati di circa 30°-35° verso NNE, di colore grigio giallastro ed a struttura cristallina, contengono interstratificati sottili straterelli di marne argillose con *Lebias crassicauda* ed impronte vegetali, appartenenti alle seguenti specie: *Taxodium distichum-miocenicum* H., *Fagus Antipofi* (Abich.), *Quercus proteifolia* Paol., *Quercus chlorophylla* Ung., *Laurus princeps* H., *Cinnamomum polymorphum* H., *Acer controversum* Paol., *Diospyros brachysepala* Al. Br. Superiormente le marne vengono sostituite dai soliti calcari concrezionari.

La « Vena del Gesso » continua ininterrottamente attraverso la valle del Senio fino al M. Mauro, dove lo spessore complessivo dei banchi gessosi oltrepassa i 150 metri. Sulla riva destra del Senio, nel M. della Volpe, il gesso si presenta per lo più massiccio a struttura microcristallina o lamellare di colore giallo o grigiastro ed in banchi costantemente inclinati a NNE di circa 28°. Anche qui si riscontrano, sia alla base sia entro la formazione gessosa, straterelli di marne sabbiose e di scisti arenacei con resti di pesci e di foglie comprendenti frammenti indeterminabili di Monocotiledoni, *Fagus Antipofi* (Ab.), *Cinnamomum lanceolatum* H., *Cassa vulcanica* Ett. Sopra questi banchi gessosi, aventi una potenza complessiva di circa 110 metri, si trovano sparse croste, talvolta assai spesse, di selce piromaca, in cui lo Scarabelli [2] avrebbe rinvenuto individui di *Melanopsis Bonellii*, ma che secondo le ricerche del Sangiorgi [3] e mie non contengono che qualche raro fossile allo stato di modello e specificamente indeterminabile (*Hydrobia*, *Turritella*). Proseguendo verso i Crivellari, succede in perfetta concordanza un banco di argilla verdastra con concrezioni calcaree pisolitiche e priva di fossili determinabili; questa roccia fa, poi, passaggio gradualissimo a marne sabbiose compatte scure, spesso addirittura nerastre, che ai Crivellari contengono una ricca fauna costituita essenzialmente da Congerie e *Melanopsis*. Tra le specie più importanti, che risultano dalle determinazioni del Sangiorgi e mie,

(1) Anelli M., *Cenni tettonici sulla regione collinosa tra lo Stirone ed il Taro*, « Boll. R. Ufficio Geol. », vol. LII, 1927.

(2) Scarabelli e Foresti, op. cit.

(3) Sangiorgi D., *Fauna degli strati a Congerie e dei terreni sovrastanti nelle vicinanze di Imola*, « Riv. Ital. di Paleont. ». Perugia, 1906.

ricordiamo: *Congeria simplex* Barb., *Congeria amigdaloides* var. *graecata* Font., *Congeria claviformis* Krauss, *Congeria rostriformis* Des., *Congeria subglobosa* Partsch., *Melanopsis Matheroni* May., *Melanopsis Bonelli* Sism., *Adacna Scarabellii* (Cap.), *Adacna carinata* (Desh.), ecc. L'insieme di queste specie indica chiaramente come gli strati marnosi suddetti appartengano al Pontico, il quale è pure rappresentato, sebbene in lembi discontinui, tra la valle del Senio e quella del Sillaro.

Entro il Rio dei Ronchi a NO di Rivola e presso Rocchetta affiorano le stesse marne dei Crivellari, contenenti *Congeria simplex, Congeria rostriformis, Congeria subglobosa, Cardium edentulum* Desh., *Melania tuberculata* (Mull.), ed anche verso C. Nuova a Sud di Tossignano, degli strati sabbiosi-argillosi, sovrastanti ai gessi, racchiudono frammenti di conchiglie per lo più appartenenti ai generi *Congeria* e *Melanopsis*.

Sulla sinistra del Santerno, al di sopra del calcare travertinoso, che affiora a NE di C. del Gesso, succedono degli strati di una marna argillosa compatta grigia o bruno-scura, includente delle brecciole con numerosi frammenti di *Pecten* e di altre conchiglie indeterminabili; anche queste marne rappresentano il Pontico, come lo dimostra la presenza di alcune *Melanopsis* e del *Cardium Spratti* Fuchs.

Gli elementi delle brecciole verso l'alto della serie tendono gradualmente ad assumere dimensioni sempre maggiori, fintantochè danno origine a veri e propri conglomerati, che costituiscono il M. dell'Acqua Salata, M. del Verro e M. Maggiore. I ciottoli hanno per lo più forme ellissoidali o tondeggianti, con diametro raggiungente persino i 40 centimetri e sono formati da calcari grigi a fucoidi, da arenarie calcarifere, da gabbro rosso, ftaniti e calcari bianchi compatti, tutte rocce che affiorano più o meno estesamente nell'alta valle del Santerno [1] ed in quella del Sillaro. Evidentemente questo conglomerato, come quelli che si trovano più a Sud nella valle del Bidente [2] e presso il M. Carpegna [3], rappresenta un deposito di spiaggia lasciato dal mare pontico durante il suo movimento di regressione.

*
* *

Superiormente a questo conglomerato si ha una serie assai potente di marne azzurrastre, riferibile per i fossili in essa esistenti al Piacenziano e contenente nella parte inferiore numerose intercalazioni di marne sabbiose e di sabbie in strati piuttosto sottili. Questi strati pliocenici pendono di circa 10°-12° verso NNE e vengono alla loro volta ricoperti da una potente zona di sabbie gialle dell'Astiano, i cui strati si presentano quasi orizzon-

(1) Principi P., *Osservazioni geologiche sul bacino di Firenzuola.*

(2) Principi P., *I terreni miocenici tra la valle del Lamone e quella del Bidente.*

(3) Principi P., *I terreni terziari dell'alta valle della Marecchia*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLIV, 1925.

tali. Anche in questo tratto, perciò, i sedimenti pliocenici vengono a formare una flessura o piega monoclinale, che è il prolungamento di quella che abbiamo già descritta per la regione compresa tra la valle del Lamone e quella del Bidente [1].

Dove mancano i sedimenti del Pontico, i terreni pliocenici si adagiano direttamente sulla formazione gessosa, oppure sulle marne sabbiose che rappresentano la parte inferiore del Sarmaziano. La discontinuità sia degli strati gessosi sia degli strati a Congerie dimostra, come ho avuto già accasione di far rilevare, che in conseguenza della fase di emersione, verificatasi nel Miocene, superiore si originarono delle zone salmastre, limitate a particolari depressioni formatesi in seguito ad un più accentuato corrugamento verificatosi in alcuni tratti.

Mineralogia. — *Nuove ricerche sulle trasformazioni della scolecite.* Nota di A. Cavinato, presentata dal Socio L. Brugnatelli.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica Fisiologica. — *Sulla composizione chimica di alcuni latticini italiani* [2]. Nota di L. Settimj, presentata [3] dal Corrisp. S. Baglioni.

In continuazione di quanto riferii in una precedente Nota [4] espongo nella presente i dati analitici ottenuti dall'esame di alcuni latticini di produzione italiana.

A). *Ricotta Romana.*

Riscaldando il siero, ottenuto dalla coagulazione del latte con presame o caglio per preparare il formaggio, ad una temperatura di 75°-80° in presenza di un acido, organico o minerale, le sostanze proteiche (lattoalbumine e lattoglobuline) sono precipitate e si separano sotto forma di fiocchi che vengono poi ad agglomerarsi alla superficie formando un coagulo galleggiante, bianco, molle, che si fa più consistente coll'innalzare della temperatura del liquido.

Questo coagulo è detto *ricotta*, parola che richiama la seconda cottura cui si sottopone il siero dopo la estrazione del formaggio.

(1) Principi P., *I terreni miocenici tra la valle del Lamone e quella del Bidente.*

(2) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

(3) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(4) «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. VI, serie 6ª, 2° semestre, fasc. 9, Roma, novembre 1927.

I globuli grassi sospesi nel siero rimangono incorporati per la maggior parte nei fiocchetti della sostanza proteica che si separa, quindi la ricotta riesce più o meno grassa secondo che deriva da latte intiero o da latte scremato o semiscremato.

La ricotta del mercato di Roma è fabbricata con il siero del formaggio di latte di pecora.

Il latte di pecora presenta la composizione media (1):

Acqua	83.10
Sostanze proteiche	6.17
Lattosio	4.60
Grasso	5.30
Ceneri	0.83

Si differenzia notevolmente dal latte di vacca, perchè contiene una maggiore quantità (quasi il doppio) di sostanze proteiche e di grasso.

La composizione media del siero di formaggio grasso è:

Acqua	92.70 %
Grasso	0.75 »
Materie proteiche	1.00 »
Lattosio e acido lattico	4.90 »
Ceneri	0.65 »

Le analisi sono state eseguite su sedici campioni di ricotta prelevati in negozi e luoghi differenti.

La media dei risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

TABELLA I.

Latticini	Acqua gr. %	Sostanze azotate totali gr. %	Sostanza azotata solubile gr. %	Sostanza grassa e fosfatidi gr. %	Lecitine gr. %	Lattosio gr. %	Ceneri gr. %	Acidità in acido lattico gr. %	Calorie per 100 grammi
Ricotta Romana *Tipo I*	56.00	8.51	1.04	33.80	1.16	0.90	0.48	0.21	353
Ricotta Romana *Tipo II*	66.30	8.30	1.10	23.50	0.94	1.10	0.49	0.23	257

Dall'esame di questi dati risulta chiaramente che nel commercio romano si trovano due tipi di ricotta che si differenziano per la quantità di grasso, derivanti molto probabilmente dal fatto di essere fabbricate o con siero di latte intiero o con siero di latte semiscremato. Le ricotte che contengono maggiore quantità di grasso sono di consistenza più molle, la pasta è omo-

(1) Dott. E. SAVINI, *Chimica ed analisi del latte e dei latticini*, 1927, Manuale Hoepli.

genea, quasi cremosa. Le ricotte che contengono quantita minore di grasso, e quindi più acqua, presentano maggiore compatezza apparente, ma quando si tagliano facilmente si sgretolano.

Di analisi di ricotta ricavata dal latte di pecora ho potuto trovare soltanto nel *Caseificio* di C. Besana, Torino, Unione Tipogr. Torinese, 1908, p. 117, riportata una analisi completa eseguita da Sartori e Lodi nel 1890, ed è la seguente:

Acqua	43.27
Grasso	33.31
Materie proteiche	11.73
Lattosio	10.42
Acido lattico	0.43
Ceneri	0.84

Questi risultati analitici non concordano completamente con quelli esposti nella Tabella I: pur avvicinandosi alla composizione della ricotta romana del 1° tipo ne differiscono essenzialmente per la elevata quantità di lattosio che nelle ricotte analizzate è invece assolutamente minimo.

Tale discordanza di dati molto probabilmente potrà provenire dal fatto che gli Autori suddetti avranno analizzato altri tipi di ricotta fabbricata con altri sistemi ed altri usi. D'altra parte la ricotta non può contenere molto lattosio per due ragioni: una piccola parte del lattosio originale del latte nella fabbricazione del formaggio viene parzialmente scisso per opera dei fermenti, mentre la maggior parte di esso, nella cottura del siero di formaggio pecorino per ottenere la ricotta, rimane sciolto nel siero.

La sostanza azotata solubile della ricotta è costituita essenzialmente da proteosi e peptoni, con piccolissima quantità di aminoacidi. Le ceneri sono costituite essenzialmente da fosfato di calcio, con piccole quantità di cloruri e solfati di sodio, di potassio e di magnesio.

Il valore energetico dei due tipi di ricotta varia sensibilmente secondo che essa è ottenuta con siero di latte intiero o parzialmente scremato: è naturalmente maggiore per la ricotta che contiene più grasso. In tutti e due i casi però la ricotta è da considerare, per quanto si riferisce al suo valore energetico, una derrata di elevato potere alimentare, mentre comunemente è creduto genere alimentare di secondaria importanza.

B). *Mozzarelle.*

I vari tipi di *mozzarelle* sono confezionati con pasta filata, come i *caciocavalli*, con la differenza che le mozzarelle sono consumate fresche, mentre i caciocavalli prima di essere consumati subiscono una stagionatura.

I tipi di mozzarelle analizzati sono: la *mozzarella romana* e la *mozzarella di Cardito*: la *mozzarella romana* è fabbricata con latte scremato ed è messa in commercio in piccole forme ovoidali (circa gr. 100), di massa

compatta, e discreta consistenza. Le *mozzarelle di Cardito*, fabbricate con latte parzialmente scremato, sono poste in commercio in forme ovoidali, piuttosto grandi (circa 1/2 Kg.), di massa non molto compatta, sotto una modesta pressione o lasciate a sè per qualche tempo, liberano un liquido lattescente.

La media dei risultati analitici eseguiti su diversi campioni dei due tipi sono riassunti nella seguente tabella:

TABELLA II.

Latticini	Acqua gr. %	Sostanza azotata totale gr. %	Sostanza azotata solubile gr. %	Azoto aminico gr. %	Sostanza grassa e fosfatidi gr. %	Lecitina gr. %	Lattosio gr. %	Ceneri gr. %	Calorie per 100 grammi
Mozzarella romana . .	67.00	27.00	5.10	0.25	3.00	—	traccie	2.42	139
Mozzarella di Cardito .	61.00	16.09	2.15	0.12	20.00	1.05	0.50	2.40	253

La *mozzarella romana* contiene una maggiore quantità di sostanza azotata solubile (circa 20 % della sostanza azotata totale) della *mozzarella di Cardito* (circa il 12 % della sostanza azotata totale). In tutti e due i tipi di mozzarelle la sostanza azotata solubile è costituita per la maggior parte da proteosi, peptoni con sensibili quantità di aminoacidi.

Le ceneri di ambedue i tipi di mozzarelle sono costituite essenzialmente da cloruro di sodio (in gran parte aggiunto per la fabbricazione) (47 % delle ceneri) e fosfato di calcio (30 % delle ceneri), con piccole quantità di fosfati, cloruri e solfati di sodio, di potassio e di magnesio.

Le calorie calcolate in base ai risultati analitici per i due tipi di mozzarelle dimostrano che la mozzarella di Cardito ha notevole superiorità alimentare, riguardo al valore energetico, in confronto della mozzarella romana.

Fisiologia. — *Valore alimentare della patata nei ratti albini.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Embriologia sperimentale. — *Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi.* – II. *Sul differenziamento polare delle ova di Arbacia punctulata Grey, centrifugate subito dopo la fecondazione* [1]. Nota di P. Pasquini, presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

A proposito dello sviluppo delle ova di Echinodermi sottoposte alla forza centrifuga, il Morgan, nel suo recente volume [3], si esprime in questi termini: « If the eggs are fertilized first, and after several minutes are then centrifuged until well stratified, they begin to segment at the same time, as the control, normal eggs », e poi: « If the eggs are *first centrifuged and then fertilized*, the first cleavage generally lies as in the preceding case, at right angles to the stratification, but in few cases the first cleavage is parallel to the stratification » e dopo queste premesse a pag. 500 aggiunge: « As Lyon first showed, the embryo (pluteus) from centrifuged eggs develops without regard to the artificial distribution of the movable materials of the egg. These plutei are normal in form and function ».

Poichè, come è risultato dai miei esperimenti, le ova di *Arbacia* centrifugate *subito* dopo la fecondazione non si sviluppano *mai* in plutei normali, e seguendo una segmentazione atipica, danno luogo a mostruosità diverse, voglio con le seguenti osservazioni considerare più da vicino il problema delle relazioni che intercedono fra il processo di segmentazione e la polarità delle ova, in quanto potrebbe sembrare che questa proprietà insita nel citoplasma dell'ovo, possa mutare in seguito all'azione della forza centrifuga, e tanto più in differenti periodi dopo la comparsa della membrana di fecondazione. Il Morgan ha dimostrato [4], a questo proposito, che la polarità è determinata precocemente nell'ovo in virtù della posizione che esso occupa nell'ovario, all'epitelio della parete del quale l'ovo aderisce in corrispondenza del suo micropilo. Spetta poi al Boveri [5] di avere stabilito la polarità dell'ovo in *Strongylocentrotus* probabilmente fin dalla sua fase oogoniale.

(1) Ricerche eseguite al Marine Biological Laboratory di Woods-Hole (America); presso l'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma e alla Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(3) « Experimental Embryology », Columbia University Press, 1927, New York.

(4) « Science », vol. XXVIII, n. 713, 1908 e Arch. für Entwicklungsmech, volume XXVIII, 1909.

(5) « Verh. Phys. Med. Ges. », Würzburg, 34 Bd. 1901, a; e « Z. Jahrb. Abt. Morph. », Bd. 14; 1901 b.

Nella mia Nota precedente [1] ho messo in particolare evidenza il fatto, innanzi accennato, che l'azione della forza centrifuga (8500 giri al minuto) cui sono state da me sottoposte le ova di *Arbacia* si esplica con un loro differente comportamento secondo il momento in cui essa, che opera una nuova distribuzione dei materiali visibili dell'ovo, si fa agire. Se prima della fecondazione si sviluppano plutei normali (Lyon, 1906–1907); se immediatamente dopo (Pasquini, 1927) non si sviluppano mai plutei normali, nè le forme post-gastrulari di « prisma » (così indicate dal Driesch), che precedono lo stadio di pluteo.

Fra le varie sorta di anomalie, che ho potuto precisamente individuare, sono le tipiche « stereoblastule », incapaci a gastrulare e piene di cellule mesenchimatiche, oppure « exogastrule » di vario tipo, dalle quali talvolta si distacca l'archenteron svaginato, mentre il rimanente della larva non si sviluppa in pluteo, ma resta allo stato di una vescica con stomodaeum, senza braccia nè scheletro e difettosa d'intestino.

Molte delle anomalie da me descritte, si possono ricondurre, come ho detto, alle forme indicate come « dauerblastula », dal Driesch, ottenute anche dal Boveri, dal Morgan e dallo Zoja, facendo sviluppare blastomeri isolati, frammenti di ovo o gruppi di determinati blastomeri (ad es. quartetto superiore o quartetto inferiore dello stadio di 8 cellule), studiate poi dal Terni [2] che le descrisse come « larve atipiche ». Il più delle volte gli stadî di segmentazione atipica (vedi mia Nota precedente) si evolvono in blastule normali che diventano embrioni anomali allo stadio di gastrula, che, come gli stadî descritti dal Plough [3], derivati da blastomeri isolati di *Arbacia* e di *Echinarachnius*, non sviluppano scheletro o lo presentano difettoso.

Se paragoniamo questi risultati a quelli che ottenni centrifugando le ova in periodi successivi al processo di fecondazione e cioè ad intervalli dalla formazione della membrana di fecondazione all'iniziarsi del 1° solco di segmentazione, si osserva che, pur verificandosi nelle ova la caratteristica distribuzione dei granuli di tuorlo e del pigmento descritta dal Lyon [4], per opera dello spostamento degli inclusi del citoplasma, i prodotti dello sviluppo di queste ova centrifugate si presentano normali, con una frequenza di anomalie – consistenti in forme asimmetriche e difettose, ma sempre riconducibili allo stadio di pluteo – che sta in ragione inversa del tempo interposto fra la formazione della membrana di fecondazione e il momento in cui si fa agire la forza centrifuga.

(1) « Rend. R. Acc. dei Lincei », Classe Scienze Fis. Mat. e Nat., vol V, Serie 6ª, 1° sem., fasc. 5, 1927.

(2) « Mitt. aus der Zool. Station zu Neapel », 22 Bd., n. 3, 1914.

(3) « Biological Bullettin », vol. 52, n. 5, 1927; e « Anat. Record », vol. 29, n. 2, 1924.

(4) « Am. Journ. of Physiology », vol. XV, 1906 e « Arch. für Entwicklungsmech. », Bd. XXIII, 1907.

Detti risultati sono quelli da prendersi in più accurato esame. Inoltre le sostanze portate artificialmente a localizzarsi nelle 4 regioni dell'ovo di *Arbacia*, in quell'ordine dipendente dal loro peso specifico e quindi in strati normali all'asse di centrifugazione, non hanno, come è noto fin dalle prime ricerche di Morgan (1909), valore di sostanze organo-formative: non rappresentano *a fortiori* materiali di valore prospettivo diverso, e non sono come tali determinate.

Infatti questa nuova distribuzione dei materiali inclusi nel citoplasma dell'ovo - considerato isotropo dal Driesch - non altera la potenza prospettiva dei primi quattro blastomeri che, in quanto appartenenti ad ova isolecitiche diffuse, e fra queste a segmentazione oloblastica disuguale, sono in condizioni normali fra loro equivalenti: il 1° solco è infatti meridiano, il 2° pure meridiano. Invece nella segmentazione delle ova fecondate e subito dopo centrifugate, si osserva come la stratificazione indotta nei materiali visibili nell'ovo, influenzi nettamente la direzione dei primi piani di divisione che si susseguono, il 1°, il 2°, il 3°, il 4° rispettivamente, meridiano, equatoriale (ma non perfettamente) meridiano e latitudinale. Il 1° piano si inizia al polo centripeto dell'ovo e interessa quindi consecutivamente le diverse zone, alle quali è normale e che divide per metà: la zona dell'*oil cap*, la zona ialina, i granuli di tuorlo e la regione che corrisponde al polo centrifugo dell'ovo dove sono raccolti più visibilmente i granuli di pigmento che talvolta sono tanto compatti fra loro, da venire espulsi, in parte, al termine del primo solco (ci si riferisca alla figura della mia prima Nota). Nelle ova di questo tipo che hanno membrana di fecondazione integra e forma pressochè normale, la forza centrifuga ha agito sulle ova diversamente orientate, per cui soltanto in una minima parte di esse si deve ritenere che l'asse di centrifugazione o asse secondario sia venuto a coincidere con l'asse di polarità dell'ovo. Questo passa per il micropilo e alla sua estremità opposta, approssimativamente, sia nelle ova centrifugate prima della fecondazione, sia in quelle normali che in quelle fecondate e dopo *parecchi minuti* centrifugate, secondo le ricerche del Morgan, si separano al 4° solco i micromeri. Poichè questi risultano formazioni indipendenti dalla stratificazione subìta dai materiali del citoplasma, il Morgan ha concluso che la centrifugazione delle ova non ne muta la polarità.

Il costante ripetersi, nei miei esperimenti, di un risultato così caratteristico, quale lo sviluppo anomalo delle ova centrifugate subito dopo la fecondazione, mi induce a riservare ogni giudizio sulla maniera di agire della forza centrifuga nell'ovo fecondato. Le sezioni di tali ova centrifugate, fissate in liquido di Meves e colorate con ematossilina ferrica di Heidenhain, mi hanno palesato, come fatto saliente, una particolare disposizione dei granuli di pigmento nel citoplasma, di cui uno strato periferico chiaro li contiene egualmente distribuiti. Ciò sembra indicare come il citoplasma di questa zona, per la sua maggiore viscosità rispetto a quella delle altre

regioni, si opponga allo spostamento dei granuli della periferia dell'ovo in direzione centrifuga. Orbene, nelle ova prima centrifugate e poi fecondate non si trovano che rarissimi granuli nel plasma corticale e la zona ialina è molto più appariscente. Questo fatto, che è in accordo con i risultati di Heilbrunn [1], dimostra un aumento di gelificazione del citoplasma corticale durante il periodo che precede la preparazione del fuso di segmentazione.

Bisogna anche tener presente che un certo numero di ova centrifugate subito dopo la fecondazione assume la forma ellissoide, allungandosi a mo' di budello e presentando i granuli di tuorlo e le sferule, maggiormente compatti nell'emisfero centrifugo. In forza della maggiore concentrazione di tuorlo, in questa zona, si verifica la formazione di blastomeri grossi e fortemente pigmentati, mentre al polo opposto i blastomeri sono più piccoli e ialini: la segmentazione di queste ova, procede più lenta che in quelle non deformate.

L'allungamento dell'ovo lungo l'asse secondario è un fatto caratteristico e frequente nelle ova centrifugate in periodi successivi alla fecondazione, durante i quali la centrifugazione opera più facilmente questa deformazione. Il fuso della prima divisione apparisce nella direzione dell'asse d'allungamento sì che il primo solco viene a formarsi parallelo agli strati delle sostanze visibili e approssimativamente, in corrispondenza della zona di separazione tra i granuli di tuorlo e la regione ialina. Ne deriva una divisione ineguale dell'ovo, che dà luogo alla formazione di due blastomeri ineguali che possiamo indicare come un macromero contenente i granuli di tuorlo e quelli di pigmento nella metà centrifuga dell'ovo ed un micromero in cui vengono comprese la zona ialina e la *oil cap*. Il 2° solco, perpendicolare al 1°, è meridionale rispetto all'asse di allungamento, non è sincrono nei due blastomeri, ma si compie prima in quello più grande. La successiva divisione è parallela agli strati e interessa soltanto i blastomeri grandi; il 4° solco si compie nei due micromeri e separa le sostanze che costituiscono l'*oil cap*, nei due blastomeri terminali del polo centripeto. Da questo stadio di otto cellule con divisioni successive meridionali e interessanti ciascuna coppia di blastomeri si passa allo stadio di sedici cellule. In questo caso i micromeri non si formano tutti insieme, come avviene normalmente al 4° solco, ma si separano successivamente in generale al polo centripeto dell'ovo e in numero non costante.

Da queste ova, se la membrana di fecondazione è rimasta integra, si originano blastule, che si sviluppano in plutei normali, talvolta più o meno asimmetrici pel numero e per le dimensioni delle braccia.

Alcune considerazioni fondate sui fatti esposti ci fanno pensare che il differenziamento polare delle ova che insieme al primo solco di segmen-

(1) « Journ. Exp. Zool. », vol. 30, 1920, p. 211-237.

tazione (quando questo coincide col piano di simmetria bilaterale [1]) del futuro pluteo), rappresenta una delle più elementari determinazioni, deve intendersi dovuto ad una prelocalizzazione dei materiali organo-formativi nell'ovo.

Infatti poichè i granuli di tuorlo e quelli di pigmento – che insieme ai materiali della *oil cap* sono i soli identificabili, ma non forse i soli a subire una nuova distribuzione – non rappresentano sostanze organo-formative, il processo di segmentazione almeno per un certo tempo, anche nelle ova centrifugate dovrebbe avere solo valore quantitativo e non qualitativo in quanto i blastomeri che derivano dai primi solchi, benchè non equivalenti fra loro per gli inclusi in essi contenuti, sarebbero tuttavia totipotenti sviluppandosi come se non contenessero una particolare sostanza visibile accumulata in essi dalla centrifugazione. Ma il fatto interessante è che la distribuzione anomala dei materiali nelle ova centrifugate prima della fecondazione, non determina uno sviluppo anomalo, ciò che invece accade sempre nelle ova centrifugate subito dopo la fecondazione, al contrario di quel che si verifica in periodi successivi.

E poichè in tutti e tre i casi si ha lo spostamento dei materiali non ci resterebbe che supporre che nel secondo caso il *tipo di segmentazione*, influisca decisamente sul destino dell'ovo forse per la sopravvenuta diversa polarità che si può ammettere specialmente in quei casi in cui si riscontra l'assenza di micromeri o la loro parziale formazione.

Ma il risultato dell'esperimento non suffraga neanche quest'ipotesi che dobbiamo scartare, poichè pure nelle ova centrifugate subito dopo la fecondazione – non deformate e con membrana di fecondazione integra – la zona ove si formano i micromeri non varia di posizione rispetto alla regione micropilare: la futura zona d'introflessione gastrulare è già prelocalizzata nell'ovo che è polarmente differenziato, nè la forza centrifuga ne altera la posizione. Ed anche questa constatazione rende più difficile l'interpretazione dei fatti osservati che culminano con la mancata normale gastrulazione che subiscono invariabilmente le ova centrifugate subito dopo la fecondazione.

Per porre in miglior luce il problema ho invocato quindi altre prove: ho centrifugato così le ova 2 minuti dopo la fecondazione, e ad intervalli successivi, cioè dopo 6, 12, 24 minuti, prima della comparsa del primo solco, dopo 48 minuti (durante lo stadio di due cellule), dopo 70 ed ho ottenuto sempre plutei normali, salvo eccezioni non frequenti, di plutei difettosi nello scheletro o asimmetrici nelle braccia.

È perciò indubitato che un fattore di tempo influisce grandemente sulle ova centrifugate e sul loro successivo sviluppo, e con buoni argomenti si può quindi sostenere che lo sviluppo difettoso e così particolarmente anomalo delle ova centrifugate subito dopo la fecondazione dipende: in primo

(1) Il comportamento del 1° solco di segmentazione, rispetto al piano di simmetria del futuro pluteo sembra essere variabile, secondo le ricerche di von Ubisch mediante la colorazione vitale dei blastomeri (« Zeit. f. Wiss. Zool. Bd. », 124, 1925).

luogo da un aumento del grado di anisotropia dell'ovo sopraggiunto per opera della distribuzione anomala di alcune sostanze organo-formative, non altrimenti identificate, la cui compagine viene ad essere disorientata sensibilmente in questo particolare periodo che corrisponde ad un aumento di viscosità del citoplasma dell'ovo, e cioè subito dopo la penetrazione dello spermio.

In secondo luogo l'ovo di *Arbacia*, sebbene non palesi la sua eterogeneità di costituzione, si deve ritenere sia altrettanto anisotropo di quello di *Strongylocentrotus* ed è perciò che, come tale, deve intendersi come parzialmente equipotenziale: una nuova ridistribuzione delle sostanze visibili che, come è dimostrato non rappresentano sostanze organo-formative, può tuttavia (in un particolare momento dell'ontogenesi, corrispondente ad una maggiore gelificazione del plasma) determinare lo spostamento della regolare orientazione polare e bilaterale delle particelle costituenti il substrato citoplasmatico. E questo spostamento, non seguito da fenomeni regolativi, può rappresentare una causa della produzione di così spiccate anormalità di sviluppo.

Biologia. — *La influenza delle irradiazioni parziali delle ossa sul sistema stromatico dell'apparato emo-linfo-poietico*. Nota di G. Santori, presentata dal Corrisp. A. Dionisi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Contribuzione allo studio della radioscopia nei vegetali*. Nota di E. Barsali, presentata dal Socio P. R. Pirotta.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. E. Paternò comunica la triste notizia della morte del Socio E. Artini e del Corrispondente C. Segrè ed annuncia che sarà cura della Presidenza provvedere perchè di ambedue sia fatta una speciale commemorazione.

Il Socio F. Millosevich dichiara che si propone di commemorare la figura del Socio E. Artini in una delle prossime sedute. Intanto esprime tutto il suo dolore per la scomparsa dell'insigne scienziato. Coglie l'occasione per commemorare brevemente il Socio P. de Groth, scomparso anch'egli recentemente, ricordando i suoi grandi meriti nel campo non solamente scientifico, ma anche in quello della storia della mineralogia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio E. Marchiafava presenta in omaggio due suoi studi, l'uno dal titolo « La perniciosità della Malaria » e l'altro dal titolo « Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua ».

Il Socio R. Nasini presenta in omaggio l'opuscolo del dott. A. Ostrogovich « Étude critique sur l'origine et le développement de la théorie atomique-moléculaire et de la notation chimique qui en est l'expression symbolique ».

Il Segretario Accademico prof. N. Parravano presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando specialmente l'opuscolo « Radio Communications » dell'illustre Socio G. Marconi; il vol. II del « Calcolo delle probabilità » del Socio G. Castelnuovo; i due grossi volumi dei Soci Dainelli e Marinelli relativi alla spedizione italiana De Filippi nell'Imalaia.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio G. Castelnuovo anche a nome del Socio G. Loria legge la relazione con la quale si propone la stampa della memoria del sig. L. Poletti « Le serie dei numeri primi appartenenti alle forme quadratiche $n^2 + n + 1$ e $n^2 + n - 1$.

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente sen. E. Paternò presenta un plico suggellato inviato dal prof. Ugo Panichi perchè venga conservato negli Archivi dell'Accademia.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio C. Somigliana annuncia che l'Università di Torino ha deliberato di ricordare con una lapide da inaugurarsi nel prossimo maggio l'insigne collega scomparso Corrado Segre e invita a nome della Facoltà di Scienze Matematiche l'Accademia dei Lincei a farsi rappresentare alla cerimonia.

Il Presidente sen. E. Paternò assicura che la Presidenza provvederà a che l'adesione dell'Accademia alla cerimonia in onore dell'insigne Uomo non manchi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° aprile 1928

CASTELNUOVO G. — Calcolo delle Probabilità. Vol. II. Bologna, 1928. 8°, pagine I-VIII, 1-243.

Collected Reprints of the Department of Physiology (University of Edinburgh). Series XVIII, 1926-27. Edimburgh, 1926-27. 8°, s. p.

DAINELLI G. e MARINELLI O. — Le condizioni fisiche attuali (Spedizione italiana De Filippi nell'Himàlaia, Caracorùm e Turchestàn Cinese [1913-14]. Ser. II. Vol. IV). Bologna, 1928. 4°, pp. I-XI, 1-473.

EDWARDS D. L. — Spectroscopic Parallaxes of B-type Stars (Fifth Paper): the Parallaxes of 125 Stars. (Reprint. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. LXXXVIII, pp. 175-181). s. l. 1928. 8°.

FANTOLI G. — I cigli delle portate naturali dell'Adda Alpina. (Estratto dagli «Annali dei Lavori Pubblici». Fasc. IX, anno 1927). Roma, 1927. 8°, pp. 1-6.

FANTOLI G. — L'inaugurazione del nuovo Politecnico di Milano alla Città degli studi. Milano, 1928. 8°, pp. 1-38.

FERMI C. — Come smalarizzare la Sardegna. (Estr. dal Giornale «l'Isola»). Sassari, 1927. 8°, pp. 1-24.

FERMI C. — Idrografia, anofelismo e malaricità dell'isola dell'Asinara (Sardegna). Sassari, 1924. 8°, pp. 1-54.

FERMI C. — La malaria in Sardegna, cause e rimedi. (Estr. da «Studi Sassaresi». Serie II. Vol. III). Sassari, 1925, 8°, pp. 1-31.

FOSSA MANCINI E., PARONA C. F., STEFANINI G. — Fossili del secondario e del terriario (Spedizione italiana De Filippi nell'Himàlaia, Caracorùm e Turchestàn Cinese (1913-1914). Serie II, vol. VI). Bologna, 1928. 4°, pp. I-III, 1-331.

HOLMES G. B. — A Bibliography of the Conodonts with Descriptions of Early Mississippian Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 72). Washington, 1928. 8°, pp. 1-38.

LEONARDI G. — Elenco delle specie di insetti dannosi e loro parassiti ricordati in Italia fino all'anno 1911. Parte I, II, III. Opera postuma pubblicata per cura del prof. F. Silvestri. Portici, 1922-1928. 8°, pp. 1-147, 1-592, 1-159.

MARCHIAFAVA E. — Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua. (Estratto dal «Policlinico», anno XXXV). Roma, 1928. 8°, pp. 1-14.

MARCHIAFAVA E. — La perniciosità nella malaria. Roma, 1928. 8°, pp. 1-66.

MARCONI G. — Radio Communication. (Reprint. from «Proceedings of the Institute of Radio Engineers». January, 1928). s. l. 1928. 8°, pp. 1-30.

MCATEE W. and L. MALLOCH J. R. — Synopsis of Pentatomid Bugs of the Subfamilies Megaridinae and Canopinae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 72). Washington, 1928. 8°, pp. 1-21.

OSTROGOVICH A. — Étude critique sur l'origine et le développement de la théorie atomique-moléculaire et de la notation chimique qui en est l'expression symbolique. Cluy, 1926-27. 8°, pp. 1-80.

SEE J. J. — Discovery that Aether Waves Are the Cause of Universal Gravitation (Repr. from «1927 Jear Book Society of Engineers»). s. l. 1927. fol.

VINASSA P. — Elettroni e simmetria. (Estr. dal «Nuovo Cimento». Anno IV, n. X). Bologna, 1927. 8°, pp. 1-20.

WHEELER W. M. — Auts Collected by Professor F. Silvestri in China. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario». Vol. XXII). Portici, 1928, 8°, pp. 1-38.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 aprile 1928 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sur la courbe de Viviani.* Nota[1] del Socio Straniero G. Cesàro.

1°. Lorsqu'on cherche à calculer l'aire circonscrite sur la sphère par une courbe se projetant sur un plan suivant une circonférence de cercle, on arrive à une intégrale qui, en général, n'est pas faisable.

2°. Mais, si le plan de projection étant par exemple la base d'un hémisphère, on suppose que la circonférence suivant laquelle la courbe sphérique se projette passe par le centre de la sphère, on arrive à une intégrale elliptique.

3°. Si l'on suppose, *en outre*, que le diamètre de la *circonférence projection* égale le rayon de la sphère, l'intégrale peut être effectuée; c'est le cas de la *fenêtre de Viviani.*

Or, l'intégrale elliptique du 2°, devant être prise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ représente le périmètre d'une ellipse dont la position est très simple par rapport au cercle projection. On parvient ainsi à une propriété plus générale que celle indiquée par le théorème de Viviani et dont ce dernier, par conséquent, n'est qu'un cas particulier.

4°. Mais on arrive à une généralisation plus remarquable de ce théorème lorsqu'on suppose que le cercle projection, de rayon quelconque, est

(1) Presentata nella seduta del 4 marzo 1928.

tangent à la base de l'hémisphère; dans ce cas l'intégrale est toujours faisable, et l'on arrive à un résultat dont la simplicité fait penser à la probabilité d'une démonstration plus directe; en voici l'énoncé:

Si l'on considère une courbe sphérique se projetant sur la base d'un hémisphère suivant une circonférence tangente à cette base, la surface que cette courbe intercepte sur la sphère est exprimée par le double produit du carré du rayon de la sphère par la différence entre la latitude du point culminant de la courbe sphérique et le sinus de cette latitude; de sorte que si 2 S et φ sont la surface et la latitude dont il s'agit, on a

$$S = R^2 (\varphi - \sin \varphi).$$

Le cas de la *fenêtre de Viviani* correspond à

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad S = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Ces résultats ont été obtenus en traitant d'abord le cas général énoncé dans le 1°, puis appliquant la formule obtenue aux cas indiqués dans le 2° et le 4°. Cependant je montre qu'en appliquant directement la méthode à la *fenêtre de Viviani* on arrive au résultat pour ainsi dire sans aucun calcul, et cela parceque j'ai observé que la courbe de Viviani est une des courbes les plus simples que l'on puisse tracer sur la surface de la sphère, comme l'indique l'énoncé suivant:

La courbe de Viviani est le lieu des points de la sphère pour lesquels la longitude égale la latitude.

Cas général. *Aire de la courbe sphérique se projetant suivant une circonférence de cercle.* – La figure 1 est une projection horizontale sur la base de l'hémisphère prise pour équateur; nous prenons pour axe des x le diamètre de cette base passant par le centre C du *cercle projection*, l'axe des z se projetant en O, et déterminons un point de la sphère par sa longitude λ, à partir du plan zx, et sa latitude φ ou sa collatitude μ.

Sur la figure chaque minuscule représente la projection d'un point de la sphère désigné par la majuscule correspondante. Les points A, B de la courbe sphérique situés dans zx sont donnés par leurs collatitudes α et β, de sorte que

$$Oa = R \sin \alpha \quad \text{et} \quad Ob = R \sin \beta.$$

Un plan méridien quelconque OD, de longitude λ, détermine dans la courbe sphérique deux points

$$M_1 \left(\lambda, \mu_1 \right) \quad \text{et} \quad M_2 \left(\lambda, \mu_2 \right),$$

se projetant respectivement en m_1 et m_2, de sorte que $Om_1 = R \sin \mu_1$ et $Om_2 = R \sin \mu_2$. L'élément de surface dS de la courbe sphérique, élément qui se projette suivant la surface hachurée, est le segment, d'angle $d\lambda$, d'une zone ayant pour hauteur la différence des z des points M_1 et M_2, c'est à dire $R(\cos \mu_1 - \cos \mu_2)$, de sorte que

$$dS = R^2 (\cos \mu_1 - \cos \mu_2) d\lambda;$$

en désignant par Λ la longitude du méridien extrême tangent à la courbe sphérique et par $2S$ l'aire circonscrite sur la sphère par cette courbe, on a donc

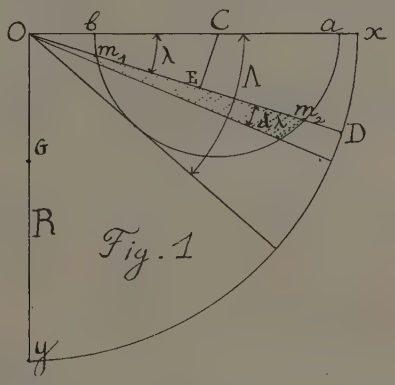


Fig. 1.

$$S = R^2 \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} (\cos \mu_1 - \cos \mu_2) d\lambda;$$

il reste à calculer

$$X = \cos \mu_1 - \cos \mu_2$$

en fonction de α, β et λ. On a dans la projection

$$Om_1 \cdot Om_2 = Oa \cdot Ob, \quad \text{ou} \quad \sin \mu_1 \sin \mu_2 = \sin \alpha \sin \beta,$$

$$OE = OC \cos \lambda, \quad \text{ou} \quad \sin \mu_1 + \sin \mu_2 = (\sin \alpha + \sin \beta) \cos \lambda.$$

En posant, pour abréger,

$$\sin \alpha + \sin \beta = s \quad , \quad \sin \alpha \sin \beta = p,$$

il reste à déduire X de l'ensemble

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin\mu_1 + \sin\mu_2 = s\cos\lambda \\ \sin\mu_1 \sin\mu_2 = p. \end{cases}$$

On a

$$X^2 + s^2\cos^2\lambda = (\cos\mu_1 - \cos\mu_2)^2 + (\sin\mu_1 + \sin\mu_2)^2 =$$

$$= 2 + 2p - 2\cos\mu_1\cos\mu_2;$$

d'autre part

$$\cos^2\mu_1\cos^2\mu_2 = (1 - \sin^2\mu_1)(1 - \sin^2\mu_2) =$$

$$= 1 + p^2 - (s^2\cos^2\lambda - 2p) = (1+p)^2 - s^2\cos^2\lambda;$$

donc

$$X^2 = 2(1+p) - s^2\cos^2\lambda - 2\sqrt{(1+p)^2 - s^2\cos^2\lambda}$$

et

$$(2)\qquad S = R^2\int_0^{\Lambda}\sqrt{2(1+p) - s^2\cos^2\lambda - 2\sqrt{(1+p)^2 - s^2\cos^2\lambda}}\cdot d\lambda.$$

Quant à Λ on le calcule en faisant, dans les formules (1), $\mu_2 = \mu_1$; on obtient

$$\cos\Lambda = \frac{2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{2\sqrt{p}}{s}.$$

Cas où la circonférence projection passe par le centre de la sphère. - Dans ce cas le point b (fig. 1) vient en O et l'on a

$$\beta = 0 \quad , \quad s = \sin\alpha \quad , \quad p = 0 \quad , \quad \cos\Lambda = 0 \quad , \quad \Lambda = \frac{\pi}{2};$$

le radical de la formule (2) devient

$$\sqrt{2 - \sin^2\alpha\cos^2\lambda - 2\sqrt{1 - \sin^2\alpha\cos^2\lambda}} = 1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha\cos^2\lambda}$$

et, par conséquent,

$$S = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha\cos^2\lambda})\,d\lambda = \frac{\pi R^2}{2} - R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \sin^2\alpha\cos^2\lambda}\,d\lambda.$$

Comme $\frac{\pi R^2}{2}$ est la surface du triangle trirectangle, si l'on désigne par σ ce qui reste de cette surface après enlèvement de S, on a

$$(3)\qquad \frac{\sigma}{R} = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \sin^2\alpha\cos^2\lambda}\,d\lambda.$$

Cette formule a une signification géométrique remarquable : le second membre représente le quart du périmètre d'une ellipse ayant pour demi-grand axe et excentricité, respectivement,

$$a = R \quad , \quad \frac{c}{a} = \sin\alpha ; \quad \text{d'où} \quad c = R\sin\alpha \quad \text{et} \quad b = R\cos\alpha ;$$

si donc dans la figure 1 on suppose d'abord le point b en O, le point a sera un foyer de cette ellipse, le point x une estrémité de son grand axe et O son centre; en prenant $OG = R\cos\alpha$ et tracant l'arc elliptique Gx, qui n'est pas dessiné, le second membre de (3) représentera la longueur de cet arc Gx; il s'ensuit que *l'aire* σ *équivaut à celle d'un rectangle ayant comme dimensions* R *et l'arc elliptique* Gx. Si à présent, pour considérer le cas de la fenêtre de Viviani, on suppose que le point a marche vers x, le point G marchera vers O et l'arc elliptique Gx, qui s'aplatit de plus en plus, deviendra $Ox = R$, d'où $\sigma = R^2$ (1).

Cas où la circonférence projection est tangente à la base de l'hémisphère. - Dans ce cas le point a vient en x (fig. 1) et l'on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad , \quad s = 1 + \sin\beta \quad , \quad p = \sin\beta \quad , \quad 1 + p = s,$$

$$\cos\Lambda = \frac{2\sqrt{\sin\beta}}{1 + \sin\beta} \quad , \quad \sin\Lambda = \frac{2 - s}{s} .$$

La formule (2) devient ici

$$S = R^2 \int_0^{\Lambda} \sqrt{s^2 \cdot \sin^2\lambda - 2s \cdot \sin\lambda + s(2 - s)} \cdot d\lambda .$$

En posant

$$\sin\lambda = x,$$

la quantité à intégrer devient

$$\sqrt{s}\sqrt{\frac{2 - s - sx}{1 + x}} \cdot dx = \sqrt{s} \cdot \frac{2 - s - sx}{\sqrt{-sx^2 - 2(s-1)x + 2 - s}}\, dx ;$$

d'où

$$S = R^2 \left\{ \sqrt{s}\sqrt{-sx^2 - 2(s-1)x + 2 - s} + \int \frac{dx\sqrt{s}}{\sqrt{-sx^2 - 2(s-1)x + 2 - s}} \right\}_{x=0}^{x=\frac{2-s}{s}}$$

(1) D'ailleurs la formule (3) confirme ce résultat lorsqu'on y fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

La position de l'ellipse est encore plus nette en la tracant dans le plan $x\zeta$, car on obtient un foyer et une extrémité du petit axe en projetant A sur les axes x et ζ.

ou

$$S = R^2 \left\{ \arcsin(sx + s - 1) + \sqrt{s}\sqrt{-sx^2 - 2(s-1)x + 2 - s} \right\}_0^{\frac{2-s}{s}}$$

$$= R^2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin(s-1) - \sqrt{s(2-s)} \right\} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \cos\beta \right).$$

Si l'on désigne par φ_1 la latitude du point B, cette formule devient

$$S = R^2 (\varphi_1 - \sin\varphi_1).$$

Dans la fenêtre de Viviani,

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad S = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Si (fig. 2) on trace l'arc de grand cercle By, l'aire comprise sur la sphère entre les arcs de grand cercle Ay et By étant $\varphi_1 R^2$, il s'ensuit que

$$\sigma = \text{aire ADBy} = R^2 \sin\varphi_1$$

et $\sigma = R^2$ dans le cas de la fenêtre de Viviani.

Calcul direct de S, *ou de* σ, *dans le cas de la fenêtre de Viviani.* - Soit M (fig. 2) un point quelconque de la courbe de Viviani, point qui se

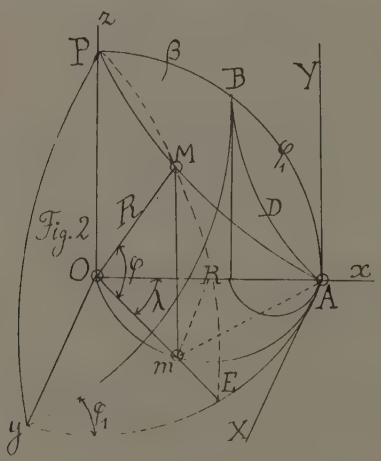


Fig. 2.

projette en *m*; si l'on joint *m* A on voit que les triangles rectangles OM*m* et OA*m* sont égaux comme ayant le côté O*m* commun et les hypoténuses R égales; donc

$$\varphi = \lambda;$$

telle est en coordonnées sphériques l'équation très simple de la courbe de Viviani [1]. L'élément de surface $d\sigma$ sera donc donné par

$$d\sigma = R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\lambda = R^2 \sin\lambda\, d\lambda\, d\varphi;$$

d'où

$$\sigma = R^2 (\cos\lambda)_{\frac{\pi}{2}}^{0} = R^2.$$

Longueur de la courbe de Viviani.

La courbe qui limite la fenêtre de Viviani n'est pas rectifiable, mais son périmetre est le même que celui d'une ellipse occupant une position remarquable sur le cylindre qui supporte la courbe, comme l'indique l'énoncé suivant :

Si par la corde qui joint le point le plus haut au point le plus bas de la courbe de Viviani on mène un plan perpendiculaire au plan de symétrie de la courbe, ce plan coupe le cylindre qui supporte la courbe suivant une ellipse dont le périmètre est le même que celui de la courbe de Viviani.

Voici plusieurs démonstrations de cette propriété: Les axes étant ceux de la figure 2, on a pour les coordonnées d'un point M (φ, λ) d'une courbe sphérique quelconque

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda \quad , \quad y = R\cos\varphi\sin\lambda \quad , \quad z = R\sin\varphi,$$

et, pour la différentielle de l'arc,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = R\sqrt{d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2};$$

pour la courbe de Viviani $(\varphi = \lambda)$, en désignant par s sa longueur *totale*, on a

$$(4) \qquad s = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2\lambda}\cdot d\lambda = 2R\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\lambda}\cdot d\lambda.$$

Or, la dernière expression représente le périmètre d'une ellipse pour la quelle

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}; \quad \text{d'où} \quad b = \frac{R}{2},$$

et cette ellipse est précisément l'ellipse dont parle l'énoncé.

Lorsqu'on développe le cylindre qui supporte la courbe de Viviani, en l'ouvrant suivant la génératrice AY (fig. 2) dans le plan tangent YAX, *la courbe a pour transformée une sinusoïde.* En effet, en désignant par (X, Y)

(1) Sur la sphère l'origine des coordonnées est en A.

les coordonnées du point de la transformée correspondant au point M, l'origine étant en A, on a

$$X = \text{arc} \cdot Am = \frac{R}{2} \cdot 2\lambda = R\lambda$$

$$Y = Mm = R \sin \lambda,$$

d'où

$$Y = R \sin \frac{X}{R};$$

la longueur $\sum$ de l'arc de cette sinusoïde, entre $\lambda = 0$ et $\lambda = \frac{\pi}{2}$, donnera la *demi-longueur* de la courbe de Viviani. Or,

$$d\sum = \sqrt{dX^2 + dY^2} = R\sqrt{1 + \cos^2 \lambda} \cdot d\lambda$$

et

$$\sum = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \lambda} \cdot d\lambda,$$

conformément à ce qui a été trouvé en (4).

Mais voici une curieuse propriété par laquelle le théorème se démontre géométriquement, sans aucun calcul: Si l'on développe le cylindre qui sup-

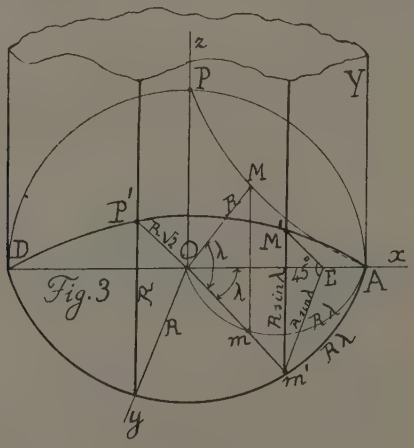


Fig. 3.

porte la courbe de Viviani en l'ouvrant (fig. 3) suivant la génératrice AY et en l'appliquant *sur la surface cylindrique ayant pour base la base de l'hémisphère*, pour avoir la position qu'occupe un point M dans la transformée,

il suffit de prolonger Om jusqu'en m' et de porter sur la génératrice du cylindre

$$m'M' = mM = R \sin \lambda ;$$

or, il est facile de voir que la transformée AM' P' D ainsi obtenue est une ellipse. En effet, si de m' on mène $m'E$ perpendiculaire à Ox et que l'on joigne M'E, on a $m'E = R \sin \lambda$ et par conséquent le triangle rectangle $M'm'E$ est isoscèle et l'angle E est de 45°; donc, si de tous les points de la transformée on mène des perpendiculaires à Ox, ces droites, toutes inclinées à 45° sur le plan xy, seront parallèles et leur ensemble constituera un plan passant par l'axe x et incliné à 45° sur la base de l'hémisphère; ce plan coupe donc le cylindre construit sur cette base suivant une ellipse ayant pour demi-axes $OP' = R\sqrt{2}$ et $OA = R$. Ainsi, la courbe de Viviani *entière* est venue s'appliquer sur une *demi-ellipse* ayant pour demi-axes

$$a = R\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = R,$$

ou, ce qui revient au même, peut s'appliquer sur le périmetre total d'une ellipse semblable à la précédente et ayant pour demi-axes $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{R}{2}$.

Projection stéréographique de la courbe de Viviani sur la base de l'hémisphère.

Voici encore une propriété remarquable: *La projection stéréographique de la courbe de Viviani sur la base de l'hémisphère est une strophoïde.* On peut passer rapidement de l'équation

$$F(\mu, \lambda) = 0 \tag{5}$$

d'une courbe sphérique à l'équation polaire

$$r = f(\lambda) \tag{6}$$

de sa projection stéréographique sur l'équateur, en observant que λ a la même signification dans les deux équations et que

$$r = R \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} ;$$

il suffit donc de remplacer, dans (5), $\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}$ par $\frac{r}{R}$, sans toucher à λ,

pour obtenir l'équation (6)[1]. En appliquant cette méthode à la courbe de Viviani

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

on obtient

$$\frac{r}{R} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\lambda}{2} - \sin\frac{\lambda}{2}}{\cos\frac{\lambda}{2} + \sin\frac{\lambda}{2}} = \frac{1 - \sin\lambda}{\cos\lambda},$$

$$r = R\,(\sec\lambda - \operatorname{tg}\lambda).$$

Or c'est là l'équation polaire de la strophoïde construite avec le centre de l'équateur et la tangente menée à ce dernier à l'extrémité du diamètre du *cercle projection*.

Mais cette propriété peut se démontrer géométriquement, sans s'occuper de la courbe sphérique, en passant directement de la projection orthogonale à la projection stéréographique. Considérons un point quelconque M de la

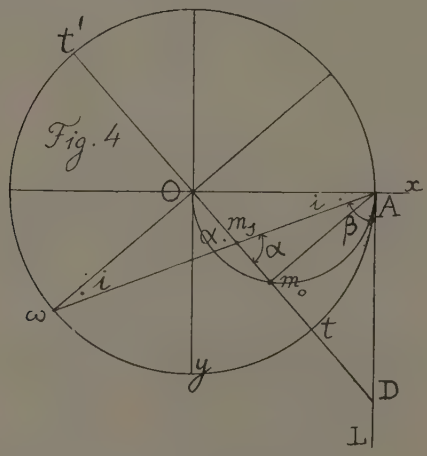


Fig. 4.

courbe de Viviani se projetant orthogonalement en m_0 (fig. 4); pour avoir la projection stéréographique de M il suffit de rabattre sur l'équateur la

(1) On peut alors transformer l'équation, s'il y a lieu, en équation cartésienne par les formules

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{y}{x}.$$

circonférence méridienne passant par M autour de sa trace tt' et joindre le rabattement du point à l'oeil rabattu en ω, droite qui coupera tt' au point cherché. Mais, dans le cas de la courbe de Viviani, *tous les points* M *de la courbe viennent se rabattre en* A; donc la projection stéréographique m_s s'obtient en joignant ω variable au point fixe A. Or, si l'on prolonge Om_o jusqu'à sa rencontre en D avec la tangente menée en A au cercle d'horizon, les deux angles i du triangle isoscèle ωOA sont complémentaires l'un de l'angle α, l'autre de l'angle β; donc

$$\alpha = \beta \quad \text{et, partant,} \quad Dm_s = DA;$$

le lieu des points m_s peut donc être défini comme il suit: « D'un point fixe O on mène une sécante variable coupant la droite fixe AL en un point D et l'on prend $Dm_s = DA$ ». C'est la définition de la strophoïde.

On peut observer que si l'on appelle *strophoïde sphérique* une courbe analogue à la strophoïde plane, dans la construction de la quelle la droite serait remplacée par une circonférence de grand cercle, on peut dire que *la courbe de Viviani est une strophoïde sphérique* construite avec le point P et la circonférence Ay (fig. 2); en effet, en menant de P une circonférence de grand cercle variable qui coupe Ay en E, pour avoir un point de la strophoïde il faut porter sur l'arc EP, à partir de E, un arc égal à EA; on tombe ainsi sur un point M de la courbe de Viviani $\varphi = \lambda$.

NOTE

Sur la correspondance entre l'équation sphérique d'une courbe et celle de sa projection orthogonale, stéréographique ou gnomonique. – Dans l'équation sphérique d'une courbe

$$F(\lambda, \mu) = 0 \tag{5}$$

et dans les équations polaires de ses projections, l'argument λ a la même signification: c'est la longitude du point comptée à partir du plan zx; si μ est la collatitude du point et r_o, r_s, r_g les rayons vecteurs des projections, on a

$$r_o = R \sin \mu \quad , \quad r_s = R \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \quad , \quad r_g = R \operatorname{tg} \mu. \tag{7}$$

Ces formules très simples permettent *a*) de passer de l'équation sphérique de la courbe à celle d'une de ses projections, et inversement; *b*) de passer d'une projection à l'autre.

Pour *a*) il suffit de remplacer dans l'équation (5) μ par les valeurs

$$\sin \mu = \frac{r_o}{R} \quad , \quad \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{r_s}{R}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{r_g}{R},$$

ou bien, inversement, de remplacer, dans l'équation de la projection, r_o, r_s, r_g par une des valeurs (7).

Pour *b*) il suffit d'éliminer μ entre les deux équations (7) qui concernent les projections dont il s'agit. Si, par exemple, on veut traiter par le calcul le problème que nous avons résolu géométriquement dans le dernier paragraphe, pour passer de la projection orthogonale à la projection stéréographique, il faut éliminer μ entre les deux premières équations (7),

$$\sin\mu = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\mu}{2}}\quad,\qquad r_0 = \frac{2R^2 r_s}{R^2+r_s^2},$$

et remplacer r_0 par cette valeur dans l'équation de la projection orthogonale de la courbe de Viviani, qui est

$$r_0 = R\cos\lambda; \tag{8}$$

on obtient

$$\cos\lambda = \frac{2Rr_s}{R^2+r_s^2}\quad,\qquad r_s^2 - 2R\,\mathrm{séc}\,\lambda\cdot r_s + R^2 = 0,$$

$$r_s = R(\mathrm{séc}\,\lambda - \mathrm{tg}\,\lambda).$$

La projection gnomonique de la courbe de Viviani a une équation simple, mais ne correspond pas à une courbe connue: en éliminant μ entre les valeurs (7) de r_0 et r_g, on obtient

$$r_0 = \frac{Rr_g}{\sqrt{R^2+r_g^2}},$$

valeur qui, remplacée dans (8), donne

$$r_g = R\cot\lambda,\qquad \text{ou}\qquad x = \frac{y^2}{\sqrt{R^2-y^2}}.$$

Entre les rayons vecteurs des trois projections d'un point de la sphère il existe une relation simple que l'on peut obtenir en éliminant R et μ entre les trois équations (7); cette élimination s'effectue immédiatement en partant de l'identité

$$\frac{1}{\sin\mu} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\mu} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{\mu}{2}},$$

qui donne

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_g} = \frac{1}{r_s}.$$

Ainsi, *l'inverse du rayon vecteur de la projection stéréographique d'un point de la sphère égale la somme des inverses des rayons vecteurs des projections orthogonale et gnomonique du même point.*

Il est d'ailleurs facile de vérifier cette relation géométriquement.

Meccanica. — *Sulla rigidezza a torsione delle ali degli aeroplani.* Nota[1] del Corrisp. G. A. Crocco.

Il problema della rigidezza a torsione delle ali degli aeroplani ha assunto speciale importanza con l'uso di ali *spesse a sbalzo* nelle quali è necessario assicurare la limitazione delle deformazioni angolari e quindi dell'incidenza verso le estremità.

Si sono pertanto iniziati studi ed esperienze intese, da una parte, alla determinazione delle relazioni intercedenti tra il cammino del centro di pressione e la elasticità della struttura alare; dall'altra, intese a indagare le condizioni capaci di fornire col minor peso la struttura più rigida.

In quest'ultimo ordine di indagini sono notevoli gli studi di Karman, sviluppati recentemente in Italia dal dott. Gabrielli che li ha applicati a casi particolari[2].

Il problema è rimasto tuttavia chiuso nel volucro matematico dal quale crediamo necessario di liberarlo per derivarne alcune conclusioni interessanti.

*
* *

Secondo la terminologia in uso nella scienza delle costruzioni si denomina *rigidezza a torsione*, B, di una trave il rapporto tra il momento torcente M_t agente in una determinata sezione della trave e la variazione dell'angolo di torsione ϑ che questo momento induce per unità di lunghezza x dell'asse. Cosicchè si ha

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M_t}{B}. \tag{1}$$

Analogamente denominasi *rigidezza a flessione*, A, il rapporto tra il momento flettente M_f e la curvatura, $\frac{1}{\rho}$, dell'asse della trave nella sezione considerata. Si pone cioè

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{A}. \tag{2}$$

Le due rigidezze sono quindi variabili da punto a punto: ma noi ci riferiremo come fa il Gabrielli a travi di sezione costante e quindi di rigidezza costante. S'intende che questa restrizione semplificativa non farà perdere nulla alla generalità delle nostre conclusioni.

(1) Presentata nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) Gabrielli, *Rigidezza di un'ala a sbalzo*, « Aerotecnica », gennaio 1928.

Supponiamo ora un'ala d'aeroplano a sbalzo di lunghezza libera l la cui struttura resistente sia formata da *due longaroni* di rigidezze A_1, B_1 e A_2, B_2, posti a distanza b tra di loro e connessi con n centine eguali ed equidistanti di rigidezza A_c, B_c.

Esaminiamo il caso di *torsione pura* cioè di una distribuzione di carichi sui due longaroni eguale ed in senso contrario.

In questo caso l'equazione generale del Karman che considera l'angolo di torsione ϑ dell'intera struttura così definita derivante dalle mutue azioni tra centine e longaroni assume l'espressione semplificata:

$$\vartheta''' - K^2 \lambda^2 \vartheta' = \frac{M_t}{b^2 A} \tag{3}$$

dove ϑ' e ϑ''' sono le derivate rispetto all'asse x dell'angolo di torsione, M_t è il momento torcente lungo l'ala e i coefficienti si desumono dalle seguenti relazioni simboliche:

$$\begin{cases} K^2 \lambda^2 = \dfrac{B}{b^2 A} \\ B = B_1 + B_2 + \dfrac{nbB_c}{l} \\ \dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2}. \end{cases} \tag{4}$$

La rigidezza a flessione A_c delle centine è supposta infinita.

La integrazione di questa equazione è fatta dal citato autore in due casi particolari, relativi a due ipotesi sull'andamento del momento torcente: una di momento torcente crescente linearmente dalla estremità all'incastro dei longaroni nella fusoliera, cioè di carichi uniformemente distribuiti; l'altra di momento torcente costante, cioè di carichi concentrati alla estremità.

In entrambi i casi si è potuto determinare l'angolo ϑ_0 assunto dalla estremità dell'ala, e quindi definire la rigidezza alla torsione della struttura alare, B_a, secondo la (1), riferita al momento torcente medio, che qui diviene:

$$\vartheta_0 = \frac{M_m l}{B_a}.$$

La rigidezza complessiva B_a è risultata legata alle rigidezze parziali dei longaroni e delle centine da una espressione della forma

$$B_a = mB$$

dove B è la quantità definita nelle (4) e che equivale alla *somma delle rigidezze a torsione dei longaroni e delle centine* ed m è una complessa funzione

iperbolica della variabile $K\lambda l$, dove $K\lambda$ ha il valore sopra definito, e che noi chiameremo *potere moltiplicatore* della connessione longaroni-centine.

Questo potere moltiplicatore, di cui nel citato studio sono riportate le espressioni analitiche e le curve grafiche, risulta infatti maggiore dell'unità, e tende ad *uno* per $K\lambda l$ grandissimo; mentre col diminuire di $K\lambda l$ va crescendo indefinitamente: sì da offrire l'illusione che si possa aumentare a piacere la rigidezza di un'ala, a parità della somma B delle rigidezze a torsione dei suoi elementi.

*
* *

Se noi sostituiamo al simbolo $K\lambda l$ la sua espressione data della (4)

$$K\lambda l = \frac{l}{b}\sqrt{\frac{B}{A}} \tag{5}$$

vediamo invece che esso è funzione di due rapporti: quello tra lo sbalzo l e la distanza b; e quello tra la somma delle rigidezze a torsione B e la grandezza A.

A parità di quest'ultimo rapporto, si vede dunque che il potere moltiplicatore, che varia in senso inverso di $K\lambda l$, cresce quando si diminuisce il rapporto di sbalzo, cioè per ali corte, mentre tende all'unità quando cresce detto rapporto cioè per grandi sbalzi.

È necessario pertanto distinguere nettamente il caso dei piccoli sbalzi da quello dei grandi sbalzi che qua interessa. Considereremo come grande sbalzo quello per il quale il rapporto tra l e b sia all'incirca eguale a *cinque*.

Per precisare ora il rapporto tra A e B: cerchiamo, in ciascun longarone, il rapporto tra A_1 e B_1.

La quantità A_1 è ben determinata, risultando sempre eguale ad EI, ove E è il modulo di elasticità ed I il momento d'inerzia della sezione nel piano di sollecitazione.

È assai indeterminata invece la espressione di B_1. Nel solo caso di prismi a sezione circolare può assumersi secondo la classica formula di Coulomb che sia eguale a GJ cioè al prodotto del modulo di scorrimento G per il momento polare J della sezione.

In tal caso si ha $B_1 = 0.76\ A_1$ essendo $G = 0.385\ E$.

In ogni altro caso come ha dimostrato Saint-Venant per i prismi a sezione continua, la rigidezza è una complessa espressione della forma della sezione; e, a parità di area, è *inversamente* proporzionale al suo momento d'inerzia. Non esiste quindi una relazione generale tra B_1 ed A_1. Per la sezione quadrata che è la più corretta si può assumere $B_1 = 0.64\ A_1$.

Per le travi reticolari poi la rigidezza è funzione non solo della sezione ma anche della geometria del traliccio. Per travi di minimo peso [1] si può ritenere la rigidezza a torsione indipendente da quella a flessione, l'una interessando principalmente il traliccio e l'altra i correnti.

Anche in questo caso la forma più corretta è la quadrata.

In ogni caso poi – per forme simili e corrette – le due rigidezze possono ciascuna esprimersi mediante il triplo prodotto, $E\Omega b^2$, del modulo di elasticità, pel volume di materia per unità di lunghezza e pel quadrato delle dimensioni.

Poichè E, a parità di sollecitazione unitaria, può ritenersi per tutti i materiali di alta resistenza, proporzionale al peso specifico, ne risulta che *a parità dimensioni la rigidezza è proporzionale al peso*: mentre a *parità di peso è proporzionale al quadrato delle dimensioni*. Ciò ripetiamo per forme *corrette*, come le tubolari o le quadrate.

*
* *

Passiamo ora ad esaminare i casi pratici e cioè: I: longaroni e centine rigide a solo flessione; II: longaroni rigidi a torsione e flessione; centine a sola flessione; III: longaroni e centine rigide a torsione e flessione.

Il primo di questi casi non è discusso nel citato studio. Ricavandolo direttamente dalla equazione di Karman, che viene a perdere il secondo termine, si ottiene per il caso di M_t crescente linearmente:

$$\vartheta_0 = \frac{M_m l^3}{4 A b^2}$$

dove M_m è il *momento torcente medio*, al quale come abbiamo detto si suole riferire la rigidezza dell'ala. In questo caso particolare si ha dunque

$$B'_a = 4A \frac{b^2}{l^2}$$

cioè una rigidezza che può essere notevole per piccoli sbalzi ma diviene trascurabile per grandi sbalzi.

Ne segue la prima conclusione:

Per la rigidezza a torsione delle ali a grande sbalzo è necessario che i longaroni abbiano una rigidezza propria alla torsione. In questo caso è altresì necessaria la connessione con centine rigide a flessione.

Scartato così il caso I, osserviamo subito dalle espressioni (4) che per un dato rapporto di sbalzo l/b, la variabile $K\lambda l$ e quindi il potere molti-

(1) Vedi Crocco, *Sul peso delle strutture aeronautiche*, questi « Rend. », fasc. 4°, 1928.

plicatore m, è identica nei casi II e III purchè siano identiche le grandezze A e B.

Ora poichè i due casi differiscono solo per la rigidezza a torsione delle centine, si può supporre che passando da II a III si sia lasciata inalterata la rigidezza a flessione dei longaroni, e quindi A, e si sia ottenuta la rigidezza a torsione delle centine *a parità di peso* col caso II. Allora sarà pari anche la grandezza B, come si deduce dalle (4), nella ipotesi che le rigidezze a torsione dei vari elementi siano proporzionali al loro peso.

Se ne conclude:

Si ottiene la stessa rigidezza a torsione di un'ala a sbalzo a due longaroni di data rigidezza a flessione, qualsiasi la rigidezza a torsione delle centine, quando questa sia ottenuta a parità di peso, e quindi a parità di somma delle rigidezze a torsione dei longaroni e delle centine.

Si può in tal modo eliminare il caso III e ridursi al caso II con centine rigide a sola flessione che è il caso più frequente nella comune tecnica aviatoria.

*
* *

Precisiamo allora la variabile $K\lambda l$ per i grandi sbalzi. Nel caso del circolo si ha $B_1 = 0.76\ A_1$ per cui supponendo i due longaroni eguali, ne risulterà dalle (4) $B = 3.04\ A$ e quindi $K\lambda l = 1.74\ \frac{l}{b}$.

Per il rapporto di sbalzo *cinque* si avrà $K\lambda l = 8.7$ cui corrisponde il potere moltiplicatore $m = 1.28$ per carico uniforme e $m = 1.13$ per carico terminale.

D'altra parte per tali sbalzi alla complessa formula dello studio citato si può sostituire quella approssimata, per carico uniforme:

$$B_a = mB = \frac{B}{1 - 2\frac{b}{l}\sqrt{\frac{A}{B}}}$$

che se ne ottiene ponendo tangh = 1 e cosh assai grande, e che chiarisce il modo di variare della resistenza dell'ala col variare di A o di B o di entrambe. Sotto questa forma svanisce il concetto di potere moltiplicatore giacchè, a parità di A e di rapporto di sbalzo, la rigidezza cresce col crescere di B e si avvicina sempre più al limite pel quale essa eguaglia B cioè la somma delle rigidezze dei suoi elementi. In altri termini col crescere di B diminuisce sempre più il contributo della rigidezza a flessione dei longaroni.

D'altra parte l'espressione suddetta va considerata come *teorica*, giacchè basata sull'ipotesi di rigidezza infinita delle centine e di incastro perfetto

sui longaroni. In pratica la rigidezza è finita e l'incastro è imperfetto, il che conduce ad un coefficiente di riduzione che annulla o di molto riduce il potere moltiplicatore e consente di concludere che:

Per i grandi sbalzi la rigidezza a torsione di un'ala a due longaroni connessi con centine rigide a flessione è praticamente eguale alla somma delle rigidezze a torsione dei suoi longaroni.

*
* *

Abbiamo sperimentalmente verificata questa conclusione provando a torsione terminale una struttura formata da tubi d'acciaio raffiguranti due longaroni connessi con centine laminari saldate ai tubi: ed un'altra formata da tubi d'acciaio più sottili ma connessi con tubi saldati di eguali dimensioni. In entrambi i casi il rapporto di sbalzo era *cinque* ed erano identiche le dimensioni dei tubi ed il loro totale volume. I risultati sono stati confrontati con quelli di un tubo unico di pari volume e sbalzo.

La rigidezza della struttura rispetto a quella del tubo unico è risultata 0.94 nel primo caso e 0.89 nel secondo: mentre teoricamente avrebbe dovuto essere di 1.13.

Ci riserbiamo di approfondire la questione.

*
* *

Intanto da quanto precede si può concludere, generalizzando le svolte considerazioni, che con longaroni rigide a sola flessione o non connessi con centine si può avere sufficiente rigidezza a torsione sino ad un rapporto di sbalzo non di molto superiore ad *uno*; ma che quando tal rapporto supera *due* è necessaria una rigidezza a torsione propria dei longaroni, connessi solidamente con centine rigide a flessione. In questo caso, sino al rapporto di sbalzo *quattro*, la rigidezza dell'ala risulta *superiore* alla somma delle rigidezze a torsione dei due longaroni.

Quando invece il rapporto di sbalzo sale a *cinque* ed oltre, svanisce in pratica il potere moltiplicatore e la rigidezza a torsione eguaglia a un dipresso quella della somma delle rigidezze dei due longaroni.

In quest'ultimo caso la rigidezza alare non dipende quindi più dal numero dei longaroni nè dalla loro distanza; cosicchè se si sostituisce in un'ala ai due longaroni un sol longarone centrale di pari peso e quindi, a parità di dimensioni, di rigidezza somma di quelle dei due longaroni, l'ala risulterà egualmente rigida a torsione.

Ove infine l'ala sia *spessa* ed il longarone centrale abbia perciò dimensioni maggiori dei due laterali, *l'ala ad un sol longarone risulterà più rigida* a parità di peso di quella a due longaroni.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Riduzione della deformazione proiettiva di una superficie* R *alla trasformazione* C_m *delle superficie isoterme.* Nota di R. Calapso, presentata [1] dal Corrisp. G. Fubini.

È nota una facile osservazione con cui la determinazione delle superficie R si riduce alla ricerca delle superficie isoterme di uno spazio a quattro dimensioni ed è noto che le trasformazioni di Jonas delle superficie R si traducono in trasformazioni di Bianchi-Darboux delle superficie isoterme [2].

Nondimeno esistono altre trasformazioni delle superficie R di cui non sono finora conosciute le relazioni colle trasformazioni delle superficie isoterme; lo scopo del presente lavoro è di dimostrare che *la deformazione proiettiva di una superficie* R *si riduce alla trasformazione* C_m, data la prima volta da mio Padre nel 1903 [3] e da lui ripresa nel 1915 [4].

Ho ottenuto lo scopo sudetto utilizzando gl'*invarianti* delle superficie R rispetto al gruppo proiettivo ed ho caratterizzato due di essi mediante un sistema alle derivate parziali [il sistema (27) del presente lavoro], in analogia all'equazione di 4° ordine di Calapso e Rothe relativa alle superficie isoterme dello spazio a tre dimensioni [5].

Per il modo con cui le superficie isoterme si collegano con le R, *gl'invarianti di queste, rispetto al gruppo proiettivo, sono anche invarianti delle isoterme rispetto al gruppo conforme*; su ciò ho basato la ricerca, andando a fondo nel confronto tra gl'invarianti delle isoterme, ottenuti per questa via, e gl'invarianti di mio padre; da tale confronto ho dedotto il teorema sopra enunciato.

(1) Nella seduta del 15 aprile 1928.

(2) Vedasi Tzitzéica, *Géométrie différentielle proeictive des réseaux*, Bucarest, 1924, p. 272.

(3) P. Calapso, *Sulle superficie a linea di curvatura isoterme*, « Rendiconti del circolo matematico di Palermo, tomo XVII, p. 285, n. 7.

(4) P. Calapso, *Sulle trasformazioni delle superficie isoterme*, « Annali di matematica », tomo XXIV, serie III, § 3, p. 11 e sgg.

(5) Vedasi Tzitzéica, opera citata, p. 228, n. 216 e p. 234.

§ 1. - Gl'invarianti delle superficie rispetto al gruppo proiettivo secondo il metodo di Fubini, e le deformazioni proiettive.

1. Siano x, y, z le coordinate di un punto che descrive una superficie R, riferita alle asintotiche, e perciò soluzioni di un sistema della forma

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial x}{\partial u} + b\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p\dfrac{\partial x}{\partial u} + q\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

in cui

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial u};$$

sicchè potremo porre:

$$(2)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \quad , \quad q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ b = i\,\dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial u} \quad , \quad p = -i\,\dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial v}. \end{cases}$$

Introduciamo due ausiliarie W_1, W_2, ponendo [1]:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + b\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + W_1 \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 + p\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + W_2; \end{cases}$$

allora, per l'integrabilità delle (1) sono necessarie e sufficienti le equazioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial v} = \dfrac{\partial^2 b}{\partial v^2} - \dfrac{\partial (bp)}{\partial u} - b\dfrac{\partial p}{\partial u} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \dfrac{\partial (bp)}{\partial v} - p\dfrac{\partial b}{\partial v}, \end{cases}$$

e per l'integrabilità del sistema (3) si dovrà avere la relazione:

$$(5)\quad 2\frac{\partial b}{\partial v}W_2 + b\frac{\partial W_2}{\partial v} + \frac{\partial^3 b}{\partial v^3} - b\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = 2\frac{\partial p}{\partial u}W_1 + p\frac{\partial W_1}{\partial u} + \frac{\partial^3 p}{\partial u^3} - p\frac{\partial^2 b}{\partial u\,\partial v}$$

che è la (15) di p. 95 del testo citato.

(1) Vedasi Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale* [tomo I, p. 94]. Per accordare le notazioni basta porre

$$W_1 = L + \frac{\partial b}{\partial v} \quad , \quad W_2 = M + \frac{\partial p}{\partial u}.$$

A causa della relazione

$$\frac{\partial b}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial u}$$

la precedente si può scrivere

$$(6)\quad 2\frac{\partial b}{\partial v}(W_1 + W_2) + b\frac{\partial W_2}{\partial v} + \frac{\partial^3 b}{\partial v^3} - b\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} = p\frac{\partial W_1}{\partial u} + \frac{\partial^3 p}{\partial u^3} - p\frac{\partial^2 b}{\partial u \partial v};$$

si vede allora che se questa è soddisfatta dalle funzioni ω, W_1, W_2 lo sarà parimenti da

$$(7)\qquad \omega\ ,\ W_1 + m\ ,\ W_2 - m \qquad (m \text{ costante arbitraria}).$$

Le funzioni ω, W_1, W_2 sono invarianti rispetto al gruppo proiettivo; due superficie R aventi le stesse ω, W_1, W_2 sono *equivalenti* entro il gruppo proiettivo; *le superficie* R_1 *aventi gl'invarianti* (7) *sono deducibili dalle prime per deformazione proiettiva.*

Nel caso generale le (7) esauriscono le deformate proiettive, in ogni caso ci riferiremo alle (7), astraendo da altre deformate proiettive, se ne esistono.

§ 2. – Trasformazione di una superficie R in superficie isoterma di uno spazio a quattro dimensioni.

2. Richiamiamo una semplice osservazione che rilega le superficie R alle superficie isoterme. Consideriamo la congruenza rettilinea avente una superficie R come focale ed avente per parametri direttori del raggio le funzioni

$$(7^*)\qquad X = \frac{\partial x}{\partial u} + i\frac{\partial x}{\partial v}\ ,\ Y = \frac{\partial y}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial v}\ ,\ Z = \frac{\partial z}{\partial u} + i\frac{\partial z}{\partial v}$$

(congruenza R); le sei coordinate del raggio (X, Y, Z, X', Y', Z') soddisfano ad un'equazione di Laplace ad invarianti uguali; epperò ponendo

$$x_1 + ix_2 = X\ ,\ x_3 + ix_4 = Y\ ,\ x_5 + ix_6 = Z,$$
$$x_1 - ix_2 = X'\ ,\ x_3 - ix_4 = Y'\ ,\ x_5 - ix_6 = Z',$$

le quantità x_i sono le coordinate pentasferiche di un punto descrivente una superficie isoterma dello spazio a quattro dimensioni. Se due superficie R sono equivalenti entro al gruppo proiettivo, le corrispondenti superficie isoterme sono equivalenti entro al gruppo conforme ed inversamente; le funzioni ω, W_1, W_2 essendo invarianti delle R rispetto al gruppo proiettivo, sono pure invarianti delle superficie isoterme rispetto al gruppo conforme.

3. Osserviamo però che questa semplice osservazione non permette da sola di conseguire lo scopo prefisso: occorre stabilire in che modo gli invarianti ω, W_1, W_2 si connettono con quelli introdotti da mio Padre nella citata Memoria.

Tale relazione è stabilita in seguito dalle (19), (20), (21); qui dimostriamo premilinarmente che nelle attuali notazioni la superficie isoterma è già riferita ai *parametri isometrici*. Per lo scopo è comodo introdurre per la R le coordinate di Lelieuvre (ξ, η, ζ, w) di piano tangente; ricordando che:

$$X' = z\left(\frac{\partial y}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial v}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial u} + i\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

usando delle formole di Lelieuvre, e ricordando che dalla

$$w = -(\xi x + \eta y + \zeta z) \quad \text{segue} \quad \frac{\partial w}{\partial u} = -\left(x\frac{\partial \xi}{\partial u} + y\frac{\partial \eta}{\partial u} + z\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)$$

oltre all'analoga per $\frac{\partial w}{\partial v}$ deduciamo:

$$X' = w\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\frac{\partial w}{\partial u} - i\left(w\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi\frac{\partial w}{\partial v}\right). \tag{8}$$

Derivando rispetto alle u, ricordando che

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = a\frac{\partial \xi}{\partial u} - b\frac{\partial \xi}{\partial v} + \left(\frac{\partial b}{\partial v} + ba\right)\xi$$

e che [1]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right)\xi \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right)w + \sqrt{B} \quad , \quad \left(B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}\right)$$

si trova $\frac{\partial X'}{\partial u}$. La $\frac{\partial X}{\partial u}$ si trae da (7*). Si trova così:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + i\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial X'}{\partial u} = a\left(w\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\frac{\partial w}{\partial u}\right) - b\left(w\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi\frac{\partial w}{\partial v}\right) + i\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) + i\xi\sqrt{B} \end{cases} \tag{9}$$

cosicchè:

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X'}{\partial u} = -B; \quad \text{e similmente} \quad \sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial X'}{\partial v} = -B.$$

E la proposizione è stabilita. Si può anche osservare che dalle relazioni (di Codazzi per la R)

$$\frac{\partial \sqrt{B}}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\sqrt{B} \quad , \quad \frac{\partial \sqrt{B}}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}\sqrt{B},$$

(1) Fubini e Čech, loc. cit.; vol. I; cfr. la (2) di p. 110 e (6) di p. 112.

risulta, a meno di omotetia $B = -e^{2\Phi}$ e quindi si potrà scrivere

$$\sum dx_i^2 = e^{2\Phi}(du^2 + dv^2).$$

Manca il termine in $du\,dv$, come segue tosto dal fatto che $\sum x_i^2$ è nullo e che le x soddisfano ad una stessa equazione di Laplace.

Se ora passiamo dalle coordinate pentasferiche alle cartesiane, ponendo

$$x'_1 = \frac{x_1}{x_5 + ix_6}, \cdots, x'_4 = \frac{x_4}{x_5 + ix_6},$$

si avrà, per l'elemento lineare della superficie isoterma, l'espressione

$$ds^2 = \sum dx_i'^2 = \frac{e^{2\Phi}}{(x_5 + ix_6)^2}(du^2 + dv^2),$$

ossia ponendo

$$e^{-\theta} = \frac{e^{\Phi}}{x_5 + ix_6},$$

scriveremo

$$ds^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2). \tag{10}$$

§ 3. - Trasformazione di una superficie isoterma dell'S_4 in superficie R dell'S_3.

4. Si è visto come da una superficie R è deducibile una superficie isoterma dello spazio a quattro dimensioni; ora vogliamo effettuare il passaggio inverso.

Indichiamo sempre con x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 le coordinate cartesiane del punto che descrive la superficie isoterma; indichiamo ancora con ξ_k ed η_k rispettivamente i coseni direttori delle tangenti alle linee della rete ortogonale isoterma; denotando ancora con (10) l'elemento lineare, si avrà

$$\frac{\partial x'_k}{\partial u} = e^{-\theta}\xi_k \quad , \quad \frac{\partial x'_k}{\partial v} = e^{-\theta}\eta_k.$$

Introduciamo per la superficie isoterma gli elementi della rappresentazione di Gauss, relativa alle due normali indipendenti [1]; denotando con a_r e b_r tali elementi, saranno soddisfatte le equazioni di Codazzi e l'equazione di Gauss:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_r}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} b_r \quad , \quad \dfrac{\partial b_r}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} a_r \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \end{cases} \quad (r = 1, 2) \tag{11}$$

(1) Le formole relative alle reti O dell'S_4 (in generale dell'S_n) sono dovute a Guichard; esse sono riportate anche nel libro di Eisenhart, *Trasformations of surfaces*, p. 160, n. 63.

Se x_{1r}, x_{2r} indicano inoltre rispettivamente i coseni direttori delle due normali alla rete isoterma, il determinante

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

è ortogonale e si avrà il sistema:

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'_r}{\partial u} = e^{-\theta}\xi_r \ , & \dfrac{\partial x'_r}{\partial v} = e^{-\theta}\eta_r \ , \\ \dfrac{\partial x_{hr}}{\partial u} = a_h \xi_r \ , & \dfrac{\partial x_{hr}}{\partial v} = b_h \eta_r \ , \\ \dfrac{\partial \xi_r}{\partial u} = -a_1 x_{1r} - a_2 x_{2r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\eta_r \ , & \dfrac{\partial \xi_r}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\eta_r \ , \\ \dfrac{\partial \eta_r}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\xi_r \ , & \dfrac{\partial \eta_r}{\partial v} = -b_1 x_{1r} - b_2 x_{2r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\xi_r \ , \end{cases}$$

di cui le (11) sono le condizioni di integrabilità.

5. Cogli elementi introdotti, le equazioni della retta che descrive la congruenza R sono

$$(14) \qquad \begin{cases} x = (x'_1 + ix'_2)\zeta + (x'_3 - ix'_4) \\ y = (x'_3 + ix'_4)\zeta - (x'_1 - ix'_2) \end{cases}$$

ed il punto $(x\,y\,\zeta)$ descrive una superficie focale se sono coesistenti le equazioni in ζ:

$$(15) \quad \begin{cases} (\xi_1 + i\xi_2)\zeta + (\xi_3 - i\xi_4) = -\varepsilon\,[(\eta_1 + i\eta_2)\zeta + (\eta_3 - i\eta_4)] \\ (\xi_3 + i\xi_4)\zeta - (\xi_1 - i\xi_2) = -\varepsilon\,[(\eta_3 + i\eta_4)\zeta - (\eta_1 - i\eta_2)], \end{cases}$$

per uno stesso valore di ε. Tenendo presente l'ortogonalità di (12), ed eliminando ζ, si trova $\varepsilon^2 = -1$.

Si verifica ancora, sempre in forza dell'ortogonalità del determinante che si può ritenere per ζ l'una o l'altra delle equazioni seguenti

$$(16) \quad \begin{cases} (x_{11} + ix_{12})\zeta + (x_{13} - ix_{14}) = -\varepsilon\,[(x_{21} + ix_{22})\zeta + (x_{23} - ix_{24})] \\ (x_{13} + ix_{14})\zeta - (x_{11} - ix_{12}) = -\varepsilon\,[(x_{23} + ix_{24})\zeta - (x_{21} - ix_{22})]. \end{cases}$$

Ed ora deriviamo queste ultime; osservando le (13) avremo

$$[(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon\,(x_{21} + ix_{22})]\frac{\partial \zeta}{\partial u} = -(a_1 + \varepsilon a_2)\,[(\xi_1 + i\xi_2)\zeta + (\xi_3 - i\xi_4)]$$

$$[(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon\,(x_{21} + ix_{22})]\frac{\partial \zeta}{\partial v} = -(b_1 + \varepsilon b_2)\,[(\eta_1 + i\eta_2)\zeta + (\eta_3 - i\eta_4)]$$

donde, per la prima delle (15) si ricava

$$\frac{\frac{\partial \chi}{\partial u}}{\frac{\partial \chi}{\partial v}} = -\varepsilon \frac{a_1 + \varepsilon a_2}{b_1 + \varepsilon b_2}.$$

Infine, derivando le (14) ed osservando le 13), deduciamo

$$(17)\quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial x}{\partial u} = (a_1 + \varepsilon a_2)(x'_1 + ix'_2) - e^{-\theta}[(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon(x_{21} + ix_{22})] \\ \rho \dfrac{\partial y}{\partial u} = (a_1 + \varepsilon a_2)(x'_3 + ix'_4) - e^{-\theta}[(x_{13} + x_{14}) + \varepsilon(x_{23} + ix_{24})] \\ \rho \dfrac{\partial \chi}{\partial u} = a_1 + \varepsilon a_2. \end{cases}$$

Derivando ancora rispetto ad u, tenendo conto delle (13), troviamo:

$$(17\ bis)\quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial a_1}{\partial u} + \varepsilon \dfrac{\partial a_2}{\partial u}\right)(x'_1 + ix'_2) + e^{-\theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial u}[(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon(x_{21} + ix_{22})] \\ \text{e analoghe per } y, \chi. \end{cases}$$

Similmente si trova:

$$(18)\quad \begin{cases} -\varepsilon\rho \dfrac{\partial x}{\partial v} = (b_1 + \varepsilon b_2)(x'_1 + ix'_2) - e^{-\theta}(x_{11} + ix_{12}) + \varepsilon(x_{21} + ix_{22})] \\ -\varepsilon\rho \dfrac{\partial y}{\partial v} = (b_1 + \varepsilon b_2)(x'_3 + ix'_4) - e^{-\theta}[(x_{13} + ix_{14}) + \varepsilon(x_{23} + x_{24})] \\ -\varepsilon\rho \dfrac{\partial \chi}{\partial v} = b_1 + \varepsilon b_2 \end{cases}$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità.

6. Da queste risultano importanti conseguenze. Poichè le due falde focali della congruenza R corrispondono ai valori $\varepsilon = i$, $\varepsilon = -i$, poniamo dapprima $\varepsilon = i$, dopo di che dalle (17) , (17 *bis*) e (18), ritornando alla (1), troviamo proprio che le x, y, χ soddisfano all'equazione (1), ove si ponga:

$$b = i\frac{\partial}{\partial u}\log[a_1 + ia_2) - (b_1 + ib_2)] \ , \ p = -i\frac{\partial}{\partial v}\log[(a_1 + ia_2) - (b_1 + ib_2)]$$

e se ne deduce la relazione

$$(19)\qquad (a_1 + ia_2) - (b_1 + ib_2) = \omega$$

che ha importanza fondamentale per la teoria.

Riferendoci poi alla seconda superficie focale della congruenza R e denotando con

$$b' = -\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial u} \quad , \quad p' = i\,\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

le quantità corrispondenti alle b, p, si avrà l'equazione analoga

$$(20) \qquad (a_1 - ia_2) - (b_1 - ib_2) = \Omega,$$

e si riconosce col calcolo effettivo la relazione

$$(21) \quad \frac{1}{2}\omega\Omega = \left[i\left(\frac{\partial b}{\partial u} + i\,\frac{\partial b}{\partial v}\right) + \frac{\partial p}{\partial u} - i\,\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{1}{2}(p^2 + b^2)\right] + (W_1 + W_2)\,\varepsilon.$$

§ 4. - Invarianti delle superficie isoterme rispetto al gruppo conforme.

7. Le funzioni ω ed Ω, sopra incontrate, sono invarianti delle superficie isoterme (rispetto al gruppo conforme) che vogliamo confrontare con gli invarianti noti; occorre trascrivere i risultati di mio Padre, immediatamente estensibili allo spazio a quattro dimensioni. Poniamo cioè, indicando con ω_r, Ω_r, J nuove espressioni ausiliarie

$$a_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega_r + \omega_r) \quad , \quad b_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega_r - \omega_r),$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - \sum_{r=1}^{2}\omega_r\,\Omega_r = J;$$

si deduce allora dalle (11) il sistema seguente

$$(22) \quad \begin{cases} 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\sum(\Omega_r^2 - \omega_r^2 + 2\,\omega_r\,\Omega_r) + J, \\ 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = -2\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\,\dfrac{\partial\theta}{\partial v} + \dfrac{2}{\omega_1}\,\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}, \\ 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\sum(\Omega_r^2 - \omega_r^2 - 2\,\omega_r\,\Omega_r) - J, \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega_r}{\partial u} = \dfrac{\partial\omega_r}{\partial u} - (\Omega_r + \omega_r)\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial\Omega_r}{\partial v} = -\dfrac{\partial\omega_r}{\partial v} - (\Omega_r - \omega_r)\,\dfrac{\partial\theta}{\partial v}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\omega_2}\frac{\partial^2\omega_2}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\omega_1}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}, \tag{24}$$

le cui condizioni di integrabilità sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial u} = -2\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\omega_1}\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}(\omega_1^2+\omega_2^2) \\ \dfrac{\partial J}{\partial v} = 2\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\omega_1}\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}(\omega_1^2+\omega_2^2). \end{cases} \tag{25}$$

Se fra queste eliminiamo J, otteniamo un'equazione differenziale da mettersi in coesistenza con la (24) ed avremo così le equazioni necessarie e sufficienti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{1}{\omega_1}\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\dfrac{1}{\omega_1}\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\omega_1^2+\omega_2^2) = 0 \\ \dfrac{1}{\omega_2}\dfrac{\partial^2\omega_2}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{\omega_1}\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}. \end{cases} \tag{26}$$

Le funzioni ω_1, ω_2, J sono *invarianti* rispetto al gruppo conforme: due superficie isoterme aventi le stesse ω_1, ω_2, J sono equivalenti entro il gruppo conforme; le superficie isoterme aventi gl'invarianti

$$\omega_1 \quad , \quad \omega_2 \quad , \quad J + m \qquad (m = \text{cost. arbitraria})$$

sono le trasformate delle prime mediante la C_m.

8. Per rendere più preciso il raffronto, osserviamo che

$$a_1 - b_1 = \sqrt{2}\,\omega_1 \quad , \quad a_1 - b_2 = \sqrt{2}\,\omega_2;$$

perciò si avrà per la (19) e per la (20)

$$\omega = \sqrt{2}\,(\omega_1 + i\omega_2)$$

$$\Omega = \sqrt{2}\,(\omega_1 - i\omega_2)$$

ed il sistema (18) si trasforma nell'altro

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right) + 2\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\omega\Omega) = 0 \\ \dfrac{1}{\Omega}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}. \end{cases} \tag{27}$$

§ 5. - Riduzione della deformazione proiettiva alla trasformazione C_m.

9. Da quanto abbiamo esposto, l'equivalenza della deformazione proeittiva e della trasformazione C_m è immediata.

Infatti, sia una superficie R, cogl' invarianti ω, W_1, W_2 ed assumiamo una deformata proiettiva R_1 cogl invarianti

$$\omega \quad , \quad W_1 + m \quad , \quad W_2 - m;$$

poichè nella (21) le funzioni W_1, W_2 si presentano nella combinazione $W_1 + W_2$, le superficie isoterme I ed I_1 (legate rispettivamente ad R ed R_1) hanno gli stessi invarianti ω ed Ω, e non potendo essere equivalenti entro il gruppo conforme (perchè R ed R_1 non lo sono entro il gruppo proiettivo) sono deducibili l'una dall'altra mediante la C_m.

Inversamente se I ed I_1 sono trasformate l'una dall'altra mediante la C_m, hanno in comune l'invariante ω; allora R ed R_1 hanno le stesse funzioni b e p, e non essendo equivalenti entro il gruppo proiettivo, saranno proiettivamente applicabili.

Matematica. — *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato.* Nota di G. Vitali, presentata [1] dal Corrispondente G. Fubini.

In recenti lavori [2] io ho studiato una *derivazione covariante* dei *sistemi assoluti* (altrove chiamati di *Pascal*) [3] del *calcolo assoluto generalizzato*, aventi indici ed apici di 1ª e 2ª classe, ottenuta coll'ausilio di un certo sistema assoluto $A_{\alpha,\beta}$ a 2 indici di 2ª classe, fornito da una varietà generica dello spazio hilbertiano.

Le considerazioni che allora mi hanno guidato conducono anche a ritrovare per ogni intero $m > 0$, una analoga derivazione dei sistemi assoluti con indici ed apici di classe $1^a, 2^a, \cdots, m^a$ rispetto ad un sistema assoluto $A_{\alpha,\beta}$ a 2 indici di classe m^a, fornito anch'esso da una varietà generica dello spazio hilbertiano.

(1) Nella seduta del 15 aprile 1928.

(2) G. Vitali, *Geometria nello spazio hilbertiano.* « Atti del R. Ist. Veneto di Sc. Lett. ed Arti », 1927-28, t. LXXXVII, Parte seconda, e *Sopra una derivazione covariante nel calcolo assoluto generalizzato.* « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VI, serie 6ª, 2° sem., 1927, pp. 202-206 e 278-282.

(3) G. Vitali, *I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato.* « Giornale del Battaglini », serie 3ª, vol. XIV, 1923.

Riservandomi una esposizione più dettagliata in apposita Memoria, nella presente Nota mi limito ad una descrizione sommaria di detta operazione (1).

1. – Comunemente, se

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_\nu \tag{1}$$

sono ν variabili, con $f(u_1 , u_2 , \cdots , u_\nu)$, o con $f(u)$ si indica una funzione delle (1), intendendo con la lettera f non solo di individuare la funzione ma anche di riassumere le operazioni da farsi sui valori delle (1) per ottenere il corrispondente valore della funzione.

Noi avremo da considerare delle funzioni delle (1) che per una sostituzione S invertibile di equazioni

$$u_i = u_i(v_1 , v_2 , \cdots , v_\nu) \qquad (i = 1 , 2 , \cdots , \nu) \tag{2}$$

si muta con una determinata legge (che può variare da caso a caso) in una funzione delle variabili

$$v_1 , v_2 , \cdots , v_\nu . \tag{3}$$

Per questo, uniformandoci a quanto abbiamo fatto altrove, useremo le notazioni $f[u_1 , u_2 , \cdots , u_\nu]$ o $f[u]$, da non confondersi con le precedenti, intendendo che $f[u]$ rappresenti una funzione delle (1), e che $f[v]$ indichi la funzione delle (3) in cui quella si muta per la sostituzione S.

Se f è una funzione che per ogni coppia di sistemi delle (1) e delle (3) corrispondenti nella S abbia valori uguali, si dirà che la f è un *invariante*. Se $I[u]$ è un invariante, e se per le (1) si ha

$$I[u] = f(u_1 , u_2 , \cdots , u_\nu) ,$$

si avrà anche

$$I[v] = f(u_1(v_1 , v_2 , \cdots , v_\nu) , u_2(v_1 , v_2 , \cdots , v_\nu) , \cdots , u_\nu(u_1 , u_2 , \cdots , u_\nu))$$

2. – *Definizione.* – Se ν è un numero intero > 0, fissato una volta per sempre, diremo che un *indice* od un *apice* è di classe m (m intero > 0), se può percorrere tutte le combinazioni con ripetizione a 1 a 1 , a 2 a 2 , $\cdots$, ad m ad m, dei numeri

$$1 , 2 , \cdots , \nu . \tag{4}$$

Ognuna di tali combinazioni, si chiama uno *stato* dell'indice o dell'apice che si considera, e gli elementi della combinazione che lo costituisce si dicono le *cifre* dello stato.

(1) Per il caso di una variabile, una esposizione molto chiara si troverà in una Nota che uscirà fra breve, del dott. G. Aliprandi, *Il calcolo assoluto generalizzato in una variabile, e le derivate del Vitali.* «Atti del R. Ist. Veneto di Sc. Lett. ed Arti», 1928.

3. – Se $\varphi[u]$ è un invariante, se α è un indice di classe m, e se α_0 è uno stato di α, se

$$i_1, i_2, \cdots, i_k \qquad (k \text{ intero} > 0)$$

sono tutte le sue cifre, noi porremo

$$\varphi_{\alpha_0}[u] = \frac{\partial^k \varphi[u]}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \cdots \partial u_{i_k}} .$$

Allora $\varphi_\alpha[u]$ è un sistema di funzioni tante quanti sono gli stati di α. Si verifica facilmente che

$$\varphi_\alpha[v] = \sum_\beta \varphi_\beta[u] \cdot D_{\beta,\alpha} , \tag{5}$$

dove la $\sum$ si intende estesa a tutti gli stati dell'indice β di classe m, e $D_{\beta,\alpha}$ è una funzione delle (3) che dipende oltrechè dagli indici α e β dalle equazioni (2), ma non dalla funzione φ.

Se gli stati di α e β sono combinazioni ad 1 ad 1 dei numeri (4), si ha

$$D_{\beta,\alpha} = \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} . \tag{6}$$

Se ciò non è, o u_β o v_α non ha senso e quindi non ha senso il 2° membro di (6), ma noi gli attribuiremo il significato del 1° membro, e la (5) si potrà scrivere

$$\varphi_\alpha[v] = \sum_\beta \varphi_\beta[u] \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} . \tag{5'}$$

4. – Se α_n ed α'_n $(n = 1, 2, \cdots, r)$ sono r coppie di indici entrambi della stessa classe, e se β_n e β'_n $(n = 1, 2, \cdots, s)$ sono altre s coppie analoghe di apici, e se

$$H^{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}[v] = \sum_{\alpha',\beta'} H^{\beta'_1,\beta'_2,\cdots,\beta'_s}_{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_r}[u] \left(\prod_1^r{}_n \frac{\partial u_{\alpha'_n}}{\partial v_{\alpha_n}} \right) \left(\prod_1^s{}_n \frac{\partial v_{\beta_n}}{\partial u_{\beta'_n}} \right) \tag{7}$$

si dice che il sistema

$$H^{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}[u] \tag{8}$$

è un *sistema assoluto.*

5. – Sia

$$f = f(t, u_1, u_2, \cdots, u_\nu) , \tag{9}$$

con f funzione di t a quadrato sommabile in un certo campo G, e derivabile in là quanto occorre, rispetto alle (1), l'equazione di una varietà V a ν dimensioni dello spazio hilbertiano.

Il 2° membro della (9), considerato come funzione delle (1), è un invariante, che, trascurando di mettere in evidenza la t, indicheremo con $f[u]$.

Poniamo

$$A_{\alpha,\beta}[u] = \int_G f_\alpha[u] \cdot f_\beta[u] \cdot dt .$$

Se α e β sono due indici di classe m, e se V è generica, il determinante $\underset{m}{A}$ delle $A_{\alpha,\beta}$ sarà diverso da zero, e noi indicheremo con $\underset{m}{A}^{\alpha,\beta}$ il reciproco di $A_{\alpha,\beta}$ in questo determinante.

Si chiama sistema di *Christoffel di 1ª specie* il sistema

$$C_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta}$$

dove α è di classe $m+1$ e β è di classe m, e sistema di *Christoffel di 2ª specie e di classe m*, il sistema

$$\underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha} = \sum_\gamma C_{\alpha,\gamma} \cdot \underset{m}{A}^{\gamma,\beta}$$

dove α è di classe $m+1$, β è di classe m, e la $\sum$ è estesa a tutti i γ di classe m.

I sistemi $A_{\alpha,\beta}$; $\underset{m}{A}^{\alpha,\beta}$; $C_{\alpha,\beta}$; $\underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha}$ sono sistemi assoluti.

Si noti che se lo stato di α, può essere anche interpretato come uno stato di un indice di classe m, si ha

$$\underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha,\beta} ,$$

dove

$$\varepsilon_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 , \text{ se } \alpha = \beta \\ 0 , \text{ se } \alpha \neq \beta . \end{cases}$$

6. — Il sistema

$$H^{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,h}[u] = \frac{\partial H^{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}[u]}{\partial u_h}$$

$$- \sum_1^r{}_n \sum_\gamma C^{\gamma}_{\alpha_n h} \cdot H^{\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots\cdots\cdots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\gamma,\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_r}[u]$$

$$+ \sum_1^s{}_n \sum_\gamma C^{\beta_n}_{\gamma h} \cdot H^{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-1},\gamma,\beta_{n+1},\cdots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\cdots\cdots,\alpha_r}[u] ,$$

dove H è un sistema assoluto (8), h è un indice di 1ª classe, $\alpha_n h$ e γh devonsi interpretare come uno stato di un indice che ha tutte le cifre di α_n (o di γ) e la cifra h, e le $\sum$ secondo γ si riferiscono alla variazione di γ nella classe dell'indice che sostituisce nel fattore H, ed i simboli di *Christoffel* devono essere della stessa classe dell'α_n o del β_n che vi figura, è un sistema assoluto, e che diremo *derivato covariante* di (8).

Matematica. — *Sopra le soluzioni periodiche a periodi grandissimi nella Meccanica.* Nota di G. VRANCEANU, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota vogliamo considerare, dal punto di vista della stabilità trigonometrica introdotta dal Birkhoff [2], il caso in cui l'equazione caratteristica di una posizione di equilibrio ha due radici nulle, le altre essendo immaginarie pure e linearmente indipendenti.

Vedremo che il fatto saliente in questo caso, è che intervengono delle soluzioni periodiche a periodi grandissimi.

1. Consideriamo dapprima il caso di un sistema di due equazioni del primo ordine con una posizione di equilibrio nell'origine. Se le radici della equazione caratteristica sono tutte due nulle, il sistema si può sempre ridurre (con trasformazioni lineari), ad una di queste due forme

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = y + P(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) ,$$

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) ,$$

dove P, Q sono funzioni del secondo ordine almeno, nelle x, y. In ciò che segue noi consideriamo solamente le equazioni (1), che sono le sole che si presentano direttamente nella Meccanica.

2. Eseguendo una serie di trasformazioni del tipo

$$(3) \qquad x = x_1 + M(x_1, y_1) \quad , \quad y = y_1 + N(x_1, y_1) ,$$

dove M e N sono dei polinomi omogenei del secondo grado, poi del terzo grado, ecc., possiamo disporre dei coefficienti indeterminati di queste trasformazioni, per dare alle equazioni (1) la forma normale

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{dt} = y_1 + P_1(x_1) \quad , \quad \frac{dy_1}{dt} = Q_1(x_1)$$

(1) Nella seduta del 4 marzo 1928.

(2) Vedi la mia Nota: *Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la Dynamique*, questi «Rendiconti», seduta del 6 novembre 1927.

dove P_1, Q_1 sono funzioni della sola x_1, almeno del secondo ordine. Infatti, dopo la prima di queste trasformazioni, le equazioni (1) si scrivono

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = y_1 + P_2(x_1, y_1) + N(x_1, y_1) - \dfrac{dM}{dx_1} y_1, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = Q_2(x_1, y_1) - \dfrac{dN}{dx_1} y_1, \end{cases}$$

dove si sono trascurati i termini del terzo ordine.

È facile vedere che i polinomi N e poi M, si possono determinare in modo che nei termini del secondo ordine delle equazioni (5), non comparisca la variabile y_1. E questa possibilità vale in generale.

Di più se P è una funzione dispari e Q una funzione pari nella variabile y, si ottiene la forma normale più semplice

$$(6)\qquad \frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x).$$

Per arrivare a questa forma le dette condizioni non sono necessarie.

Pare molto probabile che nel caso normale (4) con $P \neq 0$, non si possa avere stabilità trigonometrica, ma io non sono riuscito a dimostrare questo fatto che nel caso in cui P comincia con un termine dispari in x.

3. Fissiamo la nostra attenzione sopra la forma normale (6), che equivale alla sola equazione del secondo ordine

$$(7)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = Q(x),$$

e che rappresenta dal punto di vista meccanico l'equazione del moto di un punto ad un solo grado di libertà, $Q(x)$ essendo la forza.

L'equazione (7), integrata una volta, si scrive

$$(8)\qquad x'^2 = 2U(x) - 2U(x_0) + x_0'^2,$$

dove $U(x)$ è il potenziale delle forze e x_0, x_0' sono i valori iniziali di x e x'. Si sa che la posizione di equilibrio sarà stabile, se il potenziale è massimo, vale a dire della forma

$$(9)\qquad 2U(x) = -ax^{2m}(1 + a_1x + \cdots) \qquad (a > 0).$$

Il secondo membro della equazione (8) eguagliato a zero, ha $2m$ radici nulle in x per $x_0 = 0$, $x_0' = 0$, e perciò, in virtù di un teorema di Weierstrass, per x_0, x_0' abbastanza piccole, esistono $2m$ radici in x molto piccole. Nel nostro caso solo due di queste radici sono reali e per conse-

guenza x oscilla tra queste due radici reali x_1, x_2 [1]. Il periodo di questo movimento è dato dalla formula

$$2T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x_0'^2 - 2U(x_0) + 2U(x)}}. \tag{10}$$

Indicando con α il valore positivo del radicale

$$\sqrt[2m]{\frac{x_0'^2 - 2U(x_0)}{a}},$$

le radici x_1, x_2 si possono esprimere come serie di potenze in α, i primi termini essendo rispettivamente $-\alpha$ e $+\alpha$.

Facendo la trasformazione $x = \alpha y$ si trova che T ha una espressione del tipo

$$T = \frac{K(\alpha)}{\alpha^{m-1}}, \tag{11}$$

dove $K(\alpha)$ è una funzione olomorfa in α e $K(0) \neq 0$.

Siccome nel nostro caso $m \geqq 2$, ne risulta che T tende verso infinito quando α tende verso zero, o, ciò chi è lo stesso, quando X_0, X_0' tendono simultaneamente verso zero.

Se inizialmente $x_0' = 0$ allora $\alpha = x_0\varphi(x_0)$ dove φ è una funzione olomorfa, e perciò nella formula (11) si può mettere x_0 al posto di α.

4. Consideriamo adesso il caso generale di un sistema con una posizione di equilibrio per la quale tutte le radici della equazione caratteristica sono puramente immaginarie, salvo due che sono nulle. Un tale sistema si può mettere in generale sotto la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + P \quad , \quad \dfrac{dy}{dt} = Q \\ \dfrac{dx_i}{dt} = \sqrt{-1}\, r_i x_i + P_i \quad , \quad \dfrac{dy_i}{dt} = -\sqrt{-1}\, r_i y_i + Q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \end{cases} \tag{12}$$

dove x, y sono variabili reali e x_i, y_i sono immaginarie coniugate P, Q, P_i, Q_i essendo almeno di secondo ordine in x, y, x_i, y_i. Eseguendo una serie di trasformazioni del tipo Birkhoff, possiamo dare alle equazioni (12) la forma normale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + P \quad , \quad \dfrac{dy}{dt} = Q \\ \dfrac{dx_i}{dt} = x_i(\sqrt{-1}\, R_i + S_i) \quad , \quad \dfrac{dy_i}{dt} = y_i(-\sqrt{-1}\, \bar{R}_i + \bar{S}_i), \end{cases} \tag{13}$$

dove P, Q, R, S dipendono solo da x e dalle coppie $(x_i y_i)$.

(1) Cfr. per esempio la mia tesi *Sopra un teorema di Weierstrass*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », tomo L (1926).

5. Nel caso meccanico P e S sono nulle, e in questo caso le ultime equazioni (13) ammettono gli integrali primi $x_i y_i = c_i^2$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Tenendo conto di questo, le prime due equazioni (13) si scrivono

$$(14) \qquad \frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x; c_1^2, c_2^2, \cdots, c_n^2).$$

Per la stabilità è necessario e sufficiente che $Q(x; 0)$ cominci con un termine dispari in x a coefficiente negativo, e, applicando convenientemente il teorema di Weierstrass per c_i abbastanza piccole, il problema si riduce a quello già trattato. Trovati x, y come funzioni periodiche di t, dalle ultime equazioni (14) $(S_i = 0)$, si ricava lo stesso risultato per le x_i, y_i.

Meccanica. — *Sul problema dell'equilibrio elastico dei corpi girevoli a contorno cilindrico.* Nota di E. Gugino, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Il problema dell'equilibrio elastico dei corpi girevoli, cimentati unicamente dalla forza centrifuga, è stato posto dal Lecornu [2] e risolto nel caso di un ellissoide di rivoluzione allungato, tale che il rapporto tra il quadrato del diametro equatoriale ed il quadrato del diametro polare sia una funzione dei coefficienti λ e μ di Lamé; rapporto sensibilmente uguale ad $\frac{1}{2}$ nella ipotesi $\lambda = \mu$.

Tale soluzione è valida non solo per l'intero ellissoide, ma anche per un tronco qualunque di esso compreso fra due piani normali all'asse.

Pertanto essa può con approssimazione estendersi alle macine cilindriche di spessore molto piccolo rispetto al diametro, in maniera da potere, senza grave errore, sostituire all'arco di ellissi del contorno ellissoidico, la generatrice rettilinea del contorno cilindrico che meno si scosti dal primo. Le macine, di cui in tal modo si determina approssimativamente lo stato di equilibrio, debbono però essere « piene »; nella maggior parte dei casi le macine industriali presentano un foro centrale destinato al passaggio dell'albero, ed il Lecornu successivamente [3] tiene conto di tale circostanza. Modificando leggermente la prima soluzione, ottiene lo stato di equilibrio di un solido di rivoluzione, la cui superficie libera può con approssimazione ritenersi ellissoidica, con un foro centrale quasi cilindrico; parimenti una porzione di tale solido, limitata da due sezioni piane parallele all'equatore,

(1) Nella seduta del 15 aprile 1928.
(2) M. L. Lecornu, « Comptes Rendus », 123, 1896, p. 96.
(3) M. L. Lecornu, « Comptes Rendus », 182, 1926, p. 1253.

sta individualmente in equilibrio; e se tali sezioni si scelgono simmetriche rispetto al piano equatoriale e tra di loro relativamente vicine, la porzione di solido fra esse compresa, può con approssimazione considerarsi assimilabile ad una comune macina industriale.

Lo stato di equilibrio di un albero cilindrico di lunghezza qualunque, sempre secondo lo stesso Autore, non si può dedurre dallo stato di equilibrio di una macina cilindrica [1] anche quando l'albero si pensi costituito dalla sovrapposizione di una infinità di macine estremamente sottili.

Secondo il Lecornu, assunto come asse delle z quello di rotazione, supponendo che Ox, Oy, ruotino col solido, lo spostamento elastico di un generico punto di un solido di rivoluzione è contenuto, per ragioni di simmetria, nel piano meridiano, e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse di rotazione, e da z; le sue componenti sono quindi della forma:

$$u = h\frac{x}{r} \qquad v = h\frac{y}{r} \qquad w = w(r, z)$$

essendo h, w funzioni di r, z, ed $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ciò posto facciamo noi la ulteriore ipotesi che esista una potenziale φ per lo spostamento elastico; ipotesi lecita nel caso del problema di Lecornu in quanto la forza di massa, che si riduce soltanto alla forza centrifuga, ammette il potenziale:

$$U = \frac{\omega^2}{2} r^2. \tag{1}$$

Le equazioni indefinite della elasticità si riducono con ciò alla unica relazione vettoriale:

$$\operatorname{grad}\{(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi + \rho U\} = 0$$

e quindi possono essere sostituite dalla unica equazione scalare:

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi + \rho U = \text{cost.} \tag{I}$$

Nella ipotesi che gli spostamenti derivino da un potenziale, le tre incognite u, v, w, si riducono ad una sola, con cui in generale non è possibile soddisfare, oltre che alla equazione indefinita (I), alle tre equazioni ai limiti, che esprimono la continuità degli sforzi. Ma si possono presentare dei casi favorevoli in cui è possibile riuscire nello scopo; un esempio potrà essere quello relativo all'equilibrio dei corpi girevoli a contorno cilindrico, con che il problema, come faremo vedere, si può in sostanza ridurre ad un problema di Saint-Venant.

L'esistenza di una funzione degli spostamenti associata alla ipotesi della simmetria assiale (attorno all'asse delle z) si esprime analiticamente assu-

(1) M. L. Lecornu, «Comptes Rendus», 182, 1926, p. 1361.

mendo φ funzione dei due soli argomenti r e z. Le componenti h e w (radiale ed assiale) dello spostamento elastico hanno in conformità le espressioni:

$$h = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Inoltre la dilatazione cubica θ vale:

$$\theta = \Delta\varphi.$$

Ove si ponga per brevità:

$$K_1 = -\frac{\rho\omega^2}{2(\lambda + 2\mu)}$$

e si tenga presente l'espressione (1) di U, la (I) può essere scritta:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = K_1 r^2 + c$$

c designando una costante *a priori* indeterminata come quella che figura nel secondo membro della (I).

Una soluzione dell'ultima equazione è la seguente:

$$\varphi = \frac{K_1}{16} r^4 + \frac{\alpha'}{4} r^2 + \beta' \log r + \frac{(c - \alpha')}{2} z^2$$

con α' e β' costanti arbitrarie da determinarsi.

Le equazioni dello stato di equilibrio assumono la forma:

$$u = \left(\frac{K_1}{4} r^3 + \frac{\alpha'}{2} r + \frac{\beta'}{r}\right)\frac{x}{r} \quad ; \quad v = \left(\frac{K_1}{4} r^3 + \frac{\alpha'}{2} r + \frac{\beta'}{r}\right)\frac{y}{r} \quad ; \quad w = (c - \alpha')z.$$

Seguono per le tensioni interne le espressioni:

$$(2) \quad \begin{cases} N_1 = \lambda(K_1 r^2 + c) + 2\mu\left[\frac{K_1}{4}(r^2 + 2x^2) + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{r^2}\left(1 - \frac{2x^2}{r^2}\right)\right] \\ N_2 = \lambda(K_1 r^2 + c) + 2\mu\left[\frac{K_1}{4}(r^2 + 2y^2) + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{r^2}\left(1 - \frac{2y^2}{r^2}\right)\right] \\ N_3 = \lambda(K_1 r^2 + c) + 2\mu(c - \alpha') \\ T_1 = T_2 = 0 \quad ; \quad T_3 = 2\mu\left(\frac{K_1}{2} r^2 - \frac{2\beta'}{r^2}\right)\frac{xy}{r^2}. \end{cases}$$

Consideriamo un elemento superficiale normale al piano zx; detto χ l'angolo che la normale all'elemento forma con l'asse delle z, i coseni direttori di tale direzione risultano:

$$\alpha = \operatorname{sen}\chi \quad ; \quad \beta = 0 \quad ; \quad \gamma = \cos\chi.$$

Le componenti dello sforzo unitario che l'elemento superficiale sopporta sono:

$$X = N_1 \operatorname{sen} \chi \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = N_3 \cos \chi.$$

Lo sforzo unitario è quindi contenuto nel piano meridiano.

Se l'elemento oltre ad essere normale al piano zx risulta anche normale all'asse delle x, si ha $\chi = \frac{\pi}{2}$;

$$X = N_1 \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0.$$

L'elemento risulta sollecitato *normalmente* dallo sforzo unitario N_1.

Il luogo dei punti del piano meridiano zx per cui risulta $N_1 = 0$ è il luogo dei punti per i quali gli elementi superficiali passanti per essi e disposti parallelamente al piano yz non risentono alcuno sforzo superficiale. Ponendo, nella prima delle (2), $r = x$ ed uguagliando a zero si ottiene:

$$(2\lambda + 3\mu) K_1 x^4 + 2(\lambda c + \mu\alpha') x^2 - 4\mu\beta' = 0.$$

È questa una equazione di quarto grado nella sola variabile x; essa ammette in generale 4 radici distinte due a due simmetriche rispetto alla origine. Se vogliamo che per $x = \pm R_1$ ed $x = \pm R_2$, con R_1, R_2 valori prefissati, la equazione sia soddisfatta, basta calcolare le due costanti α' e β', in maniera da verificare il sistema di due equazioni lineari in α' e β' che si deducono dalla data, sostituendo in luogo della variabile corrente x gli anzidetti valori.

« Se invece scegliamo $\beta' = 0$ l'equazione ammette la radice doppia $x = 0$ e due radici distinte: $x = \pm R$ con R valore prefissato, purchè si scelga:

$$\alpha' = -\frac{2\lambda c + R^2 (2\lambda + 3\mu) K_1}{2\mu} ».$$

Inoltre la formula che trovasi nel seguito

$$N_3 = -\frac{[\lambda r^2 + 2R^2 (2\lambda + 3\mu)] \rho\omega^2}{2(\lambda + 2\mu)} + (3\lambda + 2\mu) c$$

dovrà subire una leggera modifica nel modo seguente:

$$N_3 = -\frac{[\lambda r^2 + R^2 (2\lambda + 3\mu)] \rho\omega^2}{2(\lambda + 2\mu)} + (3\lambda + 2\mu) c$$

in altri termini dovrà togliersi il coefficiente numerico 2 che accompagna R^2.

Le due superfici cilindriche coassiali, aventi per asse l'asse delle z di raggi R_1 ed R_2 rispettivamente nel primo caso; oppure l'unica superficie cilindrica con il medesimo asse, di raggio R nel secondo caso, non sono

in conseguenza sollecitate da sforzo alcuno; quindi possono essere scelte come superfici libere.

Nella tecnica il primo caso ci viene offerto dalle ruote cilindriche, dai volani, dalle macine, ove si trascurino gli effetti delle connessioni tra la corona e il mozzo; il secondo caso ci viene offerto dai tamburi e dagli alberi e da tutti quei corpi ruotanti per i quali esiste unica superficie cilindrica.

Sulle basi:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad ; \quad \gamma = \pm 1$$

secondo che ci si riferisca alla base superiore o alla inferiore.

In corrispondenza risultano:

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad Z = \pm N_3 .$$

Le basi sono quindi sollecitate da sforzi *puramente normali* la cui legge di distribuzione è indicata dalla terza delle (2)

$$N_3 = \lambda K_1 r^2 + (\lambda + 2\mu) c - 2\mu\alpha' .$$

Secondo il segno di Z l'elemento sarà sottoposto ad una tensione oppure ad una compressione.

Le costanti λ e μ sono positive, K_1 è essenzialmente negativo; nel caso che esista unica superficie cilindrica libera, sostituendo ad α' e K_1 i relativi valori si ottiene:

$$N_3 = - \frac{[\lambda r^2 + 2R^2(2\lambda + 3\mu)]\rho\omega^2}{2(\lambda + 2\mu)} + (3\lambda + 2\mu) c .$$

Si può scegliere la costante c in modo da annullare il termine indipendente da r^2; allora Z risulta essenzialmente negativa sulla base superiore, essenzialmente positiva sulla base inferiore. Le basi sono in tal caso sottoposte a compressione, e gli sforzi unitari relativi risultano proporzionali al quadrato del raggio. Il problema proposto è così risoluto a meno di una semplice compressione longitudinale (1° caso del problema del Saint-Venant), pel principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio. La soluzione rigorosa di questo particolare problema del Saint-Venant mi riservo di studiare eventualmente, nel caso in cui non sia conosciuta. Intanto ammettendo, come l'esperienza dimostra, che si possa sostituire alle forze applicate a ciascuna base un sistema staticamente equivalente, si potranno pensare le basi come sollecitate da una conveniente compressione uniforme, non avendo una simile sostituzione influenza sensibile, astrazione fatta di regioni poco estese situate in prossimità delle basi. Così dal punto di vista tecnico la soluzione trovata potrà essere utile al calcolo della stabilità degli alberi che ruotano con grande velocità.

Meccanica. — *Il principio dell'azione stazionaria e stabilità in un campo statico gravitazionale.* Nota di A. J. McConnell, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Il prof. Levi-Civita ha compendiato le equazioni del moto di un punto materiale in un campo statico gravitazionale in una formula variazionale, che si può interpretare come un principio di azione stazionaria [2]. Servendoci di questo principio, possiamo discutere la stabilità d'una traiettoria in un tale campo.

1. Il quadrato dell'elemento lineare d'un campo statico ha l'espressione

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2 , \tag{1}$$

dove

$$dl^2 = a_{mn} dx^m dx^n , \qquad (m , n = 1 , 2 , 3) , \tag{2}$$

è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico. Le equazioni del moto d'un punto materiale in un tale campo ammettono l'integrale primo

$$a_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n = V^2 (1 - V^2/h^2) , \tag{3}$$

essendo h una costante, e di più queste equazioni si compendiano nella formola variazionale [3]

$$\delta \int \left(\frac{h^2 - V^2}{V^2} \right)^{1/2} dl . \tag{4}$$

Se chiamiamo la quantità

$$A = \int \left(\frac{h^2 - V^2}{V^2} \right)^{1/2} dl \tag{5}$$

azione del punto, la (4) dà *il principio dell'azione stazionaria: pel moto naturale l'azione ha un valore stazionario rispetto a tutti i moti variati colla stessa costante h*.

Inoltre, le traiettorie d'un punto materiale con un valore assegnato della costante h sono geodetiche della varietà $\bar{V}_3$, il cui elemento lineare è definito dall'equazione

$$d\bar{l}^2 = \frac{h^2 - V^2}{V^2} dl^2 = \frac{h^2 - V^2}{V^2} a_{mn} dx^m dx^n . \tag{6}$$

(1) Nella seduta del 15 aprile 1928.

(2) Levi-Civita, *Statica einsteiniana*. « Rend. R. Acc. Lincei », XXVI (1917), pagine 464-468.

(3) Levi-Civita, loc. cit.

2. Possiamo servirci di questo principio dell'azione stazionaria per discutere la stabilità d'una traiettoria con una costante assegnata h.

Diremo che una traiettoria è *stabile* quando la geodetica corrispondente della varietà (6) è stabile. Questa definizione concerne la stabilità soltanto per moti perturbati che hanno la costante assegnata h.

Se $\overline{R}_{rmsn}$ è il tensore di Riemann-Christoffel della $\overline{V}_3$ e $\overline{\lambda}^r$ è il versore tangenziale a una geodetica $\overline{C}$ di questa varietà, bisogna e basta per la stabilità della $\overline{C}$ che la forma quadratica

$$\overline{R}_{rmsn}\eta^r\overline{\lambda}^m\eta^s\overline{\lambda}^n \tag{7}$$

sia positiva definita lungo la $\overline{C}$, dove η^r designa, per ciascun punto della curva, un vettore qualsivoglia [1].

Indicando con R_{rmsn} e λ^r le quantità corrispondenti nella varietà metrica (2), abbiamo [2]

$$\begin{aligned}\overline{R}_{rmsn}\overline{\lambda}^m\overline{\lambda}^n = R_{rmsn}\lambda^m\lambda^n + \frac{h^2 V_{mn}\lambda^m\lambda^n}{V(h^2-V^2)}a_{rs} + \frac{3h^2(V_m\lambda^m)^2}{(h^2-V^2)^2}a_{rs} + \\ + \frac{h^2 V_{rs}}{V(h^2-V^2)} + \frac{3h^2 V_r V_s}{(h^2-V^2)^2} \\ - \frac{h^2 V_{rm}\lambda^m\lambda_s}{V(h^2-V^2)} - \frac{3h^2 V_r V_m\lambda^m\lambda_s}{(h^2-V^2)^2} - \frac{h^2 V_{sm}\lambda^m\lambda_r}{V(h^2-V^2)} - \frac{3h^2 V_s V_m\lambda^m\lambda_r}{(h^2-V^2)^2} - \\ - (a_{rs}-\lambda_r\lambda_s)\frac{h^4\Delta V}{V^2(h^2-V^2)^2}.\end{aligned}$$

Dunque, se poniamo

$$\eta^r = \beta\mu^r + \gamma\nu^r,$$

λ^r, μ^r, ν^r formando in ogni punto della curva un'ennupla ortogonale, la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è che sia positiva definita la forma quadratica

$$A\beta^2 + 2B\beta\gamma + C\gamma^2, \tag{8}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} A &= R_{\mu\mu} + \frac{h^2(V_{\lambda\lambda}+V_{\mu\mu})}{V(h^2-V^2)} + \frac{3h^2(V_\lambda^2+V_\mu^2)}{(h^2-V^2)^2} - \frac{h^4\Delta V}{V^2(h^2-V^2)^2}, \\ B &= R_{\mu\nu} + \frac{h^2 V_{\mu\nu}}{V(h^2-V^2)} + \frac{3h^2 V_\mu V_\nu}{(h^2-V^2)^2}, \\ C &= R_{\nu\nu} + \frac{h^2(V_{\lambda\lambda}+V_{\nu\nu})}{V(h^2-V^2)} + \frac{3h^2(V_\lambda^2+V_\nu^2)}{(h^2-V^2)^2} - \frac{h^4\Delta V}{V^2(h^2-V^2)^2}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

(1) Vranceanu, *Sopra la stabilità geodetica.* « Rend. R. Acc. Lincei », gennaio 1927, pp. 107-110; Id., *Stabilità geodetica.* « Rend. R. Acc. Lincei », febbraio 1927, pp. 275-278.

(2) Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus*, (1927), p. 232.

Nelle formole (9) ci siamo serviti della notazione

$$V_\mu = V_m \mu'^m \quad , \quad V_{\mu\nu} = V_{mn} \mu'^m \nu'^n \quad , \quad R_{\mu\nu} = R_{rmsn} \mu'^r \lambda'^m \nu'^s \lambda'^n .$$

Le condizioni si possono scrivere sotto la forma

$$A > 0 \quad , \quad C > 0 \quad , \quad AC - B^2 > 0 . \tag{10}$$

3. Il ds^2 einsteiniano, corrispondente ad un campo statico newtoniano di potenziale U, è, in seconda approssimazione [1],

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) dl_0^2 , \tag{11}$$

dove c è la velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, e dl_0^2 è il quadrato dell'elemento lineare di uno spazio euclideo. In (11) abbiamo trascurato le quantità di un ordine più grande di $1/c^2$. Inoltre se poniamo

$$h^2 = c^2 + 2E ,$$

vediamo senza difficoltà che E è una costante dello stesso ordine di U. L'azione si può scrivere adesso

$$A = \frac{2}{c^2} \int \left\{ 1 + \frac{4EU + 3U^2}{2c^2(E + U)} \right\} \sqrt{E + U}\, dl_0 , \tag{12}$$

e le traiettorie naturali, per un valore assegnato della costante E, sono geodetiche della varietà, il cui elemento lineare è

$$\left\{ E + U + \frac{4EU + 3U^2}{c^2} \right\}^{1/2} dl_0 . \tag{13}$$

Dunque le quantità A, B, C, divengono

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{3}{4} \frac{W_\lambda^2 + W_\mu^2}{W^2} - \frac{1}{2} \frac{W_{\lambda\lambda} + W_{\mu\mu}}{W} - \frac{1}{4} \frac{\Delta W}{W^2} , \\ B &= \frac{3}{4} \frac{W_\mu W_\nu}{W^2} - \frac{1}{2} \frac{W_{\mu\nu}}{W} , \\ C &= \frac{3}{4} \frac{W_\lambda^2 + W_\nu^2}{W^2} - \frac{1}{2} \frac{W_{\lambda\lambda} + W_{\nu\nu}}{W} - \frac{1}{4} \frac{\Delta W}{W^2} , \end{aligned} \right. \tag{14}$$

dove abbiamo posto

$$W = E + U + \frac{4EU + 3U^2}{c^2} . \tag{15}$$

(1) Levi-Civita, loc. cit., p. 394.

La forma quadratica (8) si può quindi scrivere nella forma

$$(16)\qquad \frac{1}{4W^2}\left[\beta^2\left\{2W_\lambda^2+2W_\mu^2-W_\nu^2-2W(W_{\lambda\lambda}+W_{\mu\mu})\right\}+\right.$$
$$+2\beta\gamma\left\{3W_\mu W_\nu-2W_{\mu\nu}W\right\}+$$
$$\left.+\gamma^2\left\{2W_\lambda^2+2W_\nu^2-W_\mu^2-2W(W_{\lambda\lambda}+W_{\nu\nu})\right\}\right].$$

A titolo di esempio, troviamo le condizioni per la stabilità di un'orbita centrale, quando W dipende soltanto dalla distanza, r, da un punto fisso. Non considereremo che moti perturbati nel piano dell'orbita. Vediamo che l'orbita sarà stabile purchè

$$(17)\qquad \left(\frac{dW}{dr}\right)^2-W\left\{\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right\}>0.$$

I risultati corrispondenti nella dinamica newtoniana si ottengono trascurando i termini dell'ordine $1/c^2$.

Idromeccanica. — *Sui moti piani di un fluido incomprimibile, nei quali le linee di corrente sono isotachie.* Nota di F. Sbrana, presentata[1] dal Corrisp. U. Cisotti.

1. In una Nota, col titolo della presente, pubblicata lo scorso anno in questi « Rendiconti »[2], ho considerato i moti piani permanenti di un fluido incomprimibile, nei quali le linee di corrente sono isotachie. Riferiti gli elementi di uno dei piani del moto ad un sistema di coordinate curvilinee x_1, x_2, tale che le linee x_1, (x_2 = costante), coincidano con le linee di corrente, e le linee x_2, (x_1 = cost.), con le loro traiettorie ortogonali, e posto, per il quadrato dell'elemento lineare del piano,

$$(1)\qquad ds^2=H_1^2dx_1^2+H_2^2dx_2^2,$$

dall'equazione di continuità

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}(H_2v)=0\,[3],$$

dove v è la velocità scalare del generico elemento fluido (x_1, x_2), da ritenere, per le ipotesi fatte, funzione della sola x_2, ho dedotto che anche H_2

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) 1° sem., 1927, pp. 876-879.

(3) Nota citata, (3). Per H_1 e H_2 s'intendono i valori positivi delle radici quadrate dei coefficienti del quadrato dell'elemento lineare.

è indipendente da x_1, e che perciò le linee x_2 sono rette. Inoltre, dalla condizione geometrica

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)=0, \tag{3}$$

[ottenuta annullando la curvatura del 2° membro della (1)], ho tratto

$$H_1 = ax_2 + b,$$

con a e b costanti. Ora è chiaro che, in generale a e b saranno invece funzioni di x_1 [1]. Ciò porta ad una modifica dell'enunciato contenuto nel n. 1 della Nota citata. Infatti, si può soltanto affermare che: condizione necessaria e sufficiente perchè in un moto piano permanente di un fluido incomprimibile le linee di corrente siano isotachie, è che queste risultino traiettorie ortogonali di una semplice infinità di rette.

Si è già notato che la condizione è necessaria; che essa è sufficiente, risulta in modo chiaro introducendo i raggi di curvatura r_1 e r_2, delle linee x_1 e x_2 rispettivamente. Si ha

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\quad,\quad \frac{1}{r_2}=\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\ [2]. \tag{4}$$

Dalla 2ª di queste segue subito che, se le linee x_2 sono rette, H_2 è funzione di x_2; e per la (2) la stessa circostanza deve verificarsi per v.

2. Osserviamo ancora che se l'equazione

$$H_1 = 0 \tag{5}$$

è soddisfatta per valori reali di x_1 e x_2, corrispondenti a punti della zona occupata dal fluido, il moto può divenire irregolare, in quanto può accadere che l'intensità del vortice, data, per un generico elemento fluido (x_1, x_2), da

$$\omega = -\frac{1}{H_1H_2}(H_1 v)\ [3], \tag{6}$$

(1) Per $a = 0$, è ovvio che con un cambiamento della variabile x_1 si può rendere H_1 costante. Si ritroverebbe quindi (come nella Nota in questione), che le linee x_1 sono rette (parallele), e lungo di esse il vortice si mantiene costante. Le forze di massa agenti sugli elementi fluidi sono allora necessariamente conservative.

(2) Le (4) si possono dedurre dalle formule che danno le curvature principali delle superficie di un sistema triplo ortogonale, espresse mediante i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare spaziale riferito a queste superficie. Vedi, p. es., L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2ª ediz., vol. II, p. 482 (7). Nel caso attuale, si assumeranno come superficie $x_1 = \text{cost.}$ i cilindri che proiettano le linee x_2 perpendicolarmente ai piani del moto, le superficie $x_2 = \text{cost.}$ in modo analogo, e le $x_3 = \text{cost.}$ coincidenti coi piani stessi.

(3) Nota citata, (4).

cresca oltre ogni limite, in prossimità dei punti per i quali sussiste la (5). Ciò si verifica, p. es., quando le rette x_2 inviluppano una curva T; in tal caso il moto cessa di essere regolare, in prossimità di T. Per dimostrarlo, introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y; fissato su T un punto O ed un senso positivo, e detto s l'arco di T contato a partire da O, se la curva è definita dalle equazioni

$$x = \xi(s) \quad , \quad y = \eta(s),$$

una generica sviluppante di T sarà definita dalle seguenti:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \xi(s) + (c - s)\dfrac{d\xi}{ds}, \\ y = \eta(s) + (c - s)\dfrac{d\eta}{ds}, \end{cases}$$

con c costante. Evidentemente si può assumere $x_1 = s$, $x_2 = c$. Con ciò risulta

$$ds^2 = (x_2 - x_1)^2 \frac{1}{\rho^2} dx_1^2 + dx_2^2,$$

dove ρ (funzione di x_1), è il raggio di curvatura di T, in corrispondenza del valore x_1 dell'arco. Si ha perciò

$$H_1 = \frac{1}{\rho}|x_2 - x_1| \quad , \quad H_2 = 1;$$

e dalla (4),

$$\omega = -\frac{dv}{dx_2} \pm \frac{v}{|x_2 - x_1|}.$$

Di qui risulta che in prossimità di T (e cioè quando x_2 tende a x_1), il vortice cresce indefinitamente [1].

(1) Relativamente al contenuto del n. 3 della Nota citata, osserveremo quanto segue. Supposto (ancora) il moto permanente, e che le forze di massa agenti sugli elementi fluidi siano conservative, è noto che se le linee di corrente sono isotachie, esse non possono essere che cerchi concentrici, o rette parallele (Nota citata, (2)]. Ciò seguirebbe del resto facilmente dall'espressione (6) del vortice (che per le ipotesi ora fatte è costante lungo ogni linea di corrente, quindi funzione di x_2), e dalle (4). Introducendo la funzione di corrente ψ, si ha

$$\omega = -\Delta_2 \psi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = \text{funzione di } \psi,$$

$$v^2 = \Delta\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \text{funzione di } \psi;$$

(Cisotti, *Idromeccanica piana*, I, pp. 57-59). Da quanto precede discende che queste due ultime equazioni sono verificate simultaneamente solo per

$$\psi = \psi(r),$$

con $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, ed a, b costanti, ovvero se

$$\psi = \psi(mx + ny),$$

con m, n costanti. Questo risultato sussiste indipendentemente dal significato fisico della funzione ψ, come subito si riconosce.

Fisica. — *La fase della corrente di saturazione termoionica in un circuito a tensione pulsante.* Nota di C. Dei, presentata [1] dal Socio A. Lo Surdo.

1. Come è noto le lampade termoioniche a due elettrodi presentano nella fase di saturazione il fatto singolare [2] che l'intensità della corrente non raggiunge un valore rigorosamente costante perchè col crescere del potenziale V fra placca e filamento essa aumenta approssimativamente in modo lineare. Precisamente nella fase di saturazione si ha la relazione

$$i = j + kV = j(1 + \alpha V)$$

ove j e k sono costanti che dipendono dalla temperatura del filamento mentre il loro rapporto $\alpha = k/j$, per una data valvola termoionica, ne è indipendente [3]. Col variare della temperatura T la $j = j(T)$ varia rapidamente seguendo la legge di Richardson.

In questa nota mi propongo di studiare ciò che avviene in un circuito che ha in serie una valvola, una resistenza ohmica R, una bobina con coefficiente di autoinduzione L e una f. e. m. pulsante del tipo $E = \overline{E} + E_0 \operatorname{sen} \omega t$ ma sufficiente perchè la valvola sia sempre in saturazione.

È evidente che devono valere simultaneamente le due relazioni

$$\begin{cases} E = iR + L\dfrac{di}{dt} + V \\ i = j + kV \end{cases}$$

dove V è la differenza di potenziale istantaneo fra placca e filamento.

Risolvendo questo sistema e prescindendo dalla brevissima fase iniziale di chiusura del circuito (fase variabile), si ha come espressione dell'intensità nella fase permanente

$$(1) \qquad i = \frac{\frac{1}{\alpha} + \overline{E}}{R + \frac{1}{k}} + \frac{E_0}{\sqrt{\left(R + \frac{1}{k}\right)^2 + L^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) A. Lo Surdo, *La corrente di saturazione delle valvole termoioniche* (« Rendic. della R. Accad. Naz. dei Lincei »; fasc. 5, marzo 1927).

(3) Per la costante α il prof. Lo Surdo ha trovato valori molto piccoli (dell'ordine di 10^{-5}).

dove

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R + \frac{1}{k}}.$$

La (1) mostra che l'ampiezza della parte sinusoidale è uguale al quoziente dell'ampiezza E_0 della parte sinusoidale della f. e. m. per

$$\sqrt{\left(R + \frac{1}{k}\right)^2 + L^2\omega^2};$$

dunque dal valore dell'impedenza si vede che tutto avviene come se la resistenza ohmica del circuito fosse aumentata di $\frac{1}{k}$.

Inoltre l'intensità presenta rispetto alla f. e. m. impressa una differenza di fase data dalla (2). In particolare se $R = 0$ si ha rigorosamente

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \alpha L \omega j.$$

Quando $R \neq 0$, poichè d'ordinario $R \ll \frac{1}{k}$, la relazione (3) è solo approssimata. Per la stessa ragione si ha anche

$$i \cong j(1 + \alpha\bar{E}) + j\alpha \frac{E_0}{\sqrt{1 + k^2 L^2 \omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi).$$

Quando per le condizioni del circuito si ha $k^2 L^2 \omega^2 \ll 1$, risulta

$$\text{(4)} \qquad i \cong j(1 + \alpha\bar{E}) + j\alpha E_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi).$$

Dalle (3) e (4) segue che sia la parte costante di i, sia l'ampiezza della parte sinusoidale, sia la differenza di fase crescono coll'aumentare della temperatura del filamento proporzionalmente alla funzione $j(T)$.

2. Le formule (3) e (4) l'ho verificate usando la disposizione schematizzata nella seguente fig. 1.

Un circuito comprende una valvola K, una autoinduzione L, una resistenza R, il secondario di un trasformatore S (nel quale un polo è a terra) in serie con una batteria B di circa 3000 volta, infine un milliamperometro A che indica l'intensità media traversante il circuito ossia $j(1 + \alpha\bar{E})$.

Per studiare la differenza di fase ho adoperato un oscillografo della Western a catodo incandescente. In esso il fascetto elettronico con un opportuno campo anodico è costretto a passare fra una coppia di placche parallele e poi fra un'altra coppia ad angolo retto rispetto alla prima. Come si vede dalla figura l'anodo è a terra e così pure una placca di ciascuna delle due coppie e una delle due estremità delle resistenze R e R'. Perciò po-

nendo in comunicazione l'altro estremo N della resistenza R con la placca libera della coppia P_x si ha fra queste placche un campo elettrostatico proporzionale alla intensità istantanea traversante il circuito. Ponendo invece

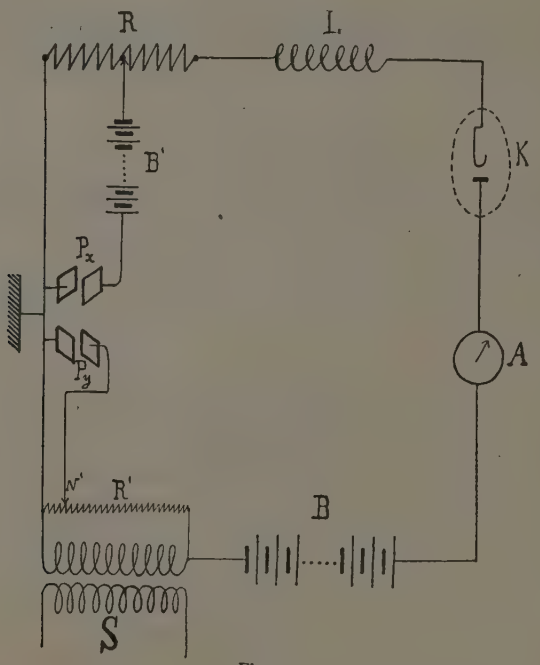


Fig. 1.

un punto N′ convenientemente scelto della resistenza grandissima R′ (posta in derivazione sul trasformatore) con la placca libera della coppia P_y si ha fra quest'altra coppia di placche un campo elettrostatico proporzionale al potenziale istantaneo alle estremità del trasformatore.

Così facendo si nota sullo schermo fluorescente dell'oscillografo una ellisse. È facile vedere che l'area di essa sta in una relazione semplicissima colla intensità della corrente.

A tale uopo consideriamo un sistema di assi coordinati (i, e) sui quali rappresentiamo l'intensità totale e la parte sinusoidale della f. e. m.

Nella fig. 2 se $\overline{OC} = j(1 + \alpha\overline{E})$, $\overline{OD} = E_0$, $\overline{CF} = j\alpha E_0$ si avrà che il rettangolo PQRS (di centro C) sarà tangente alla ellisse di Lissajous definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x = p \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \\ y = q \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

essendo (x, y) un sistema di assi parallelo ad (i, e) e coll'origine in C, $p = j\alpha E_0$, $q = E_0$.

L'area dell'ellisse corrispondente alla temperatura T è

$$\sigma = \pi pq \operatorname{sen} \varphi = \pi\alpha E_0^2 j \operatorname{sen} \varphi$$

se j è il valore della funzione j (T).

Analogamente per un'altra temperatura T_1 a cui corrisponde un valore j_1 di j (T) si avrà

$$\sigma' = \pi\alpha E_0^2 j_1 \operatorname{sen} \varphi_1 .$$

Per angoli φ non ragguardevoli si ha praticamente $\operatorname{tg} \varphi \cong \operatorname{sen} \varphi$, onde per la (3)

$$\frac{\sigma}{\sigma'} \cong \frac{j^2}{j_1^2} . \tag{5}$$

Quindi passando per es. da i a $2i$ si passerà da un ellisse di area σ ad un'altra di area 4σ il cui centro C' è tale che $\overline{OC'} = 2 \cdot \overline{OC}$ e $p' = 2p$.

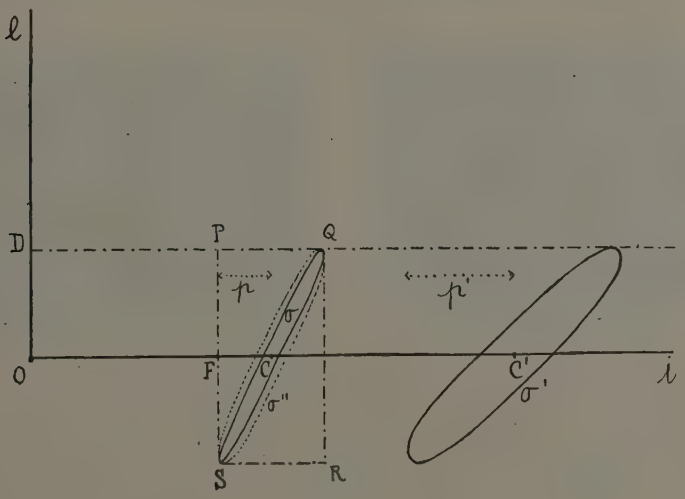


Fig. 2.

Per effetto della parte costante di i le ellissi venivano spostate dalla posizione centrale dello schermo e la seconda non poteva essere registrata perchè usciva fuori. Perciò ho usato una resistenza R per la intensità i e la resistenza $\frac{R}{2}$ per la intensità $2i$; così facendo il centro della seconda ellisse σ'' deve occupare sullo schermo la stessa posizione che occupava

quello della prima ed in più per questa seconda ellisse la p resta inalterata e ciò che in essa è cambiato è solo la fase che da φ è diventata φ_1 tale che $\operatorname{tg}\varphi_1 = \alpha L\omega \cdot 2j$. Dunque se σ'' è l'area di questa seconda ellisse si ha nell'attuale caso particolare $\sigma'' \cong 2\sigma$ ed in generale

$$\frac{\sigma}{\sigma''} \cong \frac{j}{j_1} \tag{6}$$

se per la seconda intensità media $j_1 \cdot (1 + \alpha\bar{E})$ si prendesse in luogo di R la resistenza $R \cdot \frac{j}{j_1}$.

Nella fig. 2 la ellisse σ'' è tratteggiata mentre le altre due sono a tratto continuo.

3. Nella esecuzione pratica è riuscito utile inserire una piccola batteria B_1 (Cfr. fig. 1) in guisa da eliminare fra le placche P_x tutta od in parte la deviazione elettrostatica dovuta alla parte costante di i.

Le modificazioni che subiva la piccola ellisse ottenuta sullo schermo dell'oscillografo col variare dell'intensità media fornita da A hanno provato

Fig. 3.

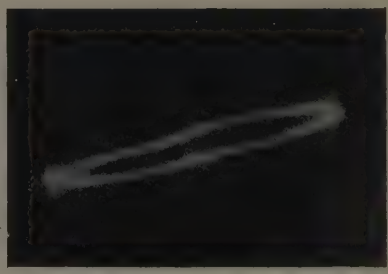


Fig. 4.

approssimativamente le formule (3) e (4). Le figg. 3 e 4 sono due fotografie di due ellissi ottenute con intensità medie eguali a 12 e rispettivamente 24 milliampère: la retta che le attraversa è l'asse delle i. Operando nel modo suddetto il centro della seconda ellisse σ'' andava ad occupare quello della ellisse σ e, come si vede, la ellisse della fig. 4 ha un'area doppia di quella della fig. 3.

Si osservi la lieve deformazione dalla forma ellittica, la quale non è dovuta alla valvola perchè sostituendo questa con una resistenza ohmica di grandezza conveniente, la forma rimane rigorosamente la stessa.

Il trasformatore era alimentato dalla corrente alternata stradale.

La tensione efficace nel secondario era circa 710. La bobina di autoinduzione adoperata presentava una resistenza di circa 24000 Ω ed aveva L = 740 Henry. La resistenza R relativa alla prima fotografia era di 7200 Ω circa e quella relativa alla seconda 3500 Ω; inoltre il secondario del trasformatore presentava una resistenza di 180 Ω.

Riguardo alla sensibilità si ha uno spostamento sulla lastra fotografica parallelamente all'asse i di 67 mm. per 6 milliampère riferendosi alla prima esperienza, e naturalmente circa la metà, precisamente di 33 mm. per 6 milliampère, nella seconda esperienza.

La lampada adoperata era una Philips (ZG-14-903). Il valore di k si ottiene misurando p e q sulla fotografia e tenendo conto dei dati relativi alla sensibilità. Si trova relativamente alla 1ª ellisse $k \cong 6.2 \times 10^{-7}$; allora dal valor medio $j + k\overline{E}$ dell'intensità (che è 12 milliampère) si ricava j e quindi $\alpha = \frac{k}{j}$ che viene circa 6×10^{-5}. Perciò per la 1ª esperienza si ha $\operatorname{tg} \varphi = \alpha L \omega j \cong 0.138$.

Misurando ora sulla fotografia i semiassi a, b della ellisse si può dalla relazione $ab = pq \operatorname{sen} \varphi$ ricavare $\operatorname{sen} \varphi$. Risulta $\operatorname{sen} \varphi \simeq 0.15$ cioè un valore che a meno del 9 % circa concorda col precedente. Se si pensa soprattutto alla difficoltà di misurare il semiasse minore si vede che questo divario rientra negli errori inevitabili di osservazione.

Fisica. — *A proposito di una influenza dei raggi X sulla cristallizzazione del bismuto* [1]. Nota di A. ROSTAGNI, presentata [2] dal Corrisp. A. POCHETTINO.

L'influenza, osservata da E. Adinolfi e da altri [3], della irradiazione del bismuto e di metalli affini durante la solidificazione, con raggi X o con raggi γ; influenza che si tradurrebbe in una alterazione duratura di varie proprietà dei metalli stessi allo stato solido: lasciava adito a non poche congetture per la interpretazione; e diverse prove sperimentali si presentavano per precisare la natura del fenomeno. Rimaneva, naturalmente, il dubbio che l'influenza, stessa ancora potesse dipendere eventualmente da qualche fattore accidentale non facilmente discernibile.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 15 aprile 1928.

(3) E. ADINOLFI, *Il fenomeno di Hall*. Un. Tip. Combattenti, Napoli, 1923; *L'influenza dei raggi X sulla cristallizzazione del bismuto*. « Rend. Acc. Lincei », *1*, 382, 1925; *L'effetto Hall e l'azione dei raggi X sul tellurio*. « Boll. soc. nat. », *38*, 114, 1926; M. CAMPA, *Il fenomeno di Hall nell'antimonio con campi deboli*. « Nuovo Cim. », *3*, 177, 1926; *Azione dei raggi X sulla cristallizzazione dell'antimonio*, « Nuovo Cim. », *4*, 28, 1927.

Perciò io ripresi lo studio delle accusate variazioni di potere termoelettrico: e, dopo prove con dispositivi sperimentali varii e risultati non sicuri, ricorsi ad un apparato che a me parve escludere ogni dubbio sulla identità di trattamento per i due bismuti, fuori del fatto specifico della irradiazione.

In un blocco d'alluminio di 30 mm. di spessore è praticata una scanalatura a forma di U, profonda 1 mm. e larga 12 (fig. 1-*a*). A questo si

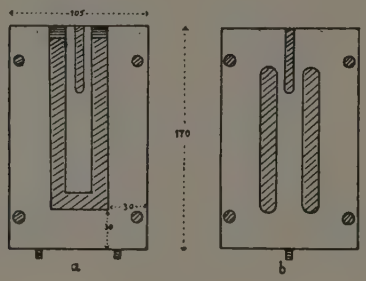


Fig. 1.

sovrappone una foglia pure di alluminio di 0.1 mm. di spessore, tenuta aderente da un secondo blocco di 30 mm. con due feritoie in corrispondenza dei tratti mediani delle scanalature del primo (fig. 1-*b*).

Riscaldato il sistema al disopra di 270° versavo il bismuto [1] fuso nella scanalatura ad U, tenuta verticale (come in figura), per una delle estremità. Raffreddato lo ponevo, sempre in posizione verticale, in una stufa elettrica di cartone d'amianto, rivestita esternamente per intero della foglia d'alluminio speculare di 0.1 mm. Nell'amianto solo era praticata una fenditura di dimensioni opportune in corrispondenza di una delle feritoie del blocco. La stufa stava a sua volta in una scatola di cartone d'amianto rivestita, all'interno, della solita foglia d'alluminio e recante pure una fenditura. A questa corrispondeva ancora all'esterno una fenditura eguale in una lastra di piombo che riparava il rimanente della scatola.

A pochi millimetri stava il tubo « focus » azionato da un rocchetto con interruttore elettrolitico, sotto una tensione fra 60 e 80 KV. (dedotta dalla distanza esplosiva tra sfere di 3 cm. di diametro) ed una intensità variabile fra 3 e 5 mA. Era facile controllare l'allineamento delle successive fenditure; e la effettiva accessibilità del bismuto ai raggi con l'aiuto di una sonda fluorescente. Lo spessore di 0.3 mm. d'alluminio interposto diminuiva pochissimo l'intensità della radiazione.

(1) Fornito dalla casa Poulenc.

Il blocco interno e la stufa, come questa e la scatola esterna, erano separati da strati d'aria, allo scopo sempre di regolarizzare la dispersione del calore.

Un termometro introdotto nel blocco secondo l'asse permetteva di sorvegliarne la temperatura. Avevo osservato che il bismuto, di solito, sceso in soprafusione a 262° del mio termometro, solidificava poi intorno a 268°: perciò usavo, nella preparazione dei campioni, mettere in azione il tubo, durante il raffreddamento, fra i 275° e i 273°, e fermarlo fra i 255° e i 245°; dopo un tempo di funzionamento compreso fra 15 e 30 minuti. Al ritorno alla temperatura ambiente occorrevano oltre 12 ore.

Nel raffreddamento non potevano evidentemente sorgere apprezzabili disparità fra i due rami della scanalatura ad U, date le dimensioni e la conducibilità termometrica del blocco, e gli ulteriori molteplici ripari. Soltanto, un solo ramo riceveva i raggi X, mentre l'altro ne era completamente riparato. Era evitata inoltre l'ossidazione superficiale, eliminato il contatto prolungato del metallo fuso coll'aria libera. Era attribuito allo strato uno spessore definito e non grande, per evitare che la porzione attraversata ancora dai raggi, dato l'elevato coefficiente d'assorbimento, si riducesse ad una frazione trascurabile (1).

Sui campioni così preparati, istituii le misure di potere termoelettrico. Anzichè confrontarli direttamente fra loro, preferii riferirli tutti ad un termine fisso: e ricorsi al seguente dispositivo, che trovai in pratica particolarmente adatto allo scopo.

Un blocco di rame elettrolitico di mm. $40 \times 40 \times 15$ reca al centro della faccia maggiore una feritoia, nella quale viene introdotta, perpendicolarmente alla faccia stessa, un'estremità della lamina in esame, trattenuta a pressione. L'altra estremità è saldata con lega di Wood ad un filo pure di rame, ed è immersa nel ghiaccio fondente. Presso di questa saldatura sta una saldatura (isolata) rame–costantana; l'altro estremo della costantana è saldato al blocco di rame. Il blocco è rivestito di sughero e sta nell'aria ambiente.

Misuravo le forze elettromotrici della coppia rame–bismuto in esame e di quella rame-costantana di riferimento con un potenziometro, inserendo alternativamente più volte l'una e l'altra ad intervalli di mezzo minuto: con che controllavo l'andamento della temperatura, in modo da poter stabilire con opportune medie i valori corrispondenti ad un medesimo istante per le due coppie.

Ottenni così valori del potere termoelettrico compresi fra quelli trovati per il bismuto fuso dagli altri sperimentatori (2), sempre variabili entro limiti

(1) Per quanto manchino indicazioni a questo proposito nei lavori citati.

(2) Cfr. LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Physikalisch-chemische Tabellen*. Inoltre: W. HAKEN, *Thermoelektrische Eigenschaften der Metallegierungen*. « Ann. d. Phys. », *32*, 291, 1910.

innegabilmente larghi: come si spiega perfettamente data la enorme differenza tra i valori corrispondenti alle due direzioni cristallografiche principali [1], e data la struttura macrocristallina dei getti ottenuti in condizioni ordinarie.

Riporto nella tabella seguente i risultati relativi a 10 fusioni, esprimenti la forza elettromotrice rispetto al rame in μV per grado di differenza di temperatura. I numeri di ciascuna verticale si riferiscono ad un medesimo getto: quelli delle linee superiori al ramo dell'U non irradiato, gli inferiori a quello irradiato. I doppî valori per uno stesso ramo si hanno per il fatto che uno di questi per lo più, dimezzato, mi forniva due laminette di 50 mm. che studiavo separatamente: le differenze confermano quanto è detto sopra della incertezza del potere termoelettrico del bismuto fuso.

Bi	57	62	56	58	57	59	58	53	53	57
	55		62		56	59	57			
Bi_x	53	58	62	57	56	59	55	53	53	53
		56		63	60	61	54			

Nessuna tendenza a variare in un senso determinato per effetto delle radiazioni si delinea negli scarti irregolari dei numeri della tabella; nè, data l'entità e l'ambiguità di segno di quelli, è lecito considerare altrimenti che fortuito il fatto che la media dei valori riportati per il bismuto irradiato, 56.9, sia un poco inferiore a quella relativa agli altri campioni, che vale 57.3, la differenza sta del resto nei limiti stessi dell'errore di misura dei singoli dati.

Ero così portato ad escludere ogni efficacia dei raggi X nella disposizione sperimentale da me adottata. Volli ad ogni modo stabilire se l'azione per avventura fosse più sentita su altre proprietà del metallo: in particolare su una che, essendo scalare, non può essere turbata da anomalie casuali nella orientazione dei cristalli: voglio dire sul calore specifico, che, ove possa essere misurato con sufficiente sensibilità, è certamente uno dei mezzi più sicuri a rivelare una eventuale trasformazione allotropica di una sostanza.

Mi servii di un piccolo calorimetro a mescolanze, in lamiera d'ottone di 0.05 mm., capace di 50 gr. d'acqua; sorretto da puntine di vetro in un

(1) Secondo il Lownds (« Ann. d. Phys. », *6*, 148, 1901) si ha per il coefficiente α (in base alla notazione solita della legge di Avenarius) fra $-80°$ e $0°$ in direzione normale all'asse -45.5, e -127.4 parallelamente ad esso.

secondo recipiente metallico a pareti speculari, contenuto a sua volta in un vaso di Dewar. Riunivo insieme per ogni misura più campioni dello stesso tipo: realizzando masse di metallo di circa 50 gr., e determinando in tal modo direttamente un valore medio dei calori specifici dei varii campioni, ammesso che fra di essi vi fosse stata differenza.

Riscaldavo a 97°-98° in stufa ad acqua ed effettuavo il trasporto nel calorimetro direttamente, senza artifici speciali. La temperatura del calorimetro, indicata da un termometro Baudin diviso in cinquantesimi di grado, inizialmente quasi costante sui 15°, saliva rapidamente a un massimo, per poi discendere con buona regolarità, che permetteva di determinare con un errore inferiore a $^1/_{100}$ di grado l'innalzamento (di circa 2°.5) corrispondente alla quantità di calore del corpo in esame all'atto dell'immersione. L'incertezza maggiore era nel calore perduto nel trasporto dalla stufa: ma con un poco di esercizio alla manovra potei ridurre notevolmente gli scarti.

Ebbi, dalle misure più attendibili, i valori

0.0301 0.0302 0.0304 con media 0.03023

per il bismuto irradiato, contro

0.0302 0.0303 0.0304 con media 0.03030

per il bismuto solidificato in condizioni normali. I valori concordano bene con quelli assegnati per il bismuto, nell'intervallo di temperatura considerato, dagli altri sperimentatori [1]; e lo scarto fra i due valori medii, essendo inferiore all'errore sperimentale previsto, non porta ad attribuire una differente costituzione ai due corpi in esame.

(1) Compresi fra 0.0302 e 0.0304; cfr. SCHIMPFF, «Zs. f. ph. Ch.», 71, 257, 1910.

Chimica. — *Ricerche chimiche sull'olivina di Linosa* [1] *(Isole Pelagie).* Nota di G. CAROBBI, presentata [2] dal Socio F. ZAMBONINI.

Grazie alle ricerche chimiche dell'illustre petrografo ed analista americano H. S. Washington [3], l'isola di Linosa ha acquistato negli ultimi anni un notevole interesse, sia per quanto riguarda la composizione chimica delle rocce, che per quanto si riferisce ai minerali che risultano dal disfacimento di alcune delle rocce stesse. Il dott. Washington ha, infatti, minutamente studiato un notevole plagioclasio di Linosa, chiamato anemusite, nel quale, oltre ai costituenti già noti dei plagioclasi, è stata accertata quella del composto triclino $NaAlSiO_4$, che ha ricevuto il nome di carnegieite: l'analisi della horneblenda in cristalli, eseguita con molta abilità dallo stesso Washington, ha mostrato la grande somiglianza di composizione chimica che intercede fra quell'anfibolo e la kaersutite di Groenlandia.

Ho accolto, perciò, con gran piacere, l'invito rivoltomi dal professore O. De Fiore, che vivamente ringrazio, di sottoporre ad indagini chimiche i cristalli di olivina che egli ha raccolto nella sua recente esplorazione geologica dell'isola di Linosa. Era da sperare, infatti, che anche l'olivina, così come i feldspati e l'anfibolo di Linosa, avrebbe presentato qualche carattere interessante. Nè l'aspettativa è andata delusa: l'olivina studiata, infatti, oltre a risultare abbastanza fortemente ferrifera, ha presentato un contenuto notevole in nichelio ed in cobalto, e, ciò che è ancor più degno di nota, in piombo, elemento finora mai osservato nelle olivine, almeno per quanto mi consta.

I cristalli che io ho avuto a disposizione, raccolti alla Montagnella del Posto che è un cono avventizio della Montagna Rossa [4], erano superficialmente di color bruno rossastro e tutti più o meno alterati. Solo frantumandone diversi abbiamo potuto mettere insieme una piccola quantità di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 15 aprile 1928.

(3) WASHINGTON H. S., *Linosa and its rocks.* « Am. Journal Sc. », *16*, 1-35, Chicago 1909; *On Kearsutite from Linosa and Greenland with optical studies by* E. F. WRIGT. « Am. Journ. Sc. », *26*, 187-211; WASHINGTON H. S. and WRIGT F. E., *A felspar from Linosa and the existence of soda anorthite (Carnegieite).* « Am. Journ. Sc. », *29*, 51-90 (1910).

(4) Vedi O. DE FIORE, *Linosa (Isole Pelagie).* « Bollettino della Società dei Naturalisti », ser. II, vol. 19, pp. 65-139, Napoli 1928.

materiale puro per l'analisi e cioè una porzione di frammentini assolutamente trasparenti, privi di inclusioni, di colore giallo verdiccio ed un'altra porzione di frammenti di colore giallo rossastro, provenienti in genere dalle parti più superficiali dei cristalli, ma sempre trasparenti e privi di inclusioni.

Le inclusioni erano generalmente dovute a magnetite e furono accuratamente separate.

La lunghezza dei cristalli studiati era di circa 1 cm. secondo l'asse *c*; essi erano assai poveri di forme semplici, io non ho osservato che:

$$b\{010\}\ ,\ c\{001\}\ ,\ m\{110\}\ ,\ s\{120\}\ ,\ k\{021\},$$

le quali appartengono tutte, com'è noto, alle più comuni nelle olivine.

I cristalli erano allungati secondo l'asse *c*, nella zona [001] presentavano *b* ed *m* quasi egualmente sviluppati con leggero predominio di *b*, *s* era del tutto subordinato. La base *c* è sempre molto esile.

Gli angoli misurati sono riuniti nella seguente tabella I:

Tabella I.

Angoli	Limiti delle misure	N.	Media	Calcolati	
				Fayalite	Forsterite
$(110):(1\bar{1}0)$	49°30′ — 50°18′	10	50° 3′	49°24′	49°53′
$(120):(1\bar{2}0)$	85°14′ — 85°29′	13	85°28′	85°13′ 3/4	85°51′ 1/4
$(010):(120)$	47°13′ — 47°48′	13	47°27′	47°23′ 1/8	47° 4′ 1/3
$(120):(110)$	17°44′ — 18°13′	6	17°58′	17°54′ 3/4	17°59′ 1/6
$(021):(0\bar{2}1)$	98°39′ — 98°45′	3	98°42′	98°35′	99° 7′ 1/3
$(010):(021)$	—	—	40°44′	40°42′ 1/2	40°26′ 1/3
$(110):(010)$	64°35′ — 65°21′	12	64°58′	65°22′ 1/2	65° 3′ 1/2

In complesso i valori degli angoli possono ritenersi compresi fra quelli della forsterite e quelli della fayalite, salvo per quelli che si riferiscono a {110} i quali sono fuori dei limiti suddetti, ma più che di una vera e propria eccezione alla regola di Beudant–Dufet, in questo caso, potrebbe trattarsi semplicemente di imperfezioni che appaiono evidenti dai limiti estesi entro i quali oscillano le misure.

Ricordo, però, che anche Stella Starrabba [1] nella varietà chiara dell'olivina dei Monti Rossi ha trovato un'anomalia simile. D'altra parte, queste

(1) *Primo contributo allo studio delle olivine dell'Etna.* « Memorie della classe di Scienze della R. Accademia degli Zelanti », 3ª serie, *9* (1916-1917).

osservazioni non possono meravigliare, dopo che Zambonini [1] ha trovato che si possono avere dei cristalli misti bellissimi e regolarissimi di molibdato di calcio e di molibdato di didimio (ed anche di altri molibdati di metalli delle terre rare e di metalli alcalino terrosi), nei quali i valori angolari vanno al di fuori dei limiti constatati per i componenti puri.

Il peso specifico determinato col metodo della sospensione usando il liquido di Clerici [2] al formiato-malonato di tallio e la bilancia di Westphal, è risultato eguale a 3.410 a 19° per i frammenti di colore giallo verdiccio e di 3.462 sempre a 19° per i frammenti di colore giallo rossastro.

L'analisi chimica è stata condotta separatamente per le due specie di frammenti. I metodi analitici usati sono stati i soliti.

Il manganese è stato dosato colorimetricamente ossidandolo, dopo eliminati i cloruri, con persolfato d'ammonio in presenza di nitrato d'argento e operando come consiglia F. W. Hillebrand [3].

Il nichel ed il cobalto sono stati prima pesati insieme separandoli elettroliticamente dalla soluzione; furono poi ridisciolti e nel miscuglio dosai il nichel pesandolo allo stato di nicheldimetilgliossima. L'acqua è stata determinata per pesata diretta secondo il metodo di S. L. Penfield [4]; nel dosaggio del ferro allo stato ferroso seguii il metodo di Pratt [5]. Speciale cura posi nel dosaggio del Pb. Il residuo del trattamento di una porzione del minerale con acido fluoridrico e solforico fu trattato con una soluzione ammoniacale di acetato ammonico in modo da sciogliere il $PbSO_4$ e separarlo da eventuali impurezze. Il solfato di Pb separato dalla soluzione in acetato ammonico e pesato, fu trattato, sotto il microscopio, con joduro potassico, in modo da confermare la presenza del piombo stesso. La reazione riuscì nettamente positiva. Sciogliendo poi il solfato in qualche goccia di H_2SO_4 concentrato e svaporando il liquido molto lentamente si ottennero i caratteristici cristallini di $PbSO_4$ dimodochè la presenza del piombo è fuori di dubbio.

In ogni modo abbiamo anche fatto, con esito positivo la reazione di recente proposta da A. Necke, P. Schmidt e M. Klostermann [6] per la ricerca e la determinazione di piccole quantità di piombo.

I risultati dell'analisi possono essere così riassunti:

(1) « Rivista di mineralogia e cristallografia italiana », vol. 45 (1915), p. 144 dell'estratto.

(2) « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », [5] *16*, 187, (1907); « Id. », [5] *31*, 116, (1922); « Id. », [6] *1*, 329, (1925); vedasi anche « Nuovi Annali del Ministero per l'Agricoltura », I, n. 2 (31 dicembre 1921).

(3) *The analysis of silicate and carbonate rocks* (1910), p. 117.

(4) « Am. Journ. Sc. », [3] *48*, 31 (1894); « Z. anorg. Chem. », 7, 22 (1894).

(5) « Am. Journ. Sc. », [3] *48*, 150 (1894).

(6) « Deutsch. med. Wochschr. », *52*, 1855-56 (1926). Vedi anche « Zentralblatt », 1927, I, 151.

TABELLA II.

Frammenti di colore giallo verdiccio Peso specifico a 19° 3.410					Frammenti di colore giallo rossastro Peso specifico a 19° 3.462				
		R. M.				R. M.			
SiO_2	39.16	0.649	0.649	1	SiO_2	39.11	0.649	0.649	1
$^2/_3 Fe_2O_3$	2.98	0.0124			$^2/_3 Fe_2O_3$	5.63	0.0234		
Al_2O_3	assente				Al_2O_3	assente			
FeO	12.43	0.1730			FeO	11.06	0.154		
MnO	0.21	0.0030			MnO	0.18	0.0025		
NiO	0.12	0.0016	1.267	1.95	NiO	0.18	0.0024	1.231	1.89
CoO	0.13	0.0017			CoO	0.10	0.0013		
PbO	0.20	0.0009			PbO	0.26	0.0012		
MgO	42.70	1.0571			MgO	41.38	1.026		
CaO	0.96	0.0170			CaO	1.19	0.021		
SrO, BaO (1)	tracce				SrO, BaO	tracce			
H_2O	0.98				H_2O	0 50			
Totale	99.87				Totale	99.59			

Come appare dall'analisi, nell'olivina di Linosa il ferro allo stato ferrico è presente in notevole quantità. Nei frammenti di colore giallo verdiccio dei cristalli studiati è stato trovato il 2.98 % di Fe_2O_3 mentre nei frammenti giallo rossicci il ferro ferrico ammontava al 5.63 %. Non è la prima volta che nelle olivine si rinvengono notevoli quantità di ferro ferrico: quella del basalto di St. Angel (2) (Messico) studiata da C. Castro contiene il 3.34 % di Fe_2O_3; F. Stella Starrabba (3) nelle olivine dei Monti Rossi ha trovato rispettivamente il 5.24 % Fe_2O_3 nella varietà chiara ed il 5.82 % nella varietà hyalosideritica. È poi notissimo che A. Moitessier e poi F. Gonnard hanno trovato quantità rilevanti (anche il 14.27 %) di Fe_2O_3 in alcune olivine del Puy-de-Dôme che essi ritennero alterate.

Non è ancora ben chiaro se la presenza del ferro ferrico, che quasi sempre si trova nelle olivine di origine vulcanica, sia dovuto ad un'alterazione o se effettivamente preesista nella molecola quale sostituente isomorfo del ferro ferroso e del magnesio. È certo che nelle mie analisi, se invece di considerare (come ho fatto nella precedente tabella II) il ferro ferrico

(1) Questi elementi sono stati identificati allo spettroscopio.
(2) Vedi C. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*, vol II, p. 299.
(3) Loc. cit., pp. 60 e 62.

come sostituente del ferro ferroso, si calcola tutto il ferro come FeO e si riporta la somma a cento trascurando l'acqua (tabella III) si hanno dei rapporti molecolari assolutamente concordanti con quelli richiesti dalla formula dell'olivina. Ed è importante notare che, come appare dalla precedente tabella II, la maggiore discordanza fra i valori teorici del rapporto SiO_2 : (MgO, FeO, ecc.) e quelli trovati si ha nell'analisi dei frammenti giallo rossicci (1 : 1.89 invece di 1 : 2) che contengono una maggiore quantità di ferro ferrico e che sono, evidentemente, i più alterati.

I frammenti di cristalli da me analizzati erano visibilmente limpidi, ma ciò, a mio avviso, non impedisce di pensare che la presenza del ferro ferrico sia dovuta ad una alterazione giacchè nella mineralogia non mancano esempi di cambiamenti nella costituzione chimica non accompagnati da visibili alterazioni.

Basterà citare il fosfato di ferro ottoidrato (vivianite) recentemente ristudiato da W. Ipatiew e W. J. Nikolajew [1].

Giova anche notare che i frammenti di colore giallo rossastro contenevano una maggiore quantità di ferro ferrico di quelli di colore giallo verdiccio e ciò avvalorerebbe l'ipotesi di C. Thaddeeff [2] secondo il quale il colore rosso che assumono le olivine col riscaldamento sarebbe almeno in parte dovuto al passaggio del ferro ferroso a ferrico.

Tabella III.

Frammenti di colore giallo verdiccio Peso specifico 3.410					Frammenti di colore giallo rossastro Peso specifico 3.462				
		R. M.					R. M.		
SiO_2	39.72	0.659	0.659	1	SiO_2	39.67	0.657	0.657	1
FeO	15.29	0.213			FeO	16.36	0.228		
MnO	0.22	0.003			MnO	0.19	0.003		
NiO	0.13	0.002			NiO	0.19	0.002		
CoO	0.14	0.002	1.312	1.99	CoO	0.12	0.002	1.299	1.98
PbO	0.21	0.001			PbO	0.27	0.001		
MgO	43.31	1.074			MgO	41.98	1.041		
CaO	0.98	0.017			CaO	1.22	0.022		
SrO, BaO	tracce				SrO, BaO	tracce			
Totale	100.00				Totale	100.00			

(1) « Ber. Deutsch. Chem. Ges. », *59*, 1412 (1926).
(2) « Z. f. Krystall. und Min. », XXVI, 74 (1896).

Per il suo contenuto in ferro totale l'olivina analizzata può essere paragonata a quella del Monte Somma analizzata dal Nalmestedt [1] (15.26 % di FeO), al peridoto rosso dei proietti della lava vesuviana del 1631 analizzato da Scacchi [2] (14.90 % FeO) nonchè al campione vesuviano studiato da H. Backlund [3]. Anche la composizione dell'olivina del basalto di Medres [4] (S. Tarjan) e di quelle di Pedra Molas, S. Antâo [5] (Capoverde) e della lava dell'isola di Fogo [6] (Capoverde) si avvicinano molto a quella dell'olivina di Linosa.

Nelle due olivine delle isole del Capoverde, in quella dei blocchi del Monte Somma ed in quella del Vesuvio analizzata dal Backlund sono state rinvenute piccole quantità di alluminio, mentre per le altre sopra citate gli Autori non riferiscono di averci trovato l'alluminio. Io ho avuto speciale cura nella ricerca di questo elemento ma i risultati sono stati sempre negativi.

Il nichel ed il cobalto che, com'è noto, sono spesso presenti in piccolissime quantità nelle olivine sono stati rinvenuti anche nell'olivina di Linosa in quantità non trascurabile (NiO 0.12 e 0.18 %; CoO 0.13 e 0.10 % rispettivamente per i frammenti di colore giallo verdiccio e giallo rossastro).

Di notevole importanza è la presenza, nell'olivina di Linosa, del piombo che, per quanto io sappia non era mai stato trovato in questo minerale.

S. L. Penfield [7] e C. H. Warren hanno rinvenuto il piombo in discreta quantità (1.74 % di PbO) nella glaucocroite di Franklin (N. Jersey), minerale che, com'è noto, è isomorfo con l'olivina.

È ben noto poi l'isomorfismo di vari composti di piombo con i corrispondenti composti di metalli alcalini terrosi (dei quali il Ca è spesso presente nelle olivine) e non si può escludere che fra il piombo ed i metalli del gruppo isomorfogeno del magnesio esistano delle relazioni di isomorfismo, per quanto con limitata solubilità allo stato solido fra i componenti la miscela isomorfa.

In natura un esempio di isomorfismo, fra il piombo ed i metalli del gruppo isomorfogeno del magnesio è dato dalla titanolivina della Val d'Ala (Piemonte). Infatti, in questo minerale, la cui composizione, secondo le accurate ricerche del prof. F. Zambonini [8], è quella di una clinohumite senza fluoro, il piombo (0.14 %) sostituisce certamente il magnesio [9].

(1) « Vetensk. Akd. Handling. », Stockholm, II, 359.
(2) « Memorie della Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL), IV, n. 8, p. 27.
(3) « Travaux Musée géol. St. Petersbourg », *3*, 93 (1909).
(4) B. Mauritz, « Föltan. könbön. », *40*, 581 (1910).
(5) Vedi C. Doelter, *Vulk. Gest. der Capverd.* Graz 1882.
(6) Ch. Sainte-Claire Deville, « Z. deutsch. geol. Ges. », *5*, 693 (1853).
(7) « Am. Journ. », *8*, 339 (1899).
(8) *Sur la véritable nature du titanolivine de la vallée d'Ala (Piémont).* « Bull. de la Soc. Franç. de Min. » *42*, aprile 1919.
(9) Mentre il lavoro era in corso di stampa sono state publicate delle analisi di larsenite e di calcio-larsenite (« The American Mineralogist », aprile 1928), che costituiscono un bello esempio di sostituzione isomorfa del piombo a metalli del gruppo isomorfogeno del magnesio.

Possiamo quindi logicamente supporre che anche nell'olivina analizzata il Pb sostituisca isomorficamente il magnesio e gli altri metalli del suo gruppo isomorfogeno. L'analisi spettroscopica ha rivelato piccole traccie di stronzio e di bario finora, per quanto io sappia, non segnalati con sicurezza nelle olivine, ma la cui presenza è spiegabilissima data la presenza del Ca.

I due composti $(Fe, Co, Ni, Mn)_2SiO_4$ e $(Mg, Ca, Pb)_2SiO_4$ costituiscono rispettivamente il 77.5 % ed il 22.5 % dei cristalli misti analizzati.

Il rapporto $(Fe, Co, Ni, Mn)_2SiO_4 : (Mg, Ca, Pb)_2SiO_4$ è eguale a 5. Si tratta quindi di un'olivina ricca in ferro ma non della varietà hyalosideritica.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* – V. *Composti di addizione con l'urotropina* [1]. Nota di F. Rodolico, presentata [2] dal Corrispondente L. Rolla.

Come è noto, la facoltà di dar luogo a composti di addizione con basi organiche è proprietà generale di quasi tutti i composti inorganici e in particolar modo degli alogenuri metallici e dei sali ossigenati. Ed è altresì noto come a tali composti non si attribuisca alcuna complessità, e si preferisca di ritenerli composti reticolari, nei quali la base organica ha la funzione dell'acqua di cristallizzazione. La preparazione di sali di questo tipo presenta in generale scarso interesse, salvo per alcuni casi particolari, nei quali l'aggiunta di basi organiche dà luogo a prodotti molto più stabili e ben cristallizzati. Così, continuando la serie di ricerche iniziate dal prof. Fernandes sui solfo– e solfossisali e sulla loro costituzione, ho, per suo consiglio, studiata la forma cristallina di alcuni solfo– e solfossisali per potere osservare come tale forma varî con la graduale sostituzione di atomi di ossigeno con atomi di solfo. Al mio scopo servirono assai bene alcuni composti di addizione con l'urotropina poichè essi presentano stabilità maggiore dei sali normali e maggiore tendenza a cristallizzare. Ho preparato e studiato le seguenti serie di composti:

(1) Questo lavoro fa parte di una serie di *Ricerche sui solfosali* eseguite nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze. Le ricerche precedenti sono: I. L. Fernandes, *Nota preliminare*, « Rend. Acc. Lincei », V, 6, 4 (1927); II. L. Fernandes e F. Palazzo, *Solfossimolibdati di ammonio e guanidina*, « Id. », V, 6, 5 (1927); III. L. Fernandes e F. Palazzo, *Complessi polifenolici*, « Gazz. chim. ital. », LVII, VIII (1927); IV. L. Fernandes, *Sopra alcuni derivati di un ipotetico acido tioacquico*, « Rend. Acc. Lincei », VI, 6, 5 (1927).

(2) Nella seduta del 1° aprile 1928.

$MgMoO_4 \cdot Ur \cdot 10H_2O$	$MgWO_4 \cdot Ur \cdot 10H_2O$
$MgMoSO_3 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$	$MgWSO_3 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$
$MgMoS_2O_2 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$	$MgWS_2O_2 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$
$MgMoS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$	$MgWS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$
$MgMoS_4 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$	$MgWS_4 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$.

Non mi è stato possibile lo studio cristallografico di tutti questi sali perchè non tutti hanno dato cristalli misurabili. Per la preparazione di questi composti adoperavo generalmente solfosali alcalini, ai quali aggiungevo a caldo cloruro di magnesio e urotropina. Da tale soluzione per raffreddamento si separavano prodotti cristallini. Per la preparazione del sale

$$MgMoS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$$

non essendo conosciuto alcun tipo di composto trisolforato del molibdeno, mi sono servito di una soluzione ammoniacale di molibdato ammonico trattandola con H_2S sino ad ottenere una colorazione intermedia tra quella arancione del sale $(NH_4)MoS_2O_2$ e quella rossa del sale $(NH_4)_2MOS_4$. Una tale colorazione intermedia non sfugge a chi abbia una certa pratica di queste colorazioni. A causa forse delle condizioni di solubilità la separazione del sale di ammonio non è possibile, nè di esso è ricordo nella letteratura. L'aggiunta di urotropina in presenza di un sale solubile di magnesio dà luogo alla formazione di un bellissimo sale rosso-cupo assai stabile e facilmente ricristallizzabile.

Come ho detto lo scopo di questa ricerca è stato quello di studiare le relazioni cristallografiche tra i varî sali: ho potuto osservare che alla graduale sostituzione dell'ossigeno allo solfo non corrispondono nei cristalli variazioni morfotropiche. Queste osservazioni portano un nuovo contributo all'ipotesi della complessità dei solfosali già avanzata da L. Fernandes e da F. Palazzo [1] in base alla loro colorazione. Infatti il colore varia in altre serie di solfo- e solfossisali discontinuamente come varia in queste la forma cristallina: così, ad esempio, la colorazione della soluzione N di $(NH_4)_2MoS_4$ è molto più intensa di quella della soluzione 2N di $(NH_4)_2MoS_2O_2$.

Parte sperimentale.

$MgMoO_4 \cdot Ur \cdot 10H_2O$:

Questo composto era già stato preparato e analizzato da C. Di Capua [2]. Si ottiene aggiungendo ad una soluzione di molibdato sodico del cloruro di magnesio e della urotropina. Si presenta in cristalli incolori apparentemente simmetrici rispetto a un solo piano al quale ho attribuito il simbolo (010). Sembrerebbe quindi che essi appartenessero al sistema monoclino; però

(1) «Gazz. Chim. Ital.», LVII, VIII (1927).
(2) «Gazz. Chim. Ital.», LV, XII (1925).

le osservazioni ottiche dimostrano che effettivamente sono triclini. Sono costantemente presenti tre pinacoidi che si possono considerare: {100}, {010}, {001}.

$$(001) : (010) = 90° \text{ ca.}$$
$$(001) : (100) = 65°18'$$
$$(100) : (010) = 90° \text{ ca.}$$

I cristalli si presentano tabulari secondo {100} ed allungati secondo [z]. Generalmente si notano nella zona [100] quattro facce inclinate di 58° ca. sulle facce di (001) e, più raramente, nella zona [010] quattro facce inclinate rispettivamente di 33° 1/2 ca. e di 61° 1/2 ca. sulle facce di (001). L'incertezza delle misure dipende dalle immagini multiple e confuse che sono riflesse dalle facce; non avendo pertanto valori angolari sicuri non ho creduto di calcolare le costanti. che, in ogni modo, sarebbero state solo approssimative. I cristalli sono sempre geminati secondo la normale alla faccia (010) ed uniti secondo (100). In tutte le facce della zona [100] si osservano le suture di geminazione parallele alle facce di {100}. All'esame ottico i cristalli adagiati su una delle facce più sviluppate di {100}, mostrano il contegno dovuto alla sovrapposizione dei due cristalli geminati. Solo in lamine sottilissime, ma a contorni ben delineati, si vede una sola e nitida figura di interferenza biassica con la bisettrice acuta quasi normale a {100}. Il carattere della birifrazione è negativo; la traccia del piano degli assi ottici forma un angolo di circa 70° con quella di {010}.

$MgMoSO_3 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Ad una soluzione di molibdato di magnesio ottenuta per azione del carbonato di magnesio sull'anidride molibdica ho aggiunta dell'urotropina, e nel liquido ho fatto gorgogliare molto lentamente idrogeno solforato. Si separa a poco a poco intorno alla squadretta di vetro una polvere microcristallina giallo-chiara che non è possibile ricristallizzare per ottenere cristalli misurabili. Per l'analisi di questo e degli altri solfomolibdati un campione veniva trattato con ammoniaca e acqua ossigenata in modo da ossidare lo solfo a solfato ammonico; e questo veniva poi precipitato con cloruro di bario. Su altro campione veniva precipitato il molibdeno con idrogeno solforato in soluzione debolmente cloridrica, e il magnesio nel filtrato con fosfato sodico. Per l'urotropina veniva determinato l'azoto col metodo gasvolumetrico.

per $MgMoS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato %	Mo 14.51	S 4.70	Mg 3.55	N 16.77
Calcolato %	Mo 14.53	S 4.85	Mg 3.68	N 16.95

$MgMoS_2O_2 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Ho ottenuto questo composto sotto forma di polvere microcristallina giallo-chiara per azione del $(NH_4)_2MoS_2O_2$ su cloruro di magnesio e urotropina.

per $MgMoS_2O_2 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato %	Mo 14.16	S 9.43	Mg 3.55	N 16.57
Calcolato %	Mo 14.18	S 9.47	Mg 3.59	N 16.55

$MgMoS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Come ho già accennato, per ottenere questo composto una soluzione di molibdato di ammonio satura di ammoniaca fu trattata con idrogeno solforato sino ad ottenere una colorazione rosso–arancione, ed a questa

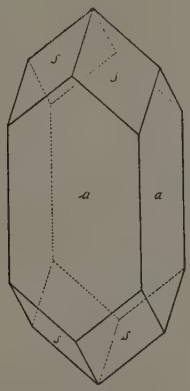


Fig. 1.

furono aggiunti cloruro di magnesio e urotropina. Il prodotto separatosi quasi subito fu ricristallizzato. I cristalli di colore rosso–cupo appartengono al sistema dimetrico; essi hanno abito prismatico, sono molto imperfettamente conformati, e di solito non sono terminati. Ho potuto misurare un solo cristallino di circa 1 mm. di lunghezza costituito dalla combinazione: $a\{100\}, s\{111\}$ (fig. 1). Dall'angolo:

$$(100) : (111) = 60°$$

si calcola la costante:

$$a : c = 1 : 0.7072 .$$

I cristalli sono birifrangenti, uniassici, positivi.

per $MgMoS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato %	Mo 13.72	S 13.45	Mg 3.87	N 15.96
Calcolato %	Mo 13.86	S 13.89	Mg 3.51	N 16.17

$MgMoS_4 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Anche per la preparazione di questo sale mi sono servito del metodo adoperato nel caso del composto bisolforato. Per ricristallizzazione ottenni piccoli cristalli (1-3 mm. nella massima dimensione) nitidissimi, di colore rosso-cupo, appartenenti al sistema monoclino. Dagli angoli:

$$(100) : (110) = 39°17'$$
$$(110) : (111) = 31°1'$$
$$(100) : (111) = 45°44'$$

si calcolano le costanti:

$$a : b : c = 0.8296 : 1 : 0.9764 .$$
$$\beta = 80°25' 1/2 .$$

Sono presenti le forme: $a\{100\}$; $m\{110\}$; $k\{011\}$; $p\{111\}$; $c\{\bar{1}11\}$; $q\{20\bar{2}\}$; $z\{21\bar{1}\}$; $t\{11\bar{2}\}$ riunite nelle seguenti combinazioni:

a) $\{110\}, \{111\}, \{\bar{1}11\}, \{011\}$.
b) $\{110\}, \{111\}, \{\bar{1}11\}, \{011\}\{100\}$.
c) $\{110\}, \{111\}, \{\bar{1}11\}, \{011\}, \{100\}, \{20\bar{2}\}, \{21\bar{1}\}$.
d) $\{110\}, \{111\}, \{\bar{1}11\}, \{011\}, \{100\}, \{20\bar{2}\}, \{21\bar{1}\}, \{11\bar{2}\}$.

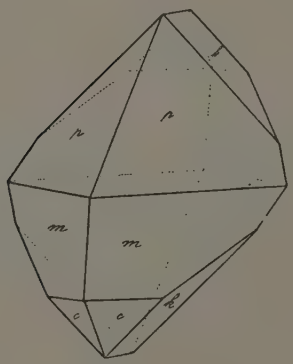


Fig. 2.

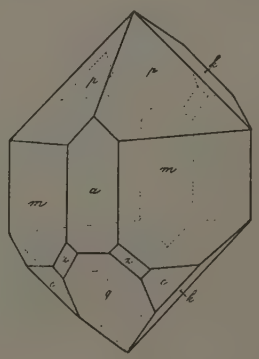


Fig. 3.

Le combinazioni *a*) e *c*) rappresentate nelle figure 2 e 3 sono le più comuni.

Angoli	Limiti delle misure	N.	Medie	Calcolati
(100) : (110)	39°15′ — 39°18′	7	*39°17′	—
(110) : (111)	31 — 31 8	10	*31 1	—
(100) : (111)	45 43 — 45 45	5	*45 44	—
(111) : (1$\bar{1}$1)	59 51 — 59 57	5	59 54	60°2′
(111) : (011)	37 15 — 37 17	5	37 15 1/2	37 23
(110) : (1$\bar{1}$1)	76 54 — 77 5	3	76 58 1/2	77 5
(110) : (011)	57 46 — 57 53	4	57 51	57 51
(011) : ($\bar{1}$11)	42 53 — 43 5	2	42 59	43 8
(011) : ($\bar{2}$02)	65 33 — 65 40	3	65 39	65 46
(011) : ($\bar{1}$12)	—	1	33 8	33 12
($\bar{1}$10) : ($\bar{2}$02)	56 33 — 56 39	4	56 35	56 22
($\bar{1}$10) : ($\bar{2}$11)	—	1	27 8	27 3
($\bar{2}$02) : ($\bar{1}$12)	32 20 — 32 50	2	32 30 ca.	32 34

per $MgMoS_4 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato °/o	Mo 13.44	S 18.10	Mg 3.57	N 15.54
Calcolato °/o	Mo 13.54	S 18.10	Mg 3.43	N 15.81

$MgWO_4 \cdot Ur \cdot 10H_2O$:

Ho preparato questo composto con lo stesso procedimento adottato per il corrispondente molibdato. I cristalli incolori di questo sale sono in tutto simili a quelli del composto $MgMoO_4 \cdot Ur \cdot 10H_2O$; le misure goniometriche non permettono di distinguere gli uni dagli altri. Anche i cristalli misti tra i due sali sono perfettamente analoghi a quelli dei sali puri.

per $MgWO_4 \cdot Ur \cdot 10_2O$

Trovato °/o	Wo 30.94	Mg 4.19	N 9.70
Calcolato °/o	Wo 31.05	Mg 4.10	N 9.45

$MgWSO_3 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Per fusione di wolframato potassico e solfo in proporzioni stechiometriche e fuori del contatto dell'aria ho ottenuto il sale di potassio, da cui per doppio scambio ho preparato il sale di magnesio e urotropina. Il sale costituisce una polvere microcristallina gialla non ricristallizzabile. Per l'analisi di questo e dei seguenti solfovolframati veniva eseguita la separazione:

S, W, Mg. Un campione veniva trattato con ammoniaca ed acqua ossigenata per ossidare lo solfo; veniva quindi aggiunto acido cloridrico e svaporato ripetutamente a bagnomaria separando così il volframio come acido volframico. Dalla soluzione cloridrica veniva precipitato lo solfo come $BaSO_4$ e quindi, dopo avere eliminato l'eccesso di bario con H_2SO_4, il magnesio aggiungendo fosfato sodico in soluzione ammoniacale.

per $MgWSO_3 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato %	W 24.60	S 4.12	Mg 3.18	N 14.82
Calcolato %	W 24.57	S 4.28	Mg 3.24	N 14.96

$MgWS_2O_2 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Ho saturato una soluzione di volframato potassico con idrogeno solforato in presenza di alcali; aggiungendo alla soluzione il sale di magnesio e l'urotropina ottenni un bel prodotto microcristallino giallo.

per $MgWS_2O_2 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato %	W 23.97	S 8.30	Mg 3.04	N 14.96
Calcolato %	W 24.06	S 8.38	Mg 3.18	N 14.65

$MgWS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Ho ottenuto anche questo sale col procedimento di doppio scambio dal corrispondente sale alcalino. Si ottengono dei cristalli giallo–chiari così mal conformati da non permettere alcuna esatta determinazione. Il loro abito prismatico ricorda quello del corrispondente solfossimolibdato.

per $MgWS_3O \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato %	W 23.67	S 12.90	Mg 3.96	N 14.08
Calcolato %	W 23.56	S 12.32	Mg 3.11	N 14.34

$MgWS_4 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$:

Anche questo sale è stato preparato con lo stesso metodo adoperato per il solfomolibdato. I suoi cristalli di colore giallo–arancio ed i cristalli misti tra tale composto ed il corrispondente molibdato non si possono distinguere dai cristalli di quest'ultimo sale. Si ripete insomma nel caso dei solfosali l'isogonismo che ho verificato negli ossisali.

per $MgWS_4 \cdot 2Ur \cdot 10H_2O$

Trovato %	W 22.94	S 16.17	Mg 3.09	N 14.47
Calcolato %	W 23.09	S 16.10	Mg 3.05	N 14.06

Farmacologia. — *Fattori chimici che determinano la fissazione dei colloidi.* Nota di G. Spagnol, presentata [1] dal Socio L. Sabbatani.

La proprietà dei colloidi di fissarsi su determinati organi, quando vengono iniettati nelle vene, può permettere di ottenere con essi, la dove si fissano, azioni farmacologiche dirette che con farmaci allo stato di soluzione vera difficilmente si potrebbero ottenere. Una bella dimostrazione di ciò è ad esempio il fatto che con colloidi di antimonio, i quali iniettati in circolo si fissano quasi esclusivamente sugli organi ematopoietici, si ottengono, quale manifestazione dell'azione locale ed intensa portata su quegli organi, delle modificazioni notevolissime a carico del quadro ematologico, che con sali solubili di antimonio e che diffondono a tutto l'organismo non si osservano, od al più sono appena accennate; nel mentre con questi ultimi composti domina la scena il quadro dell'avvelenamento generale [2], [3].

Data l'importanza che per il determinismo dell'azione farmacologica dei colloidi ha la loro distribuzione nell'organismo e considerando che di grande interesse sarebbe il poter ottenere di farli fissare a nostro piacere esclusivamente in determinati luoghi dove noi volessimo ottenere con essi azioni dirette e locali, ho voluto iniziare uno studio allo scopo di vedere quali fattori possono determinare la loro fissazione, totale o prevalente, su tessuti dove di norma essi non si fissano.

Ho esperimentato su cani, conigli, cavie e topi; il maggior numero delle esperienze l'ho fatto sui conigli ed i dati che sotto riporto ad essi si riferiscono. Ho adoperato colloidi facilmente riconoscibili per il loro intenso colorito, sia all'esame diretto che a quello istologico dei tessuti sui quali si fissano, come il solfuro di mercurio e quello di piombo ottenuti all'1 % in gelatina all'1 % ed inoltre numerose sostanze coloranti vitali.

In una prima serie di ricerche preliminari ho studiato quali possibili fattori di fissazione dei colloidi i fenomeni di stasi circolatoria ottenuta con applicazione di lacci agli arti, con coppette secche sulla cute, con pneumotorace artificiale; l'azione del caldo e del freddo, quella dei rivulsivi cutanei e di altri agenti infiammatori [4].

Ho ottenuto con tutti questi mezzi fissazione di colloidi in luoghi dove essi di norma non si fissano, raramente però in quantità notevole. Tra i

(1) Nella seduta del 15 aprile 1928.
(2) Meneghetti E., « Haematologica », VII, 1, 1926.
(3) Spagnol G., « Atti del R. Istituto Veneto di Sc. Lett. ed Arti », LXXXI, 1926.
(4) Spagnol G., « Bioch. e Ter. Sper. », XIII, 1927.

risultati ottenuti in questa prima serie di ricerche merita un cenno particolare il fatto che noi possiamo ottenere fissazione abbondante di colloidi sul peritoneo e sulle anse intestinali che precedentemente alla iniezione di essi sieno state per pochi minuti (5'-15') a contatto dell'aria. Particolarmente sensibile all'azione di questa si mostra l'omento, sul quale si ha fissazione di colloidi anche se venne esposto all'aria per un tempo così breve per il quale non si osserva di solito ancora in esso alcuna modificazione apprezzabile. Tale fatto fu oggetto recentemente di uno studio più particolareggiato da parte di Salvioli ed Ofelladore [1].

*
* *

Nel continuare le mie ricerche sono passato allo studio di talune sostanze chimiche, in particolare modo anestetici ed ipnotici, con cui ho potuto ottenere, pur con modificazioni inapprezzabili sui tessuti, fissazione abbondantissima dei colloidi in diversi luoghi dove di norma essi non si fissano [2]. Esporrò anzitutto i risultati ottenuti con cloroformio.

Dalle esperienze fatte risulta che se si applica per pochi secondi sulla cute di un animale del cloroformio ed immediatamente prima o contemporaneamente o subito dopo, si inietta per via endevenosa un colloide, questo si fissa nei tessuti sottostanti esattamente in corrispondenza del luogo dove venne applicato il cloroformio in modo uniforme e in quantità notevolissima.

La fissazione ha luogo tanto più profondamente nello spessore dei tessuti quanto più prolungata è l'applicazione dell'anestetico; così per applicazione della durata di 5"-15" la fissazione avviene prevalentemente nella cute e nel tessuto sottocutaneo; per l'applicazione di maggior durata e fino a 1'-2', anche per un certo tratto nei muscoli sottostanti. Non si ha alcuna fissazione quando il colloide venga iniettato circa un'ora dopo l'applicazione dell'anestetico. Sperimentando nelle condizioni più opportune e per applicazione di cloroformio di 15"-30", con cui si ottengono già i massimi risultati, la fissazione del colloide incomincia a manifestarsi dopo 5'-10' ed è completa almeno dopo un ora. Alla fine essa appare prevalente a quella che si ha normalmente in altri luoghi come nella milza, nel fegato e nel midollo osseo e ciò specialmente se l'applicazione venne fatta in corrispondenza di quelle regioni con connettivo sottocutaneo assai abbondante. Con gr. 0.15 di solfuro di mercurio o con gr. 0.01 di Trypanblau per kg. d'animale si hanno già risultati oltremodo notevoli e la fissazione si rende evidente poi anche per dosi assai piccole di colloide e cioè fino a gr. 0.01 di solfuro

(1) Salvioli I. e Ofelladore G., « Atti del R. Istituto Veneto di Sc. Lett. ed Arti », LXXXII, 2°, 1928.

(2) Spagnol G., « Atti della Società Medico Chirurgica di Padova », 1927.

mercurico o con gr. 0.0005 di Trypanblau. Fissatesi così sulla cute questi colloidi permangono in essa a lungo e soltanto lentamente vanno scomparendo.

All'esame istologico si osserva che il colloide in piccola parte si fissa allo stato granulare sulla parete dei vasi sanguigni, nella maggior parte invece diffonde ancora ad alto grado di dispersità nel tessuto circostante, dove in breve passa allo stato granulare entro a fagociti.

Non tutti i colloidi si fissano però al luogo di applicazione del cloroformio. Da ricerche fatte con una trentina di colloidi, per la maggior parte sostanze coloranti vitali [1], mi risulta che si fissano soltanto i colloidi elettronegativi, anche se iniettati in piccola quantità. Al contrario i colloidi elettropositivi non si fissano mai in modo particolare al luogo di applicazione del cloroformio. Da ricerche in corso risulta inoltre che per i colloidi minerali elettronegativi si rende necessario anche un certo grado di stabilità in circolo. Così ad esempio col solfuro mercurico ottenuto allo stato colloidale al 0.5 °/₀ col metodo di Winssinger e che è molto sensibile agli agenti precipitanti del plasma, non si ottiene fissazione al luogo di applicazione del cloroformio se non quando sia stato sufficientemente stabilizzato con aggiunta di gelatina in ragione del 1 °/₀₀.

La fissazione dei colloidi per opera del cloroformio si può ottenere non soltanto sulla cute, ma anche ed in grado maggiore in altri tessuti coi quali esso venga a contatto. Abbondantissima è la fissazione che si ha, anche per applicazione di durata brevissima, sui muscoli, sulle mucose labiale, congiuntivale, vescicale e sul peritoneo; in questi ultimi luoghi si può ottenere fissazione anche per applicazione di *soluzione fisiologica satura di cloroformio*. Risultati analoghi a quelli descritti pel cloroformio si hanno per applicazione di *tetracloruro* di *carbonio* di *etere bromidrico* ed *etere etilico*. L'azione di quest'ultimo appare un poco meno intensa dei precedenti in ragione forse alla sua maggiore volatilità ed alla minore attività molecolare.

Ho ottenuto inoltre fissazione notevole anche con iniezioni di soluzione acquosa di *idrato d'amilene* e meglio ancora con *uretano etilico* al 3 °/₀ – 10 °/₀.

La fissazione dei colloidi ottenuta per applicazione di anestetici si può interpretare come dovuta ad un aumento della permeabilità dei capillari sanguigni per cui i colloidi possono o fissarsi su di essi, od ancora ad alto grado di dispersità attraversarli e diffondersi nel tessuto circostante dove in breve tempo passano allo stato granulare e vengono fagocitati.

(1) Le sostanze coloranti sperimentate, tutte fornitemi dalla Ditta «Grübler», sono le seguenti:

Elettropositive: Bleu di metilene, Rosso di Madgala, Saffranina, Violetto di metile, Tionina, Bruno di Bismarck, Verde brillante, Rosso neutro, Bleu Nilo, Bleu notte, Verde Janus, Violetto di Genziana, Bleu di toluidina.

Elettronegative: Eosina, Arancio G., Rosso d'alizarina, Congorubina, Scarlatto di Biebrich, Carminio d' indaco, Litiocarminio, Indulina, Tripanbleu, Tripanrosso, Rosso Congo, Bleu azo, Bleu alcali, Bleu d'anilina, Nigrosina.

I risultati delle ricerche esposte dimostrano la possibilità di ottenere fissazione abbondante dei colloidi in determinati luoghi dell'organismo dove noi vogliamo, con mezzi che non riescono di danno alcuno alla vitalità dei tessuti e che di solito producono solamente una vasodilatazione passeggera. Si può dire anzi che soltanto la fissazione dei colloidi è l'unico fatto che nel nostro caso ci induce di ammettere che gli anestetici abbiano realmente prodotto una variazione nei capillari.

I risultati ottenuti possono avere interesse anche per la terapia.

Le ricerche continuano con questo indirizzo.

Mineralogia. — *Nuove ricerche sulle trasformazioni della scolecite* [1]. Nota di A. CAVINATO, presentata [2] dal Corrisp. L. BRUGNATELLI.

In altro mio lavoro, d'indole generale, *Sulle zeoliti del gruppo della natrolite* [3], ho stabilito, che la scolecite subisce una prima notevole rapida disidratazione tra 160 e 200 gradi, una seconda tra i 335 e 345 gradi, con la quale quasi tutta la rimanente acqua viene emessa, e che conserva il potere di completo riassorbimento sinchè non sia compiuta la seconda parte della disidratazione.

Esiste dunque, oltre alla *scolecite* naturale con $3H_2O$, una *metascolecite*, meno idrata, con circa $2H_2O$, stabile nell'intervallo di temperatura 200–330°. Infine, a temperatura più elevata, si ottiene un composto cristallino anidro, che si mantiene sino a 550 gradi; alla quale temperatura, come ho dimostrato, viene distrutto l'edificio cristallino dando luogo ad una sostanza amorfa.

Compiuta la prima parziale disidratazione si modificano le proprietà ottiche [4] del minerale: dopo qualche tempo, però, lasciando raffreddare il minerale all'aria, queste riprendono i primitivi caratteri. Per questo nella conclusione del ricordato lavoro ho affermato che i due fenomeni della trasformazione ottica e della perdita e riassorbimento dell'acqua si *accompagnano*.

Però durante lo svolgimento di quelle esperienze, per mancanza di buoni cristalli e di mezzi sperimentali adatti non mi era stato possibile stabilire se i due fenomeni *avvenissero alla stessa temperatura, se essi fossero*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova diretto dal prof. A. Bianchi.

(2) Nella seduta 1° aprile 1928.

(3) «Memorie della R. Accademia Naz. dei Lincei», Roma 1927.

(4) Loc. cit., pp. 331-332.

legati l'uno all'altro, nè *misurare il valore delle costanti ottiche del minerale trasformato.*

Avuto il materiale ed i mezzi necessarii ho potuto risolvere questi problemi.

Ho osservato che nessuna modificazione si compie sino a 160 gradi, e che solo a questa temperatura, cioè a quella stessa temperatura in cui si inizia la prima notevole disidratazione, l'angolo degli assi ottici incomincia ad aumentare gradatamente, mentre cresce anche l'angolo $\widehat{z}\widehat{N}p$ e il piano degli assi ottici ruota intorno alla bisettrice ottusa Ng, restando tuttavia sempre normale alla faccia (010) {(100) della metascolecite}.

Se nel riscaldamento si è di poco superati i 160 gradi, e se non si è mantenuta a lungo la scolecite alla temperatura di disidratazione e trasformazione in metascolecite, la ripresa dell'acqua e dei primitivi caratteri ottici è così rapida da mascherare il fenomeno (reversibile) di trasformazione: (per questo può essere sufficiente anche il tempo necessario al raffreddamento del minerale in ambiente ordinario) [1].

Provato che i due fenomeni avvengono alla stessa temperatura, ho ricercato se essi fossero tra loro legati, se, cioè l'uno fosse causa dell'altro: poichè il fatto che avvengono alla stessa temperatura può costituire solo indizio di concausalità dei due fenomeni; concausalità da attendersi, del resto, come probabile nel nostro caso, perchè riscontrata anche in altre trasformazioni ottiche subite da zeoliti e da sostanze organiche, ma da provarsi tuttavia con una adatta esperienza, così come fece il Mallard [2] per le trasformazioni ottiche della heulandite.

Questo autore infatti, dopo aver osservato che il minerale si trasforma otticamente alle temperature di emissione dell'acqua, e che colla ripresa di questa riacquista le proprietà ottiche primitive, impedì il riassorbimento ottenendo che esso non si ritrasformasse; e solo allora concluse affermando che l'acqua eliminandosi causava la trasformazione ottica.

Io ho verificato, che la scolecite, trasformata per riscaldamento, immersa quindi in essenza già disidratata e chiusa, a sua volta, in ambiente secco [3] (in modo da impedire qualsiasi anche minimo riassorbimento), con-

(1) Nel mio precedente lavoro ho scritto che questa modificazione si compie a 230 gradi. In realtà, come ora s'è detto, essa si compie gradatamente e con continuità tra 160 e 200 gradi. Avviene però, che, riscaldata la scolecite a una temperatura inferiore a 230° essa riprende molto presto i primitivi caratteri. In causa appunto di ciò, solo con le attuali osservazioni, compiute con mezzi sperimentali migliori e con precauzioni particolari, ho potuto precisare la temperatura alla quale si inizia la trasformazione ottica.

(2) E. MALLARD, *De l'action de la chaleur sur la heulandite.* « Bull. de la Soc. Minéral. de France », V, 1882, p. 255.

(3) Queste precauzioni sono risultate necessarie. Infatti quando in un primo tempo usavo essenza non disidratata il materiale immersovi si ritrasformava lentamente e parzialmente man mano che riassorbiva la poca acqua contenutavi; ed anche quando ho usato

serva rigorosamente le sue nuove proprietà ottiche per tempo indeterminato; e che le riprende in poche ore, quando, tolta dall'essenza, la si espone all'aria ambiente. Basta del resto impedire in un modo qualsiasi il riassorbimento per avere lo stesso risultato.

Quindi il ritorno alle primitive proprietà ottiche è necessariamente legato alla ripresa dell'acqua.

Ne viene di conseguenza di dover ammettere uno stesso legame tra la disidratazione e la trasformazione ottica, anche nel passaggio per riscaldamento dalla scolecite alla meta-scolecite.

Oltre a stabilire, in modo che mi sembra indubbio, *che le trasformazioni ottiche sono legate alla disidratazione, che si compie nel breve intervallo di temperatura 160-200°, e al riassorbimento dell'acqua perduta, ho determinato anche i seguenti nuovi caratteri ottici per il minerale, dopo il riscaldamento a 200 gradi:*

Angolo degli assi ottici $2V_a = 65°$ (determinato con polariscopio munito di apparecchio di Adams: prima del riscaldamento una serie di misure mi ha dato valori variabili, ma tutti compresi tra 30-32 gradi), *piano degli assi ottici normale a (010)* (100 della metascolecite), *carattere ottico del minerale negativo, angolo* $z\widehat{N}p = 70\text{-}75$ *gradi* (prima del riscaldamento 15-17°).

Compiuta la seconda disidratazione, fra i 335° e 345°, e caduto completamente il potere di riassorbimento, le proprietà ottiche hanno subìto ancora una sensibile modificazione.

L'angolo degli assi ottici, il carattere negativo del minerale, la dispersione $\rho < v$ non sono variati, mentre la doppia rifrazione è diminuita fortemente e il piano degli assi ottici si è portato quasi normale a z; ho misurato $z : Ng = 85\text{-}88°$. Questi caratteri si mantengono inalterati sino a 550° (temperatura di demolizione dell'edificio cristallino).

Alcuni tentativi da me fatti (prolungati riscaldamenti poco al di sotto della temperatura di trasformazione e sotto lieve pressione di vapor d'acqua, lentissimi raffreddamenti, contatti, nel riscaldamento, con germi di metascolecite ecc.) allo scopo di provare se anche quest'ultima parte del fenomeno fosse reversibile, non sono riusciti affermativi; forse, perchè il composto anidro è stabile nelle nostre condizioni di ambiente.

dell'essenza disidratata ma esposta all'aria ambiente potevo osservare dopo qualche tempo l'inizio di una lentissima ritrasformazione dovuta ancora alla ripresa da parte del minerale dell'acqua che l'essenza assorbiva dall'ambiente.

Botanica. — *Umificazione di membrane cellulari in "Beta vulgaris L."* Nota di R. Savelli, presentata [1] dal Socio B. Longo.

I. – Lo studio genetico dei caratteri che si manifestano nei tessuti morti di piante vive, o di quelli che si manifestano addirittura *post mortem*, avrebbe l'indiscutibile merito di costringere il pensiero a rettificare automaticamente tutte quelle storture, così deplorevolmente abituali, che scaturiscono – come dicevo in una recente Nota in questi stessi « Rendiconti » – « dal non saper tenere convenientemente distinto il *fattore* dal *carattere*, il substrato idioplasmatico o *gene* da quella che è la sua estrinsecazione somatica risultante come fatto posteriore da tutta una catena di reazioni successive . . . ».

Ho toccato già, e tornerò a discutere altrove, del significato genetico di tali caratteri. Verso questo, che non potrebb'essere un particolare capitolo, ma piuttosto un particolare aspetto della genetica, può fare da utile instradamento lo studio di certi caratteri chimici che nel vivente appaiono quasi *a latere* del processo vitale (e non come anelli essenziali della catena di atti fisiologici che lo costituiscono) e che possono – d'altra parte – comparire anche come prodotti di processi capaci di intervenire *post mortem*.

I processi di umificazione, per esempio, cui soggiacciono alcune parti di certe piante mentre queste vivono, suscitano l'interesse del ricercatore anche perchè suggestivi di molti confronti e considerazioni nei rapporti di quell'altro analogo processo che ha trasformato in lignite i resti vegetali delle epoche trascorse; e questo ravvicinamento può forse contribuire a rafforzare l'idea che quando simili processi avvengono durante la vita della pianta, le funzioni propriamente vitali vi entrino appena in quanto preparano i materiali suscettibili di umificazione, « e che nell'alterazione che essi vanno subendo non hanno parte fenomeni biologici », secondo l'eventualità che il Gola prospetta.

Nonostante questo, ed anzi appunto per questo, i caratteri che hanno rapporto con la umificazione sono, a mio parere, meritevoli di grande attenzione dal punto di vista genetico, per esempio in riguardo ai tentativi di afferrare il significato e il valore vero delle così dette « variazioni parallele », ed il meccanismo per cui si generano. Benchè la distribuzione, per dir così, tassonomica di questi processi di umificazione sia la più ampia, andando dai funghi alle composite, benchè la localizzazione istologica sia anche assai

(1) Nella seduta del 15 aprile 1928.

varia, e nella cellula, poi, sia ora la membrana ed ora il contenuto a subire il processo di umificazione, vediamo tuttavia che questo carattere, al pari degli altri, può assumere tutti gli attributi specifici e varietali. Può essere diffuso in un intero genere e ciononostante può assumere particolarità caratteristiche di una data forma e che mancano ad una forma vicina, venendosi così a costituire quello che dicesi un « carattere differenziale » suscettibile di comportamento mendeliano.

L'antitesi apparente tra la diffusione di certe caratteristiche le quali si estendono, quasi potrebbe dirsi, a tutti i gradini del regno vegetale e nondimeno, pure in questo loro ripetersi, riescono ad assumere ogni volta un qualche stretto grado di specificità; questa antitesi apparente – dicevo – è certo uno dei fatti più interessanti che possa esser considerato nelle dottrine pangenetiche e nei loro sviluppi. Ma io penso che per afferrarne il significato sia meglio studiarne le manifestazioni più elementari, specialmente quelle nella cui indagine potrà invocarsi il sussidio di una scienza così progredita come appunto è la chimica.

II. – Uno studio che potrebbe farsi alla luce di queste idee e con questo indirizzo, è appunto quello della umificazione nelle Centrosperme, sulle quali piante il Gola ebbe il merito di richiamare l'attenzione, indicando come vi fosse diffuso il processo di umificazione di tegumenti seminali [1].

Su questo argomento io non ho fatto studî genetici, ed il contributo che io porto col presente scritto consiste nel riconoscere come riferibili allo stesso genere di processi certi caratteri di una specie non ancor menzionata dal Gola: *Beta vulgaris*. Ho esaminato, a questo riguardo, soltanto la barbabietola da zucchero, e in tutte le « varietà » o « marche » esaminate potei riconoscere costantemente che il tegumento seminale è la sede più caratteristica dell'umificazione. Dal tegumento, che è di un marrone tendente al nerastro, un opportuno trattamento con alcali può estrarre le sostanze che passano in soluzione conferendo al liquido un colore bruno a tonalità rossastra, e lasciando, dopo una completa estrazione che riesce quanto mai lunga e penosa, una pellicola decolorata che è il residuo e quasi direi lo scheletro cellulosico tra le cui molecole (come s'esprime il Gola) il processo di unificazione si è svolto.

Non certo a me si può chiedere di precisare se si tratti proprio, ed anche in questo caso, della formazione di un etere umico della cellulosa; ma credo di poter asserire che, anche in questo caso, come nella massima parte degli altri già segnalati, si tratta di gradi assai inferiori di umificazione.

Per quanto riguarda i tegumenti seminali, la quantità di sostanze estraibili con gli alcali, la difficoltà dell'estrazione ed il tono di colorazione degli

(1) G. Gola, *Sulla presenza di composti umici nei tegumenti seminali di alcune Centrosperme*, « Bullettino Società Botanica Italiana », nn. 4-9, 1920.

estratti, sono sensibilmente uguali per tutte le qualità di seme saggiate. Varia molto invece la quantità delle sostanze gialle che possono estrarsi coll'alcool e coll'acqua soltanto, senza una previa saponificazione con alcali. Queste sostanze facilmente solubili sono forse prodotti laterali o gradini iniziali del processo di umificazione, o forse non hanno neppure un legame di genealogia con le sostanze insolubili: comunque ci si può domandare se le differenze quantitative rilevate siano in rapporto col grado di maturazione del seme o con le differenze di stirpe e di luogo di provenienza, ecc.

A più forte ragione le stesse domande possono farsi per le differenze riscontrate in una regione anatomica che, per le Centrosperme, non mi consta sia stata segnalata come sede del processo di umificazione: gli strati interni del pericarpo, specialmente in corrispondenza degli opercoli. Talora la superficie interna delle logge seminifere si presenta con un aspetto addirittura carbonioso, talora sembra appena sfiorata dal processo di cui si tratta. Da questi strati carpidici gli alcali estraggono sostanze di un bruno nerastro, tendente per diluizione verso il giallo e quindi privo di quella tonalità rossa, quasi di *vermouth*, che caratterizza gli estratti dei tegumenti seminali.

Queste sostanze riducenti si presterebbero facilmente ad una determinazione quantitativa ove interessasse di precisarne la variabilità ed i motivi della variabilità.

Ma l'ultimo punto, il più importante, consiste nel fatto che mentre nella gran maggioranza delle stirpi di bietola zuccherina tale processo risulta rigorosamente limitato alle due parti indicate, tegumento seminale e pericarpo, a contatto l'uno dell'altro, e quindi forse reagenti insieme ad una stessa azione strettamente localizzata nel frutto, in qualche stirpe particolare di bietola si ha, prima della formazione del frutto, una manifestazione corrispondente in tutt'altra regione.

III. - L'unico caso finora segnalato di umificazione riguardante i tessuti radicali era, a mia conoscenza, quello scoperto dal Gola [1] in *Diospyros Lotus*, nel quale non si ha un parallelo processo analogo nei frutti. Mentre la gran maggioranza delle bietole si comporta, come molte altre Chenopodiacee, limitando l'umificazione a certi tessuti del frutto, in altre rare stirpi di bietole l'umificazione oltre che avvenire nel frutto avviene anche nella radice e riguarda - come nel *Diospyros Lotus* - la parete cellulare di tessuti d'origine fellogenica.

Difatti, sebbene il grado minimo d'umificazione congiuri con l'azione mascheratrice della suberificazione a render la cosa di difficile rilievo, io riferisco ad una incipiente umificazione (che mi è sembrata specialmente sensibile

(1) G. Gola, *Sulle membrane dei tessuti fellogenici delle radici di « Diospyros Lotus L. »*, « Bullettino Società Botanica Italiana », n. 6, 1924.

negli strati della parete prossimi alla lamella mediana) quel carattere che il Munerati, fin dal 1915 chiamava « melanismo corticale » e che ha, poi, sottoposto ad un completo studio genetico seguendolo anche nel suo comportamento attraverso l'ibridazione. A me duole che questo studio dell'illustre direttore della *Stazione di bieticoltura* di Rovigo rimanga tuttora inedito: ciò mi toglie la possibilità di tentare la prospettiva di qualche correlazione tra il comportamento genetico del carattere e la sua base chimica ed anatomica. Nella Nota del Munerati, pubblicata nel 1915 in questi stessi « Rendiconti », si parla di « radici a pelle scura, *bluastra* » : i casi da me esaminati riguardano radici a corteccia bruna, e l'accenno del prof. Munerati al bluastro mi fa dubitare che sotto il nome di « melanismo corticale » possono forse comprendersi per la bietola, fatti chimicamente diversi. Ciò non è improbabile nè sarebbe nuovo, se si pensi che dietro la scorta di gentili indicazioni favoritemi dal prof. Gola, ho potuto anch'io constatare che per l'achenio del girasole bisogna distinguere un nero a tonalità fredda (grigia o plumbea) che deriva da processo di umificazione, ed un nero a tonalità calda (manifestantesi in pareti carpellari che erano già colorate prima della maturazione) e che non dipende da umificazione.

Per la bietola la umificazione, normale e generale per il frutto in tutte le stirpi, si presenta anche nella radice in stirpi eccezionali, nate forse per mutazione, che verrebbe dunque a dipendere da un fattore il quale determina una *localizzazione nuova* di un fenomeno che, considerato in sè, preesisteva e faceva già parte, per così dire, della fisiologia normale della pianta.

Ci sarebbe da domandarsi se in queste bietole a radice melanica non sia più intensa l'umificazione del pericarpio e del seme.

E dovrebbero ora ricercarsi *mutazioni parallele* in radici di altre specie già note per la umificazione del tegumento seminale.

Biologia. — *L'influenza delle irradiazioni parziali delle ossa sul sistema stromatico del midollo osseo e del restante apparato emolinfatico.* Nota del dott. G. Santori, presentata [1] dal Corrispondente A. Dionisi.

Da poco più di venti anni datano le prime esperienze condotte a ricercare le alterazioni che i raggi Roentgen inducono nell'apparato emolinfatico degli animali irradiati, e per l'interesse scientifico di tali studi e le deduzioni pratiche che se ne possono ricavare nel campo della clinica e della terapia, numerosi autori si sono occupati dell'argomento.

Bisogna però subito notare che, se dettagliate osservazioni furono compiute sul comportamento degli elementi parenchimali dell'apparato emo-

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

linfatico, non fu rivolta mai particolare attenzione allo stroma mesenchimale dell'apparato stesso, e cioè sia al connettivo propriamente detto (fibrociti, fibroblasti, sostanza fondamentale) che al tessuto reticolare (cellule del reticolo, avventizia capillare, fibrille reticolari).

L'importanza che lo studio del sistema stromatico e più specialmente dell'apparato reticolo-endoteliale ha assunto in questi ultimi anni, mi ha spinto a riprendere le ricerche con i Raggi X per osservare le modificazioni da essi indotte sullo stroma degli organi emolinfatici e verificare al tempo stesso quelle già note degli elementi parenchimali di tali organi.

Prima di esporre i risultati delle esperienze intraprese, voglio ricordare brevemente le conclusioni dei principali autori che si sono occupati dell'argomento: primo fra tutti Heinecke (1904-1905). Egli sperimentò su topi, cavie e conigli con irradiazioni dell'animale *in toto*, e su cani con irradiazioni parziali sulla regione epigastrica o splenica. In seguito ai risultati ottenuti egli potè concludere che i Raggi X hanno una elettività speciale per il tessuto emolinfatico che già dopo poche ore dall'irradiazione si mostra intensamente alterato nella milza, nelle linfoghiandole, nei follicoli linfatici dell'intestino e nel midollo osseo. Gli elementi più colpiti sono i linfociti ed i mieloblasti, poi le cellule bianche granulose ed i megacariociti; più resistenti di tutti appaiono i polimorfonucleati neutrofili. Dopo 2-3 settimane dall'irradiazione si inizia la rigenerazione degli elementi distrutti, che verso la quarta settimana può dirsi completa. Nelle esperienze di irradiazione parziale Heinecke notò che mentre le linfoghiandole più vicine alla superficie irradiata subivano forti alterazioni, quelle più lontane restavano invece quasi inalterate, e ne concluse per un'azione diretta e locale dei Raggi X. Del sistema stromatico Heinecke non parla quasi affatto: solo nota nella milza particolari accumuli di cellule che dalla descrizione sembra possano considerarsi come elementi del reticolo; viene notato anche l'aspetto dello stroma del midollo osseo, come formato di fibre sottili, ben evidenti e talvolta ialinizzate.

Tralascio per brevità di riportare le esperienze di Aubertin et Beaujard e di Fränkel e Budde, e ricordo solo quelle, recentissime, di Tsuzuki (1926). Questo autore fece accurate ricerche su tutti gli organi di animali irradiati totalmente e, per quel che riguarda l'apparato emolinfatico, giunse a risultati sostanzialmente concordanti con quelli di Heinecke. Egli fa cenno anche dell'apparato reticolo-endoteliale, notando la presenza di elementi del reticolo fagocitanti pigmento e residui cellulari nel midollo osseo, nelle linfoghiandole e nel timo; anche le cellule di Kupfer, spesso ipertrofiche, mostrano attività fagocitaria.

Nelle esperienze da me compiute sui conigli l'irradiazione non è stata totale, ma limitata ad una zona del corpo dell'animale ricca di tessuto emolinfatico, e cioè alla tibia. E ciò sia perchè gli effetti delle irradiazioni parziali sono stati finora poco studiati, sia per osservare il comportamento

del sistema emolinfatico, considerato nel suo insieme, quando soltanto una parte di esso venga sottoposta all'azione dei raggi. Vennero usate dosi differenti (1-2-4 Dosi Eritema, in una sola seduta) per apprezzarne la diversità degli effetti; e gli animali irradiati vennero sacrificati parte dopo 48 h. e parte dopo 8 giorni per osservare la presenza o meno di un periodo di incubazione e per sorprendere l'eventuale inizio di fenomeni rigenerativi.

Furono studiati: il midollo osseo degli arti di ambo i lati – la milza – il fegato – le linfoghiandole mesenteriche – il timo – i surreni. Furono anche allestiti strisci di sangue e notata la formula leucocitaria prima e dopo l'irradiazione.

Le alterazioni più notevoli sono apparse quelle del midollo osseo direttamente irradiato. Esso dimostra in tutti i casi una notevole rarefazione degli elementi specifici, mentre che gli elementi del reticolo sono sempre ben conservati e sembrano anche aumentati di numero e di volume, e lo stroma midollare appare più o meno fortemente ispessito e ricco di grasso. Le cellule reticolari, rotondeggianti, ovalari o irregolarmente stellate mostrano un nucleo a rete cromatica ben distinta; il citoplasma appare talora in rapporto con numerose fibrille; altre volte si mostra ripieno di granuli o di vacuoli. Lo stroma connettivale collageno appare rigonfio, ispessito; in taluni tratti assume il carattere dello stroma fibroso, in altri appare piuttosto gelatinoso, in altri ancora quasi del tutto omogeneo. Esso racchiude abbondanti quantità di grasso; talora è disgregato da focolai emorragici che in alcuni casi appaiono come vaste lacune sanguigne. Le cellule connettive non mostrano modificazioni. Anche il midollo osseo del lato non irradiato dimostra alterazioni analoghe, benchè in grado assai minore; nella milza si nota più che altro una dilatazione dei seni, che appaiono sovraripieni di sangue, e talora un contemporaneo danneggiamento dei cordoni di Billroth che si dimostrano poveri di elementi. Il reticolo cellulare è invece sempre bene sviluppato e spesso rigonfio, e dimostra attività fagocitaria. Nelle linfoghiandole mesenteriche le modificazioni degli elementi parenchimali sono poco accentuate, mentre si nota in alcuni casi uno straordinario sviluppo degli elementi reticolari e talora si ha un rigonfiamento anche degli endoteli vasali ed ispessimento dello stroma reticolare. Nel fegato si nota solo qualche volta iperreplezione della rete mirabile venosa; le cellule di Kupfer, generalmente ben evidenti, in un caso si presentano picnotiche. Il timo è quasi sempre normale, talora iperplastico, con gli elementi del reticolo ben evidenti; le capsule surrenali non appaiono alterate. La formula leucocitaria del sangue circolante dimostra solo in alcuni casi una transitoria diminuzione dei leucociti nei primi tempi dopo la irradiazione.

Concludendo, i risultati ottenuti si possono così riassumere:

1. L'irradiazione localizzata del midollo osseo tibiale nei conigli induce modificazioni dell'apparato emolinfatico massime per intensità nel

midollo direttamente colpito dai raggi, ma apprezzabili anche nel midollo non irradiato e negli altri organi dell'apparato stesso.

2. Le alterazioni del midollo osseo sono a carico di tutti i suoi componenti: elementi cellulari specifici, e apparato stromatico; quelle della milza, linfoghiandole, fegato, sono prevalentemente a carico del componente vasale e reticolare; non si trovano che in un caso alterazioni apprezzabili nel timo, mai nei surreni.

3. Gli elementi midollari che risentono maggiormente dell'azione dei raggi sono i megacariociti ed i globuli rossi nucleati. Della serie granulocitica sono spesso colpiti in prevalenza gli elementi giovani indifferenziati rispetto a quelli adulti: ciò si osserva più costantemente nel midollo non irradiato, mentre in quello irradiato si ha un comportamento più variabile. I globuli rossi maturi sono spesso fortemente colpiti, i linfociti si mostrano i meglio conservati.

4. Le cellule reticolari, contrariamente a quelle emolinfatiche, sono ben conservate e spesso rigonfie ed iperplastiche, sia nel midollo che negli altri organi; le cellule connettivali propriamente dette non si mostrano modificate.

5. Lo stroma connettivale collageno del midollo osseo appare costantemente ispessito ed omogeneizzato, specie dal lato irradiato; in un caso si nota ispessimento dello stroma reticolare nelle linfoghiandole.

6. Disturbi di circolo ed emorragie si rinvengono frequentemente nel midollo osseo, specie in quello non irradiato; la milza presenta anche nella maggior parte dei casi una dilatazione più o meno notevole dei seni della polpa per sovrariempimento sanguigno; una modificazione analoga si rinviene, benchè più raramente, anche nel fegato e nelle linfoghiandole.

7. Le differenze tra le alterazioni ottenute negli animali sacrificati dopo 48 ore e quelle ottenute negli animali sacrificati dopo 8 giorni si possono così riassumere: mentre nel primo gruppo sono più accentuati i disturbi di circolo e le emorragie, nel secondo gruppo si nota una maggiore rarefazione cellulare nel midollo osseo accompagnata da un più notevole ispessimento stromatico e da fagocitosi più intensa da parte degli elementi del reticolo. Figure cariocinetiche non si osservano che nel secondo gruppo e soltanto nel midollo non colpito da irradiazione diretta.

8. Le alterazioni notate sono, fino ad un certo punto, proporzionali alla intensità della irradiazione.

Osservando i risultati ottenuti in queste esperienze, risaltano alcuni fatti fondamentali, già notati in parte dagli autori che si sono precedentemente occupati dell'argomento e cioè: la radiosensibilità maggiore degli elementi parenchimali del tessuto emolinfatico rispetto a quelli dello stroma; la maggiore intensità delle alterazioni dopo trascorso un certo periodo di tempo dalla irradiazione e la loro prevalenza negli organi direttamente irradiati rispetto a quelli non colpiti da irradiazione diretta. Per quanto

riguarda più particolarmente l'apparato stromatico è notevole il fatto che le cellule del reticolo si mostrano bene evidenti in tutto il sistema emolinfatico, nonostante che la irradiazione fosse localizzata ad una sola tibia dell'animale; inoltre, mentre i disturbi di circolo e le emorragie si rinvengono più frequentemente nei primi giorni dopo la irradiazione, l'ispessimento massimo dello stroma e la funzione fagocitaria delle cellule del reticolo sono più marcati dopo un periodo di incubazione di qualche giorno, e coincidono con la massima rarefazione degli elementi cellulari specifici.

BIBLIOGRAFIA

HEINECKE, *Experimentelle Untersuchungen über die Einwirkung der Röntgenstrahlen auf innere Organe.* (« Mitt. aus. d. Grenzegebieten der Med. u. Ch. », 1904, BD XIV).

HEINECKE, *Experimentelle Untersuchungen über die Einwirkung der R. Strahlen auf das Knochenmark.* (« Deut. Zeitschrift für Chir. », BD LXXVIII).

AUBERTIN et BEAUJARD, *Action des Rayons X sur le sang et les organes hématopoiétiques.* (« Comptes rendus de la Soc. de Biologie », 4/2, 1905).

FRÄNKEL e BUDDE, *Histologische, zytologische u. Serologische Untersuchungen bei Röntgenbestrahlten Meerschweinschen.* (« Fortschr. auf die Gebiete der R. Strahlen », BD XX, 1913).

TSUZUKI, *Studi sperimentali sull'azione dei raggi X duri.* (« Ann. of Roengt ». XVI/2, 1926).

KRÖMECKE, *Ueber die Einwirkung der R. Strahlen auf die rolen Blutkörperchen.* (« Fortsch. a. d. Gebiete d. R. Strahlen », BD XXXIV).

NUVOLI, *Studi sperimentali sulle modificazioni della crasi sanguigna in rapporto alla qualità dei raggi.* (Congresso delle scienze, Napoli, 1924).

HOLVEDER, *Strahlentherapeutische Nebenwirkungen.* (Deut. Med. Woche, 1926).

DIONISI, *Lezioni sull'anatomia patologica del sangue.* (1925-26).

WAIL e FRENKEL, *Ueber den Einfluss der R. Strahlen auf das Zellplasma.* (« Virchow's Archiw », BD 257, 1926).

SCHOLZ, *Ueber die Wirkung der R. Strahlen auf Zellen.* (Deut. Med. Woche, 1926).

LACASSAGUE e GRIGOWROFF, *Au sujet de l'action directe ou indirecte des Rayons X.* (« Presse Médicale », 1927).

NAKASCHIMA, *Einige versuche zum Grundvorgang der biologischen Strahlenwirkung.* (« Strahlenther », 1927, 24/1).

HALBERSTAEDTER e WOLFSBERG, *Ueber die Einwirkung von R. Strahlen auf die vitale Färbbarkeit der Gewebe.* (« Fortschr. auf die Gebiete der R. Strahlen », BD 29, Heft. 5).

BUSTIN, *Azione delle radiazioni in biologia.* (Recens. A ZUPPA, su « Arch. di Radiologia », 1926).

M. PONZIO, *Problemi attuali di radiofisica e di radiobiologia.* (« Ann. di radiol. », 1926).

Biologia vegetale. — *Contribuzione allo studio della radioscopia nei vegetali.* Nota preventiva di E. Barsali, presentata [1] dal Socio P. R. Pirotta.

Le meravigliose applicazioni della radioscopia nella terapia umana ed animale in generale, e pur anche nello studio dei minerali, ci fa ritenere che giustamente e con profitto possa essere applicata anche nello studio dei vegetali ed in particolare nella discoverta di processi patologici e delle cause di perturbazione nel normale funzionamento di organi od anche nel disvelare gli organismi generatori di anomalie degli organi stessi.

E non è senza difficoltà, data la natura dell'organismo sul quale si opera, che si possa sempre ed utilmente approfittare di tali radiazioni; la trasparenza, assai sensibile dei diversi tessuti, non è sufficiente a mettere in evidenza la regione interessata e sarà necessario allora con assorbimento di sostanze varie od usando radiazioni diverse, raggiungere con pazienza e pratica, lo scopo.

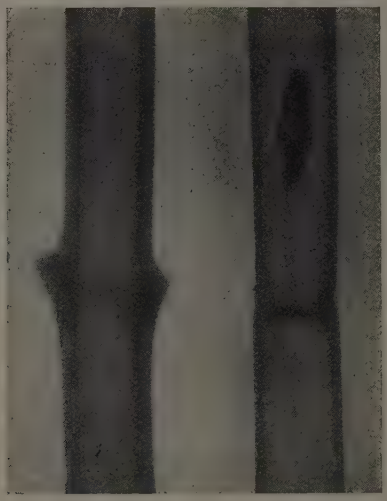
I tessuti vegetali presentano, in generale, forte trasparenza alle radiazioni; ma diversa essendo la costituzione fisico-chimica della parete cellulare ne consegue che varia anche tale tasparenza, sì che quanto maggiore è la massa e la tenacità acquisita col tempo, tanto minore ne è la trasparenza e quindi appariranno opacità diverse a seconda delle condizioni particolari dell'organo che si esamina.

È per ciò che sottoponendo alle radiazioni una porzione di un organo vegetale si potrà con facilità rilevare la costituzione, normale o meno, dei tessuti, la presenza di stele vascolari, di corpi estranei ed inoltre la maggiore o minore integrità dei tessuti stessi, si avrà così una indicazione per portare l'attenzione là dove si ritiene utile approfondire lo studio macro- o microscopico.

Sottoponendo p. es. all'esame radioscopico una porzione di caule di *Sambucus*, fig. 1 *a*), si nota ben distinta la porzione midollare, che per essere costituita di un tessuto omogeneo ed assai molle, appare come cava ed in corrispondenza del nodo, ove il tessuto è assai diverso, la trasparenza è diminuita, lateralmente ben netta si rileva la regione vascolare, integra nella sua formazione, meno trasparente verso l'esterno ove si confonde con le

(1) Nella seduta del 1° aprile 1928.

brevi formazioni corticale e suberosa. Nella fig. 1 *b*) di culmo di *Arundo*, che fu raccolto presso una casa colonica ove addossate ad un muro, in vicinanza di una cultura di cavoli, stavano diversi fasci di *Arundo* tolti dalle precedenti culture, è ben evidente la cavità centrale di trasparenza assai diversa da quella della fig. 1 *a*), e così presso il nodo rilevasi una leggera sfumatura data da residuo di parenchina midollare ed inoltre la presenza di



a) *b*)

Fig. 1.

un corpo ovoideo allungato che fu riconosciuto (avendo aperto il frammento nel luogo indicato) per una crisalide di *Pieris* là rifugiata forse pel periodo invernale o casualmente caduta, essa era ancora viva ed aderente ad una parete: aperti altri culmi nella base tagliata ne furono rinvenute fino a tre in una sola cavità. La natura del tegumento di tale insetto fa sì che la trasparenza ne è alquanto ostacolata. Larve ed insetti che nel periodo delle loro metamorfosi trovano il loro ambiente nell'interno di tronchi e rami, potranno quindi essere discoverti nel loro percorso, quando la natura dei loro tessuti sia sensibilmente diversa dai tessuti vegetali costituenti l'organo ospite.

E l'esame radioscopico mi fu di utile aiuto nel comporre una amichevole controversia. Mi furono sottoposti ad esame rami terminali di alcune piante fruttifere (Pero, Melo, Fico) con placche sugherose di cicatrizzazione come è facile vedere nei rami colpiti da grandine.

Aperti alcuni di tali rami nei luoghi indicati dalle cicatrici non presentavano che i sintomi di una lacerazione più o meno profonda con conseguente necrosi degli strati più esterni e suberificazione verso l'interno: all'esame microscopico nulla si notava di anormale all'infuori della forma-

Fig. 2.

zione suberosa da ferita come normalmente è descritta. Rimaneva un dubbio per la diversa profondità della lacerazione, per la diversa ubiquità e forma ed anche per il disseccamento dei rametti talora completo, talora solo limitato alla parte superiore.

Sottoposti alcuni di detti rami all'esame radioscopico si rilevò la presenza di corpi rotondeggianti che fortemente ostacolavano le radiazioni, aperti alcuni rami nei luoghi indicati si constatò la presenza di palline di piombo da caccia, di qui la conseguente delle ferite e lacerazioni e del disseccamento dei rametti: se le ferite erano poco profonde e rare, per la

rapida formazione di tessuto di cicatrizzazione, il rametto perseguiva nella sua vitalità e nella fig. 2 sono ben evidenti le regioni fortemente necrosate non in corrispondenza delle palline ed altrove palline incluse senza corrispondente forte lacerazione. Lo stesso fenomeno ebbi occasione poi di riscontrare in rametti di Pino che sembravano alterati da seccume dei germogli.

Dalle notizie su esposte per le brevi ricerche eseguite si può trarre la speranza che anche nel campo vegetale la radioscopia possa rendere utili servigi e specialmente nella patologia per lo studio di fenomeni particolari per i quali spesso l'indagine microspica, lunga e paziente, ricerca l'organo o la causa delle alterazioni, e forse anche nella fisiologia e biologia in genere con l'applicazione di metodi che la pratica potrà suggerire, qualora con mezzi adeguati, a disposizione, si modifichi il mezzo sul quale si opera, si usino radiazioni diverse e corrispondenti al soggetto in studio [1].

Fisiologia. — *Valore alimentare della patata nei ratti albini.* Nota di A. Galamini, presentata [2] dal Corrisp. S. Baglioni [3].

Recenti ricerche di Thomas, Lauter Leuke, Hindhede, Abderhalden, G. Ewald, A. Fodor e C. Röse, McCollum Simmond e Parson, Berg, ecc., eseguite sul valore alimentare della patata, hanno condotto a risultati discordanti. Per alcuni la patata sarebbe un alimento completamente digeribile e le sue proteine avrebbero lo stesso valore alimentare di quelle della carne: per altri invece esse sarebbero utilizzate meno bene dall'organismo animale.

Secondo le analisi compiute la patata cruda conterrebbe per cento:

	Acqua —	Proteine —	Grassi —	Sost. estrattive prive di N	Cellulosa —	Ceneri —
Minimo	60.10	1.43	0.04	15.58	0.37	0.44
Massimo	80.06	2.81	0.14	29.85	0.68	1.18

e la cotta:

Acqua —	Sostanze azotate —	Grassi —	Sostanze estrattive non azotate
73.59 %	2.79 %	0.12 %	21.6 %

100 parti di patata fresca conterrebbero circa 1.3 parti di ceneri.

100 parti di ceneri conterrebbero ceneri solubili: CO^2 21.6; SO^3 2.77; P^2O^5 5.72; K^2O 53.47; Na^2O tracce; NaCl tracce. Ceneri insolubili: Co^3Ca 0.84; Co^3Mg 3.53;

(1) Mi è grato porgere i più sentiti ringraziamenti al prof. Duranti della Clinica Chirurgica della R. Università di Pisa che più volte si è prestato alle mie richieste per le ricerche suddette.

A tale scopo furono usati raggi molli corrispondenti a 6 cm. di scintilla.

(2) Nella seduta del 1° aprile 1928.

(3) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

SO_4Ca tracce; $(PO_4)^2Ca^2$ 3.36; $(PO_4)^2Mg$ 9.25; $(PO_4)^2Fe^2$(e Mn^2) tracce; SiO^2 tracce. La patata, se cruda, è ricca in vitamina C; ne contiene in quantità sufficente se cotta: ha quantità sufficenti di vitamina D e B e piccola quantità di vitamina A. In complesso la patata è ricca di acqua e di carbidrati, povera di sostanze proteiche, poverissima di grassi: difetta di vitamina A, di Ca e più di Na.

Le presenti ricerche furono eseguite su ratti albini adulti e in accrescimento allo scopo di studiare il valore alimentare della patata, che fu loro somministrata a volontà, cruda o cotta, con sola aggiunta di cloruro di sodio, nella quantità normalmente in uso in cucina. In due ratti, dopo un periodo di somministrazione di patata cruda o cotta, si aggiunse ad essa burro od albume di uovo. Si tenne conto delle variazioni del peso dell'animale, dell'alimento ingerito, delle feci, delle urine escrete. Per calcolare la quantità di patata ingerita si calcolò la perdita in acqua, subita dall'alimento, desumendola da quella subita da un peso di patata, uguale a quello somministrato all'animale, posto in un recipiente di uguale grandezza e tenuto nello stesso ambiente. I dati ottenuti si possono così brevemente riassumere:

Ratto A ♂: peso iniziale gr. 185: ebbe patata cruda dall'8 al 13 settembre 1927, quando morì di polmonite. Durante la breve durata dell'esperimento il ratto perse il 26.5 % del proprio peso, cioè gr. 0.034 per gr. e per giorno: ingerì patata in proporzione corrispondente a calorie 21.5 e cioè a calorie 0.125 per gr. di peso: emise in media cc. 4.91 di urine e gr. 1.56 di feci: nell'ultimo giorno di vita albumina nelle urine alcaline: amido e zucchero nelle feci.

Ratto B ♂ di 5 mesi: peso iniziale gr. 167: fu alimentato con patata cruda dal 21 settembre all'8 ottobre. Nei primi 11 giorni diminuì del 10.8 %, pari a 0.01 per gr. e per giorno. Ingerì cibo corrispondente a calorie 42.3 e cioè a calorie 0.27 per gr. di peso. Emise orine e feci in quantità di cc. 6.58 e gr. 3.17 al giorno. Bevve in media cc. 6.2 di acqua. In un secondo periodo la perdita fu maggiore, di gr. 0.034 per gr. Le calorie ingerite furono in media 29.83, pari a 0.22 per gr. di peso: l'acqua ingerita cc. 6.83: le orine cc. 6.75, le feci gr. 1.61. Il ratto morì dopo avere perduto il 27.5 % del peso iniziale. Negli ultimi giorni di vita, diarrea: le feci non hanno mai mostrato presenza di zucchero e amido.

Ratto C ♂ adulto: peso iniziale gr. 306: dal 2 ottobre gli si somministrò patata cruda. Il 16 dello stesso mese era diminuito del 18.6 % pari a gr. 0.0144 per gr. al giorno. Ingerì calorie 61.2 al giorno, cioè 0.221 per gr. di peso: emise in media gr. 10.25 di feci; cc. 13.4 di orina; bevve cc. 6 di acqua. Dal 16-10-27 alla patata cruda grattugiata si aggiunsero gr. 1.50 di burro. In 12 giorni il ratto diminuì gr. 0.0085 per gr. di peso e per giorno. La perdita complessiva fu del 29 %: le calorie ingerite, in media furono 51.83: le feci emesse gr. 6.04: le orine cc. 11.79: l'acqua bevuta cc. 2.79. Dal 28-10-27 al 2-11-27 il ratto diminuì rapidamente di peso, di gr. 0.047 per gr. di peso e per giorno: la perdita complessiva del peso fu del 44.4 %. Le calorie ingerite furono 42.4, cioè 0.21 per gr. di peso: le feci emesse furono gr. 4.3: le orine cc. 19.2; l'acqua bevuta cc. 3.3. Le orine da prima acide, dopo 5 giorni di esperimento si fecero alcaline. All'autopsia si osservò: cuore e polmoni normali, mancanza di pannicolo adiposo, milza normale, reni normali, testicoli bene sviluppati, fegato normale, stomaco vuoto, ristagno fecale nel colon molto dilatato.

Ratto D ♂ adulto: peso iniziale gr. 297. Fu posto in esperimento il 2-10-27: prima era stato alimentato, come il ratto precedente, con tuorlo d'uovo. Era malato: da tempo

presentava al dorso ulcerazioni con margini a picco profondamente incavate, con fondo di natura caseosa. All'autopsia si osservò un'estesa infiltrazione della cute e del sottocutaneo, estesa a gran parte della superficie corporea; numerosi piccoli ascessi al fegato e alla milza. Alimentato con patata cotta e sale il ratto diminuì di gr. 0.021 per gr. di peso e per giorno e morì dopo avere perduto il 20.9 % del peso iniziale. Le calorie ingerite furono in media 56.33, cioè 0.21 per gr. di peso: le feci emesse gr. 0.84: le urine cc. 15.37: l'acqua bevuta cc. 9.62.

Ratto E ♂ del peso iniziale di gr. 166: fu alimentato con patata cotta dall'8 al 15 settembre. Diminuì dell'8.4 % del peso cioè di gr. 0.012 per gr. di peso e per giorno. Ingerì alimento, pari a calorie 44, 0.27 per gr. di peso medio, bevve in media cc. 7.75 di acqua: emise gr. 0.48 di feci e cc. 9.13 di urine. Dal 15 al 24 settembre il ratto crebbe del 4.2 % del peso, pari a gr. 0.05 per gr. e per giorno. Le calorie ingerite in media furono 57.5, cioè 0.37 per gr. di peso. L'acqua fu ingerita in quantità di cc. 5.88: le orine emesse cc. 14.77, le feci gr. 0.65. Dal 24–9 al 7–10–27 il ratto diminuì del 19 % del peso pari a gr. 0.0138 per gr. e per giorno: ingerì alimento corrispondente a calorie 53.5, cioè a calorie 0.36 per gr. medio di peso. Le feci emesse furono in media gr. 0.76; le urine cc. 12.53: l'acqua ingerita cc. 5.76. Negli otto giorni successivi il ratto ingerì quantità maggiore di cibo, pari a calorie 60, 0.43 per gr. di peso. L'acqua bevuta fu cc. 4.18: le orine emesse cc. 19.8, le feci g. 0.85. Per migliorare il valore alimentare della patata si aggiunsero a 50 gr. di essa gr. 10 di albume di uovo. Tuttavia il ratto perse peso in proporzione di gr. 0.068 per gr. e per giorno e morì quando era diminuito il 26 % del peso iniziale. L'autopsia fece osservare dilatazione del tratto ileocecale e ristagno fecale. Broncopolmonite purulenta e otite media purulenta bilaterale.

Dall'esame dei risultati su esposti si nota che gli esperimenti eseguiti sui ratti A e E furono interrotti da morte di broncopolmonite: quello sul ratto D da morte per infezione di natura non bene precisata. I dati di questi ratti sono stati tuttavia riportati perchè sembrano poter dare un'idea dell'importanza dell'alimentazione sulla resistenza ai processi morbosi. Il ratto D alimentato precedentemente con tuorlo d'uovo mostrò una resistenza al male molto maggiore di quando ingerì patata. Nel settembre 1927 si manifestò in laboratorio un'epidemia di broncopolmonite nei ratti, accompagnata sempre da otite media purulenta bilaterale. Tutti i ratti alimentati con miscele complete sopravvissero: gli altri alimentati con diete insufficenti soccombettero: tra questi i ratti A e E, alimentati con patate. Può avere contribuito alla poca resistenza al male il fatto che gli animali non erano abituati all'alimentazione con patate. In ricerche numerose eseguite sui ratti si è sempre osservato, quando si somministri loro una dieta diversa da quella abitualmente ingerita, specie se si allontana molto dall'*optimum* alimentare, un lungo periodo di adattamento, durante il quale gli animali perdono di peso, prima che possano utilizzare il nuovo alimento in modo sufficente ai propri bisogni. Naturalmente quando la insufficenza supera la capacità di adattamento dell'animale l'equilibrio non si raggiunge mai.

Le complicazioni morbose su dette non consentono di concludere sulla patata cotta come alimento pel ratto albino sano: per l'alimento crudo si può senz'altro dire che esso è incapace di mantenere l'animale in vita. Il ratto C soccombette dopo avere perduto il 44.4 % del peso iniziale: i ratti

A e B, in accrescimento, dopo avere perduto soltanto il 26-27 %. Queste osservazioni confermano per le diete insufficenti i risultati ottenuti col digiuno completo e cioè che i ratti in accrescimento resistono molto meno degli adulti. La patata cruda si è manifestata più insufficente della cotta: il ratto A, alimentato con patata cruda è morto dopo 17 giorni di esperimento, perdendo il 27.5 % del peso: il ratto E con patata cotta è morto anch'esso dopo avere perduto il 28 % del peso, ma vi ha impiegato 40 giorni. Tutti e due ebbero broncopolmonite. Il ratto C, adulto, alimentato con patata cruda, nei primi 23 giorni di esperimento aveva perduto il 26 % del peso. La diminuzione fu più rapida che pel ratto E, che ebbe patata cotta. Il ratto C, nei tre periodi di esperimento su citati, ingerì per gr. di peso calorie 0.22. Questa quantità è presso a poco sufficiente, nel ratto adulto a mantenere il peso. Poichè il ratto ha perduto di peso gradatamente ed è morto, probabilmente non tutto l'alimento ingerito fu utilizzato, od anche, sebbene sufficente al fabbisogno energetico, esso fu deficente per altre ragioni. Pel ratto B si possono fare le stesse osservazioni. Per una minore utilizzazione della patata cruda, in confronto della cotta parlano le cifre medie delle feci emesse, che furono sempre superiori nei ratti B e C che in D e E.

Valore medio delle feci: Periodi.

		I	II	III	IV	V
Patata cruda . .	B gr.	3.17	1.61			
»	C »	10.25	6.04	4.3		
Patata cotta . .	D »	0.84				
»	E »	0.48	0.65	0.76	0.85	0.46

Si aggiunga che il ratto E ingerì successivamente alimento capace di svolgere calorie 0.278, 0.37, 0.36, 0.44, per gr. di peso. L'alimento cotto fu cioè ingerito in quantità progressivamente crescenti e sempre in quantità superiore a quella dell'alimento crudo.

Nei ratti E e C, si osservarono diarrea, ristagno fecale e dilatazione del colon. Tali fatti fanno pensare a intossicazione intestinale dovuto a processi abnormi di scissione delle sostanze ristagnanti nel tubo gastroenterico. Le urine da acide, come normalmente, divennero gradatamente alcaline. Si è osservato cioè nei ratti in esperimento un quadro sintomatologico, che può essere paragonato a quello noto per le cavie in seguito alle ricerche di Baglioni e di Meo Colombo. Questi AA. osservarono in cavie alimentate con mais (Baglioni), con mais solo, o solo orzo o solo grano (Meo Colombo), dilatazione, con ristagno delle feci del tratto ileocecale. Le urine da alcaline divennero acide.

Recentemente Ciarrocchi, sperimentando su cavie, osservò che con patate crude e cotte la perdita del peso fu più lenta che con il digiuno completo, e in complesso non superò il 30-40 % del peso iniziale. All'inizio del trattamento con patate cotte l'A. osservò assenza di feci, che poi furono eliminate in scarsa quantità piccole, nere, durissime.

Negli ultimi giorni di vita l'eliminazione fu più abbondante: le feci erano grasse, molli e talora diarroiche. Durante questo periodo si ebbe spesso vomito. Con patate crude mancò la stipsi iniziale. La morte con patate cotte avvenne sempre più tardi che con patate crude.

Nelle cavie durante il digiuno e nelle alimentazioni con cereali la reazione delle urine diviene acida. Quando si somministrano patate, che tendono a spostare l'equilibrio ionico verso l'alcalosi, lo stato di acidità non si presenta mai in animali erbivori, ma scompare anche in animali onnivori, come il ratto.

Poichè nelle cavie di Ciarrocchi si osservarono le stesse lesioni del tubo gastroenterico che in quelle di Baglioni e della Meo Colombo e nelle prime l'urina fu alcalina, mentre nelle ultime fu acida e tutte morirono, presentando disturbi gastroenterici uguali, si deve pensare che allo stato di intossicazione dipendente da essi e all'inanizione parziale sia da attribure sopratutto la morte. Lo stato di acidosi negli animali erbivori, come nelle cavie, quello di alcalosi, come nei ratti, avranno certamente concorso a peggiorare le condizioni di vita. Nelle presenti ricerche, come in quelle di Ciarrocchi la patata cotta fu utilizzata meglio della cruda, certamente perchè la cottura aveva reso più utilizzabile il contenuto dell'alimento rendendolo anche più sterile. Nel ratto E, al termine dell'esperimento, per 3 giorni, si aggiunse alla patata cotta albume di uovo. L'aggiunta non arrestò la perdita del peso. Le calorie ingerite in questo periodo diminuirono in rapporto forse anche col fatto che l'albume d'uovo non migliorò il valore energetico per grammo della miscela somministrata. Esso contiene in media 85-87 % di acqua: la patata 73 %. Nè risultati migliori si ottennero col ratto C, al quale si aggiunse, nel secondo periodo degli esperimenti, alla solita dieta, burro nella proporzione di gr. 1.5 su 70 di patata. L'aggiunta migliorava la miscela dal lato energetico, ma in quantità troppo piccola per evitare la morte del ratto. Correggeva bene invece la deficenza di vitamina A. Se il ratto tuttavia morì, ciò significa che la morte non fu dovuta a quella deficenza.

Concludendo:

1° La patata cruda sebbene ingerita in grande quantità non è un alimento sufficente nè per l'accrescimento, nè per la vita del ratto albino.

2° La patata cotta ha favorito la resistenza a processi morbosi, broncopolmonite, meno bene di diete complete.

3° I ratti in accrescimento sono morti dopo avere perduto il 29-27 % del peso: il ratto adulto dopo la diminuzione del 40 %.

4° Con patata cruda la perdita del peso fu più rapida che con patata cotta.

5° Con alimentazione di patata cruda o cotta per lungo tempo si osservarono urine alcaline, diarrea, ristagno fecale, dilatazione del tratto ileo-cecale.

BIBLIOGRAFIA

Luciani e Baglioni, *L'alimentazione umana secondo le più recenti indagini fisiologiche.* Milano, 1917.

Gautier, *L'alimentation et les regimes chez l'homme sain et chez le malade.* Paris, 1904.

Berg, *Die Vitamine.* Leipzig, 1922.

M. Rose e L. F. Cooper, *The biological efficency of potato Nitrogen.* « Journal of Biol. chem. », vol. XXX, 1917.

S. Baglioni, *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica.* Note 1-9. « Rend. Acc. Lincei », 1908-1915.

Meo Colombo, *Sugli effetti dell'alimentazione di cereali nelle cavie.* « Problemi della nutrizione », 1924.

L. Ciarrocchi, *Contributo alla conoscenza delle cause delle malattie scorbutiche.* Bari, 1925.

Batteriologia. — *Cultura ascendente e dissociazione microbica* [1]. Nota di Costantino Gorini, presentata [2] dal Socio O. Mattirolo.

Sono due capitoli di batteriologia nei quali sono pioniere:

Cultura ascendente o rampicante. – Nel 1903 [3], avendo scoperto presso alcuni batteri (B. del tifo, Proteus, ecc.), la proprietà di arrampicarsi attivamente dai liquidi sulle superfici solide di nutrizione, proposi la *cultura ascendente* sull'agar obliquo quale mezzo per selezionare questi batteri dal materiale che li contiene insieme con altri. Questo metodo è stato utilizzato otto anni dopo (1911) da Choukevitch [4] (al quale è spesso erroneamente attribuito) e da Cantù [5], e in seguito da Metchnikoff [6], Bertrand [7], Puntoni [8], Tassinari [9] e da altri per la ricerca del Proteus; io stesso l'ho esteso poscia [10] all'isolamento di vari altri germi, che interessano la microbiologia medica, agraria e industriale, dalle feci, dalle acque, dal terreno, dal latte, dalla birra, ecc.; inoltre l'ho impiegato per studi di biologia microbica relativi alla mobilità, alla ciliatura, ecc., seguito in ciò da altri osservatori [11].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Nella seduta del 18 marzo 1928.

(3) « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », 1903, 36°.

(4) « Annales Pasteur », 1911, 25°.

(5) Ibidem.

(6) Ibidem., 1914, 28°.

(7) Ibidem.

(8) « Annali d'Igiene », 1916, 26°.

(9) « Lo Sperimentale », 1927, 81°.

(10) « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », 1917, 49°.

(11) « Atti della IV Conferenza Internazionale di Pedologia », Roma, maggio 1924.

Dissociazione microbica. – Nel 1921 [1] colle mie ricerche sulla eterogeneità e sulle mutazioni fisiologiche dei fermenti latticoproteolitici (che ora vanno sotto il nome di *acidoproteoliti Gorini*) per divergenze individuali, sono stato fra i primi contemporaneamente a Arkwright [2] e De Kruif [3] a svelare consciamente il processo di *dissociazione microbica spontanea* denunciandolo come un fenomeno naturale dovuto alla coesistenza normale di individui dotati di differente attività nelle culture pure di una medesima specie. E ancora oggi le mie ricerche su questo processo, che va diventando un principio fondamentale della microbiologia, rivestono un' importanza peculiare perchè riguardano le proprietà fisiologiche, biochimiche dei germi, mentre le ricerche degli altri AA., come rileva l'Hadley nella sua recente ampia monografia sull'argomento e come egli stesso ebbe a scrivermi privatamente [4], riguardano le proprietà morfologiche o le proprietà patogene e serologiche.

Ora io ho voluto verificare se, nel processo dissociativo degli acidoproteoliti, alle modificazioni biochimiche corrispondessero modificazioni morfologiche, approfittando del *Bacillus acidificans presamigenes casei* che nei trapianti periodici in latte mi ha dato frequenti esempi di mutazione con dissociazione, onde ne conservo nella mia collezione tre ceppi madre, che coagulano e peptonizzano il latte con reazione acida, accanto a tre ceppi figlia che peptonizzano il latte senza previa coagulazione in causa di una più debole produzione di acidità. Di tutt'e sei ho allestito culture isolanti parallele in gelatina a piatto, ottenendo i seguenti risultati, che riuscirono sensibilmente uguali per i ceppi madre fra loro e per i ceppi figlia fra loro, differenziando soltanto leggermente per il grado di compattezza e opacità delle colonie. I ceppi madre hanno dato luogo a tre tipi di colonie tutt'e tre liquefacienti, ma diversi *fin dall'inizio dello sviluppo e in tutta la colonia* per struttura microscopica (50 diametri) e macroscopica; e cioè: un tipo assai predominante a struttura granulosa, un tipo a struttura filamentosa e un tipo a struttura mista. Invece i ceppi figlia hanno dato luogo tutti unicamente al tipo di colonie a struttura filamentosa. Adunque, mentre gli stipiti madre risultano costituiti da elementi eterogenei, gli stipiti figlia risultano costituiti da elementi omogenei; degno di nota il fatto che dei vari tipi costituenti gli stipiti madre, uno solo e precisamente uno dei non

(1) « Rend. R. Acc. Lincei ». Nota presentata il 16 gennaio 1921 e pubblicata nel vol. XXX, fasc. 10° – « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », 1921, 54°, seduta del 14 aprile 1921.

(2) « Journ. Pathol. Bacteriol. », 1921, 24°.

(3) « Journ. Exper. Med. », 1921, 33°.

(4) Philip Hadley, *Microbic Dissociation*, Chicago, 1927. In data 24 dicembre 1927, l'Hadley mi scriveva: « Since writing my Monograph I have often found cause to regret the fact of important omissions in my bibliography Your valuable contribution is among this number. In your case, I am especially sorry, because you have dealt with *biochemical variations*; and we need more instances of this sort. My thesis did not receive such good support in this category of reactions ».

predominanti, il filamentoso, si sia ritrovato a formare tutt'e tre gli stipiti figlia che sono originati da mutazione spontanea. Ciò induce a ritenere che il tipo granuloso sia il tipo madre da cui deriva il tipo filamentoso verosimilmente attraverso il tipo misto. Questa concezione trova appoggio in quest'altro ordine di osservazioni. I due tipi granuloso e filamentoso, accuratamente isolati mediante una serie di piatte in gelatina, conservarono i caratteri della rispettiva struttura nei trapianti in brodo e segnatamente nelle infissioni in gelatina e in agar; però, lasciando invecchiare le colonie sulle piatte di agar, ho notato che, mentre il tipo filamentoso si espande mantenendo invariata la propria struttura, il tipo granuloso in capo a 6-8 giorni mostra ai suoi margini una evidente trasformazione verso la struttura filamentosa, la quale poi si trasmette nei trapianti in gelatina e in agar. Si tratta adunque di una vera mutazione che si verifica dal tipo granuloso al filamentoso e viceversa. Ciò va d'accordo colle osservazioni degli AA., secondo i quali, nei due tipi principali di colonie che si riscontrano con sorprendente parallelismo presso la maggioranza delle specie batteriche e che vengono convenzionalmente denominate S e R, il processo dissociativo si compie comunemente sempre in una medesima direzione e precisamente da S verso R; soltanto eccezionalmente, difficilmente o per via artificiale, il processo può compiersi in senso inverso. A vero dire, nelle mie osservazioni sulle mutazioni fisiologiche nelle culture degli acidoproteoliti in latte ho accertato anche, sebbene più raramente, casi di retromutazione, cioè di reversione spontanea; forse perchè, come pensa l'Hadley, le dissociazioni sono più facili e più attive nelle culture liquide? Comunque sia, senza voler qui stabilire raffronti fra i miei due tipi e i tipi S ed R, la cui terminologia si riferisce a caratteri opposti di morfologia (S = *smooth*; R = *rough*) e di fisiologia (S = sensibile; R = resistente all'autolisi), mette conto far rilevare che una certa corrispondenza esiste nel fatto che il tipo granuloso presenta caratteri di instabilità al pari del tipo S, mentre il tipo filamentoso presenta caratteri di stabilità al pari del tipo R. Noterò inoltre che gli AA. descrivono spesso anche un tipo intermedio O che corrisponderebbe al mio tipo a struttura mista.

Dal punto di vista biochimico il tipo granuloso mostra una attività più marcata; esso liquefa la gelatina più rapidamente e profondamente; esso coagula il latte in 24 ore a 37° C. con un'acidità Soxhlet di 16°, che al terzo giorno sale a 25° con digestione del coagulo, mentre il tipo filamentoso raggiunge solamente al terzo giorno un'acidità Soxhlet di 13°, e peptonizza senza previa coagulazione.

Anche dal punto di vista della morfologia cellulare i due tipi presentano differenze importanti; entrambi sono formati da bacilli a estremità arrotondate, di una larghezza media da 0.8 a 0.9 μ, di una lunghezza media di 3 μ, più accentuata nel tipo filamentoso; essi producono endospore elissoidali lunghe 0.9-1.4 μ e larghe 0.6-0.9 μ, più numerose nel tipo gra-

nuloso. Ma le differenze più sensibili stanno nell'aggruppamento e nella mobilità; nel tipo granuloso gli elementi sono generalmente isolati o a due, raramente in serie di 3-7, mentre nel tipo filamentoso gli elementi sono riuniti in serie numerose di 30, 40 fino ad un numero illimitato di articoli i quali rimangono incatenati anche sotto lo stemperamento; gli individui isolati o binati sono mobilissimi, ma essi diventano sempre meno mobili quanto più numerosa è la serie, finchè le catene lunghe sono immobili o al più presentano le estremità dotate di movimenti di oscillazione e di flessilità.

Tale divario di mobilità mi ha suggerito di tentare l'applicazione della cultura rampicante alla dissociazione artificiale del ceppo madre, ottenendone esito del tutto positivo. Entro 18-24 ore a 37° C. la superficie dell'agar obliquo era invasa pressochè uniformemente fino a notevole altezza da una sottile patina; prelevatane una piccola porzione dalla zona più alta, che al microscopio appariva costituita essenzialmente da cellule isolate o binate mobili, ne allestii una seconda cultura rampicante; ripetei l'operazione per un paio di volte finchè mi fui convinto, mediante piatte in gelatina, che avevo ricavato il tipo granuloso allo stato di purezza. Qui mi torna acconcio rincalzare il mio avvertimento sulla necessità di non confondere l'ascesa precoce attiva coll'ascesa tardiva, dirò così, passiva dei germi sull'agar inclinato; infatti nelle suddette culture rampicanti ben presto la patina ascendente mostrava di contenere anche individui immobili in catena del tipo filamentoso, i quali verosimilmente erano ivi pervenuti più che altro per continuità di sviluppo, per espansione dell'orlicino di cultura che si forma sull'agar con qualsiasi germe ancorchè non arrampicante presso il margine dell'evaporantesi acqua di condensazione.

Tutto ciò mi ha ricordato le mie ricerche [1] sopra un gruppo di batteri che hanno affinità morfologiche col *B. acidificans presamigenes casei* e che nella cultura rampicante invadono rapidamente l'agar anche fino all'estremità superiore, sebbene vi si presentino ordinariamente immobili. Nel mio precedente lavoro ho dimostrato che se però si ha cura di esaminare la cultura al primissimo inizio di sviluppo (talora solamente dopo 8-12 ore) si arriva a sorprendere una mobilità transitoria in individui corti, isolati, ai quali tengon dietro bentosto filamenti e catene immobili; ne ho concluso che questi batteri hanno una mobilità limitata alle prime ore di sviluppo, cioè allo stato di giovinezza. Vogliasi considerare che si tratta di quel gruppo di bacilli sporigeni del fieno e delle patate (*B. subtilis*, *B. mesentericus*, *B. mycoides*, *B. megatherium*, *B. carotarum*, ecc.), sulla cui mobilità si sono intavolate tante discussioni; io vi ho aggiunto anche il *B. anthracis* avendolo constatato talvolta rampicante confermando le osservazioni di Toussaint [2],

(1) «Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett.», 1917, 49°.
(2) «C. R. Ac. Sciences», 1877.

Nicolle [1], Dupond [2], Carpano [3] ed altri sulla sua transeunte fugace mobilità. Ora io ho ripetuto le mie ricerche dal punto di vista della dissociazione culturale secondo il metodo sopraindicato; ne ho ottenuto risultati analoghi; i primissimi rampicatori hanno dato luogo a colonie rotonde, compatte, *granulose*, diverse dalle colonie irregolari, sparse, *filamentose* (*caput medusae* e simili) che sono tipiche di questo gruppo di microbi e che derivano per dissociazione dalle colonie granulose in seguito ad invecchiamento sull'agar.

Riserbandomi di ritornare sull'argomento e di estendere le indagini ad altri gruppi di batteri rampicanti, quali il gruppo del B. Coli-tifo, il gruppo del Proteus, ecc., vengo, per il momento, alle conclusioni seguenti:

I. Nelle dissociazioni naturali degli acidoproteoliti, quali il *Bacillus acidificans presamigenes casei*, alle manifestazioni biochimiche si accoppiano manifestazioni morfologico culturali, le quali sono caratterizzate particolarmente: *a*) da variazioni nelle colonie di cui si distinguono due tipi principali: un tipo madre granuloso instabile e un tipo figlia filamentoso stabile, che trovano una certa corrispondenza coi tipi di colonie S e R degli AA.; *b*) da variazioni nell'aggregazione e nella mobilità cellulari, che possono essere controllate mediante la cultura ascendente atta a selezionare il tipo granuloso più attivo e mobile.

II. La cultura ascendente o rampicante permette di svelare presso un gruppo di bacilli sporigeni una mobilità transitoria ristretta a stadî iniziali di sviluppo, i quali danno luogo a colonie di tipo diverso dal tipo caratteristico delle rispettive specie, di guisa che i fenomeni di dissociazione microbica appariscono legati a fasi differenti del ciclo vitale, donde l'instabilità delle culture.

III. La cultura arrampicante da me ideata si presta non solamente alla separazione di specie diverse, ma altresì alla dissociazione di una medesima specie microbica.

N. P.

(1) Macé, *Traité de Bactériologie*, 1912.
(2) « Thèse de Nancy », 1905.
(3) « Moderno Zojatro », 1915, n. 11.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 maggio 1928 (Anno VI)

Presidenza del socio anziano sen. prof. E. D'Ovidio

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Sul catalogo astrografico di Catania.* Nota [1] del Corrisp. A. Bemporad.

Lo stato dei lavori intrapresi a Capodimonte per il Catalogo Astrografico di Catania e l'avanzamento nell'ultimo biennio risultano dal seguente prospetto:

Lastre ridotte e luoghi stellari calcolati

Zona	30 aprile 1926 (2)		30 aprile 1928		Restano a ridurre lastre n.
	Lastre n.	Stelle n.	Lastre n.	Stelle n.	
+ 47°	42	5604	50	6610	23
48	48	7687	61	9486	11
49	51	7300	57	8471	4
50	43	6212	50	7028	10
51	33	4868	39	5473	23
52	36	4774	52	6739	12
53	10	1626	40	6263	22
54	15	1793	39	4728	21
Totali . . .	278	39864	388	54798	126

(1) Presentata nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) Cfr. «Rendiconti», vol. III, serie 6ª, p. 639, seduta del 2 maggio 1926.

Risulta dunque in particolare che il numero delle lastre che restano ad elaborare è di poco superiore al numero delle lastre ridotte nel corso degli ultimi due anni; non è quindi infondata la speranza che possa essere

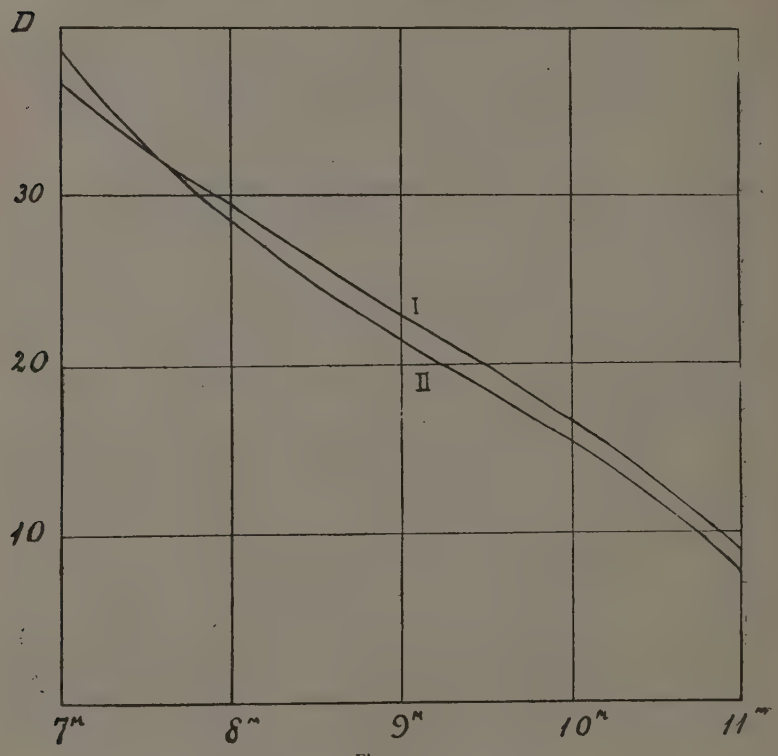


Fig. 1.

terminata entro il 1930 la parte di lavoro assunta dall'Osservatorio di Capodimonte (504 lastre fra 6^h e 18^h di Ascensione Retta).

Sono già pubblicati in forma di catalogo i risultati delle 36 lastre della zona $+48°$ fra 6^h e 12^h e sono stampati per due terzi i risultati analoghi per la zona $+47°$.

Le 54798 stelle ridotte sono state tutte ripetutamente esaminate da me al comparatore per controllarne le coordinate e per determinarne la luminosità; 24 lastre comprendenti 3576 stelle sono state misurate per intero a Napoli da me e da Alberto e Maria Viaro; infine 8369 stelle sono state da me rinvenute e misurate nel corso delle molteplici revisioni. Sono state calcolate le costanti di posizione per 455 lastre così distribuite:

Contarino, Guerrieri, Zappa, De Caro .	per n.	10	lastre
Aurino	» »	25	»
Merola	» »	29	»
G. Bemporad	» »	50	»
A. Bemporad	» »	341	»

Per tutte le lastre ridotte sono state da me calcolate mediante raccordo col « Draper Catalogue » [1] le *costanti fotometriche*, vale a dire i coefficienti della formola cubica $D = a + bg + cg^2 + dg^3$ proposta per la relazione fra i diametri stellari e le grandezze fotografiche [2]. Secondo la durata della posa, l'agitazione dell'aria e la qualità dell'emulsione, le curve di ragguaglio risultano più o meno ripide nell'intervallo di 2-3 grandezze comprendente le stelle più lucide; l'andamento delle varie curve è invece sensibilmente parallelo oltre la nona grandezza.

Nella fig. 1 sono riprodotte le curve medie dedotte da 36 lastre della zona $+48°$ distribuite in due gruppi. La grandezza limite corrispondente al diametro 1 (stella appena visibile) varia dalla $11^M.1$ alla $12^M.5$. A determinare con maggiore approssimazione questa grandezza limite si fanno concorrere, oltre alle stelle del « Draper » contenute sulla lastra considerata, anche i confronti fra le stelle più deboli della lastra in questione e quelle delle 6 lastre contigue che parzialmente la ricoprono. Grazie a questa compensazione la riduzione fotometrica riesce sicura entro circa due decimi di grandezza stellare, ciò che ha permesso, fra l'altro, di rinvenire nel gennaio 1927 la nuova variabile AG Aurigae [3].

Il computo delle stelle comprese nelle successive classi di grandezza 7-8, 8-9, ecc., conduce (nella media di 36 lastre della zona $+48°$ fra 6^h e 12^h di A. R.) alla seguente curva di densità stellare, la cui regolarità indica che fino alla grandezza $11\frac{1}{4}$ il Catalogo può ritenersi esente da lacune.

Confrontando le coordinate equatoriali desunte dalle prime 10 lastre della zona $+48°$ con le coordinate dedotte dalle lastre contigue della zona $+47°$ si ottengono, in media, i seguenti errori probabili, per una posizione desunta da due lastre, in posizione favorevole:

(1) in A. R. $\pm 0^s.025$, in Decl. $= \pm 0''.17$, in Gr. $= \pm 0^M.10$

sensibilmente inferiori agli importi corrispondenti per i cataloghi visuali ottenuti prima del 1900 (epoca del Catalogo Astrografico). In particolare

(1) « Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College », vol. 91 e sgg.
(2) Cfr. « Rendiconti », vol. XXXVII, ser. V, p. 245.
(3) Cfr. « Astronomische Nachrichten », n. 5530.

per il Catalogo dell'Astronomische Gesellschaft (Bonn) sono assegnati nella introduzione i valori

(2) in A. R. $\pm$ $0^s.050$, in Decl. $\pm$ $0''.49$, in Gr. $\pm$ $0^M.17$

Un altro saggio dell'esattezza raggiunta nelle posizioni equatoriali e nelle grandezze del nostro Catalogo Astrografico si è avuto nello spoglio

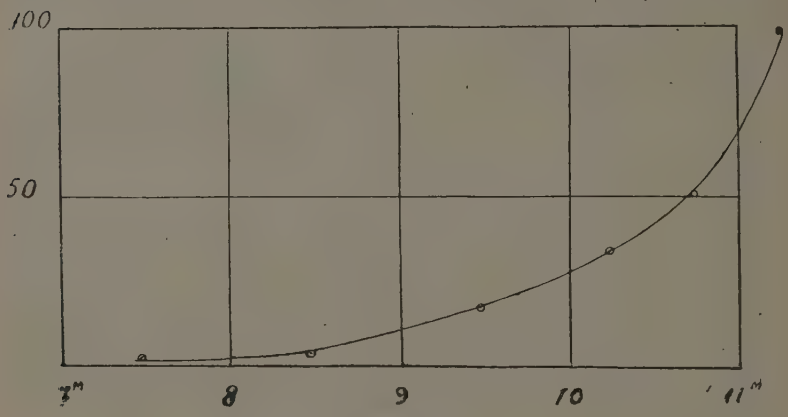


Fig. 2.

dei valori corrispondenti a 150 stelle di confronto per il pianetino Eros. L'errore medio quadratico (scarto dal medio di 2 o 3 valori corrispondenti ad una medesima stella in diverse lastre) importò rispettivamente

(3) in A. R. $\pm$ $0^s.024$, in Decl. $\pm$ $0''.24$, in Gr. $\pm$ $0^M.13$

Il lieve aumento nel secondo e terzo e. p., in confronto ai valori (1), dipende dal fatto che le 150 stelle di Eros talvolta compaiono in posizione sfavorevole sulle rispettive lastre, mentre per la prima ricerca sono state scelte 200 stelle in posizione favorevole (escludendo la fascia di 20 mm. in giro). In ogni modo anche i valori (3) sono notabilmente inferiori ai valori (2).

Possiamo legittimamente concluderne che già i risultati di questa prima elaborazione, non fondata su osservazioni meridiane recenti, ma sulle stesse posizioni di AG Bonn e senza il lavoro di coordinamento delle varie lastre, costituiscono un sensibile aumento di precisione per un numero di stelle *otto volte* più grande di quello delle stelle contenute in AG e prolungano la fotometria fotografica stellare fin oltre la 11ª grandezza, per un numero

di stelle 16 volte maggiore di quello delle stelle contenute nel Draper Catalogue.

Sia permesso ricordare che, fin da quando sono in corso i lavori del Catalogo Astrografico, vale a dire da oltre 30 anni, si era sempre ritenuto che la determinazione delle grandezze stellari costituisse il punto debole della grande impresa, dato l'aspetto molto diverso che assumono le immagini stellari di una medesima stella, secondo che venga fotografata presso il centro o sui bordi di una lastra o - peggio ancora - in angolo. Perciò il risultato che la precisione delle grandezze fotografiche, mediante i procedimenti posti in opera a Napoli, riesce sensibilmente superiore alla precisione raggiunta per le grandezze visuali dagli astronomi della celebre scuola di Bonn, dagli scolari dello stesso Argelander (Deichmüller, Seeliger e gli altri) è forse più importante, o per lo meno più inatteso, di quello della soddisfacente precisione di oltre 54000 luoghi stellari.

Chimica. — *Sopra i diazocomposti.* Nota [1] del Socio A. Angeli.

In questa breve comunicazione ho cercato di riunire alcuni dati e considerazioni sopra il comportamento dei composti diazoici; esse formano un seguito a quelle che in precedenza ho pubblicato sopra lo stesso argomento, ed al pari di queste, permettono di spiegare in modo soddisfacente le reazioni di tali composti senza ricorrere all'ipotesi della stereoisomeria ed evitando di conseguenza anche tutte le contraddizioni cui questa conduce.

Diazoidrati ottenuti per riduzione delle nitrammine ed isonitrammine. Secondo un'affermazione che Hantzsch riferisce nelle due edizioni della sua monografia [2] senza citare l'autore e nemmeno il dato letterario, per riduzione dei sali delle isonitrammine (nitrosofenilidrossilammine) si otterrebbero *isodiazotati*, mentre invece i sali delle isomere nitrammine (acidi diazobenzolici), a parità di trattamento, condurrebbero a *diazotati normali*; nella prima edizione della sua monografia Hantzsch aggiunge pure che questa differenza di comportamento non si riuscirà a spiegare fino a che non saranno chiarite la costituzione e rispettivamente l'isomeria fra nitrammine ed isonitrammine.

La differenza di struttura fra nitrammine ed isonitrammine è stata chiarita da me ancora molti anni or sono, ed i sali di queste sostanze altro non rappresentano che una coppia di azossicomposti isomeri; perciò l'affermazione di Hantzsch, circa i loro differenti prodotti di riduzione, che è in

(1) Presentata nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) *Die Diazoverbindungen*, Stuttgart, 1903, p. 40; Hantzsch e Reddelien, 2ª ed., Berlino, 1921, p. 43.

contraddizione con tutti i fatti finora conosciuti, si presenta più inverosimile che mai mentre invece è da aspettarsi che entrambi i sali isomeri debbano fornire un unico prodotto, che contiene un atomo di ossigeno in meno, l'isodiazotato:

$$C_6H_5\cdot N:N\cdot(OH) \quad \longrightarrow \quad C_6H_5\cdot N:N\cdot(OH) \quad \longleftarrow \quad C_6H_5\cdot N:N\cdot(OH)$$
$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$
$$O \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad O$$

Ed in modo contrario a quanto Hantzsch sostiene, ed in conformità alle mie previsioni, Bamberger [1] ha trovato che tanto le nitrammine quanto le isonitrammine, per riduzione con amalgama di sodio, a bassa temperatura, forniscono isodiazotati: Bamberger ha trovato inoltre [2] che la riduzione delle nitrammine a isodiazotati si può effettuare in modo ancora migliore impiegando poca polvere di zinco e cloruro ammonico in soluzione acquosa molto diluita; questo autore ha osservato che in tal caso non si forma fenilidrazina.

Io ho constatato inoltre che anche effettuando la riduzione del sale sodico della fenilnitrammina con amalgama di alluminio si perviene pure a isodiazotato; del pari si ottiene sempre isodiazotato per trattamento della soluzione acquosa del sale sodico con stannito sodico; in quest'ultimo caso, se in una prima fase si formasse diazotato normale, si avvertirebbe contemporaneamente sviluppo di azoto, come Friedländer ha osservato per il primo: ma ciò non si verifica.

A quale fatto sia dovuta la diversità di questi risultati ben stabiliti e che sono in piena contraddizione con quanto Hantzsch afferma, io non mi riesco a spiegare; a meno che Hantzsch non abbia operato in mezzo acido. In questo caso potrebbe formarsi un sale di diazonio dal quale soltanto, in una fase successiva, prenderebbe origine il diazotato normale.

In tal modo l'asserzione di Hantzsch, priva di qualsiasi documentazione e contraria ai fatti ed alle previsioni, sarebbe dovuta ad un errore sperimentale.

Le copulazioni di alcuni derivati del diazobenzolo. È noto che i diazoeteri, p. es.:

$$C_6H_5\cdot N:N\cdot(OCH_3)$$

si formano facilmente per azione degli alcool sopra il diazotato normale [1]. Secondo Hantzsch [4] tali eteri sarebbero da considerarsi come antiderivati

(1) «Berichte», *27* (1894) p. 1181; *30* (1897) p. 1249.

(2) «Berichte», *53* (1920) p. 2223.

(3) Il prof. E. Bamberger mi ha comunicato gentilmente che l'etere etilico del diazobenzolo si forma anche per azione della potassa alcoolica sopra la fenilazossicarbonammide, di cui io gli avevo inviato un campione; ciò è dovuto evidentemente al fatto che anche in questo caso in una prima fase si forma diazotato normale.

(4) Loc. cit., p. 57.

e per saponificazione forniscono *isodiazotati*; malgrado ciò essi si copulano facilmente, ma tale anomalia, sempre secondo lo stesso autore, non sarebbe dovuta a formazione di diazotato normale durante il processo di saponificazione, ma bensì ad una particolare decomposizione dell'etere, che si compirebbe in un primo tempo:

$$R \cdot N : N \cdot (OCH_3) \longrightarrow R \cdot NH_2 + ON \cdot (OCH_3)$$

in ammina e nitrito alcoolico, dai quali si formerebbe nitrito di diazonio e successivamente diazotato normale.

A mio modo di vedere, questa spiegazione data da Hantzsch è molto artificiosa e la copulazione dei diazoteri si può interpretare in modo molto più semplice ricorrendo alle analogie di struttura e di comportamento che si riscontrano fra diazocomposti ed i derivati dell'acido nitroso. È noto infatti da lungo tempo, nel caso dei nitriti alcoolici ed alcool alifatici, che le trasformazioni rappresentate dallo schema:

$$R' \cdot O \cdot NO + R'' \cdot OH \rightleftharpoons R' \cdot OH + R'' \cdot O \cdot NO$$

si compiono con la massima facilità, tanto che alcune hanno trovato anche applicazioni nella pratica.

Reazioni violente e non sempre bene studiate si compiono altresì fra nitriti alcoolici e fenoli, anche operando in soluzioni molto diluite[1]; in questi casi però la formazione dell'etere all'ossigeno è in generale immediatamente seguita dalla isomerizzazione:

$$ON \cdot O \cdot C_6H_5 \longrightarrow HO \cdot C_6H_4 \cdot NO\,,$$

vale a dire dalla migrazione del residuo dell'acido nitroso dall'ossigeno ad un atomo di carbonio dell'anello aromatico.

Nel caso dei fenoli sarà forse possibile isolare anche l'etere nitroso all'ossigeno ricorrendo all'artificio impiegato con successo da Dimroth[2] nel caso dei diazocomposti; partendo dal pentametilfenolo egli ha potuto preparare l'etere all'ossigeno:

$$C_6H_5 \cdot N : N \cdot O \cdot C_6(CH_3)_5\,,$$

che corrisponde a quelli che si ottengono dagli alcool, appunto per il fatto che essendo tutti i cinque atomi di idrogeno del fenolo occupati da

(1) È noto inoltre che i nitrosofenoli si preparano con grande facilità anche facendo reagire nitrito d'amile e potassa sopra la soluzione alcoolica dei fenoli [HENRICH e HEROLD, « Berichte », *60* (1927), 2054]. In modo analogo (BAMBERGER, « Berichte », *33* p. 3551) per azione del nitrito d'amile ed etilato sodico sopra l'anilina si forma isodiazotato.

(2) « Berichte » *50* (1917) p. 1545.

metili, non è più possibile la migrazione del residuo diazoico dall'ossigeno fenolico ad un atomo di carbonio dell'anello aromatico.

Al pari dei diazoeteri alifatici, anche il derivato ottenuto dal pentametilfenolo si copula con grande facilità, p. es. con l'α–naftilammina per dare benzolazonaftilammina e con l'anilina, con formazione di diazoamminobenzolo. Perciò anche nel caso dei diazoeteri è valida l'eguaglianza:

$$C_6H_5 \cdot N : N \cdot OR + R' \cdot OH = C_6H_5 \cdot N : N \cdot OR' + R \cdot OH$$

la quale corrisponde perfettamente a quella che vale per gli eteri dell'acido nitroso; la sola differenza risiede nel fatto che, quando ciò è possibile, il termine intermedio tende ad isomerizzarsi ed il residuo azoico si unisce direttamente ad un atomo di carbonio dell'anello benzolico ovvero della catena alifatica.

Lo stesso vale per i diazoamminocomposti, analoghi agli eteri nitrosi, p. es.:

$$C_6H_5 \cdot N : N \cdot NH \cdot C_6H_5 + C_6H_5 \cdot OH = C_6H_5 \cdot N : N \cdot C_6H_4 \cdot OH + C_6H_5 \cdot NH_2 .$$

Azoeteri all'ossigeno, appartenenti alla serie alifatica e che hanno comportamento del tutto analogo ai precedenti, vennero pure preparati da Dimroth facendo agire i diazoderivati sopra il tribenzoilmetano; il composto ottenuto, anche in questo caso, corrisponde a quelli degli alcool ovvero dei fenoli pentasostituiti: si copula col β–naftolo e con la naftilammina e per azione del calore si trasforma nell'isomero azoderivato del carbonio:

$$\begin{matrix} & C(CO \cdot C_6H_5)_2 \\ & \| \\ C_6H_5 \cdot N : N \cdot O \cdot C \cdot C_6H_5 & \end{matrix} \rightarrow C_6H_5 \cdot N : N \cdot C \{ CO \cdot C_6H_5 \}_3 .$$

Invece con acido cloridrico si scinde a sua volta in cloruro di diazonio e tribenzoilmetano.

Come è noto, in modo identico si comporta l'etere aromatico[1]:

$$Br \cdot C_6H_4 \cdot N : N \cdot O \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$$

il quale dagli acidi viene scisso nel sale di diazonio e p-nitrofenolo, mentre invece per azione del calore si isomerizza nell'azofenolo:

$$Br \cdot C_6H_4 \cdot N : N \cdot C_6H_4 \cdot (NO_2)(OH) .$$

Tutte queste reazioni stanno a dimostrare, come già a suo tempo ho posto in rilievo, che il processo di copulazione dei diazocomposti è prece-

(1) Dimroth, «Berichte», *41* (1908) p. 4016.

duto in ogni caso da una addizione degli alcool ovvero dei fenoli o delle ammine al sistema dei doppî legami gemelli contenuto nei diazoidrati normali; perciò, per spiegare il processo di copulazione dei diazoidrati aromatici eterificati all'ossigeno ovvero all'azoto:

$$C_6H_5 \cdot N : N \cdot O \cdot R \,. \qquad C_6H_5 \cdot N : N \cdot NHR$$

non è necessario ricorrere a particolari forme steriche come fa Hantzsch giacchè, come prima ho accennato, tali reazioni corrispondono perfettamente a quelle che vengono presentate dagli eteri dell'acido nitroso, che sono analogamente costituiti e si comportano nell'identico modo:

$C_6H_5 \cdot N : N \cdot O \cdot CH_3$ etere del diazoidrato
$O : N \cdot O \cdot CH_3$ etere dell'acido nitroso.

Aggiungerò inoltre che, come era da aspettarsi, anche le nitrosammine reagiscono come gli eteri dell'acido nitroso: così la difenilnitrosammina con p–toluidina fornisce diazoamminotoluolo, con idrossilammina in presenza di alcali dà iponitriti (Angeli) e con idrazina e alcali fornisce sali dell'acido azotidrico (Staudinger).

Termochimica dei diazocomposti. Secondo Hantzsch i diazoidrati normali possiedono un maggiore contenuto in energia e da ciò deriverebbe anche la maggiore facilità di reagire.

Anche questa asserzione è però contraria ai risultati delle misure recentemente eseguite da W. Svietoslawski (1) il quale ha trovato che la trasformazione:

$$N \text{ — Diazoidrato} \longrightarrow \text{Isodiazoidrato}$$

è accompagnato da assorbimento di calore; egli ha inoltre posto in rilievo che anche l'isomerizzazione dell'idrato di diazonio ad isodiazoidrato è una reazione endotermica e non esotermica, come Hantzsch supponeva.

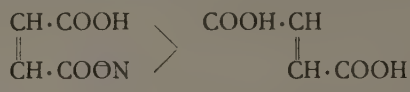
La stereoisomeria dei diazoidrati e quella delle benzaldossime. Secondo Hantzsch i diazocomposti normali ed i loro isomeri differiscono dinamicamente fra di loro nello stesso modo dei composti stereoisomeri; i due diazoidrati rassomigliano così agli acidi maleico e fumarico e sopratutto alle ossime.

(1) « Bulletin Acad. Polonaise des Sciences », (1924) p. 369.

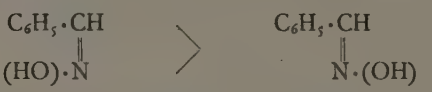
Ancora molti anni or sono io ho posto in rilievo le analogie che esitono fra acido nitroso e diazoidrati (« Gazzetta Chimica », *23* [1893], II, 347), e lo stesso Swietoslawski ha trovato (« Berichte », *43* [1910], p. 1486) che tali analogie vengono confermate anche dalle misure termochimiche, come risulta dai seguenti dati:

$$NO_2H + \beta C_{10}H_7(OH) = H_2O + (NO) \cdot C_{10}H_6(OH) + 32.47 \text{ Cal.}$$
$$C_6H_5 \cdot N_2OH + \beta C_{10}H_7(OH) = H_2O + (C_6H_5 \cdot N_2) \cdot C_{10}H_5(OH) + 32.85 \text{ Cal.}$$

Come ho già avuto occasione di porre in rilievo, tale affermazione non è in accordo coi dati sperimentali perchè se è vero, come era da aspettarsi, che l'acido maleico è più forte del fumarico:

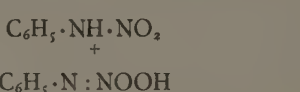


e che l'α–benzaldossima è più forte della β–benzaldossima:

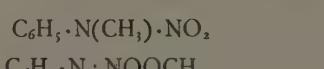


come recentemente è stato confermato da O. Brady e R. Goldstein[1], nel caso invece dei due diazoidrati si verifica tutto il contrario:

Tutto questo è in aperta contraddizione con quanto Hantzsch sostiene. Aggiungerò inoltre che negli esempi di tautomeria citati da Hantzsch[2] si tratta di due forme che entrambe possono funzionare da acido (più o meno forte dell'altro), come p. es.:



e che sia da intendersi a questo modo è dimostrato dal fatto che, a seconda dei sali da cui si parte, è possibile ottenere due eteri isomeri, l'uno all'azoto e l'altro all'ossigeno:



Nel caso invece dei due isomeri:

le cose sono profondamente diverse e, come si sa, il primo è base ed il secondo termine è acido e, come Hantzsch e Reddelien fanno osservare,

(1) « Journal Chem. Soc. », 1926, p. 1918.
(2) « Berichte », *60* (1927), 668.

il primo è stabile agli acidi e l'altro è stabile rispetto alle basi. Come giustamente pone in rilievo Cambi [1], negli idrati di diazonio, l'atomo di azoto centrale funziona come quello di un ammonio e l'atomo di azoto esterno come quello dell'acido nitroso; nei diazoidrati normali invece, l'atomo di azoto centrale è analogo a quello di un nitroderivato e l'esterno a quello dell'ammoniaca.

Ossidazione dei diazotati. Hantzsch e Reddelien (*Die Diazoverbindungen*, p. 37) asseriscono che i diazotati normali vengono più facilmente ossidati a nitrammine che non gli isodiazotati, sebbene a p. 59 affermino il contrario; dalle accurate esperienze di Bamberger [2] risulta invece che l'isodiazotato fornisce l'acido diazobenzolico in maggior copia che non l'idrato normale:

$$C_6H_5 \cdot N : N \cdot (OH) \longrightarrow C_6H_5 \cdot N : NOOH .$$

Ma a questo proposito è da tenere presente la possibilità di migrazione di un atomo di ossigeno dall'uno all'altro atomo di azoto come a suo tempo io ho avuto occasione di dimostrare [3]:

$$C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot NO_2 \longrightarrow C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$$
$$\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$$
$$\qquad\qquad O \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad O$$

$$C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot COOH \longrightarrow C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot COOH$$
$$\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$$
$$\qquad\qquad O \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad O$$

Inoltre, pure ammettendo che contemporaneamente possano formarsi quantità variabili di isonitrammina, bisogna ricordare che questa è molto sensibile all'azione ulteriore dell'ossidante e con tutta facilità, a differenza dell'acido diazobenzolico, si scinde per dare nitrosobenzolo e nitrito assieme ai loro ulteriori prodotti di ossidazione.

Il caso osservato da Bamberger che il nitrile $C_6H_5 \cdot N : N \cdot CN$, per ossidazione con acqua ossigenata, fornisce isonitrammina è senza dubbio da intendersi nel senso che in una prima fase si forma:

$$C_6H_5 \cdot N = N \cdot CN$$
$$\qquad\quad \|$$
$$\qquad\quad O$$

Si tratta quindi di una eccezione apparente, dovuta solamente al fatto di non avere giustamente interpretato l'andamento della reazione.

(1) «Rendic. Lincei», *5* (1927), 1° sem., p. 837.
(2) «Berichte», *27* (1894), 915; *42* (1909), 3568.
(3) Angeli, *Die Azoxyverbindungen*, 1913, Stuttgart, p. 30.

Astronomia. — *Osservazioni eseguite durante l'eclisse solare del 29 giugno 1927 nel R. Osservatorio di Capodimonte.* Nota del Corrisp. A. Bemporad.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici.* Nota del Corrisp. G. Giorgi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Proprietà delle omografie assiali di un S_n euclideo con applicazione alle formule di Frenet.* Nota del Corrisp. P. Burgatti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul funzionamento del triodo avente la placca e la griglia rilegate agli avvolgimenti di un trasformatore.* Nota del Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Su di un fenomeno fotoelettrico constatabile con gli audion.* Nota del Socio Q. Majorana.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *La demolizione termica dell'allumina Bayer.* Nota del Socio N. Parravano e di G. Malquori.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Quelques applications de la théorie des coordonnées géodésiques le long d'une courbe.* Nota di J. Dubourdieu. presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

I. – La théorie des coordonnées géodésiques le long d'une courbe C dans une variété riemanienne, telle qu'elle a été développée par le prof. Levi-Civita [2] conduit à la considération de courbes infiniment voisines de C et définies de la manière suivante:

On considère en un point M de C une direction MM′ quelconque différente de la tangente MT à C et la famille de géodésiques issues des différents points de C suivant les directions obtenues en déplaçant MM′ par parallélisme le long de C. Sur chacune de ces géodésiques on porte une longueur constante $d\sigma$ infiniment petite.

Nous appellerons une telle bande formée par des éléments de géodésiques parallèles, *bande cylindrique de base* C, et la courbe lieu des extrémités de ces éléments, *courbe géodésiquement équidistante de* C *suivant la direction* MM′.

La considération de ces courbes permet de donner une interprétation géométrique simple de la courbure de direction du prof. Bompiani [3].

Supposons à cet effet que la courbe C soit une géodésique et considérons la courbe C′ géodésiquement équidistante de C suivant une direction MM′ faisant avec MT l'angle φ. Soit $d\sigma = MM'$ la longueur constante précédemment definie, et M′T′ la tangente à C′.

Tout d'abord *la courbure riemannienne de l'élément* TMM′ *est fournie par la formule:*

$$(1) \qquad K = \lim_{d\sigma = 0} 4 \frac{\varphi - \varphi'}{d\sigma^2 \sin 2\varphi}$$

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) T. Levi-Civita, *Sur l'écart géodésique*, «Mathematische Annalen», Band 97 (1926) pp. 291–311.

(3) E. Bompiani, *Del parallelismo in una varietà qualunque*, «Atti del R. Istituto Veneto (1920), tomo LXXX, p. 378.

où φ' est l'angle de C' avec la géodésique MM' et où l'on suppose bien entendu $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

D'autre part C' n'est plus en général une géodésique comme C. L'utilisation de coordonnées géodésiques le long de C permet aisément de démontrer que sa courbure géodésique est donnée aux infiniments petits d'ordre supérieur près par:

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho^2} = A^2 \, d\sigma^2 \sin^2 \varphi,$$

avec:

$$(3) \quad A^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \sum_{h,k,(rs)(\rho\sigma)} g_{ij} R^i_{h,rs} R^j_{k,\rho\sigma} \lambda^h \lambda^k (\lambda^r \mu^s - \lambda^s \mu^r)(\lambda^\rho \mu^\sigma - \lambda^\sigma \mu^\rho),$$

où λ^i sont les paramètres directeurs de MT et μ^r les paramètres directeurs de MM'. L'expression A^2 qui ne dépend que de l'élément plan TMM' et de la direction MT dans cet élément (la direction MM' n'y intervenant pas d'une manière intrinsèque) n'est pas autre chose que la courbure de direction du prof. Bompiani (suivant l'élément plan TMM' et la direction MT). Son interprétation géométrique est donc fournie par la formule:

$$(4) \qquad A^2 = \lim_{d\sigma = 0} \frac{1}{\rho^2 \, d\sigma^2 \sin^2 \varphi}.$$

Si on considère en M $n - 1$ directions orthogonales à la géodésique C et orthogonales entre elles et si l'on construit les courbes C' correspondantes, *la somme des carrés des courbures géodésiques de ces* $n - 1$ *courbes est indépendante du choix des* $n - 1$ *directions considérées* et fournit l'interprétation géométrique de l'invariant:

$$I = \sum R^i_{r,si} R^j_{\rho,\sigma j} \lambda^r \lambda^s \lambda^\rho \lambda^\sigma$$

qui ne dépend que de la direction MT.

Mr. Bompiani a été conduit à la considération de l'invariant A^2 en comparant le parallélisme de Mr. Levi-Civita et le parallélisme de Mr. Severi: on obtient des résultats analogues en considérant le transport par parallélisme sur la bande cylindrique précédemment définie: d'une façon précise, on démontre aisément le résultat suivant, où on suppose MM' normal à C:

Soit M'T le vecteur obtenu en transportant par parallélisme MT en M' (parallélisme de Mr. Levi-Civita).

Soit M'T' le vecteur obtenu en transportant MT en M' par parallélisme sur la surface géodésique tangente à l'élément TMM' (parallélisme de Mr Severi).

Soit enfin $M'T_2$ le vecteur obtenu en transportant MT en M' par parallélisme sur la bande cylindrique de base C.

$M'T_2$ partage l'angle T_1MT' dans le rapport $\frac{2}{3}$, c.-à-d. que l'on a (aux infiniments petits d'ordre supérieur près):

$$\widehat{T'M'T_2} = 2\,\widehat{T_1M'T_2} = \frac{2}{3}\,\widehat{T'M'T_1}$$

avec:

$$\varepsilon = \widehat{T'M'T_1} = \frac{1}{2}\,d\sigma^2\,(A^2 - K^2).$$

II. - La considération de bandes cylindriques peut trouver une application intéressante dans la théorie des hypersurfaces dans une varité V_n. Considérons le cas de $n = 3$. Sur une surface S il existe l'∞^2 courbes de contact de la surface avec de semblables bandes, c.-à-d. l'∞^2 courbes telles qu'on peut pour chacune d'elles trouver une direction tangente à S et qui reste tangente à S quand on la transporte par parallélisme le long de cette courbe. Ces courbes généralisent les courbes d'ombre de l'espace euclidien et on peut démontrer le théorème suivant [1]:

Les seules surfaces pour lesquelles le système de courbes d'ombre forme un système axial (au sens de Mr. Bompiani c.-à-d. tel qu'en un point de la surface les plans osculateurs des l'∞^1 courbes passant par ce point ont une droite commune) sont les quadriques généralisées (surfaces dont les asymptotiques sont des géodésiques). Les sphères (surfaces dont tous les points sont des ombilics) sont telles que l'axe du système soit normal à la surface.

Matematica. — *Il teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di S. Signorini, presentata dal Socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Mr. Bianchi a démontré ce théorème pour l'espace euclidien dans le « Bollettino dell'Unione Matematica italiana », 15 aprile 1927, anno VI, n. 2: *Intorno ai sistemi assiali di curve sopra una superficie*, pp. 49-57.

Calcolo funzionale. — *I funzionali lineari delle funzioni di due variabili complesse.* Nota III di L. FANTAPPIÈ, presentata [1] dal Socio F. SEVERI.

12. Nella Nota precedente abbiamo visto come si possa calcolare il valore del funzionale lineare $F[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$, mediante un integrale doppio

$$(36) \qquad F[y(t_1, t_2; \varepsilon)] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{I'(\varepsilon)} v(t_1, t_2)\, y(t_1, t_2; \varepsilon)\, dt_1\, dt_2$$

finchè ε varia su un cammino L, a partire da un valore ε_1, per cui la $y(t_1, t_2; \varepsilon_1)$ sia interna all'intorno (r) di y_0, *in modo però che mai un punto di* $I_1(\varepsilon)$ *e un punto di* $I_2(\varepsilon)$ *acquistino medesima ordinata* (o medesima ascissa). Tuttavia, anche quando esiste qualche valore di ε su L, per cui due punti di $I_1(\varepsilon)$ e $I_2(\varepsilon)$ acquistano medesima ordinata (o ascissa), ma restano sempre distinti, il procedimento sarà ancora eseguibile, se prima si opera sulle variabili t_1, t_2 d'integrazione una sostituzione ortogonale, in modo che rispetto ai nuovi assi, mai due punti di $I_1(\varepsilon)$ e $I_2(\varepsilon)$ abbiano medesima ordinata (o ascissa). L'unico caso che si presenta dunque come effettivamente singolare è quello in cui due punti di $I_1(\varepsilon)$ e $I_2(\varepsilon)$ vengono a coincidere. Sia $\bar{\varepsilon}$ un valore di ε su L per cui ciò accade, mentre per ogni altro valore di ε sul tratto da ε_1 a $\bar{\varepsilon}$ il fatto non si presenti; faremo vedere che questo valore $\bar{\varepsilon}$ è, in generale, *un punto di singolarità* per la funzione $f(\varepsilon) = F_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$ e quindi la funzione corrispondente $y(t_1, t_2; \varepsilon)$ dovrà dirsi *singolare* per il funzionale lineare F, non essendo F regolare nel suo intorno.

Infatti, siano $s(t_1, t_2) = 0$, $\sigma(t_1, t_2; \varepsilon) = 0$ le equazioni delle varietà singolari di $v(t_1, t_2)$, $y(t_1, t_2; \varepsilon)$ rispettivamente, e chiamiamo $P_1(\varepsilon)$, $P_2(\varepsilon)$ le due intersezioni di $s = 0$, $\sigma = 0$, appartenenti agli insiemi diversi $I_1(\varepsilon)$, $I_2(\varepsilon)$, che vengono a coincidere per $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$. Nello spazio reale S_4, immagine dei punti reali e complessi del *piano* t_1, t_2, pensiamo di condurre uno spazio $S_3(\varepsilon)$, euclideo, o, più generalmente, della stessa struttura topologica di un S_3 euclideo, passante pei due punti $P_1(\varepsilon)$ e $P_2(\varepsilon)$, e per tutti quei punti di $s = 0$, $\sigma = 0$ occorrenti a far sì che la sua intersezione colla superficie $s = 0$ sia un insieme di *linee* tale che si possa passare con continuità su esso da $P_1(\varepsilon)$ a $P_2(\varepsilon)$, seguendo una certa

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

linea l_s, e analogamente l'intersezione colla $\sigma = 0$ sia tale che si possa pure passare con continuità su essa da $P_1(\varepsilon)$ a $P_2(\varepsilon)$ su una linea l_σ; l'insieme delle due curve l_s e l_σ, che hanno gli stessi estremi, costituirà una curva chiusa $\lambda(\varepsilon)$. Immaginiamo poi di distendere con continuità questo $S_3(\varepsilon)$ sullo spazio S_3 ordinario, di cui abbiamo una precisa intuizione. Per ogni valore di ε le due linee l_s e l_σ si distenderanno su due linee l_s, l_σ; cogli stessi estremi in due punti $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, e l'insieme di queste due curve dell'S_3 ordinario sarà una curva chiusa $\bar{\lambda}(\varepsilon)$, variabile con ε, che per $\varepsilon \to \bar{\varepsilon}$ tende a strozzarsi intorno al punto $\bar{Q}$, in cui vengono a coincidere $\bar{P}_1$ e $\bar{P}_2$. Vediamo ora cosa avviene della curva $\gamma(\varepsilon)$, intersezione del ciclo d'integrazione $\Gamma(\varepsilon)$ coll'$S_3(\varepsilon)$.

Per $\varepsilon = \varepsilon_1$, essendo $\Gamma(\varepsilon_1)$ dato dalle coppie di valori t_1, t_2 su C_1', C_2' rispettivamente, cioè dalla superficie d'intersezione dei due cilindri circolari retti (a 3 dimensioni), che si ottengono facendo variare t_1 su C_1' e t_2 comunque, t_2 su C_2' e t_1 comunque, $\gamma(\varepsilon_1)$ risulta una curva chiusa, *concatenata* colla curva $\lambda(\varepsilon)$, poichè le due parti l_s e l_σ di questa sono la prima tutta all'interno di quei due cilindri, la seconda tutta all'esterno della regione interna ad ambedue i cilindri, mentre $\gamma(\varepsilon_1)$ giace per intero sulla loro intersezione. Perciò anche la curva $\gamma(\varepsilon_1)$ corrispondente nell'S_3 ordinario a $\gamma(\varepsilon_1)$, risulterà *una curva chiusa concatenata coll'altra curva chiusa* $\bar{\lambda}(\varepsilon_1)$.

Ma le proprietà qualitative della configurazione di queste curve si manterranno sempre, finchè ε, e quindi anche le curve stesse, variano con continuità. In particolare, quando ε si muove su L da ε_1 a $\bar{\varepsilon}$, la curva chiusa $\bar{\gamma}(\varepsilon)$ dell'S_3 dovrà sempre mantenersi concatenata colla curva chiusa $\bar{\lambda}(\varepsilon)$, che va restringendosi intorno al punto $\bar{Q}$, finchè, per $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, non potrà evitarsi in alcun modo che la $\bar{\gamma}(\varepsilon)$ venga ad avere il punto $\bar{Q}$ in comune col cappio $\bar{\lambda}$, che si è strozzato attorno a questo punto.

Da queste considerazioni topologiche risulta dunque che, per $\varepsilon \to \bar{\varepsilon}$ su L, necessariamente $\gamma(\varepsilon)$ e $\lambda(\varepsilon)$ vengono ad acquistare un punto comune, e quindi *per* $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, *anche il ciclo* $\Gamma(\varepsilon)$ *d'integrazione e le varietà* $s = 0$, $\sigma = 0$, *singolari per la funzione integranda (e su cui giacciono quelle curve), vengono ad avere necessariamente almeno un punto comune.* L'integrale doppio (36), perde dunque significato per $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, e quindi *il funzionale lineare* F *non risulta definito per la funzione* $y(t_1, t_2; \bar{\varepsilon})$.

13. Pei valori $\bar{\varepsilon}$, singolari per la funzione $f(\varepsilon) = F[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$, e che non siano singolari per la y per ogni valore di t_1 e t_2, dovranno dunque venire a coincidere in un punto Q due intersezioni $P_1(\varepsilon)$, $P_2(\varepsilon)$ delle curve $s = 0$, $\sigma = 0$, e poichè la coincidenza di due tali intersezioni si ha soltanto quando in Q si annulla anche il determinante jacobiano di s e σ, avremo che *questi valori* $\bar{\varepsilon}$, *singolari per la* $f(\varepsilon) = F[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$, *soddisfe-*

ranno necessariamente all'equazione in ε, *che si ottiene eliminando* t_1, t_2 *dalle tre equazioni*

$$(37)\qquad \begin{cases} s(t_1, t_2) = 0 \\ \sigma(t_1, t_2; \varepsilon) = 0 \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial t_1} & \dfrac{\partial s}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial t_2} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Viceversa, se $\bar{\varepsilon}$ è radice dell'equazione risultante, vi saranno due intersezioni $P_1(\varepsilon)$, $P_2(\varepsilon)$, che vengono a coincidere per $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, e se è possibile trovare un cammino L che congiunga ε a ε_1, in modo che, variando ε su L, queste due intersezioni vadano a finire, per $\varepsilon = \varepsilon_1$, una nell'insieme I_1, l'altra nell'insieme I_2, $\bar{\varepsilon}$ *sarà singolare, in generale, per il ramo della* $f(\varepsilon)$ *a cui si perviene movendosi su* L *da* ε_1 *a* $\bar{\varepsilon}$, e prendendo per determinazione iniziale della $f(\varepsilon)$, nell'intorno di ε_1, l'espressione $f(\varepsilon) = \overline{F}[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$ della Nota I.

14. Le considerazioni precedenti ci permettono anche di determinare, in generale, gli elementi singolari di una funzione corrispondente a un'altra in un funzionale misto. Così, p. es., se consideriamo il funzionale lineare misto

$$(38)\qquad F[y(t_1, t_2); \zeta_1, \zeta_2] = f(\zeta_1, \zeta_2)$$

ed è $\sigma(t_1, t_2) = 0$ l'equazione delle varietà singolari della $y(t_1, t_2)$, $s(t_1, t_2; \zeta_1, \zeta_2) = 0$ quella delle varietà singolari per l'indicatrice $v(t_1, t_2; \zeta_1, \zeta_2)$ del funzionale, definita dalla formula $v(\alpha, \beta; \zeta_1, \zeta_2) = F_{t_1 t_2}\left[\dfrac{1}{(t_1 - \alpha)(t_2 - \beta)}; \zeta_1, \zeta_2\right]$, *le eventuali varietà singolari della funzione* $f(\zeta_1, \zeta_2)$, *corrispondente per il funzionale* F *alla* $y(t_1, t_2)$, *saranno date (oltre che da quelle singolari per la v per ogni valore di* t_1 *e* t_2*) dalle coppie* ζ_1, ζ_2 *per cui la solita espressione integrale perde significato, cioè, come si vede scambiando nel ragionamento precedente le due funzioni v e y, di cui una è fissa, l'altra variabile, dalle coppie* ζ_1, ζ_2 *che soddisfano all'equazione ottenuta eliminando* t_1 *e* t_2 *dalle tre altre*

$$(39)\qquad \begin{cases} s(t_1, t_2; \zeta_1, \zeta_2) = 0 \\ \sigma(t_1, t_2) = 0 \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial t_1} & \dfrac{\partial s}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial t_2} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Come nel caso dei funzionali delle funzioni di *una* variabile, vediamo dunque che anche in questo caso *le varietà singolari della* $f(z_1, z_2)$ *dipendono soltanto dalla posizione e configurazione delle varietà singolari della* y *e della* v.

15. Studiamo ora la natura della singolarità della $f(\varepsilon) = F[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$ per $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, nel caso generale che per $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ le due curve $s = 0$, $\sigma = 0$ acquistino soltanto un *contatto semplice* nel punto Q, in cui vengono a coincidere le due intersezioni (semplici) $P_1(\varepsilon)$, $P_2(\varepsilon)$ e *queste si scambino fra loro* al variare di ε su un cerchietto c racchiudente il solo valore singolare $\bar{\varepsilon}$. Ricordiamo perciò che il valore del funzionale $F[y(t_1, t_2 \varepsilon)]$; si ottiene (v. Nota II) come il residuo integrale della funzione

$$g(t_2; \varepsilon) = v(t_1, t_2)\, y(\overset{*}{t}_1, t_2; \varepsilon),$$

relativo a una curva $C_2(\varepsilon)$ del piano t_2, variabile con continuità, che racchiuda nel suo interno tutte e sole le ordinate dei punti di $I_2(\varepsilon)$. Se dunque facciamo variare ε su L da ε_1 al punto ε_0, intersezione di L col cerchietto c, la curva $C_2(\varepsilon_0)$ racchiuderà l'ordinata di $P_2(\varepsilon_0)$ ed escluderà quella di $P_1(\varepsilon_0)$, ma se poi facciamo variare con continuità ε su c attorno a $\bar{\varepsilon}$, fino a fargli riprendere il valore ε_0, i due punti P_1 e P_2 si trasformeranno l'uno nell'altro, e la curva $C_2(\varepsilon)$ si troverà quindi a racchiudere, dopo la rotazione di ε attorno a $\bar{\varepsilon}$, non più l'ordinata di $P_2(\varepsilon_0)$, ma quella di $P_1(\varepsilon_0)$, in cui la prima si è trasformata con continuità, e ad escludere quella di $P_2(\varepsilon_0)$. Chiamando $r_2(\varepsilon)$ il residuo della funzione $g(t_2; \varepsilon)$ nell'ordinata del punto $P_2(\varepsilon)$, $r_1(\varepsilon)$ quello nell'ordinata del punto $P_1(\varepsilon)$ e $R(\varepsilon)$ il residuo relativo a una curva d'integrazione, che racchiuda tutte e sole le ordinate dei punti di $I_2(\varepsilon)$ tranne quella di $P_2(\varepsilon)$, avremo allora che, mentre il valore ottenuto per la $f(\varepsilon)$ in $\varepsilon = \varepsilon_0$, facendo variare ε su L da ε_1 a ε_0 è dato da $R(\varepsilon_0) + r_2(\varepsilon_0)$, il valore che si ottiene per la stessa $f(\varepsilon)$ in $\varepsilon = \varepsilon_0$, dopo la rotazione di ε su c intorno a $\bar{\varepsilon}$, sarà invece dato da $R(\varepsilon_0) + r_1(\varepsilon_0)$, e se quindi è $r_2(\varepsilon_0) \neq r_1(\varepsilon_0)$, i valori assunti da questa funzione $f(\varepsilon)$ nel punto ε_0 saranno diversi.

In questo caso la funzione $f(\varepsilon) = F[y(t_1, t_2; \varepsilon)]$ *avrà dunque nel punto singolare* $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, *per cui vengono a coincidere due intersezioni che si scambiano fra loro, un punto di diramazione.*

Analogamente avremo che le varietà singolari (equazioni (39)) della funzione $f(z_1, z_2)$, data da un funzionale misto, saranno pure, in generale, *varietà di diramazione.*

16. Applichiamo le considerazioni precedenti a una particolare classe di funzionali lineari misti, e cioè a quei funzionali, che diremo *normali*, che a ogni funzione del tipo $y = t_1^r t_2^s$ fanno corrispondere la funzione stessa, alterata per un fattore di proporzionalità, cioè tali che

$$F[t_1^r t_2^s; z_1, z_2] = \xi_{rs} z_1^r z_2^s. \tag{40}$$

L'indicatrice simmetrica $w(\alpha, \beta)$ (v. Nota I) sarà data da

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{0}^{\infty}{}_{rs}\, \xi_{rs}\, z_1^r \alpha^r z_2^s \beta^s$$

e se poniamo

$$u(t_1, t_2) = \sum_{0}^{\infty}{}_{rs}\, \xi_{rs}\, t_1^r t_2^s \tag{41}$$

potremo scrivere

$$w(\alpha, \beta; z_1, z_2) = u(z_1 \alpha, z_2 \beta)$$

$$v(\alpha, \beta; z_1, z_2) = \frac{1}{\alpha\beta} u\left(\frac{z_1}{\alpha}, \frac{z_2}{\beta}\right) = \sum_{0}^{\infty}{}_{rs}\, \xi_{rs} \frac{z_1^r}{\alpha^{r+1}} \frac{z_2^s}{\beta^{s+1}}.$$

Se poi è

$$y(t_1, t_2) = \sum_{0}^{\infty}{}_{rs}\, a_{rs}\, t_1^r t_2^s \tag{42}$$

il valore di una determinazione della $f(z_1, z_2) = F[y(t_1, t_2); z_1, z_2]$, nell'intorno dell'origine, sarà dato da

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{rs}\, \xi_{rs} \frac{z_1^r}{t_1^{r+1}} \frac{z_2^s}{t_2^{s+1}} \right) \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{rs}\, a_{rs}\, t_1^r t_2^s \right) dt_1\, dt_2$$

$$f(z_1, z_2) = \sum_{0}^{\infty}{}_{rs}\, \xi_{rs}\, a_{rs}\, z_1^r z_2^s. \tag{43}$$

Per questa funzione, di cui un elemento è dato da una serie doppia di potenze, i cui coefficienti si ottengono moltiplicando i coefficienti corrispondenti delle due serie (41) e (42), potremo allora determinare le eventuali varietà singolari (in generale di diramazione) quando si conoscano quelle singolari per la u e la y, di equazioni, rispettivamente,

$$s(t_1, t_2) = 0 \quad , \quad \sigma(t_1, t_2) = 0 \tag{44}$$

eliminando t_1 e t_2 dalle tre equazioni

$$\begin{cases} s\left(\dfrac{z_1}{t_1}, \dfrac{z_2}{t_2}\right) = 0 \\ \sigma(t_1, t_2) = 0 \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t_1} s\left(\dfrac{z_1}{t_1}, \dfrac{z_2}{t_2}\right), & \dfrac{\partial}{\partial t_2} s\left(\dfrac{z_1}{t_1}, \dfrac{z_2}{t_2}\right) \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial t_2} \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Chiamando la curva, definita dall'equazione risultante, *curva prodotto* delle altre due, di equazione $s = 0$, $\sigma = 0$ (44), otteniamo così un teorema analogo a quello di Hadamard per le serie semplici di potenze. *La curva singolare per la serie* $f(z_1, z_2)$, *ottenuta dalle due serie u e y, è infatti la curva prodotto (o è contenuta in questa) delle due curve singolari per la u e la y rispettivamente.*

Dalla costruzione della serie $f(z_1, z_2)$ risulta poi evidente la *proprietà commutativa* del prodotto di due curve, e per il prodotto di più curve, la *proprietà associativa*, discendendo queste proprietà dalle analoghe pei prodotti ordinari, che compaiono a coefficienti delle potenze $z_1^r z_2^s$.

Si ha inoltre che *se le due curve* $s = 0$, $\sigma = 0$ *sono algebriche, tale è anche la curva prodotto*, come risulta dalla sua definizione, mediante le tre equazioni algebriche (45).

Meccanica. — *La piastra piana e la legge di Kutta-Joukowski.* Nota di C. Ferrari, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Omografia e differenziali relativi ad uno spazio curvo.* Nota di T. Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Identità di Bianchi e omografia di gravitazione.* Nota di T. Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo.* Nota di T. Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche e alle sue applicazioni tecniche.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Corrispondente C. Guidi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Studio del campo elettrico nei mezzi omogenei anisotropi.* Nota di B. Rossi, presentata dal Corrisp. P. Burgatti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica-Matematica. — *Sulla propagazione di correnti elettriche stazionarie in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme.* Nota I di ELENA FREDA, presentata [1] dal Socio V. VOLTERRA.

1. Consideriamo un conduttore omogeneo, isotropo, situato in un campo magnetico uniforme **H** e percorso da correnti stazionarie; supponiamo la temperatura del conduttore uniforme in tutti i punti (condizione che si potrà praticamente ritener soddisfatta, anche senza ricorrere a particolari dispositivi, se ci si limita ad inviare la corrente nel conduttore per un tempo molto breve). Riferiamo i punti del conduttore ad una terna di assi ortogonali $x\ y\ z$ dei quali il terzo parallelo ad **H** e tali che per un osservatore situato rispetto al piano xy dalla parte del semiasse $+z$ la rotazione di 90° del semiasse $+x$ per sovrapporsi al semiasse $+y$ avvenga in senso opposto a quello delle lancette di un orologio. Le componenti $j_x\ j_y\ j_z$ della densità di corrente $\boldsymbol{j}$ sono legate a quelle X, Y, Z della forza elettrica **F** dalle equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} j_x = k\mathrm{X} \pm \varepsilon\mathrm{Y} \\ j_y = \mp\varepsilon\mathrm{X} + k\mathrm{Y} \\ j_z = \sigma\mathrm{Z} \end{cases}$$

equivalenti alle altre

$$(1')\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{1}{\varepsilon^2 + k^2}(kj_x \mp \varepsilon j_y) \\ \mathrm{Y} = \dfrac{1}{\varepsilon^2 + k^2}(\pm\varepsilon j_x + kj_y) \\ \mathrm{Z} = \dfrac{1}{\sigma} j_z \end{cases}$$

nelle quali k, ε, σ dipendono soltanto dalla natura del metallo e dall'intensità del campo; all'annullarsi del campo k e σ divengono uguali alla conducibilità specifica σ_0 del metallo, mentre ε si annulla; i segni superiori si riferiscono al campo magnetico diretto (orientato come il semiasse $+z$) i segni inferiori al campo magnetico invertito [2].

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) La stessa cosa intenderemo nel seguito ovunque comparirà un doppio segno.

Ad equazioni del tipo (1) si giunge sia che ci si basi sulla teoria elettronica dei metalli, sia che si ammetta, come ipotesi, che $j_x\ j_y\ j_z$ debbano essere funzioni lineari omogenee di X, Y, Z [1].

In ogni punto del conduttore non occupato da elettrodi si dovrà avere:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

e in ogni punto del contorno non occupato da elettrodi

$$j_n = 0 \tag{3}$$

se n è la normale al contorno medesimo.

Ammessa l'esistenza del potenziale elettrico V, si avrà $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$; poichè in ogni punto del conduttore la normale alla superficie equipotenziale passante per quel punto coincide con la direzione di $\mathbf{F}$, basta studiare come vari da punto a punto questa direzione per sapere come varino le giaciture dei piani tangenti alle superficie equipotenziali.

In un punto P del conduttore nel quale non sia $\boldsymbol{j}$ (nè quindi $\mathbf{F}$) parallelo all'asse z, consideriamo i due semipiani limitati dalla parallela z_1 condotta per P all'asse z e contenenti rispettivamente il vettore $\mathbf{F}$ ed il vettore $\boldsymbol{j}$ relativi al punto P. Questi due semipiani incontrano il piano $z =$ costante passante per P secondo due semirette formanti con la parallela per P al semiasse $+x$ angoli le cui tangenti sono rispettivamente $\frac{Y}{X}$ e $\frac{j_y}{j_x}$; ma per le (1'), se si pone $\frac{\varepsilon}{k} = \operatorname{tg}\varphi$, si ha $\frac{Y}{X} = \frac{\frac{j_y}{j_x} \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp \frac{j_y}{j_x}\operatorname{tg}\varphi}$; dunque il semipiano $z_1\boldsymbol{j}$ per sovrapporsi al semipiano $z_1\mathbf{F}$ deve ruotare intorno alla retta z_1 dell'angolo φ in senso concordante con quello della corrente che produce il campo magnetico [2].

Indichiamo con α e β gli angoli che i vettori $\boldsymbol{j}$ ed $\mathbf{F}$ relativi al punto P del conduttore formano rispettivamente con la semiretta $+z_1$ uscente da P ed orientata come il semiasse $+z$. Avremo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{j_x^2 + j_y^2}}{j_z}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}$ e, per le (1'),

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \varepsilon^2}} \operatorname{tg}\alpha. \tag{A}$$

(1) Freda, «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem. 1926.

(2) Per un dato campo magnetico il segno di φ può essere diverso per metalli diversi.

Dalla (A) (come del resto dalle (1)) segue che *condizione necessaria e sufficiente perchè in un punto* P *del conduttore uno dei due vettori* **F**, $\boldsymbol{j}$ *sia parallelo o perpendicolare al campo magnetico* **H** *o formi con* **H** *un angolo acuto od ottuso è che la stessa cosa si verifichi in* P *per l'altro vettore* (1).

In ogni punto P, *in cui non sia* $\boldsymbol{j}$ *parallelo ad* **H**, *data la direzione di* $\boldsymbol{j}$ *per avere quella di* **F** *basta condurre per* P *la retta* z_1 *parallela al campo*

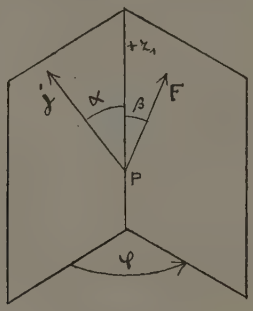


Fig. 1.

magnetico; far ruotare dell'angolo φ *il semipiano* $z_1\boldsymbol{j}$ *intorno a* z_1 *nel senso della corrente che produce il campo; determinare sul semipiano così ottenuto la semiretta con origine in* P *che forma con la semiretta* $+z_1$ *(con origine in* P *ed orientata come* **H**) *un angolo* β *legato dalla relazione* (A) *all'angolo* α *formato da* $\boldsymbol{j}$ *con* **H**.

Viceversa data in P la direzione di **F** si può dedurne quella di $\boldsymbol{j}$.

Tanto l'angolo φ $\left(\text{la cui tangente è } \frac{\varepsilon}{k}\right)$ quanto il rapporto $\frac{\sigma}{\sqrt{k^2+\varepsilon^2}}$ tra $\operatorname{tg}\beta$ e $\operatorname{tg}\alpha$ non dipendono nè dalla forma del conduttore nè dal punto P che in esso si considera ma solo dalla natura del metallo e dall'intensità del campo.

Da quanto si è detto segue che *l'ampiezza dell'angolo di* $\boldsymbol{j}$ *con* **F** *è nulla solo nei punti in cui* $\boldsymbol{j}$ (*e quindi* **F**) *forma un angolo di* 0° *o di* 180° *con* **H** (*cioè nei punti in cui le superficie equipotenziali sono perpendicolari ad* **H**); *è eguale a* φ *nei punti in cui* $\boldsymbol{j}$ (*e quindi* **F**) *è perpendicolare ad* **H** (*cioè nei punti in cui le superficie equipotenziali sono parallele ad* **H**); *varia in genere da punto a punto perchè dipende, oltre che dalla natura del metallo e dall'intensità del campo, dall'angolo che nel punto considerato* $\boldsymbol{j}$ *forma con* **H** (2).

Dalla regola indicata per la costruzione in un punto P della direzione di **F** nota quella di $\boldsymbol{j}$ si deduce facilmente che se s'impone al vettore $\boldsymbol{j}$

(1) σ è, come k, una quantità sempre positiva.

(2) La stessa cosa si verifica, come facilmente si deduce dalle (1), per il rapporto dei moduli dei due vettori **F** e $\boldsymbol{j}$ relativi ad uno stesso punto.

relativo ad un punto P la condizione di appartenere ad un dato piano π (passante per P) si viene implicitamente ad imporre ad $\mathbf{F}$ la condizione di appartenere ad un determinato piano (per P) π_1. Se si scelgono le direzioni positive n, n_1 delle normali in P ai piani π, π_1 in modo che se l'una forma un angolo acuto o ottuso con $\mathbf{H}$ lo stesso avvenga per l'altra, la semiretta n_1 è determinata, nota la semiretta n, dalle due condizioni seguenti

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{tg} n_1\mathbf{H} = \frac{\sqrt{k^2+\varepsilon^2}}{\sigma} \operatorname{tg} n\mathbf{H}\,.$$

(C) Quando n (e quindi n_1) non è parallela ad $\mathbf{H}$, il semipiano $z_1 n$ (z_1 retta per P parallela ad $\mathbf{H}$) per sovrapporsi al semipiano $z_1 n_1$ deve ruotare intorno a z_1 dell'angolo φ nel senso della corrente che produce il campo.

(Dalla condizione (B) segue che n_1 è parallela o perpendicolare ad $\mathbf{H}$ solo se la stessa cosa si verifica per n, cioè se il piano π è perpendicolare o parallelo ad $\mathbf{H}$). Il piano tangente in P alla superficie equipotenziale passante per questo punto, dovendo essere perpendicolare ad $\mathbf{F}$ dovrà passare per n_1; cioè in P dovrà essere nulla $\dfrac{\partial V}{\partial n_1}$.

In ogni punto P del contorno libero del conduttore la condizione $j_n = 0$ impone a $\boldsymbol{j}$ di appartenere al piano tangente in P al detto contorno; dunque *in ogni punto della superficie libera del conduttore dovrà essere* $\dfrac{\partial V}{\partial n_1} = 0$, *se* n_1 *è la direzione la cui orientazione rispetto alla direzione del campo e a quella della normale positiva n al contorno è determinata dalle condizioni* (B) *e* (C) [1].

2. Dalle (1) segue che condizione sufficiente perchè tanto le linee di corrente quanto le superficie equipotenziali restino, qualunque siano l'intensità e il senso del campo magnetico, quali sono senza campo è che per $\mathbf{H} = 0$ in ogni punto del conduttore $\boldsymbol{j}$ (e quindi $\mathbf{F}$) sia parallelo all'asse z (condizione che è realizzata solo quando la superficie libera del conduttore è parallela all'asse z e la corrente entra ed esce da elettrodi di resistenza trascurabile saldati a porzioni della superficie del conduttore perpendicolari al detto asse). Si vede facilmente che la detta condizione è anche necessaria. Basta infatti osservare che in ogni punto P in cui $\boldsymbol{j}$ non è parallelo ad $\mathbf{H}$ i semipiani $z_1\boldsymbol{j}, z_1\mathbf{F}$ (z_1 retta per P parallela ad $\mathbf{H}$) quando c'è il campo magnetico formano un angolo la cui ampiezza φ varia al variare dell'intensità di $\mathbf{H}$ e il cui senso s'inverte con quello di $\mathbf{H}$, mentre quando non c'è il campo coincidono.

(1) I coseni direttori di n_1 si possono facilmente, mediante le (1), esprimere in funzione dei coseni direttori di n.

Ci si può allora domandare se ed in quali condizioni (riguardanti il contorno libero e gli elettrodi) le sole linee di corrente o le sole superficie equipotenziali possano sotto l'azione del campo magnetico restare quali sono senza campo. È ciò che esamineremo nei successivi paragrafi (basandoci sui risultati del paragrafo precedente) limitandoci a considerare i conduttori nei quali la corrente entra ed esce da elettrodi puntiformi o estesi e di resistenza trascurabile [1].

Fisica. — *Sulla emissione elettronica in un tubo a vuoto.* Nota [2] di L. Tieri e V. Ricca, presentata [3] dal Socio A. Lo Surdo.

Come è noto, l'emissione elettronica in un filamento incandescente nel vuoto è accompagnata da una variazione nell'intensità della corrente che alimenta il filamento stesso. Questa variazione, essendo legata al lavoro di estrazione degli elettroni, ha fornito il mezzo per determinare il potenziale intrinseco di alcuni metalli [4].

Scopo del presente lavoro è la ricerca della relazione esistente fra le variazioni della corrente del filamento e quelle della corrente elettronica, al variare della differenza di potenziale tra filamento e placca.

Per la misura della variazione di corrente nel filamento ci siamo serviti dell'apparecchio di Cox e Pietempol [5] (fig. 1, M), che consente la misura della variazione dell'ordine di 10^{-6} della corrente iniziale. Detto apparecchio è un ponte di Wheastone, che viene inserito nel circuito della corrente mediante i conduttori 1 e 2. Dei quattro rami del ponte: r_1 è una resistenza fissa, r_2 è il filamento di una lampadina tascabile, r_3 e r_4 sono dei conduttori, di sezione conveniente, che possono essere affondati più o meno in una massa di mercurio, e servono per stabilire l'equilibrio nel ponte. Il galvanometro è collegato con i conduttori 3 e 4. Il mercurio è ricoperto da uno strato di alcool o di olio in cui rimangono completamente immerse le resistenze r_1, r_3 e r_4 allo scopo di mantenerle praticamente costanti col variare della corrente. Prima di eseguire le misure bisogna naturalmente aspettare che si sia stabilito il regime nella temperatura.

(1) Per le analoghe questioni riguardanti una lamina piana disposta trasversalmente nel campo, cfr. Corbino, «Rend. Acc. Lincei», 1° sem. 1915; Volterra, «Rend. Acc. Lincei», 1° sem. 1915.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Messina.

(3) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(4) Richardson e Cooke, «Phil. Mag.», april and sept. 1913.
Lester, «Phil. Mag.», XXXI, 1916, p. 197.
Davisson e H. Germer, «Phis. Review», 20, 1922, p. 300.

(5) Cox e Pietempol, «J. Opt. Soc. Am.», 12, 1926, p. 691.

Una variazione ΔI, della intensità della corrente I del circuito principale, produce una variazione della resistenza r_2 della lampadina e quindi una deviazione nel galvanometro. Tarando opportunamente l'apparecchio si può risalire dalla deviazione del galvanometro, alla misura di ΔI.

Come filamento incandescente, per l'emissione degli elettroni, venne adoperato quello di un triodo Phylipps miniwatt C.509.

Le misure vennero portate a confrontare le variazioni ΔI, della corrente del filamento, con le variazioni Δi della corrente termoionica, ottenute mantenendo costante il potenziale di placca e dando al potenziale di griglia incrementi compresi fra 0 e + 1 volt rispetto al potenziale dell'estremo negativo del filamento, al quale la griglia era metallicamente collegata.

Lo schema del circuito adoperato è il seguente:

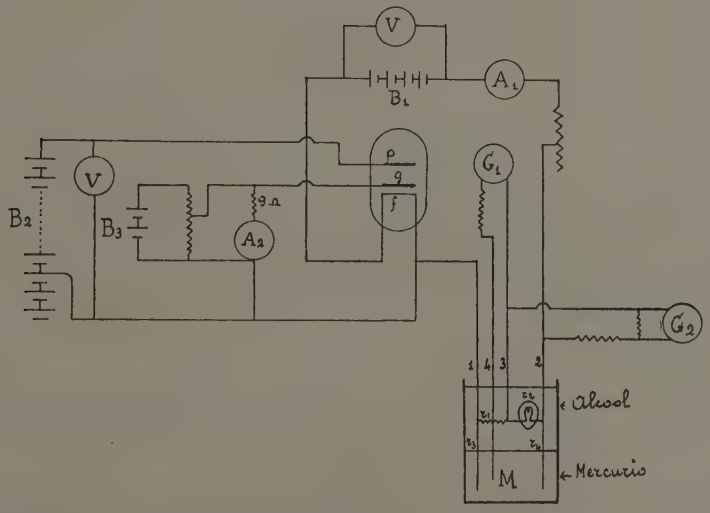


Fig. 1.

B_1 = batteria di accensione del filamento;

B_2 = batteria di placca;

B_3 = batteria di griglia;

A_1 = amperometro di precis. 20 divisioni = 0.1 amp.;

A_2 = millivoltamp. che con una resistenza di 9 Ω in serie dà per 1 volta 100 divisioni della scala;

G_2 = galvanometro adoperato come voltmetro per il controllo della tensione agli estremi del filamento della lampadina tascabile;

M = apparecchio di Cox e Pietempol;

G_1 = galvanometro per le misure di ΔI.

Le misure vennero eseguite nel seguente modo:

Si alimentava il filamento con una corrente di intensità I, si stabiliva una differenza di potenziale V_p fra placca e filamento, mantenendo la griglia allo stesso potenziale dell'estremo negativo del filamento del triodo; si regolava quindi l'apparecchio M, in modo che il filamento della lampadina tascabile fosse attraversato dalla corrente corrispondente al massimo di sensibi-

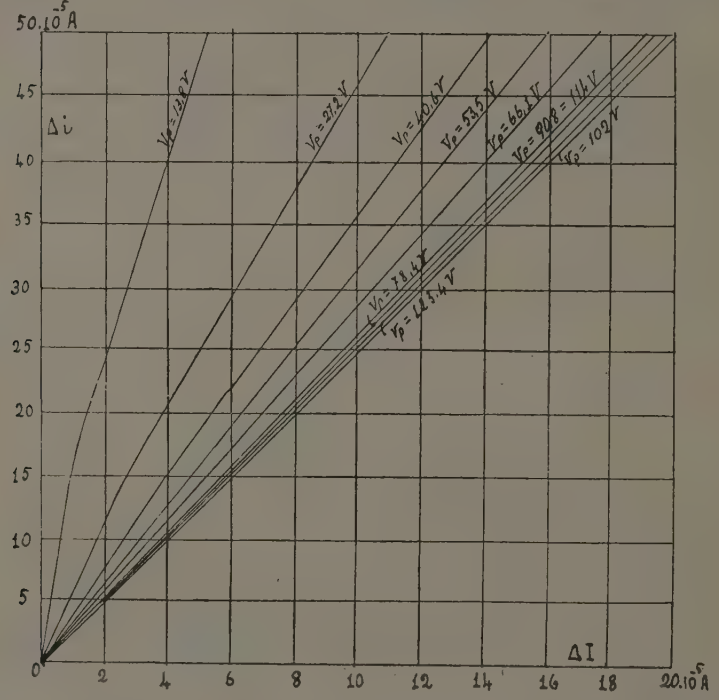


Fig. 2.

lità dell'apparecchio M. Si lasciava tutto in queste condizioni per alcune ore (da 5 a 6) e dopo si regolava M in modo da non avere alcuna deviazione al galvanometro G_1. Si davano quindi alla griglia dei potenziali man mano crescenti e si leggevano le corrispondenti deviazioni in G_1, dalle quali si deducevano i valori di ΔI mediante il diagramma di taratura dell'apparecchio M (diagramma che nei limiti delle nostre esperienze era una retta); dai valori di V_g (potenziali di griglia) mediante le caratteristiche del triodo si ottenevano i valori di Δi.

Riportando i valori di ΔI e Δi sopra un sistema di assi cartesiani e ripetendo le esperienze per diversi valori della tensione anodica si ottennero i diagrammi della fig. 2.

Dai quali si rileva che al crescere del potenziale di placca, l'immagine geometrica della funzione $\Delta i = \varphi(\Delta I)$ si inclina verso l'asse delle ΔI, e ciò fino a che il potenziale di placca non abbia raggiunto un certo valore, oltre il quale sembra che l'inclinazione rimanga costante. Inoltre, al crescere del potenziale di placca detti diagrammi tendono a divenire rettilinei (almeno nei limiti delle nostre osservazioni).

La curvatura dei diagrammi relativi a piccoli valori del potenziale di placca, potrebbe essere dovuta (in parte almeno) al fatto che per ottenere

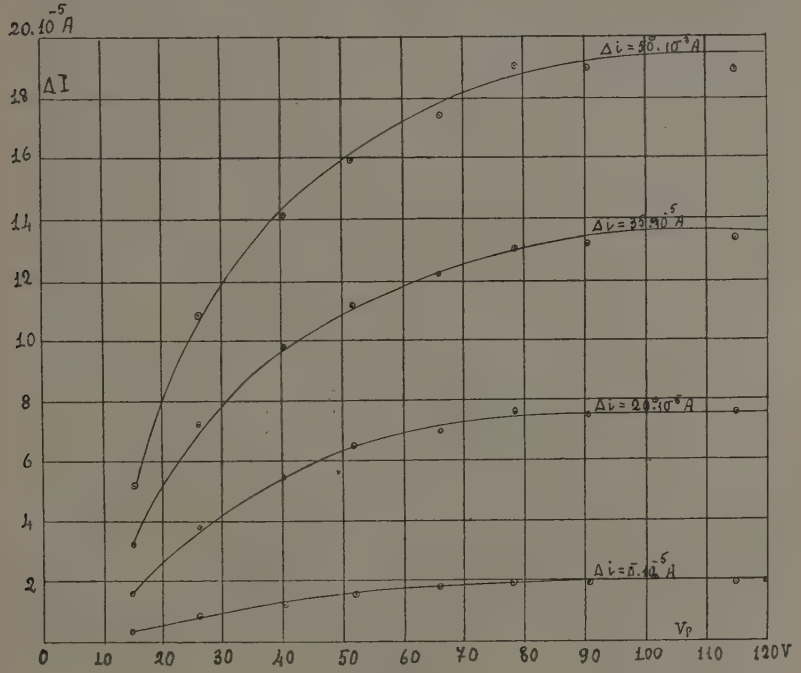


Fig. 3.

un determinato valore Δi nella variazione della corrente di placca occorre una variazione del potenziale di griglia maggiore di quella che occorre per produrre la stessa variazione per potenziali di placca più elevati, e di conseguenza, poichè nel valore di Δi non viene computata la variazione della corrente di griglia, che ha sempre influenza nella variazione ΔI, si viene ad avere un valore di ΔI maggiore di quello che dovrebbe corrispondere a Δi.

Se per un determinato valore di Δi prendiamo su ogni curva della fig. 2 il corrispondente valore di ΔI otteniamo ΔI in funzione di V_p.

Dai vari diagrammi in tal modo ottenuti (fig. 3) si rileva che per un determinato valore di Δi, ΔI cresce con l'aumentare della tensione anodica

fino a raggiungere un massimo. Sembra inoltre che i prolungamenti di dette curve incontrino l'asse delle V_p in un punto diverso da zero, ossia che la variazione di ΔI cambi di segno per un determinato valore della tensione anodica; e poichè le variazioni ΔI osservate sono nel senso di una diminuzione della corrente I del filamento, ne consegue che, operando con

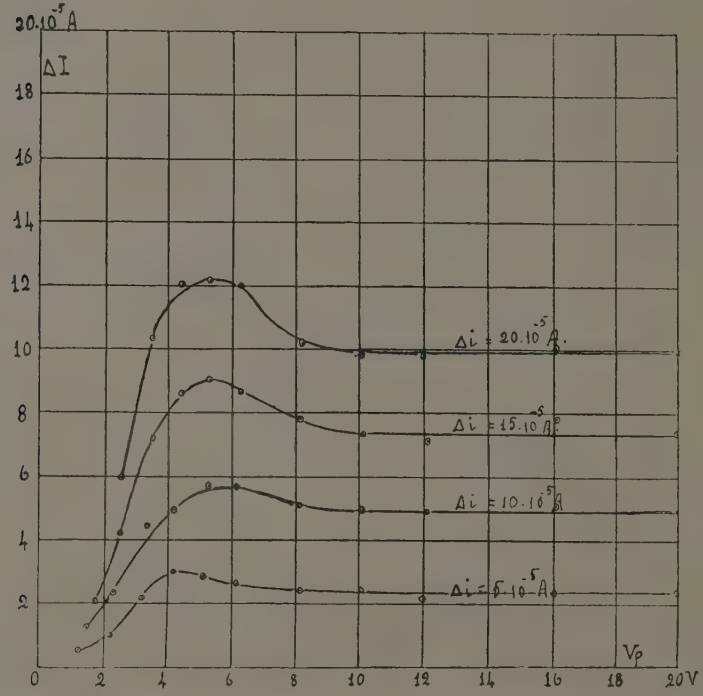


Fig. 4.

potenziali molto piccoli, si dovrebbe avere una variazione nel senso di un aumento.

Questo fatto singolarmente importante, per le deduzioni che se ne possono trarre, non può però essere accettato senz'altro, tanto più che è stato dedotto da una estrapolazione, che potrebbe essere errata.

Abbiamo perciò ripetuto le esperienze sopra lo stesso triodo collegando metallicamente la griglia con la placca.

Il metodo evidentemente dovette essere leggermente modificato, non potendo più seguire quello precedente, per la mancanza della griglia.

Si operò quindi nel seguente modo:

Si trovò anzitutto la relazione fra la corrente elettronica e il potenziale di placca, ottenendo così una curva che, nei limiti delle nostre esperienze, può essere rappresentata dall'equazione:

$$i = 0.1 + 0.056\,V + 0.066\,V^2 - 0.0008\,V^3$$

dalla quale si ha:

$$\Delta V = \frac{\Delta i}{0.056 + 0.132\,V - 0.0024\,V^2}.$$

Da questa relazione si ottengono le variazioni che bisogna apportare al potenziale di placca perchè la corrente elettronica vari sempre dallo stesso valore Δi, per i diversi valori del potenziale di placca.

Misurando quindi, come nel caso precedente, i valori di ΔI corrispondenti si poterono costruire i diagrammi della fig. 4 (che corrispondono a quelli della fig. 3).

Da essi si nota che il tratto di curva che nella fig. 3 è ottenuto variando il potenziale di placca fra zero e circa 100 volta, in questo caso

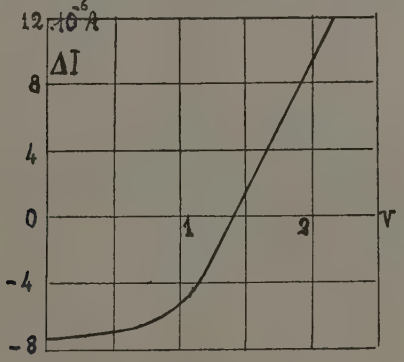


Fig. 5.

si ottiene con una variazione molto minore nel potenziale di placca, pur essendo ciò in parte dovuto al fatto che avendo collegato la griglia alla placca è come se questa fosse di molto avvicinata al filamento.

Neanche in questo caso però si è potuta studiare la forma della curva in prossimità dello zero, e ciò per difetto di sensibilità. Infatti, se si opera su valori di Δi molto piccoli, le variazioni di ΔI (in prossimità di $V_p = 0$) risultano tanto piccole che l'apparecchio M non è più in grado di rivelarcele; se invece si opera su valori di Δi molto grandi, quando si giunge in prossimità di $V_p = 0$, per ottenere la variazione Δi bisognerebbe variare V_p di una quantità maggiore di V_p stesso, il che altererebbe completamente la forma del diagramma.

Pur avendo rinunziato, almeno per ora, al prolungamento dei diagrammi abbiamo potuto mettere in evidenza l'inversione di ΔI, misurando i valori di ΔI col variare del potenziale di placca successivamente fra i valori:

$$-110 \text{ e } +2.16 \ , \quad -110 \text{ e } +1.6 \ , \quad -110 \text{ e } +0.8 \ , \quad -110 \text{ e } 0.$$

Si ottennero corrispondentemente per ΔI i seguenti valori:

$$+12 \cdot 10^{-6} \text{ A} \ , \quad +2.5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \ , \quad -6.5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \ , \quad -7.5 \cdot 10^{-6} \text{ A}.$$

In tal modo risulta provata l'inversione di ΔI, e si trova che $\Delta I = 0$ quando il potenziale di placca passa da -110 volta a $+1.4$ circa (fig. 5).

Riferiremo in altra Nota sull'interpretazione di questi risultati.

Fisica. — *Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo: Calcolo della correzione di Rydberg per i termini s.* Nota III di E. Fermi, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

In due Note precedenti [2] ho mostrato che si può considerare l'insieme degli elettroni che circondano il nucleo di un atomo pesante come una specie di atmosfera di gas di elettroni in condizioni di completa degenerazione. Applicando allo studio di questa un metodo statistico si arriva a determinare la distribuzione degli elettroni attorno al nucleo e l'andamento del potenziale elettrico nell'interno dell'atomo come funzione della distanza dal nucleo.

Quest'ultimo risultato permette di determinare l'energia di qualsiasi orbita elettronica quando ne siano noti i numeri quantici totale e azimutale. Basta per questo procedere al modo seguente: Consideriamo un atomo di numero atomico Z e, tra i suoi Z elettroni, fissiamo la nostra attenzione sopra quello di cui vogliamo calcolare l'energia. Gli altri $Z - 1$ elettroni verranno invece considerati tutti insieme come una atmosfera da trattarsi col metodo statistico.

Dai risultati della Nota I si ricava, conservando le stesse notazioni, che il potenziale elettrico a distanza r dal nucleo è, per l'atomo di numero atomico $Z - 1$,

$$\frac{(Z-1)e}{r} \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

Per passare dall'atomo di numero $Z - 1$ a quello di numero Z bisogna aggiungere una carica elettrica elementare al nucleo e un elettrone. Si ri-

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) Questi «Rendiconti», *6*, 602, 1927; *7*, 342, 1928.

conosce allora che, in prima approssimazione, l'energia potenziale dell'elettrone aggiunto sarà:

$$(1) \qquad V(r) = -\frac{e^2}{r}\left\{1 + (Z-1)\,\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right)\right\}$$

dove per μ va messo naturalmente il valore che si ottiene dalla formula (12) della Nota I ponendo $Z - 1$ al posto di Z.

Determinata così l'energia potenziale dell'elettrone come funzione della sua distanza dal nucleo, si ha la possibilità di determinare i livelli energetici dei suoi stati quantici. Si può perciò ricorrere al metodo classico di Sommerfeld o, con maggiore esattezza, alla meccanica ondulatoria di Schroedinger.

In questo lavoro mi sono proposto di calcolare il valore dei termini *s* degli spettri di tutti gli elementi o, ciò che è lo stesso, la correzione di Rydberg delle serie *s*. In un altro lavoro Rasetti [1] ha calcolato i termini M_3 dello spettro dei raggi X.

L'equazione di Schroedinger per i termini *s* (quanto azimutale $k = 0$) si riduce a

$$(2) \qquad \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - V(r)]\,\psi = 0.$$

Questa equazione si trasforma subito nell'altra

$$(3) \qquad \chi'' + \chi\left[-\eta + \frac{1}{x}\{1 + (Z-1)\,\varphi(\gamma x)\}\right] = 0.$$

Dove si è posto

$$(4) \qquad \begin{cases} r = \dfrac{h^2}{8\pi^2 me^2}\,x \qquad \gamma = \dfrac{h^2}{8\pi^2 me^2\mu} = \left\{\dfrac{16\,(Z-1)}{9\pi^2}\right\}^{1/3} \\ -\eta = \dfrac{h^2}{8\pi^2 me^4}\,E \qquad \chi = x\psi. \end{cases}$$

Una autofunzione è determinata da una soluzione della (3) finita e continua nell'intervallo da o a ∞ della x. L'autovalore corrispondente η determina il livello energetico corrispondente e il numero degli zeri dell'autofunzione dà il numero quantico n dello stato. Per determinare la correzione di Rydberg basterà perciò riferirsi alla soluzione limite per $\eta = 0$ (cioè per $n = \infty$) e confrontare questa soluzione con la soluzione dell'equazione corrispondente per il caso dell'idrogeno.

Se nella (3) si pone $\eta = 0$ si trova l'equazione

$$(5) \qquad \chi'' + \frac{\chi}{x}\{1 + (Z-1)\,\varphi(\gamma x)\} = 0$$

(1) Cfr. questo fascicolo.

e l'equazione corrispondente per l'idrogeno è (Z = 1)

$$\zeta'' + \frac{\zeta}{x} = 0 . \tag{6}$$

Siccome per x piuttosto grande l'energia potenziale dell'elettrone dell'idrogeno viene a coincidere con quella (1) del nostro elettrone, poichè φ tende a zero, le due autofunzioni, da un certo punto in poi, verranno ad avere andamento parallelo. Se supponiamo allora che p. e. l'n^{esimo} zero della soluzione di (5) coincida con l'n'^{esimo} zero della soluzione di (6), si potrà concludere che la correzione di Rydberg è

$$\alpha = n - n'. \tag{7}$$

Se, come avviene naturalmente nella maggior parte dei casi, gli zeri n^{esimo} ed n'^{esimo} non coincidono esattamente, è facile, con un ovvio processo di interpolazione, determinare tuttavia la correzione di Rydberg.

La soluzione di (6) che si annulla per $x = 0$ è, come subito si riconosce,

$$\zeta = \sqrt{x}\, J_1 (2\sqrt{x}) \tag{8}$$

dove con J_1 si è indicata la funzione di Bessel di ordine uno, che è tabulata e di cui sono noti gli zeri. Il problema si riduce dunque a determinare una soluzione di (5) che si annulli per $x = 0$ o anzi, poichè ciò basta per il nostro scopo, a determinare i valori di x per cui questa soluzione si annulla. Per far questo conviene usare due metodi differenti per la ricerca della prima radice e delle successive; e ciò perchè per $x = 0$ il secondo, termine di (5) ha una singolarità.

Osserviamo ora che per $\gamma x < 0.3$ si può porre, commettendo un errore assai piccolo, $\varphi(\gamma x) = 1 - \gamma x$; con ciò (5) si riduce a

$$\zeta'' + \frac{\zeta}{x} \{ Z - (Z - 1)\gamma x \} . \tag{9}$$

La soluzione di questa equazione è

$$\zeta = e^{-\sqrt{\gamma (Z-1)}\, x} \left[x + \frac{2\sqrt{\gamma (Z-1)} - Z}{1!\,2!} x^2 + \right. \tag{10}$$

$$\left. + \frac{(2\sqrt{\gamma (Z-1)} - Z)\,(2 \cdot 2\sqrt{\gamma (Z-1)} - Z)}{2!\,3!} x^3 + \dots \right].$$

Per mezzo di questa espressione, che converge assai rapidamente, si può agevolmente determinare il primo valore $x_1 > 0$ per cui si ha $\zeta(x_1) = 0$.

Per determinare le successive radici dell'equazione $\zeta(x) = 0$ ricorriamo invece alla seguente trasformazione

$$\zeta = e^{i\int y dx} \tag{11}$$

usata da Wentzel [1], che trasforma la (5) nell'equazione di Riccati

$$iy' = y^2 - f^2(x) \tag{12}$$

ove si è posto

$$f^2(x) = \frac{1}{x}\{1 + (Z - 1)\varphi(\gamma x)\}. \tag{13}$$

È facile risolvere la (13) per approssimazioni successive col metodo indicato da Wentzel; si trova così che l'n^{esima} radice x_n dell'equazione $\zeta(x) = 0$ è data dalla seguente equazione

$$(n + 1)\pi - \frac{1}{4}\frac{f'(x_1)}{f^2(x_1)} = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx - \frac{1}{4}\frac{f'(x_n)}{f^2(x_n)} - \frac{1}{8}\int_{x_1}^{x_n}\frac{f'^2}{f^3}dx + \cdots \tag{14}$$

Siccome la funzione f è definita per mezzo della φ di cui non è nota

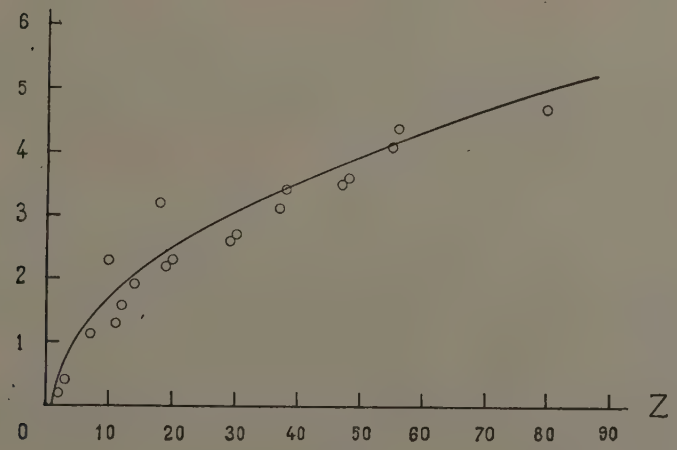


Fig. 1.

l'espressione analitica, le quadrature che figurano in (14) debbono essere effettuate numericamente.

A titolo di esempio accenniamo allo svolgimento del calcolo per il caso Z = 55 (Cesio). Dalla (10) risulta che, per questo valore di Z la

(1) «Zs. f. Phys.», *38*, 518, 1926.

prima radice di $\zeta(x) = 0$ è $x_1 = 0.070$; dalla (14) si trova poi che la settima radice è $x_7 = 23.4$. Si ha dunque che $2\sqrt{x_7} = 9.68$ è prossima alla terza radice 10.17 dell'equazione $J_1(\xi) = 0$. Quindi la correzione di Rydberg è prossima a $7 - 3 = 4$. Con un procedimento di interpolazione si trova che essa è precisamente 4.16.

Il confronto tra la teoria e l'esperienza è rappresentato nel grafico della figura. In ascisse sono riportati i numeri atomici e in ordinate le correzioni di Rydberg. La curva è ottenuta teoricamente e i punti rappresentano i valori empirici. Si vede che questi ultimi dipendono da Z in modo piuttosto irregolare, come era da attendersi dato che si tratta di spettri ottici. La teoria, data la sua stessa natura, non può render conto delle irregolarità che si hanno nel passaggio da un elemento all'altro; si vede tuttavia che essa rappresenta in modo soddisfacente l'andamento generale della correzione di Rydberg come funzione di Z.

L'accordo generale appare anche migliore se si osserva che i dati sperimentali si hanno quasi esclusivamente per elementi con carattere spiccatamente elettropositivo e si ha ragione di ritenere che gli elementi elettronegativi diano dei punti situati al di sopra della curva teorica, come ad esempio i punti corrispondenti ai due gas nobili Neon e Argo.

Fisica. — *Sui circuiti con valvola termoionica in saturazione derivata su un condensatore.* Nota di C. Dei, presentata [1] dal Socio A. Lo Surdo.

1. Ho esaminato recentemente [2] l'intensità e la fase della corrente in un circuito in cui si trovano in serie una valvola termoionica, una resistenza, una autoinduzione e una f. e. m. pulsante sufficiente per mantenere costantemente la lampada nella fase di saturazione nella quale, come è noto, l'intensità si può ammettere entro ampi limiti come una funzione lineare della differenza di potenziale fra placca e filamento [3].

Suppongo ora che in un tale circuito venga aggiunta una capacità in derivazione sui poli della lampada come è indicato nella fig. 1: con questa disposizione la lampada può essere ancora mantenuta in saturazione.

Dette i_1, i_2, i le intensità traversanti la lampada, il condensatore ed circuito principale abbiamo le relazioni seguenti:

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) C. Dei, *La fase della corrente di saturazione termoionica in un circuito a tensione pulsante* (« Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », fasc. 7, aprile 1928).

(3) A. Lo Surdo, *La corrente di saturazione delle valvole termoioniche* (« Rend. R. Acc Naz. dei Lincei », fasc. 5, marzo 1927).

$$(1)\qquad \begin{cases} E = L\dfrac{di}{dt} + iR + v \\ i_1 = j + kv = j(1 + \alpha v) \\ i_2 = C\dfrac{dv}{dt} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

essendo v il potenziale istantaneo fra placca e filamento, j una funzione della temperatura del filamento, $\alpha = k/j$ una costante dalla lampada.

Se risolviamo questo sistema e facciamo astrazione dalla fase iniziale

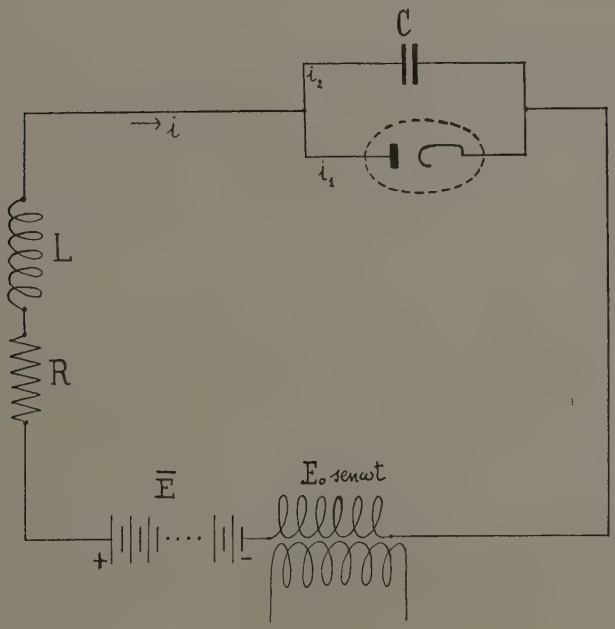


Fig. 1.

di chiusura del circuito (fase variabile), otteniamo le seguenti espressioni delle tre intensità nella fase permanente:

$$(2)\qquad \begin{cases} i_1 = \dfrac{\dfrac{1}{\alpha} + \overline{E}}{R + \dfrac{1}{k}} + \dfrac{kE_o}{\sqrt{(CR + Lk)^2\omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + kR)]^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \Psi) \\ i_2 = \dfrac{CE_o\omega}{\sqrt{(CR + Lk)^2\omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + kR)]^2}} \cos(\omega t - \Psi) \end{cases}$$

ove

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{(CR + Lk)\,\omega}{1 + kR - \omega^2 LC} \tag{3}$$

$$i = \frac{\frac{1}{\alpha} + \overline{E}}{R + \frac{1}{k}} + \frac{E_0\sqrt{k^2 + C^2\omega^2}}{\sqrt{(CR + Lk)^2\omega^2 + [\omega^2 LC - (1 + kR)]^2}}\ \operatorname{sen}(\omega t - \Phi) \tag{4}$$

ove

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{-C\omega + L\omega(C^2\omega^2 + k^2)}{k + R(C^2\omega^2 + k^2)}\,. \tag{5}$$

Come si vede l'accensione della lampada ha influenza sulla parte continua delle intensità i_1 ed i, sull'ampiezza di i_2, sulle ampiezze delle parti variabili col tempo di i_1 ed i, ed infine sugli sfasamenti Ψ e Φ.

Nel caso particolare in cui $L = 0$, $R = 0$ si ha $\Psi = 0$ e $\operatorname{tg}\Phi = -\frac{C\omega}{k}$. Casi particolari ma meno semplici si hanno se $L = 0$ oppure se $R = 0$ [1].

Dalla relazione (5) secondochè $\frac{1}{k} \gtrless 2\,\omega L$ si deduce che esistono due valori C_1, C_2 distinti o coincidenti della capacità che rendono l'intensità totale i in fase con la f. e. m. $E_0 \operatorname{sen}\omega t$; perciò per valori della capacità compresi nell'intervallo (C_1, C_2) l'angolo Φ è negativo e per valori esterni allo stesso intervallo Φ è positivo.

La (3) ci dice poi che esiste un valore C_3 della capacità in corrispondenza al quale $\Psi = \frac{\pi}{2}$ e perciò allora i_2 è in fase ed i_1 in quadratura con la f. e. m. $E_0 \operatorname{sen}\omega t$. È facile vedere che $C_3 > C_2$ se C_2 è il maggiore dei due valori C_1 e C_2.

Nel caso ideale in cui la costante α della lampada fosse nulla, risulterebbe $i_1 = j$, $C_1 = 0$, $C_2 = C_3 = \frac{1}{L\omega^2}$.

Questi risultati peraltro sono analoghi a quelli che si possono ottenere in un circuito come quello della fig. 1 quando in luogo della lampada si sostituisce una resistenza ohmica: allora non occorre che la f. e. m. sia pulsante ma basta che sia semplicemente alternata.

(1) Si osservi che per $C = 0$ risulta $i_2 = 0$, $i_1 = i$, $\operatorname{tg}\Psi = \operatorname{tg}\Phi = \frac{L\omega}{R + \frac{1}{k}}$, ossia otteniamo, come è naturale, le formule (1) e (2) della mia Nota precedente.

Fisica. — *Polarimetria e fotometria fotoelettrica* [1]. Nota di E. Perucca, presentata [2] dal Corrisp. A. Pochettino.

G. Todesco [3] ha recentemente proposto un metodo fotoelettrico per porre in evidenza tracce anche lievissime di birifrangenza. Ora, a me pare che questo metodo s'imponga all'attenzione degli sperimentatori, non tanto quale mezzo di misura della birifrangenza, al quale scopo non mi sembra molto adatto, quanto piuttosto come metodo sensibilissimo di zero, capace di sostituire l'occhio nelle misure polarimetriche e fotometriche.

Il tentativo di applicazione delle cellule fotoelettriche o delle cellule al selenio alla fotometria e alla polarimetria non è nuovo. Da W. F. Schulz [4] a J. Kenyon [5] è già lungo l'elenco dei fisici che hanno seguito questa strada. Ma il risultato ottenuto dal Todesco è specialmente notevole.

Infatti, detta a l'ampiezza della vibrazione luminosa ed $I_0 = k^2 a_0^2$ l'intensità di luce incidente sulla sostanza birifrangente posta a 45° [6] tra nicols incrociati, il Todesco è capace di scoprire una birifrangenza corrispondente a un ritardo di fase:

$$\Delta\varphi = 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \equiv 3'' \quad \text{circa}\ [7].$$

La vibrazione ellittica trasmessa dal corpo birifrangente si scinde nelle due vibrazioni ortogonali corrispondenti agli assi dell'ellisse:

$$\cdot\ a_0 \operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$\cdot\ a_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot$$

Quindi l'intensità trasmessa dall'analizzatore (escluse le riflessioni e l'assorbimento) è:

$$I = k^2 \cdot a_0^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = I_0 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Scuola d'Ingegneria di Torino.
(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.
(3) « Atti Acc. Linc. », 7, p. 394, 1928.
(4) « Astr. Journ. », *38*, p. 187, 1913.
(5) « Nature », *117*, p. 304, 1926.
(6) Non è detto dal Todesco quale angolo facessero gli assi della sostanza birifrangente con i piani di vibrazione dei nicols, ma è presumibile che si tratti dell'angolo di 45°.
(7) La birifrangenza del vetro è dedotta dal Todesco in base ai dati del Pockels, è quindi nota entro il 50 %.

Un'eguale intensità luminosa attraversa l'analizzatore se questo viene ruotato (a partire dall'azimut di estinzione) dell'angolo $\Delta\alpha$ dato dalla:

$$I = I_0 \operatorname{sen}^2 \Delta\alpha .$$

Cioè:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = 1.5'' \quad \text{circa.}$$

Il dispositivo fotoelettrico di Todesco è capace di fissare l'azimut di estinzione dell'analizzatore rispetto al polarizzatore (nicols incrociati) *con l'approssimazione di 1.5'' circa.* Esso quindi equivale e forse sorpassa i migliori dispositivi polarimetrici a penombra. L'apparecchio a penombra di Lippich in luce bianca, con sorgente di luce estesa, quindi linea evanescente di separazione tra i campi, raggiunge (nella media di qualche lettura) l'errore probabile di $2'' \div 3''$.

Ma come questa sensibilità estrema dell'apparecchio di Lippich non si raggiunge che in condizioni particolarmente favorevoli, così nel dispositivo di Todesco la sensibilità massima potrà essere raggiunta solo quando l'intensità luminosa della sorgente sia sufficientemente forte e costante, e quando l'estensione dell'immagine luminosa da formarsi sulla parete sensibile della cellula fotoelettrica ne permetta il migliore sfruttamento.

La diminuzione di sensibilità dell'apparecchio di Lippich dovuta alla diminuita intensità della sorgente luminosa quando si eseguono misure in luce monocromatica, si sentirà egualmente nell'apparecchio di Todesco. Ma a vantaggio di quest'ultimo sta la possibilità di conservare la propria sensibilità anche nel violetto estremo, e, con una opportuna scelta della cella fotoelettrica, nel rosso. Essenziale è poi il pregio di poter svincolare le misure polarimetriche dall'elemento soggettivo (abilità, stanchezza dell'osservatore).

Quanto si è detto per le misure polarimetriche può ripetersi per le misure fotometriche. L'analogia nelle due misure è specialmente chiara nel caso dei fotometri a prismi polarizzatori; e la possibilità di impiego del metodo fotoelettrico di Todesco applicato come metodo di zero mi appare particolarmente evidente nel caso di un recente fotometro [1] avente la caratteristica di ricondurre le misure di una intensità di illuminazione, variabile entro limiti estesissimi, all'osservazione dell'eguaglianza della penombra nelle due parti di un campo avente sempre costante illuminazione.

Meno adatto, invece, è il dispositivo di Todesco alla misura della birifrangenza. Il dispositivo infatti non è sufficiente ad un'analisi completa della vibrazione luminosa per cui si richiede la determinazione di due elementi: l'azimut del grand'asse ed il rapporto degli assi. Qualora si avesse ragione di ritener noto l'azimut del grand'asse della vibrazione luminosa, il dispo-

(1) « ZS. für Instr. », *46*, p. 74, 1926.

sitivo di Todesco potrebbe servire a misurare il rapporto degli assi della vibrazione ellittica trasmessa dal corpo birifrangente, soltanto nel caso che l'intensità della sorgente luminosa e l'eccitabilità fotoelettrica della cellula si potessero mantenere rigorosamente costanti. A causa di queste condizioni, ben difficili a realizzare, il dispositivo di Todesco dovrebbe limitarsi ad indicare, poco più che qualitativamente, l'esistenza di lievissime birifrangenze.

Quindi questo dispositivo potrà utilmente servire nella misura della birifrangenza, purchè la vibrazione luminosa da analizzare venga compensata (cioè venga trasformata in vibrazione rettilinea mediante uno dei metodi già noti [1]) e la cellula fotoelettrica sostituisca l'occhio nella determinazione degli azimut di estinzione o dell'equivalenza delle penombre. La sensibilità (errore probabile della media di qualche lettura) nell'indicazione di minime birifrangenze in luce bianca con i metodi a penombra raggiunge i 10″ nell'angolo $\frac{\Delta\varphi}{2}$, la cui tangente dà il rapporto degli assi della vibrazione ellittica: cioè i metodi a penombra sentono un ritardo di fase:

$$\Delta\varphi = 20'' \equiv 1.5 \cdot 10^{-5}\lambda \quad \text{circa.}$$

Dunque il nuovo metodo fotoelettrico avrebbe anche il vantaggio di una maggiore sensibilità.

Poichè i mezzi sperimentali, di cui il mio laboratorio oggi dispone, non mi permettono di intraprendere una ricerca sperimentale in questo campo, il cui studio mi fu altra volta particolarmente gradito, io termino con l'augurio che il Todesco riesca presto e felicemente a trasformare il suo dispositivo sperimentale in questo senso.

Fisica. — *Sopra la meccanica ondulatoria di un atomo alcalino nel campo elettrico.* Due Note di F. Rasetti, presentate dal Socio O. M. Corbino.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra il calcolo dei livelli M per mezzo del potenziale statistico dell'atomo.* Nota di F. Rasetti, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sui termini accentati del calcio.* Nota di G. Gentile, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Nuovo contributo allo spettro del bromo nella carica senza elettrodi.* Nota di N. Siracusano, presentata dal Corrisp. M. La Rosa.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) V., p. es., « N. Cim », 6, p. 179, 1913.

Meteorologia. — *Ancora sugli andamenti periodici della temperatura media diurna a Modena.* Nota di M. Baruzzi, presentata [1] dal Socio Q. Majorana.

In una Nota precedente [2] ebbi occasione di riferire i principali risultati di uno studio fatto sui valori della temperatura media diurna verificatisi a Modena nel periodo 1881-1925; ed in particolare diedi notizia di essere riuscito ad isolare delle leggere oscillazioni di temperatura, che si presentano regolarmente nei successivi anni con ritardo di quattro giorni. I valori dati per caratterizzare questo fatto erano tuttavia il risultato di un procedimento molto complesso a cui si dovè ricorrere per giungere a conoscere il valore esatto dello sfasamento da un anno all'altro, sfasamento prima sconosciuto, come del resto era del tutto sconosciuto il fatto descritto; tale procedimento trovasi esposto nella pubblicazione estesa del detto studio [3].

In seguito ho voluto vedere se questo fatto si presentava anche calcolando la tavola generale degli scostamenti delle temperature medie pentadiche osservate dal loro valore medio, dopo avere in essa soltanto introdotto uno spostamento regolare in alto delle varie colonne annuali, di modo che i valori di ogni linea fossero corrispondenti nel senso voluto dallo sfasamento già determinato. Devo ora rendere noto che i risultati di un un tale calcolo semplice e completamente scevro di artifici sono tali da confermare ed anzi dare al fatto in esame una importanza molto maggiore.

L'andamento annuale medio del fenomeno, analogo, ma non identico a quello prima trovato, è rappresentabile con la formula:

$$
\begin{aligned}
T = {} & 0°.0900 \cdot \operatorname{sen} (338°50' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.1236 \cdot \operatorname{sen} 2(115°47' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.2056 \cdot \operatorname{sen} 3(34°41' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.1994 \cdot \operatorname{sen} 4(7°17' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.0868 \cdot \operatorname{sen} 5(23°\,9' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.2161 \cdot \operatorname{sen} 6(7°38' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.0847 \cdot \operatorname{sen} 7(9°43' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.0929 \cdot \operatorname{sen} 8(28°20' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.0273 \cdot \operatorname{sen} 9(21°23' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.1244 \cdot \operatorname{sen} 10(20°35' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.0626 \cdot \operatorname{sen} 11(26°12' - 3°\,57' \cdot N + M) \\
& + 0°.0195 \cdot \operatorname{sen} 12(10°29' - 3°\,57' \cdot N + M),
\end{aligned}
$$

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) « Rend. Accad. Lincei », vol. VI, 6, 1927, p. 46.

(3) « Pubblicazione nº. 39 » dell'Osservatorio Geofisico di Modena (Nel primo centenario della fondazione dell'Osservatorio); Modena, 1927.

ove T indica il valore dello scostamento della temperatura dal normale, N è il numero formato dalle due ultime cifre dell'anno del secolo attuale di cui si vuole sapere l'andamento, ed M è l'angolo di fase entro l'anno [1].

I valori forniti da questa formula, e così pure i valori medi osservati mostrano che durante un anno si hanno 5 periodi di caldo intervallati da altrettanti di freddo, con durate ed ampiezze diverse; i primi cinque semiperiodi sono corti e poco intensi, mentre i secondi cinque hanno tutti uno scostamento superiore a mezzo grado; e l'ampiezza massima, che si viene a raggiungere alla fine, è alquanto rilevante, raggiungendosi il valore di 1°.849 se si prendono i valori medi osservati, 1°.376 se si considerano quelli somministrati dalla formula.

Le date di questi periodi, di poco diverse da quelle già riferite, sono tali per cui nel 1928 si dovrebbero verificare, per non parlare che degli scostamenti maggiori, tre periodi di freddo, dal 22 marzo al 10 maggio, dal 9 settembre all'8 ottobre e dal 25 novembre a fine; e due di caldo, dal 1° gennaio al 21 marzo e dal 9 ottobre al 24 novembre. Per gli anni successivi valgono le stesse date, ognuna posticipata di quattro giorni ogni anno.

In seguito, per gentile concessione del prof. L. Amaduzzi, Direttore dell'Istituto Fisico della R. Università di Parma, ho avuto modo di applicare un procedimento di calcolo analogo al precedente ai valori medi decadici della temperatura media diurna registrati nel sessantennio 1866-1925 presso l'Osservatorio annesso; i risultati, che mi riservo di rendere noti nei loro particolari in altra occasione, sono molto bene in accordo con quelli di Modena, ma tuttavia esiste fra le due serie di valori qualche lieve differenza, che, mentre non intacca la validità complessiva dei dati modenesi, è d'altra parte tale da presentare una maggiore regolarità e simmetria [2].

Si può dunque concludere che l'esistenza del fenomeno sopradetto, confermato nelle osservazioni di due diverse stazioni, ha reale esistenza in una zona abbastanza vasta; e attraverso l'esame dei dati di altre stazioni, che si ha in animo di eseguire, si crede di poter giungere a eliminare le leggere influenze locali, così da riuscire a caratterizzare un andamento più regolare e in conseguenza rendere il fenomeno in parola di più facile e sicura interpretazione.

(1) Le costanti di questa formula sono state dedotte dalla serie dei valori medi osservati a mezzo delle costanti pentadiche riportate in Appendice al citato lavoro, secondo il metodo normale di calcolo (v. p. es.: Ragona, *Sul calcolo delle Osservazioni Meteorologiche*, Modena, 1891).

(2) Questo avviene perchè le divergenze lievi si producono nell'epoca dei primi cinque semiperiodi, che nella serie modenese si dimostrarono di minore importanza.

Chimica. — *Il sistema* $KCl—HCl—H_2O$ *fra 0° e 80°* [1]. Nota di G. Malquori, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

In una Nota precedente [3] ho descritto i risultati dello studio del sistema $KCl—HCl—H_2O$ a 25°.

A complemento delle ricerche già comunicate, espongo i risultati dello studio del sistema $KCl—HCl—H_2O$ alle temperature di 40°-60°-80°, che sono fra quelle che interessano la cristallizzazione frazionata dei liquidi di attacco della leucite con acido cloridrico, secondo il processo Blanc.

Alla temperatura di 0° questo sistema è stato studiato da Jeannel e da Engel [4]. Mi sono pertanto servito dei valori ricavati da questi Autori per tracciare l'isoterma a 0° che figura nel diagramma seguente.

Altrove saranno pubblicati dettagliatamente i metodi seguiti per accertare i valori ottenuti indicati nelle tabelle e nella figura.

Sistema $KCl—HCl—H_2O$ *a* 40°

KCl	HCl	H_2O	Fasi solide
28.06	—	71.94	KCl
15.97	7.70	76.33	»
2.32	26.31	71.37	»
0.21	32.81	66.98	»

Sistema $KCl—HCl—H_2O$ *a* 60°

KCl	HCl	H_2O	Fasi solide
31.30	—	68.70	KCl
16.12	8.32	75.56	»
2.53	25.84	71.63	»
0.82	31.01	68.17	»

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.
(3) «Rend. Acc. Lincei», (6), 5, 576 (1927).
(4) Seidell, *Solubilities of inorg. a. org. compounds.* New York, II ediz. (1919), p. 517.

Sistema KCl — HCl — H_2O *a* 80°

KCl	HCl	H_2O	Fasi solide
33.80	—	66.20	KCl
7.89	19.58	72.63	»
2.68	25.33	66.99	»

Per mettere in evidenza l'influenza che la presenza dell'acido cloridrico esercita sulla solubilità del cloruro di potassio in funzione della tempera-

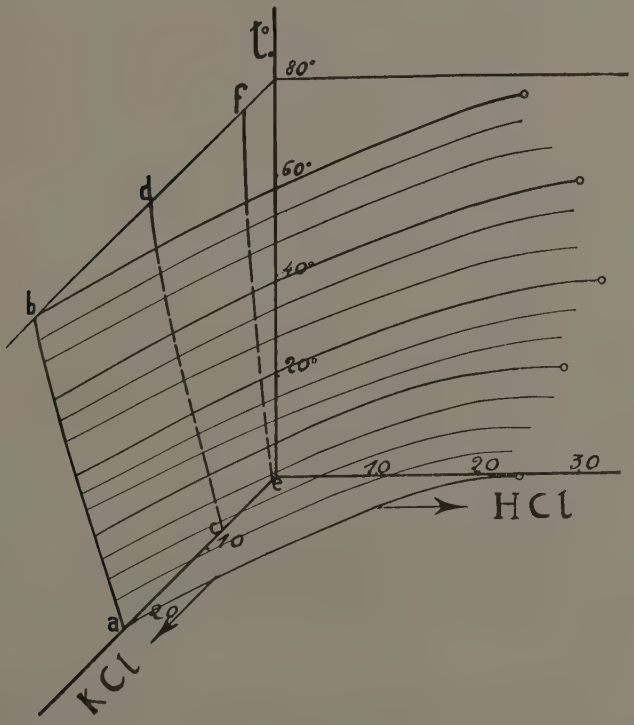


Fig. 1.

tura, nella figura sono state tracciate le curve *a–b*, *c–d*, *e–f*, che riproducono i valori di solubilità del sale nell'acqua e in liquidi acidi con il 10 % e il 25 % di acido cloridrico.

Come si vede, questo abbassa la solubilità del sale, ma non altera l'andamento delle curve in funzione della temperatura.

Chimica. — *Il sistema* $AlCl_3$—HCl—H_2O *fra* $0°$ *e* $80°$ [1]. Nota di G. Malquori [2], presentata dal Socio N. Parravano.

La presente ricerca è anch'essa diretta agli scopi indicati nella Nota precedente [3].

Per la costruzione del diagramma politermico del sistema $AlCl_3$ — — HCl — H_2O era necessario lo studio del sistema $AlCl_3$ — H_2O. Ho per

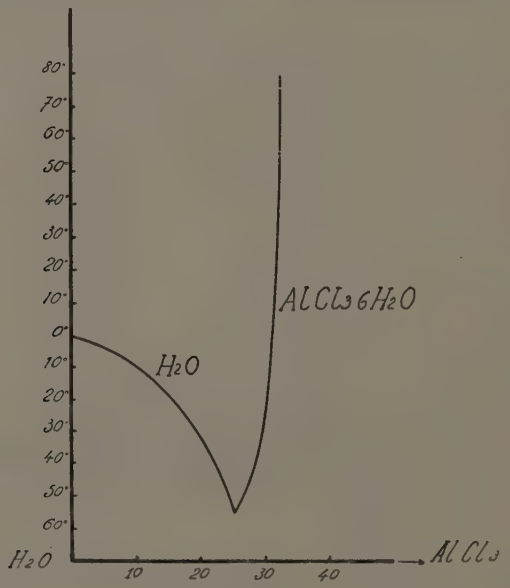


Fig. 1.

questo, determinato la curva di ghiaccio e la curva di solubilità dalla temperatura crioidratica fino a 80° che è la temperatura limite che interessa nella cristallizzazione frazionata dei liquidi di attacco della leucite con acido cloridrico.

I risultati ottenuti figurano nelle tabelle 1 e 2 e nella figura 1.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(3) « Rend. Acc. Lincei », [6], 7, p. 738 (1928).

Tabella I.

gr. di $AlCl_3$ per 100 gr. di soluzione	Temperatura inizio cristallizzazione	Temperatura arresto crioidratico
5.25	— 5.9	— 55.4
9.11	— 7.7	— 55
12.59	— 10.5	— 54.3
20.14	— 33.9	— 54
24.12	— 49.2	— 55.8
24.67	— 52	— 54.2
24.85	— 52.9	— 55.8
25.25	— 54.7	— 55.8
26.79	— 42.5	— 56.7
27.27	— 30.10	— 55.8
28.00	— 27.3	— 53.9

Tabella II.

gr. di $AlCl_3$ per 100 gr. di soluzione	Temperature	Fasi solide
31.03	0°	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$
31.36	20°	»
31.63	40°	»
31.73	60°	»
32.32	80°	»

Risulta che dalla temperatura crioidratica fino a 80° esiste in equilibrio con la soluzione satura soltanto $AlCl_3 \cdot 6H_2O$.

Sabatier [1] ha determinato il calore di soluzione del cloruro di alluminio esaidrato e ha trovato che $Al_2Cl_6\ 12H_2O$ disciolto in 900 mol. di acqua a 15°.5 sviluppa 26.4 Cal.

Questo valore che farebbe prevedere un differente andamento della curva di solubilità si riferisce al calore di soluzione integrale, inquantochè in esso vi è compreso il calore di diluizione.

Ho voluto stabilire l'entità dell'effetto termico di diluizione, e a questo scopo ho determinato a 20° il calore di soluzione integrale del cloruro di

(1) « Bull. Soc. Chim. » (3), *1*, 88 (1889).

alluminio esaidrato, adoperando lo stesso rapporto sale-acqua usato da Sabatier, ho quindi preso un volume di soluzione satura a 20° contenente la stessa quantità di sale impiegata nella determinazione precedente e l'ho diluita nella medesima quantità di acqua.

Dalla differenza dei due valori calorimetrici, ho ricavato che il calore di soluzione, considerato come il calore svolto nella dissoluzione a 20° di una molecola di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ per dare una soluzione satura a 20° è di + 4606 Cal.

* *

I dettagli sperimentali seguiti per stabilire i valori di solubilità per il sistema $AlCl_3 — HCl — H_2O$ alle diverse temperature saranno descritti altrove.

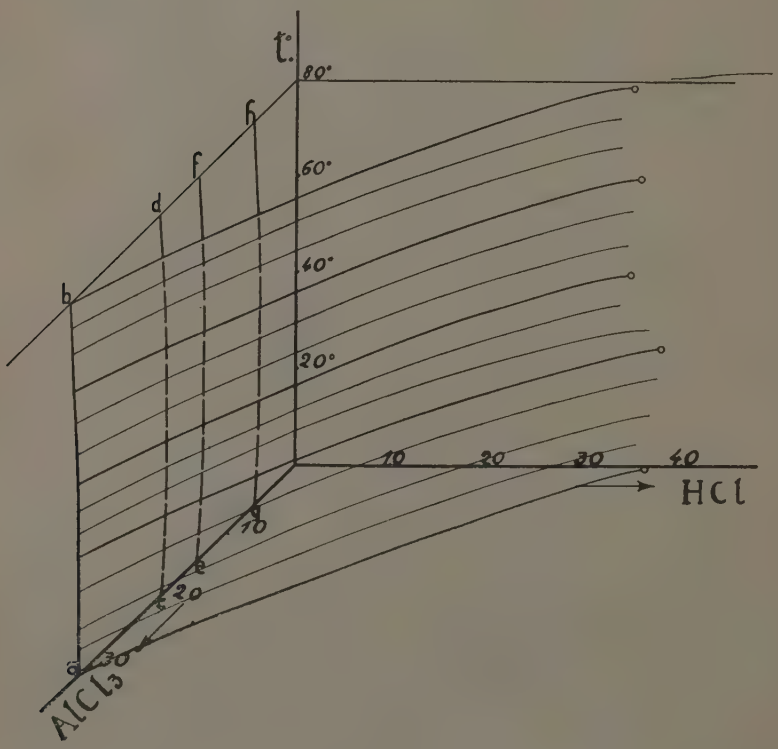


Fig. 2.

Riporto i risultati nelle seguenti tabelle 3, 4, 5, 6 e nella figura 2.

TABELLA III.

Sistema $AlCl_3$ — HCl — H_2O — *a 0°.*

$AlCl_3$	HCl	H_2O	Fasi solide
31.03	—	68.97	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$
21.10	8.83	70.07	»
17.42	12.74	69.84	»
0.05	37.29	62.66	»

TABELLA IV.

Sistema $AlCl_3$ — HCl — H_2O — *a 40.*

$AlCl_3$	HCl	H_2O	Fasi solide
31.63	—	68.37	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$
20.69	8.19	71.12	»
0.48	32.58	66.94	»
0.23	34.89	64.88	»

TABELLA V.

Sistema $AlCl_3$ — HCl — H_2O — *a 60°.*

$AlCl_3$	HCl	H_2O	Fasi solide
31.73	—	68.27	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$
16.71	13.28	70.01	»
1.32	32.44	66.24	»
0.27	34.26	65.47	»

Tabella VI.

Sistema $AlCl_3$ — HCl — H_2O — *a 80°.*

$AlCl_3$	HCl	H_2O	Fasi solide
32.32	—	67.68	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$
27.21	3.48	69.31	»
11.75	18.85	69.40	»
7.90	22.96	69.14	»

Per la costruzione del diagramma politermico mi sono servito anche dell'isoterma a 25° da me determinata antecedentemente (1).

L'influenza che la presenza dell'acido cloridrico esercita sulla solubilità del cloruro di alluminio è messa in evidenza nella figura dalle curve, *b a*, *d c*, *e f*, *g h*, le quali riproducono i valori di solubilità del sale nell'acqua e in liquidi acidi con il 5 %, il 15 % e il 25 % di acido cloridrico.

Si osserva che l'acido abbassa la solubilità del sale, ma anche in questo caso, come per il cloruro di potassio, non altera l'andamento delle curve in funzione della temperatura.

(1) «Rend. Acc. Lincei» (6), *5*, 576 (1927).

Chimica. — *Il sistema* $AlCl_3 — KCl — H_2O$ *fra* $0°$ *e* $80°$ [1]. Nota di G. Malquori, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

A compimento delle ricerche precedenti [3] comunico i risultati ottenuti nello studio del sistema $AlCl_3 — KCl — H_2O$ a diverse temperature.

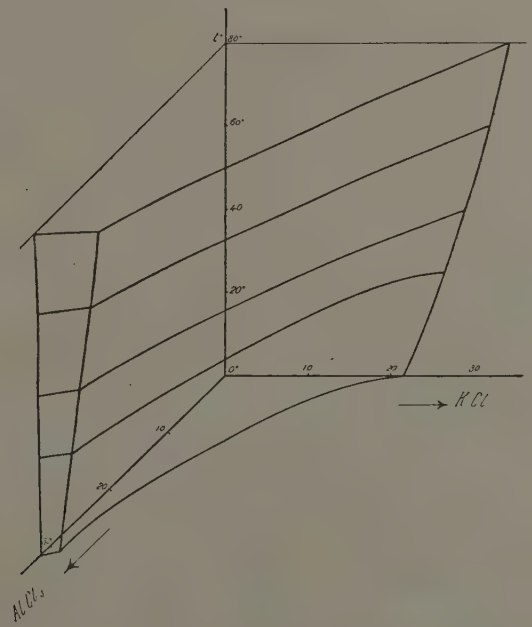


Fig. 9.

I valori ottenuti sono riportati nelle tabelle e riprodotti nel diagramma.

(1) Lavoro eseguito nall'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.
(3) « Rend. Acc. Lincei » (6), *5*, 510 (1927).

TABELLA I.

Sistema $AlCl_3$ — KCl — H_2O *a* 0°.

KCl	$AlCl_3$	H_2O	Fasi solide
21.60	—	78.40	KCl
9.25	12.51	78.24	»
2.46	19.08	79.46	»
1.93	30.28	67.79	KCl + $AlCl_3 \cdot 6H_2O$
—	31.03	68.97	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$

TABELLA II.

Sistema $AlCl_3$ — KCl — H_2O *a* 40°.

KCl	$AlCl_3$	H_2O	Fasi solide
28.60	—	71.40	KCl
13.09	15.30	71.61	»
4.35	30.53	65.12	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$ + KCl
1.75	30 78	67.37	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$
—	31.63	68 37	»

TABELLA III.

Sistema $AlCl_3$ — KCl — H_2O *a* 60°.

KCl	$AlCl_3$	H_2O	Fasi solide
31.30	—	68.70	KCl
19.31	11.30	69.39	»
4.96	30.85	64.19	KCl + $AlCl_3 \cdot 6H_2O$
—	31.73	68.27	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$

Tabella IV.

Sistema $AlCl_3$ — KCl — H_2O *a 80°.*

KCl	$AlCl_3$	H_2O	Fasi solide
33.80	—	66.20	KCl
17.20	12.70	70.10	»
5.12	31.15	63.73	KCl + $AlCl_3 \cdot 6H_2O$
1.98	32.01	66.01	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$
—	32.32	67.68	»

L'andamento delle superfici di solubilità è completamente normale. Solo varia in una certa misura con la temperatura il rapporto tra KCl e $AlCl_3$ nella soluzione satura dei due sali, e precisamente essa si arricchisce in cloruro di potassio.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza dei cobalti-carbonati.* Nota di G. A. Barbieri, presentata [1] dal Socio R. Nasini.

Fin dal 1905, in continuazione di altre ricerche [2] su composti del cobalto trivalente, mi occupai del singolare composto verde che si forma in soluzione nella reazione Field [3] – Durrant [4], cioè trattando un sale cobaltoso con bicarbonato alcalino e un ossidante energico (ipoclorito, ipobromito, acqua ossigenata, ecc.). In tale composto, che non è isolabile allo stato solido, si era pensato dapprima che il cobalto fosse contenuto in una forma di combinazione superiore alla trivalente [5], ma A. Job [6] eseguendone, in ambiente alcalino e in assenza di aria, la riduzione mediante pirofosfato ferroso sciolto in un eccesso di pirofosfato di sodio, potè dimostrare che per ogni atomo di cobalto vi è contenuto un equivalente di ossigeno attivo. I risultati di Job vennero da me [7] confermati per via jodometrica intro-

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) « Rend. Accad. Lincei » [5] 14, I (1905) 1464.

(3) « J. Chem. Soc. » (1862) 14.

(4) « Proc. Chem. Soc. ». 12 (1896) 96.

(5) Nagendra Ch. Nag. « Z. anorg. Ch. », 13 (1897) 16; MacConnel, S. Hanes, « Proc. Chem. Soc. », 1896/1898, n. 176 e « J. Chem. Soc. », 71, 584.

(6) « Ann. Chim. Phys. » [7] 20 (1900) 214.

(7) « Rendiconti Soc. Chimica », Roma III (1905) 68-73.

ducendo la soluzione del composto verde ottenuta con l'acqua ossigenata, previa eliminazione dell'eccesso di quest'ultima, in una soluzione di joduro potassico acidificata con acido cloridrico e titolando il jodio messo in libertà.

In seguito le mie ricerche furono dirette a determinare la natura del composto verde e a trasformarlo in altri composti cobaltici isolabili allo stato solido e di struttura nota: ma per varie ragioni tali ricerche rimasero inedite quantunque, anche dopo le esperienze di Job, venisse da qualcuno negata [8] la trivalenza del cobalto nel composto verde della reazione Field–Durrant.

Recentemente, nel corso di ricerche istituite per stabilire le condizioni migliori per il dosamento volumetrico del potassio come cobaltinitrito, ho avuto occasione di osservare che *i cobaltinitriti* i quali, com'è ben noto, sono gialli o aranciati, *si sciolgono a caldo nelle soluzioni di bicarbonato sodico con intensa colorazione verde smeraldo*. Lo studio di questa nuova reazione mi ha condotto a riconoscere la stretta parentela ch'essa ha con la reazione Field–Durrant, giacchè per azione del bicarbonato sodico, il complesso cobaltinitroso viene completamente demolito, tutti i gruppi NO_2 del complesso dànno origine a nitrito sodico e il cobalto che resta tutto trivalente, costituisce con residui dell'acido carbonico un complesso cobalti-carbonico cui è dovuto l'intenso colore verde e che è identico a quello che si origina per azione dell'acqua ossigenata sui sali cobaltosi in presenza di bicarbonati alcalini.

L'esposizione dei fatti relativi alla trasformazione dei cobalti-nitriti in cobalti-carbonati mi offre l'opportunità di riferire anche quanto avevo da tempo osservato intorno a questi ultimi, e quindi di togliere ogni dubbio sulla trivalenza del cobalto in essi contenuto.

I. – Demolizione dei cobalti-nitriti con bicarbonato sodico. — Se in una soluzione satura di bicarbonato sodico si introduce una piccola quantità (per es., gr. 0.2 in 100 cc.) di un cobalti-nitrito alcalino insolubile in acqua, come il tripotassico o il bipotassico–sodico, e si scalda a bagnomaria agitando di frequente, si nota che la polvere gialla a poco a poco passa in soluzione e il liquido assume successivamente i colori giallo, aranciato, grigio–violaceo, verde oliva, verde smeraldo.

Quando compare quest'ultimo colore tutto il cobalti-nitrito è scomparso e la soluzione è diventata limpida. Se si prolunga il riscaldamento in modo da trasformare il bicarbonato totalmente in carbonato, la soluzione verde intorbida, poi diventa bruna, e infine si scolora depositando una polvere bruna ch'è costituita da sesquiossido idrato di cobalto.

Se il cobalti-nitrito, invece che con bicarbonato, viene trattato con carbonato sodico si ha direttamente la formazione dell'ossido cobaltico senza

(8) Metzl., « Z. f. anorg. chem. », 86 (1914) 368; Classen, *Angew Methoden der Analyt. Chem.* (1901) I, 427.

comparsa della colorazione verde. La formazione di quest'ultima è dunque legata alla presenza nella soluzione di ioni HCO_3.

Se, invece del bicarbonato di sodio, si impiega quello di patassio, il cobalti-nitrito non passa in soluzione: e se si adopera un cobalti-nitrito solubile, come quello trisodico, l'aggiunta di bicarbonato potassico in eccesso nella sua soluzione, determina la precipitazione del cobalti-nitrito potassico che non reagisce col bicarbonato potassico.

Evidentemente la prima fase della reazione tra bicarbonato di sodio e cobalti-nitriti insolubili consiste nella trasformazione di questi in cobalti-nitrito trisodico che è molto solubile e che quindi può subire l'ulteriore azione del bicarbonato di sodio, mentre il cobalti-nitrito potassico, che è pochissimo solubile nell'acqua, diventa del tutto insolubile in presenza di un eccesso di bicarbonato potassico col quale ha un ione in comune, e quindi sfugge alla demolizione.

Per constatare quantitativamente la demolizione del complesso cobalti-nitroso bisognava determinare nei liquidi verdi, originati da quantità note di cobalti-nitrito, tanto il nitrito alcalino formatosi, quanto l'ossigeno attivo del composto cobaltico verde. Ho potuto raggiungere tale scopo per due vie diverse: trattando a freddo i liquidi verdi con un eccesso di acqua ossigenata in soluzione acida, oppure trattandoli pure a freddo e in soluzione acida, con un eccesso di permanganato, e nell'un caso e nell'altro titolando poi l'eccesso dell'ossidante. Dalle ricerche di Bäyer e Villiger [1] risulta che l'acqua ossigenata ossida quantitativamente l'acido nitroso ad acido nitrico, e inoltre è ben noto che l'acqua ossigenata in ambiente acido agisce da riducente sui composti corrispondenti a forme di combinazioni superiori instabili, e quindi anche sui sali cobaltici. D'altra parte, facendo agire il permanganato coi liquidi verdi in ambiente acido, l'acido nitroso viene ossidato ad acido nitrico: ma in questa ossidazione deve concorrere anche l'ossigeno attivo del composto cobaltico.

Se il cobalti-nitrito per azione del bicarbonato sodico si è effettivamente risolto in nitrito sodico e in un composto cobaltico instabile in ambiente acido, il trattamento con acqua ossigenata deve importare per ogni atomo di cobalto, il consumo di 13 equivalenti di ossigeno (12 per l'ossidazione di 6 molecole di acido nitroso e uno per la riduzione del composto cobaltico): mentre il trattamento con permanganato deve importare il consumo di 11 equivalenti di ossigeno, perchè dai 12 equivalenti necessari per l'ossidazione dell'acido nitroso va detratto l'equivalente fornito dal composto cobaltico che passa a cobaltoso.

I risultati analitici confermarono perfettamente tali previsioni.

Gr. 0.2 di cobalti-nitrito sodico (che conteneva 14.05 % di cobalto) vennero sciolti in 100 cc. di acqua e trattati a bagnomaria con gr. 5 di

(1) « Ber. Chem. Gesell. », 34 (1901) 755.

bicarbonato di sodio. Il liquido verde, raffreddato, venne versato mediante un imbuto col collo molto affilato in una soluzione contenente acido solforico e una quantità di acqua ossigenata corrispondente a 100 cc. di una soluzione N/10 di permanganato potassico. Finita la reazione, che si manifesta con la decolorazione istantanea del liquido verde, si determinò l'eccesso di acqua ossigenata con soluzione N/10 di permanganato: se ne impiegarono cc. 38. Da questi dati si calcola che l'ossigeno ceduto dall'acqua ossigenata nella reazione con il nitrito e il sale cobaltico, fu di gr. 0.0496 e quindi per un atomogrammo di cobalto gr. 104.1 di ossigeno, cioè 13.01 equivalenti grammi di ossigeno.

Gr. 0.2 di cobalti-nitrito sodico vennero aggiunti, dopo trattamento con bicarbonato sodico, a 100 cc. di una soluzione N/10 di permanganato acidificata con acido solforico; poi si determinò l'eccesso di permanganato con soluzione titolata di solfato ferroso; l'ossigeno ancora disponibile corrispondeva a cc. 47 di soluzione N/10 di $KMnO_4$. Da ciò si calcola che l'ossigeno ceduto dal permanganato al liquido verde fu di gr. 0.04224 e quindi per un atomogrammo di cobalto gr. 88.64 di ossigeno, pari a 11.08 equivalenti-grammi di ossigeno.

II. - Natura del composto cobaltico verde. — Anzitutto si volle accertare se il composto verde che prende origine nella demolizione dei cobalti-nitriti con $NaHCO_3$ era identico a quello che si forma nella reazione Field-Durrant, e a tal uopo si confrontarono al colorimetro le soluzioni verdi preparate nei due modi diversi ma con egual contenuto in cobalto. Siccome sulla tonalità del colore ha influenza - come sarà esposto alla fine di questa Nota – anche il contenuto in nitrito, allo scopo di avere le due soluzioni in condizioni eguali, si aggiunse alla soluzione preparata con l'acqua ossigenata, una quantità di nitrito sodico eguale a quella che si era formata nell'altra soluzione in conseguenza della demolizione del cobalti-nitrito. Il confronto venne eseguito con soluzioni che contenevano in 100 cc. gr. 0.0351 di cobalto. Una era stata ottenuta aggiungendo alla soluzione di gr, 0.25 di cobalti-nitrito sodico 10 gr. di $NaHCO_3$ e scaldando a bagnomaria per 15′; l'altra venne preparata trattando cc. 13.5 di una soluzione al 0.685 % di $CoSO_4$ con gr. 10 di $NaHCO_3$ e alcuni cc. di soluzione di acqua ossigenata al 3 %: poi si scaldò a bagnomaria per 15′ per distruggere l'eccesso di acqua ossigenata; e infine si aggiunsero cc. 8.3 di una soluzione di nitrito di sodio contenente in 100 cc. gr. 1.478 di $NaNO_2$. Le due soluzioni verdi portate a 100 cc. e saturate con una corrente di CO_2 vennero confrontate al colorimetro: risultarono perfettamente identiche. Anche nel comportamento chimico, per quanto riguarda il cobalto e l'acido nitroso, le due soluzioni si dimostrarono così eguali da non essere possibile distinguerle.

Per avere qualche indizio sulla natura del complesso nel quale è contenuto il cobalto nei liquidi verdi, non essendo agevole, causa la presenza

dell'eccesso di bicarbonato di sodio, eseguire reazioni di doppio scambio, si ricorse all'artificio già impiegato da R. Kremann [1] per sali di cobaltiammine e di acidi complessi, cioè si determinò il senso della migrazione del complesso cobaltico verde durante l'elettrolisi.

Gr. 5 di nitrato di cobalto sciolti di 100 cc. di acqua ossigenata al 3 % vennero aggiunti a piccole porzioni a 30 gr. di bicarbonato potassico finamente polverizzato e si scaldò per alcuni minuti a bagnomaria. Si ottenne così una soluzione verde molto concentrata. Parte di questa soluzione venne introdotta in un tubo ad U: poi nelle due branche del tubo si stratificò sul liquido verde egual volume di una soluzione al 2 % di K_2SO_4 e al 5 % di $KHCO_3$. Gli elettrodi di platino vennero immersi nella soluzione incolora. Dopo alcuni minuti di passaggio della corrente si constatò che il liquido verde, che prima era allo stesso livello nelle due branche, si innalzava dalla parte dell'elettrodo positivo. Ciò prova che il cobalto nel composto verde fa parte di un jone complesso con carica negativa: e, poichè per la formazione del composto verde sono indispensabili joni HCO_3, tutto fa ritenere ch'esso sia costituito dal cobalto legato per valenze normali con residui dell'acido carbonico o con ossidrili, e per valenze secondarie con molecole di bicarbonato alcalino e che quindi si tratti di un cobalti-carbonato.

III. - Trasformazione dei cobalti-carbonati in composti di struttura nota del cobalto trivalente. — Nel 1913 Metzl [2] interpretò il prodotto di ossidazione che si ha trattando con acqua ossigenata un sale cobaltoso in presenza di bicarbonati alcalini, come la miscela di un composto del cobalto tetravalente con un composto del cobalto bivalente. Tale interpretazione, per quanto gratuita, non poteva evidentemente venir esclusa con semplici determinazioni di ossigeno attivo, perchè riguardo al potere ossidante, $\overset{II}{CoO} \cdot \overset{IV}{CoO_2}$ equivale a $\overset{III}{Co_2O_3}$.

Contro tale interpretazione sta però il seguente fatto da me constatato: i liquidi verdi non dànno con solfocianuro potassico in eccesso e alcool amilico la reazione di Vogel caratteristica del cobalto bivalente, reazione ch'è data invece dai sali cobaltosi anche in presenza di un grande eccesso di bicarbonato alcalino. Un altro fatto che si oppone a tale interpretazione è la formazione da me osservata dei liquidi verdi da composti in cui il cobalto è sicuramente trivalente, come i cobalti-nitriti.

Per togliere ogni dubbio sulla trivalenza del cobalto nei liquidi verdi io avevo da tempo pensato di compiere la trasformazione inversa, cioè di preparare da essi composti del cobalto trivalente, isolabili allo stato solido e di struttura nota. Ciò mi è riuscito finora per l'acetilacetonato cobaltico e per il cloruro di purpureo-cobalto.

(1) « Z. f. anorg. Ch. », 33 (1902) 86.
(2) « Z. f. anorg. Ch. », 86 (1914) 368.

I liquidi verdi, ottenuti con l'acqua ossigenata, trattati con acetilacetone formano, lentamente a freddo, più rapidamente a 60°-70°, acetilacetonato cobaltico, composto verde cristallizzato in squamette, insolubile in acqua solubile in solventi organici, e già ottenuto da Urbain (3) trattando con acetilacetone l'idrossido cobaltico. Se in un imbuto a rubinetto la soluzione verde del cobalti-carbonato viene addizionata con acetilacetone, (3 molecole per 1 atomo di cobalto) e acido acetico fino a decomposizione di tutto il bicarbonato alcalino, e infine si sbatte con cloroformio, questo si colora intensamente in verde, mentre il liquido acquoso diventa quasi incoloro. La soluzione cloroformica evaporata lasciò un residuo cristallino verde che, cristallizzato più volte dal cloroformio, diede un prodotto che per i caratteri fisici (punto di fusione, solubilità) e per la composizione risultò essere acetilacetonato cobaltico.

Co °/₀ calcolato 16.57 trovato 16.71.

per $\overset{III}{Co}(C_5H_7O_2)_3$

Esempio di trasformazione dei cobalti-carbonati in cobalti-ammine. 5 gr. di cloruro di cobalto sciolti in 100 cc. di acqua ossigenata al 3 °/₀ vennero aggiunti a 50 gr. di $NaHCO_3$, poi scaldati per alcuni minuti a bagnomaria; il liquido verde filtrato venne introdotto in un pallone con gr. 50 di cloruro di ammonio, poi si chiuse il pallone con un tappo a tre fori: due servivano per il passaggio di una corrente di anidride carbonica, il terzo portava un tubo di vetro munito di valvola di Bunsen. Dopo eliminazione dell'aria con anidride carbonica si scaldò all'ebullizione: il liquido verde diventò prima turchino, poi rosso violaceo e in fine formò un deposito cristallino rosso-violetto che venne separato e lavato con acido cloridrico concentrato nel quale è insolubile. L'acqua-madre violetta per evaporazione e trattamento con acido cloridrico concentrato diede un nuovo deposito di polvere cristallina rosso violetta, diventando quasi incolora.

All'analisi la polvere violetta mostrò di essere cloruro di purpureo-cobalto.

Calcolato per $Co(NH_3)_5Cl_3$ °/₀	Co 23.55	N 27.97	Cl 42.50
Trovato °/₀	Co 23.37	N 27.83	Cl 42.65

Se invece del cloruro di ammonio, si impiegano nitrato, carbonato, solfocianuro, ossalato di ammonio si ottengono altre cobaltiammine intorno alle quali verrà riferito in altra Nota.

(3) Urbain e Debierne « C. R. », 129 (1899) 304.

IV. – Esistenza di composti intermedi tra cobalti-nitriti e cobalti-carbonati. — Quando i cobalti-nitriti vengono trasformati mediante $NaHCO_3$ in cobalti-carbonati, tra la colorazione aranciata iniziale e la colorazione verde finale, si nota una fugace colorazione rosso-violetta, Si ottiene la colorazione violetta persistente se si impiega cobalti-nitrito di sodio in soluzione abbastanza concentrata e lo si demolisce con un non troppo grande eccesso di bicarbonato sodico. Se per esempio, si sciolgono gr. 3 di cobalti-nitrito sodico in 100 cc. di acqua e si aggiungono 10 gr. di bicarbonato sodico e si scalda per 10′ si ottiene una soluzione intensamente violetta. Di fronte all'acqua ossigenata e al permanganato le soluzioni violette si comportano come le soluzioni verdi.

Le soluzioni violette, quando vengano diluite e scaldate, previa aggiunta di un grande eccesso di bicarbonato sodico, diventano verdi. Viceversa, le soluzioni verdi, tanto quelle preparate da cobalti-nitriti quanto quelle preparate da sali cobaltosi con acqua ossigenata, per aggiunta di nitrito sodico, diventano anche a freddo violette, e tanto più rapidamente quanto più grande è la quantità di nitrito aggiunto. Se la quantità di nitrito aggiunta è piccola, varia soltanto la tonalità del verde che vira verso il turchino.

Questi fatti sembrano provare che nel complesso cobaltico esistente in soluzione, molecole di bicarbonato alcalino legate per coordinazione possono venir sostituite da molecole di nitrito, e viceversa.

Le soluzioni violette concentrate dànno per aggiunta di alcool, un precipitato oleoso violetto che a poco a poco si rapprende in una melma cristallina nella quale al microscopio si notano accanto ai cristalli incolori dei sali alcalini, dei cristalli tabulari ben formati rosso-violetti.

Le ricerche sono ora dirette allo studio di questo composto cristallizzato che probabilmente segna il passaggio tra i cobalti-nitriti e i cobalti-carbonati.

Chimica. — *Il sistema* $KNO_3 - Al(NO_3) - H_2O$ *a 0°, 40° e 60°.* Nota di G. Malquori, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema* $KNO_3 - HNO_3 - H_2O$ *fra 25° e 60°.* Nota di G. Malquori, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla stabilità del sesquiossido di rodio e del biossido di iridio* [1]. Nota di S. PASTORELLO, presentata [2] dal Socio G. BRUNI.

È stato dimostrato precedentemente da G. R. Levi ed M. Faldini [3] che dei diversi metalli del gruppo del platino due soli, il rodio e l'iridio, abbassano, anche se presenti in piccola quantità (10 %), in modo assai spiccato la ossidazione catalitica dell'anidride solforosa con aria. Tale azione deprimente si manifesta in grado abbastanza analogo per i due elementi, a temperature sotto ai 450° C., al disopra della quale le due curve rappresentative prendono un andamento diverso e cioè: l'azione deprimente del rodio tende a scomparire mentre quella dello iridio si esalta in modo spiccatissimo.

I citati autori hanno emesso l'ipotesi che tale azione si debba attribuire alla capacità del rodio e dell'iridio di formare degli ossidi e particolarmente dei sesquiossidi abbastanza stabili.

Degli ossidi di tali metalli la letteratura chimica è ricca, sebbene la dimostrazione della loro esistenza debba ritenersi in molti casi, piuttosto incerta per alcuni di essi; però V. M. Goldschmidt e i suoi collaboratori [4] hanno dimostrato per i due ossidi Rh_2O_3 e IrO_2 una struttura cristallina propria caratteristica, il primo tipo corindone e il secondo tipo rutilo, restando così provata in modo indubbio la loro esistenza come individui chimici.

Per gli altri ossidi del rodio e dell'iridio descritti nella letteratura, in particolare per il biossido di rodio RhO_2 e il sesquiossido di iridio Ir_2O_3, che sembrerebbero come i più capaci di esistenza, questi autori non hanno mai potuto ottenere fotogrammi a linee caratteristiche ma, o prodotti amorfi, per il primo caso, o prodotti che dànno le linee dell'iridio e del biossido, per il secondo caso.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(3) « Giornale di Chimica Industriale e Applicata », maggio 1927.

(4) V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*, VI. « Ueber die Krystallstrukturen vom Rutiltypus, mit Bemerkungen zur Geochemie zweiwertiger und vierwertiger Elemente, nach Untersuchungen gemeinsam mit T. Barth, D. Halmsen, G. Lunde, W. Zachariasen », 1926, n. 1, S 1-117.

V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*, VII. « Die Gesetze der Krystallochemie, nach Untersuchungen gemeinsam mit T. Barth, G. Lunde, W. Zachariasen », 1926, n. 2, S 1-117.

G. LUNDE, « Zeit f. anorg. Chemie », 163, 345 (1927).

Io ho ripetuto con diversi metodi di preparazione, dati nella letteratura ed in particolare per il biossido di rodio, la fusione del sesquiossido con nitrato e idrato potassico e, per il sesquiossido di iridio, il riscaldamento del solfito di iridio e la fusione del cloroiridato di potassio con carbonato di sodio, confermando i risultati dati dal Lunde.

Restando così dimostrato che i due prodotti sopra citati: sesquiossido di rodio Rh_2O_3 e biossido di iridio IrO_2 sono i soli stabili e a struttura distinta, ho preso in esame il loro comportamento in atmosfera di anidride solforosa pura, poichè le condizioni ordinarie della catalisi sono indubbiamente più favorevoli alla stabilità di queste sostanze, per l'eccesso di aria presente.

È quindi lecito affermare con sicurezza che le condizioni di stabilità in atmosfera di anidride solforosa si avranno a più forte ragione nelle condizioni ordinarie di catalisi.

Sesquiossido di rodio Rh_2O_3. – Sono partito da un prodotto di Heraeus di cui ho verificato la purezza con un fotogramma di Debye nel quale ho riscontrato tutte le linee caratteristiche del sesquiossido Rh_2O_3 e nessuna di alcuna altra sostanza estranea.

Il comportamento di questo sesquiossido in atmosfera di anidride solforosa pura è stato studiato per le temperature di 350°, 450°, 500°, ottenendosi a 350° e a 450° un fotogramma perfettamente inalterato e a 500° un magnifico fotogramma di rodio metallico puro.

Se si confronta tale comportamento con i rendimenti trovati da Levi e Faldini, si trova un perfetto accordo perchè sopra 450° la curva dei rendimenti sale bruscamente, appunto in relazione alla riduzione del sesquiossido di rodio da me sopra dimostrata.

Caratteristica di questa trasformazione è appunto il breve intervallo in cui essa si verifica.

Biossidio di iridio IrO_2. - Del prodotto di Heraeus, pure usato in questo caso, fu verificata la purezza con un fotogramma delle polveri.

Successivamente fu studiata la stabilità di esso in ambiente di anidride solforosa, alle temperature di 350°, 450°, 550°, 650°, 750°, 850°, 900°. Per le temperature da 350° a 650°, si sono ottenuti dei fotogrammi sempre corrispondenti al biossido IrO_2 puro, a 750° si è avuto un fotogramma con le linee proprie di questo ossido e quelle del metallo, a 900° solo le linee dell'iridio metallico puro.

Da questi risultati appare che il biossido di iridio si decompone difficilmente, passando ad iridio metallico senza ossidi intermedi ed inoltre che tale decomposizione incomincia sopra 650° e cioè a temperature che non hanno più alcun interesse per la catalisi dell'anidride solforosa.

Mettendo questa stabilità in relazione alla curva dei rendimenti trovata da Levi e Faldini, per il catalizzatore platino iridiato, si trova, pur non

potendo fare un diretto confronto essendo quelle misure riferite fino a 480°, che tale curva si abbassa in modo netto e con andamento diverso da quelle dei preparati contenenti gli altri metalli del gruppo e ciò in accordo con il grado di stabilità del biossido d'iridio.

Per il preparato a 750° che risultò misto di iridio metallico ed ossido, ho ritenuto più preciso di un'analisi, il confronto microfotometrico della intensità delle linee avute da un fotogramma di Debye, nelle solite condizioni, con anticatodo di ferro.

I risultati della microfotometria, fatta con microfotometro Kipp e Zonenn, modello B, sono schematizzati nella figura. Per il calcolo ho

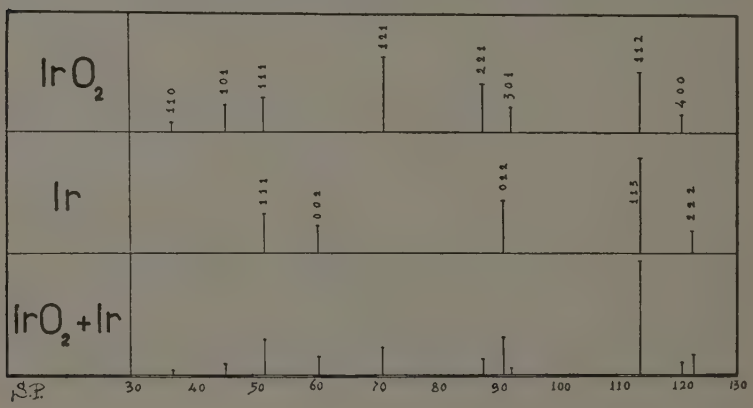


Fig. 1.

ricorso al seguente semplice ragionamento: presentando le due sostanze delle righe in comune, l'intensità di queste è in effetto somma di quelle che ogni sostanza componente darebbe se fotografata da sola, e però indicando con i ed i' le intensità relative all'iridio e al biossido di una riga corrispondente ad una faccia cristallografica in comune, con i_1 ed i_2 quelle di una faccia dell'una e dell'altra sostanza non comune si ha che:

$$i + i' = \mathrm{I} \qquad i : i_1 = a \qquad i' : i_2 = b$$

dove I è la intensità, misurabile, della riga corrispondente alla faccia in comune; a e b il rapporto fra le intensità relative della stessa riga considerata come appartenente ad una o all'altra forma cristallina, con quella di una seconda faccia non comune, rapporti deducibili dai fotogrammi delle singole sostanze pure.

Noti perciò i valori di I, i_1 ed i_2 dello stesso fotogramma si può facilmente, dalle espressioni di a e b, risalire alle intensità componenti

i ed *i'* direttamente proporzionali alle quantità relative delle due sostanze corrispondenti.

Nel mio caso ho preso in considerazione la faccia 111, in comunesia al biossido di iridio che all'elemento metallico, paragonandola con la faccia 121, per il biossido, e con la 002, per l'iridio, ottenendo un rapporto $Ir : IrO_2 = 2.205$. Paragonando allo stesso modo la faccia 112 del biossido coincidente con la 113 dell'iridio, rispettivamente con la 400 del primo e 222 del secondo ho ottenuto un rapporto $Ir : IrO_2 = 2.204$, molto concordante con il precedente. Da tale rapporto si deduce che, nelle su descritte condizioni a 750°, la percentuale di iridio metallico formatosi è di circa il 68.80 %.

Si potrebbe obbiettare a questo particolare apprezzamento analitico che l'alterazione ad iridio, qualora sia superficiale, può riuscire esaltata, ma tale preoccupazione non poteva presentarsi nel mio caso dato che anche la catalisi avrebbe subito la stessa sorte.

Riassumendo viene dimostrata la relativa stabilità del sesquiossido di rodio Rh_2O_3 in atmosfera di anidride solforosa e la grande stabilità del biossido di iridio IrO_2 nelle stesse condizioni. Viene confermata come causa dell'azione deprimente nella catalisi dell'anidride solforosa a solforica con platino rodiato e platino iridiato, la formazione degli ossidi, sesquiossido per il rodio e invece biossido per l'iridio.

Chimica. — *Glicoli biterziari ed alcuni loro derivati eterociclici* [1]. Nota del dott. E. Pace, presentata [2] dal Socio R. Nasini.

Il fatto che i composti organici contenenti nella loro molecola due gruppi carbonilici in posizione 1 — 4 possono essere trasformati con molta facilità in derivati eterociclici, dando per disidratazione derivati furfuranici, per azione dell'ammoniaca o di ammine primarie derivati pirrolici e per azione del pentasolfuro di fosforo derivati tiofenici [3], mi ha indotto a studiare se i γ-glicoli biterziari, contenenti nella stessa posizione due gruppi alcoolici terziari potessero reagire nel medesimo modo formando alla loro volta dei derivati sostituti del tetraidrofurfurano, tetraidropirrolo, tetraidrotiofene.

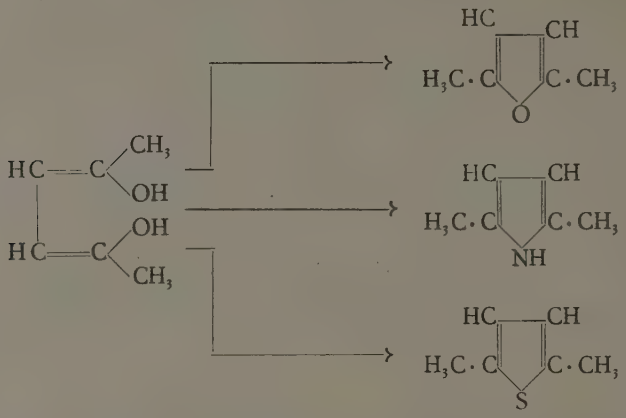
La trasformazione dei γ-dichetoni in derivati furfuranici, pirrolici e tiofenici è ammessa generalmente inquantochè questi dichetoni potendo rea-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Farmacologia sperimentale e Tossicologia della R. Università di Pisa.

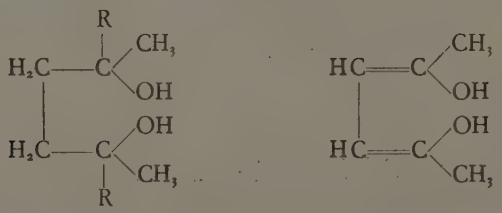
(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(3) Paal, «Ber.», XVIII, *58*, 397, 2251.

gire nella loro forma enolica danno appunto questi derivati secondo il seguente schema.



Se noi confrontiamo la formula dei γ–glicoli biterziari con quella dei γ-dichetoni nella loro formula enolica:



appare evidente l'analogia nella loro struttura da giustificare il sospetto che abbiano in comune anche le reazioni e che quindi mentre i γ–dichetoni danno derivati sostituiti dal furfurano, tiofene e pirrolo, i γ–glicoli diano derivati sostituiti del tetraidrofurfurano, tetraidropirrolo e tetraidrotiofene.

L'azione di un alogeno magnesio alchile sui dichetoni porta in generale, come hanno dimostrato Zelinsky [1], Valeur [2], Johlin [3] ed altri, alla formazione di alcooli bivalenti biterziari, poichè tutti e due gli aggruppamenti carbonilici possono reagire successivamente con il composto organo metallico.

Applicando questo procedimento ho potuto ottenere i primi tre termini della serie di questi γ–glicoli biterziari facendo reagire il bromuro di magnesio metile, etile e propile sull'acetonilacetone, ed ho poi studiato la trasformazione di questi glicoli nei corrispondenti derivati eterociclici.

(1) « Ber. », XXXV, 2138.
(2) « Bull. Soc. Chem. », 1902, 1138.
(3) « Am. Chem. Soc. », XXXIX, 1917, 291.

Parte sperimentale.

. *Glicoli.* — Ho ottenuto questi composti aggiungendo a lenti riprese al bromuro di magnesio alchile, in soluzione eterea, in un pallone con refrigerante a ricadere, la quantità equimolecolare di acetonilacetone preparato saponificando l'etere diacetosuccinico, il quale alla sua volta è stato ottenuto per azione di due molecole di etere monosodioacetacetico su una di iodio.

Terminata l'aggiunta, ho decomposto il prodotto solido della suaccennata reazione con ghiaccio ed acqua leggermente acidulata per acido solforico ed ho separato i due strati. Lo strato etereo contiene già in soluzione una buona parte del prodotto, mentre l'altra parte è tenuta disciolta nella soluzione acida, dalla quale lo si estrae completamente mediante ripetute estrazioni con etere. Mescolati gli estratti eterei e lavati con soluzione diluitissima di idrato sodico si essiccano su solfato di sodio. Per evaporazione dell'etere e consecutiva distillazione si ottengono i prodotti della reazione:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + 2RMgX = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ R{-}COH \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ R{-}COH \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

Derivati eterociclici. — Considerando la formula di questi glicoli nello spazio, vediamo che i due gruppi ossidrilici, sono molto vicini tra loro e risultano nella posizione γ hanno quindi la proprietà di reagire facilmente tra loro; infatti l'azione di disidratanti provoca l'eliminazione di una molecola di acqua con formazione di derivati sostituiti dall'ossido di tetrametilene, l'azione dell'ammoniaca dà luogo a derivati del tetraidropirrolo e l'azione del pentasolfuro di fosforo forma derivati del tetraidrotiofene.

Ho ottenuto i derivati del tetraidrofurfurano, sia lasciando in essiccatore su acido solforico, in cui avevo precedentemente fatto il vuoto, il glicole per alcuni giorni; sia portando per circa 2 ore il glicole sciolto in acido acetico ad una temperatura di 120°-150° in presenza di acido solforico o meglio di cloruro di zinco. Per successivo trattamento con etere estraevo completamente il derivato furfuranico.

Rendimento 70-75%.

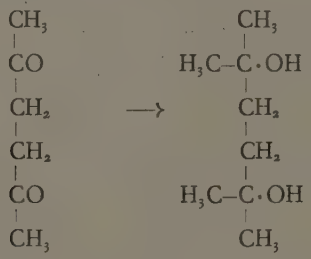
I derivati sostituiti del tetraidropirrolo li ho ottenuti riscaldando i glicoli con una soluzione alcoolica concentrata di ammoniaca, in piccolo eccesso, a 150° in tubo chiuso per 2 ore circa. Dopo apertura del tubo, ho evapo-

rato a bagno-maria l'eccesso di ammoniaca e l'alcool. Per distillazione frazionata ho raccolto i prodotti della reazione.

È necessario non prolungare il riscaldamento oltre 2 ore, nè abbreviarlo, altrimenti si possono avere, nel primo caso, reazioni secondarie con formazione di prodotti resinosi non saturi, di cattivo odore a tutto danno del rendimento del derivato tetraidropirrolico, mentre nel secondo caso, si ha la formazione di una piccolissima parte del derivato ciclico.

Con riscaldamento a 150° non prolungato oltre 2 ore, ho ottenuto un rendimento che va dal 60 all'80 %.

2-5 DIMETILESANDIOLO (2-5)-TETRAMETILTETRAMETILENGLICOLE. — Ottenuto per azione dell'acetonilacetone sul bromuro di magnesio metile e successiva decomposizione del prodotto con acqua:

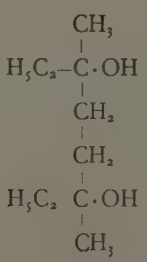


Lunghi cristalli prismatici fondenti a 92°-93°. Solubili in acido acetico, etere, alcool, cloroformio e benzolo. In soluzione benzenica presentano leggera fluorescenza verdastra. Odore canforaceo poco pronunciato.

L'analisi elementare ha dato:

	Trovato %:	C 64.96	H 12.00
per $C_8H_{18}O_2 = 146$	Calcolato %:	C 65.746	H 12.3

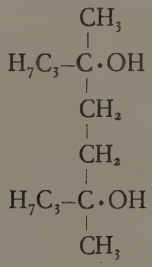
2-5 DIETILESANDIOLO (2-5)-γ-DIETIL-DIMETILTETRAMETILENGLICOLE. — Azione del bromuro di etilmagnesio sull'acetonilacetone e decomposizione del prodotto ottenuto con acqua:



Liquido leggermente colorato in giallo p. e. 172°-173°; odore etereo-canforaceo caratteristico, solubile in alcool, etere, cloroformio e benzolo. In soluzione benzenica alquanto concentrata si ha leggera fluorescenza verdognola che sparisce dopo poco tempo. L'analisi elementare ha dato:

	Trovato °/₀:	C 68.42	H 12.61
per $C_{10}H_{22}O_2 = 174$	Calcolato °/₀:	C 68.96	H 12.64

2-5 DIPROPILESANDIOLO (2-5)-γ-DIPROPIL-DIMETILTETRAMETILENGLICOLE. — Azione del bromuro di propil-magnesio sull'acetonilacetone e decomposizione con acqua del produtto della reazione:

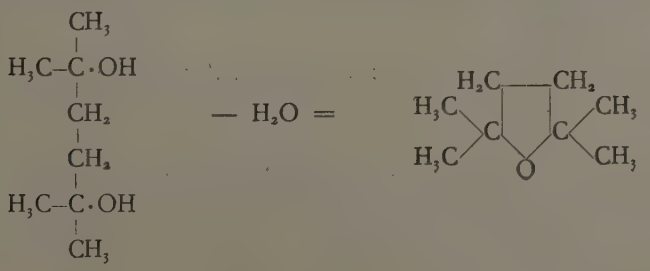


Liquido colorato in giallo oro p. e. 198°-200° odore piacevole speciale, solubile in alcool, etere, cloroformio e benzolo. Non presenta fluorescenza nè in soluzione concentrata, nè diluita. L'analisi elementare ha dato:

	Trovato °/₀:	C 71.12	H 12.79
per $C_{12}H_{26}O_2 = 202$	Calcolato °/₀:	C 71.28	H 12.86

Tutti questi glicoli dànno le reazioni degli alcooli terziari, in particolare quella di Denigès. Sono stabili alla prova di Baeyer e reagiscono facilmente col gas acido bromidrico dando luogo al corrispondente dibromuro solido.

α-α_1-TETRAMETILTETRAIDROFURFURANO. — L'azione di disidratanti sul 2-5 dimetilesandiolo (2-5) porta alla formazione di questo composto:



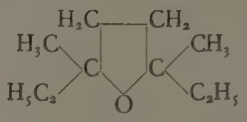
Liquido di odore speciale p. e. 119.5 insolubile in acqua, solubile in benzolo, etere, alcool, cloroformio e ligroina. Pogorzelsky[1] ottenne un composto simile partendo dal bromuro di diisocrotile e chiamato ossido di diisocrotile il cui p. e. è a 786 mm. 113°.

La determinazione del peso molecolare, ottenuto determinando l'abbassamento del punto di congelamento col metodo di Beckmann (solvente benzolo) e l'analisi elementare hanno dato:

p. m. = 125.7

	Trovato °/₀:	C 74.7	H 12.68
per $C_8H_{16}O = 128$	Calcolato °/₀:	C 75	H 12.5

α–α₁-DIMETIL-α-α₁-DIETILTETRAIDROFURFURANO. — Azione di disidratanti sul 2–5 dietilesandiolo (2-5):

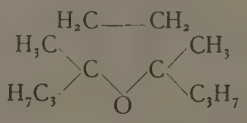


Liquido incolore di odore speciale p. e. 165°. Solubile in etere, alcool, cloroformio e benzolo. Peso molecolare (solvente benzolo) e analisi elementare hanno dato:

p. m. = 153.6

	Trovato °/₀:	C 76.82	H 12.92
per $C_{10}H_{20}O = 156$	Calcolato °/₀:	C 76.91	H 12.82

α–α₁-DIMETIL-α-α₁-DIPROPILTETRAIDROFURFURANO. — Azione di disidratanti sul 2–5 dipropilesandiolo (2-5):



Liquido incolore di odore speciale p. e. 186°, solubile in alcool, etere, cloroformio e benzolo. Lasciato all'aria ingiallisce dopo poco tempo acquistando odore diverso.

Peso molecolare (solvente benzolo) e analisi elementare hanno dato:

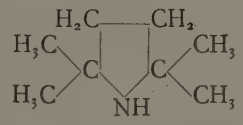
p. m. = 182.68

	Trovato °/₀	C 77.52	H 12.84
per $C_{12}H_{24}O = 184$	Calcolato °/₀	C 78.26	H 13.04

(1) «Chem. Zentr.», 1899, I, 773.

Questi derivati del tetraidrofurfurano presentano tutti e tre le reazioni dei derivati furanici: colorano in verde smeraldo il fuscellino di abete intriso nell'acido cloridrico, e non reagiscono nè col sodio, nè con gli alcali. Non vengono inoltre scomposti dal vapor d'acqua sotto pressione.

α-α_1-TETRAMETILTETRAIDROPIRROLO. — Azione dell'ammoniaca alcoolica sul 2-5 dimetilesandiolo (2-5):



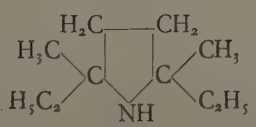
Liquido leggermente colorato in rosa p. e. 108°. Presenta la caratteristica reazione dei derivati pirrolici, colorando in rosso il fuscellino di abete intriso nell'acido cloridrico e colorando in azzurro verdastro una soluzione solforica di isatina. È solubile in acido acetico, alcool, etere, meno in cloroformio. Pauly e Hültenschmidt (1) ottennero un identico composto per azione dell'ammoniaca alcoolica sul dibromuro del 2-5 dimetilesandiolo (2-5).

Peso molecolare (solvente acido acetico) e analisi elementare hanno dato:

p. m. = 126.8

	Trovato °/₀:	C 75.11	H 12.92	N 11.12
per $C_8H_{17}N$ = 127	Calcolato °/₀:	C 75.6	H 13.4	N 11

α-α_1-DIMETIL-α-α_1-DIETILTETRAIDROPIRROLO. — Azione dell'ammoniaca alcoolica sul 2-5 dietilesandiolo (2-5):



Liquido mobilissimo leggermente colorato in rosso p. e. 125°, imbrunisce rapidamente all'aria alterandosi parzialmente. Dà la reazione col fuscellino di abete, ma non quella con isatina. È solubilissimo in acido acetico, alcool ed etere.

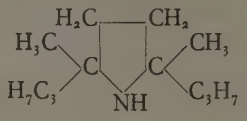
Peso molecolare (solvente acido acetico) e analisi elementare hanno dato:

p. m. = 155.6

	Trovato °/₀:	C 77.02	H 12.92	N 9.29
per $C_{10}H_{21}N$ = 155	Calcolato °/₀:	C 77.42	H 13.55	N 9.03

(1) «Ber.», XXXVI, 3357.

α-α_1-DIMETIL-α-α_1DIPROPILTETRAIDROPIRROLO. — Azione dell'ammoniaca alcoolica sul 2-5 dipropilesandiolo (2-5):



Liquido mobilissimo colorato in rosso p. e. 147°-149°. Si altera facilmente all'aria imbrunendo rapidamente. Colora in rosso vivo il fuscellino di abete intriso nell'acido cloridrico e reagisce col sodio metallico con sviluppo di idrogeno. È solubile in acido acetico, alcool ed etere.

Peso molecolare (solvente acido acetico) e analisi elementare hanno dato:

p. m. = 182.2

	Trovato °/₀:	C 78.12	H 12.86	N 7.75
per $C_{12}H_{25}N$ = 183	Calcolato °/₀:	C 78.69	H 13.67	N 7.65

Chimica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* Nota di A. Ferrari e A. Baroni, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica fisiologica. — *La tabacina o il principio tossico del tabacco.* Nota di N. A. Barbieri, presentata [1] dal Socio E. Paternò.

L'analisi del tabacco può eseguirsi con due gruppi di solventi neutri, l'uno (primo gruppo) costituito dai liposolventi (alcool, etere, cloroformio, benzolo, etere di petrolio), l'altro (secondo gruppo) dagli idrosolventi: acqua distillata a freddo e a caldo.

1° Gruppo. - Liposolventi.

Prima operazione. — Si separano le costole (kg. 1) da kg. 3.100 di foglie di tabacco Kentucky non fermentato, ma seccato a fuoco diretto o al sole. Si tagliano i lembi (kg. 2.100) in piccole strisce che, introdotte in un flacone appropriato, si sommergono in una miscela composta di 10 litri di alcool a 95°, e di 6 litri d'etere.

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

Dopo 40 o 60 giorni si decanta la soluzione alcool eterea colorata. Si aggiungono ai lembi rimasti nel flacone nuove quantità di alcool–etere, seguite da rispettive decantazioni fino a che l'ultima soluzione decantata, si presenti quasi incolore. Si riuniscono quindi le varie soluzioni decantate, si filtrano e si ottiene un solo estratto totale alcool etereo (*a*) che deve contenere rispettivamente i principi sciolti: (1) in etere, (2) in alcool etere, (3) in alcool, ed infine (4) quei principî che già sciolti nell'acqua fisiologica dei lembi (umidità 12 %), per un processo di disidratazione, sono passati nell'alcool insieme con la stessa acqua fisiologica.

Seconda operazione. — Si distilla prima tutto l'etere dell'estratto sopra indicato (*a*), poi se ne distilla l'alcool fino ad ottenere un residuo (*b*) di due litri, che si lascia da 10 a 15 giorni in riposo. Si separa per filtrazione il precipitato bianco-giallastro (*A*) formatosi con il riposo e il filtrato (*c*) si riduce ad un litro. Il precipitato (*A*) costituisce la *prima frazione* (I).

Terza operazione. — Il filtrato (*c*) ridotto ad un litro e privato del precipitato (*A*) si mantiene in una capsula di porcellana a dolce fuoco a bagno maria fino ad eliminazione completa dell'alcool. Ne rimane un residuo acquoso che risulta formato dall'acqua fisiologica dei lembi (umidità 12 %) e dall'acqua (5 %) contenuta nel quantitativo di alcool impiegato (95°).

In questo residuo acquoso si deposita una materia verdastra aderente alle pareti della capsula di porcellana. Il liquido (*d*) si decanta e la materia verdastra sciolta in benzolo costituisce la *seconda frazione* (II).

Quarta operazione. — Si riduce a consistenza sciropposa il residuo decantato (*d*) che si riprende poi parecchie volte con etere fino ad ottenere che l'ultimo etere impiegato resti del tutto incolore.

L'etere lascia indisciolta una massa giallo-rossastra (*m*). Le soluzioni eteree sono riunite e filtrate, l'etere si distilla completamente e il residuo sciolto in etere di petrolio forma la *terza frazione* (III).

Quinta operazione. — Alla massa giallo-rossastra (*m*) lasciata indisciolta dall'etere si aggiunge acqua distillata e cloroformio e si agita lungamente nel decantatore a rubinetto. Si formano subito due strati ben distinti: l'uno inferiore (*p*) cloroformico; l'altro superiore (*n*) acquoso che si separano fra di loro e si filtrano.

Lo strato cloroformico costituisce la *quarta frazione* (IV) e lo strato superiore (*n*) la *quinta frazione* o *frazione acquosa.*

Le frazioni II, III e IV sono rispettivamente lavate con acqua distillata, le acque riunite, filtrate, condensate a bagnomaria sono aggiunte alla frazione V o acquosa la quale contiene la tabacina. Dopo l'avvenuto lavaggio, le frazioni II, III e IV presentano una reazione neutra così come la frazione I, solo la frazione V possiede una reazione spiccatamente acida. Tutte le cinque frazioni non contengono traccia di nicozianina e di acidi organici, quali l'acido malico, l'acido citrico e l'acido ossalico.

2° Gruppo. - Idrosolventi.

Sesta operazione. — I lembi sfruttati dalla miscela alcool-etere si ritirano dal flacone e si lasciano per 24 ore in un eccesso di acqua distillata.

Si filtra l'estratto acquoso colorato e sui filtri si comprimono i lembi. L'estratto acquoso si riduce a secco e il residuo si tratta con alcool–etere. La soluzione alcool–etere separata dal residuo indisciolto e filtrata si aggiunge all'estratto totale (*a*) prima della distillazione dell'etere. Il residuo indisciolto ripreso con acqua distillata si aggiunge ai lembi compressi.

Settima operazione. — Si trattano lungamente con acqua bollente i lembi. Si filtra l'estratto caldo e i lembi si comprimono di nuovo sui filtri. I lembi divenuti insolubili in tutti i veicoli neutri, privati per compressione dell'acqua, si seccano alla stufa ad una temperatura di 40° e quindi si inceneriscono. Si ottiene così la *sesta frazione* (VI).

Ottava operazione. — Si riduce alla metà l'estratto acquoso e si separa con filtrazione il precipitato giallo (precipitato *B*) che si deposita. Si ottiene così la *settima frazione* (VII).

Nona operazione. — Si riduce ancora a bagnomaria l'estratto già concentrato e privato del precipitato *B*. Si depositano i sali minerali, che, separati per infiltrazione formano l'*ottava frazione* (VIII).

Decima operazione. — Infine si condensa a bagnomaria l'estratto residuale privato dei sali minerali. Si riprende il residuo con la minima quantità di acqua e si filtra. Nel filtrato si agiunge un eccesso di alcool e si ottiene un abbondante precipitato costituito (I) da sali minerali, che, separati si aggiungono alla frazione precedente ed (II) della materia colorante giallo - del tabacco o scafatina. Si ottiene così l'ultima frazione o *nona frazione*.

Il metodo d'analisi fisiologica descritto, che nel medesimo tempo è un metodo qualitativo e quantitativo, permette di dividere gli estratti ottenuti del tabacco Kentucky con l'impiego successivo dei liposolventi e degli idrosolventi in *nove frazioni distinte*, che sono:

I. Frazione: Precipitato *A*. - Miscuglio di xantofilla e di una materia vischiosa che si riscontra nelle foglie del tabacco giunto a maturità. La materia vischiosa insolubile in acqua ma solubile in etere ed in alcool, viene generalmente designata col nome improprio di gomma.

II. Frazione: Frazione benzolica. - Miscuglio di clorofilla e di varî principî che accompagnano la clorofilla, cioè: cellulosio, grassi, cera (?)

III. Frazione: Frazione etere di petrolio. - Miscuglio di xantofilla e di altri principî.

IV. Frazione: Frazione cloroformica. - Miscuglio della sostanza rossa del tabacco e dei principî odoranti che si possono trascinare col vapore d'acqua.

V. Frazione: Frazione acquosa. – Contiene la *tabacina.*

VI. Frazione: Sali insolubili. – Fosfato tricalcico e fosfato trimagnesico in prevalenza.

VII. Frazione: Precipitato *B.* – (Da definirsi).

VIII. Frazione: Sali solubili. - In prevalenza il cloruro, il solfato neutro di potassio con tracce di fosfato acido di potassio.

IX. Frazione: Materia colorante del tabacco o Scafatina.

Studio preliminare della tabacina e derivati.

Proprietà fisico-chimiche. — La tabacina purificata con il nero animale e privata per dialisi del cloruro di potassio, presenta una consistenza cerea, un colorito giallo citrino, un odore di trimetilamina, un sapore caustico ed irritante. La tabacina possiede una reazione nettamente acida, si scioglie nell'acqua e nell'alcool in tutte le proporzioni, ma essa è del tutto insolubile in etere. La tabacina diviene subito igroscopica, non è attaccata a freddo dall'acqua di calce, nè a caldo dall'idrolisi acida prolungata (acido solforico 1 %).

L'acqua di calce scompone parzialmente a caldo la tabacina con emissione di piccole quantità di ammoniaca. Una liscivia di potassa pura, 2 %, sdoppia rapidamente a freddo la tabacina nei suoi componenti: *tabacol, acido tabacinico, zucchero.*

La tabacina verso 110° emette vapori irritanti di tabacol, così nella combustione ordinaria dei sigari o delle sigarette vi è sempre una produzione più o meno elevata di tabacol.

La tabacina sottoposta a caldo ad un'azione prolungata di una liscivia concentrata di potassa perde una quantità rilevante di ammoniaca e si trasforma in nicotina.

La tabacina deve considerarsi come un glucoside acido–azotato.

Preparazione del tabacol. — Si versano in un pallone a lungo collo: *a*) 50 gr. di tabacina; *b*) 500 gr. di acqua distillata; *c*) 100 gr. di una liscivia di potassa pura 2 %; *d*) un grande eccesso di etere. Si agita con violenza evitando la formazione dell'ammoniaca. Dopo pochi secondi si deve separare la soluzione eterea incolore, distillare l'etere che abbandona il tabacol il quale si colora lentamente all'aria.

Il liquido alcalino addizionato di un quantitativo determinato di acido solforico, si concentra a bagnomaria, si elimina il solfato di potassio ottenuto. Il residuo contiene l'acido tabacinico (che non è tossico) ed uno zucchero (da definirsi).

Il tabacol è un liquido limpidissimo di color citrino, basico, al tatto ricorda la liscivia.

Il tabacol ha un odore acre, penetrante, dopo una corta e piccola inalazione provoca prima una violenta starnutazione, poi la tosse ed infine

(esperienza personale) un'ansia respiratoria accentuata, ed un senso di costrizione del torace come nei prodromi che precedono un attacco d'asma.

Il tabacol, trattato con liscivia concentrata di potassa a caldo, emette una quantità rilevante di ammoniaca e si trasforma in nicotina.

La nicotina deve quindi considerarsi come un prodotto chimico di sdoppiamento ottenuto da un'azione prolungata, intensa, *e a caldo* della potassa, della calce e della magnesia sopra il residuo di un estratto alcoolico di tabacco o sopra il tabacco seccato.

Proprietà fisiologiche. — La tabacina (1), la nicotina commerciale (2) (pura a 99) e quella (3) ottenuta dal tabacol, producono la morte nelle cavie alla dose di 9 milligrammi per 100 grammi di animale, con sindrome fenomenica quasi uguale e con paralisi del centro respiratorio.

Il tabacol è un veleno convulsivante potentissimo, ricorda, iniettato nelle cavie, per la rapidità della morte, l'azione combinata dell'acido cianidrico (apparato respiratorio) e della stricnina (apparato muscolare).

Il tabacol provoca nelle cavie alla dose di 1 milligrammo per 100 gr. di animale, delle contrazioni violente degli arti, con trisma, con ansia respiratoria. La morte avviene in 80 secondi per paralisi del centro respiratorio mentre il cuore continua ancora a battere per qualche minuto.

Il cuore si arresta in diastole con paralisi prima dei ventricoli e poi delle orecchiette.

La nicotina commerciale uccide i cani alla dose di 45 milligrammi per chilo d'animale producendo una paralisi respiratoria.

Il tabacol invece uccide i cani alla dose di 15 milligrammi per chilo d'animale con paralisi cardiaca e respiratoria (1).

Studio preliminare della scafatina. — Il precipitato alcoolico indicato nella frazione IX deve essere parecchie volte sciolto in acqua e riprecipitato con alcool fino ad ottenere una polvere (ceneri 2.75 %) solubile solo in acqua. Tale principio che rappresenta la materia colorante gialla del tabacco, o scafatina, è neutra, insolubile in tutti i veicoli neutri conosciuti, eccettuata l'acqua distillata (2).

L'analisi fisiologica per separazione dei principî organici e minerali preesistenti nei tessuti dei vegetali, dovrà col tempo sostituire l'analisi attuale di scomposizione, praticata con acidi minerali concentrati o con liscivie alcaline concentrate.

(1) Le esperienze sugli animali sono state fatte nel Laboratorio di Chimica fisiologica dell'Università di Roma, diretto dal prof. Lomonaco.

(2) Le foglie delle piante fanerogame posseggono due materie coloranti, l'una superficiale o clorofilla, l'altra profonda, variabile da pianta a pianta, che talora è nera come nelle fave o nigrofilla, talora è gialla come nel tabacco o xantofilla, talora è rossa come nel pero, vigna, caffè, ecc. Si può considerare la scafatina come un prodotto di evoluzione della xantofilla.

Geologia. — *Un interessante affioramento di lava a Petronella in Agro Romano.* Nota di ENRICO CLERICI, presentata [1] dal Socio F. MILLOSEVICH.

Come è noto, tutte le lave del sistema vulcanico laziale hanno per componente essenziale e caratteristico la leucite. Quasi tutte appartengono alla famiglia delle leucititi: fanno eccezione tre o quattro affioramenti di leucotefriti e la leucotefrite haüynica, porfirica a grosse leuciti, non conosciuta in posto ma in pezzi erratici specialmente inclusi nella formazione peperinica del Tavolato e nel peperino di Marino e di Ariccia.

Le lave più antiche e topograficamente più distanti dall'attuale centro del sistema laziale, sono tipiche leucititi, come quelle di S. Vittorino, Chiesaccia, Vallerano, Casal Brunori, Selcetta, la cui posizione rispetto alla serie stratigrafica delle varie formazioni tufacee sta fra il complesso del tufo granulare e l'orizzonte della pozzolana rossa.

Della stessa età e nelle stesse condizioni di giacitura è la leucitite che, per la potenza di metri 27.30, fu constatata mediante trivellazione tubolare rotativa a Calandrella [2].

Nello stesso ordine di distanza delle località sopra indicate è ora da aggiungere un nuovo affioramento, nel settore sud-ovest, a circa 2 km. dalla borgata Pratica di Mare, nella tenuta Petronella, in grazia dei lavori di bonificamento agrario, in corso di esecuzione, per i quali conveniva utilizzare possibilmente materiali del luogo.

La località trovasi verso il termine dell'altopiano tufaceo, quivi a quote intorno a 100 m. sul mare, profondamente inciso dal fosso di Pratica

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) CLERICI E., *Brevi notizie sulle roccie incontrate nella ricerca d'acqua a Calandrella in Agro Romano.* «Boll. Soc. Geol. It.», XLV, 1926.

Due correnti laviche furono incontrate nella perforazione tubolare per ricerca d'acqua presso la stazione ferroviaria di Santa Palomba. La perforazione ebbe esito favorevole in conformità delle deduzioni geologiche che, interpellato, ebbi a comunicare.

Più oltre, nella trincea ferroviaria verso la stazione di Campoleone è visibile altra corrente con la base a fondo di battello.

In seguito all'esito del pozzo di Santa Palomba ne furono perforati altri nei dintorni. In tre fu incontrata la lava a circa 40 metri di profondità (Solfaratella m. 44; Cerqueto Capanne m. 42; Cerqueto Rubbietto m. 36) mentre a Santa Palomba le due correnti furono incontrate rispettivamente alla profondità di 45 e di 62 metri.

che vi ha modellato coi suoi due influenti (fosso della Petronella, l'altro senza nome) una collina a ripide spallette su cui è la vecchia torre di Petronella.

La località fu già da me studiata parecchi anni fa: ma allora le condizioni di incoltura ed il fitto cespugliame boschivo delle ripide spallette tenevano completamente celato l'affioramento.

Attualmente la lava è constatabile, per la lunghezza di una cinquantina di metri e potenza di circa 4 m., sul fianco meridionale della detta collina ove sono state aperte due piccole cave di poco approfondite sotto la locale quota (m. 55) di fondo della stretta vallecola del fosso della Petronella; è pure visibile, a quota più bassa e colla potenza di circa 4 m., nel letto del fosso della Petronella, ove forma balze; di modo che la potenza complessiva non sarebbe inferiore ad 8 metri.

La roccia, nelle escavazioni ed ove è meglio conservata, ha colore bigio cenerognolo scuro volgente al verdognolo oppure al verdognolo giallastro per iniziata alterazione; ma quando è completamente alterata diviene bianca e gialla ed allora somiglia ai tufi alterati da emanazioni solfidriche come se ne vedono nella vicina Solforata. Discretamente tenace, minutissimamente bucherellata, non mostra nella ruvida frattura segregazioni cristalline macroscopiche, ma soltanto qualche piccolo prismetto pirossenico e lascia inoltre intravedere un minuto componente bianco. Qua e là assume apparenza di roccia clastica.

Al microscopio si scorge abbondante base vitrea per lo più torbida ed oscura per contenuto di sostanza opaca; quando questa manca, il vetro è piuttosto limpido, giallognolo, con indice di rifrazione superiore al balsamo, fra 1.563 e 1.585, zeppo di bollicine rotonde e stirate ed infeltrato di microliti pirossenici e feldspatici.

La sostanza opaca, che illuminata per riflessione ha lucentenza metallica e colore giallo, è solfuro di ferro. Senza escludere la pirite, ho constatato, con la separazione meccanica, la presenza di cristalli certamente non monometrici, perciò di marcasite. La magnetite è assente.

I fenocristalli sono di feldspato e di pirosseno.

Il feldspato, plagioclasico, raramente equidimensionale e zonato, è listiforme con numerose lamelle di geminazione secondo la legge dell'albite. Per l'ampio angolo d'estinzione appartiene a termini molto basici.

Il pirosseno, augite, è nettamente idiomorfo in prismi allungati di color verdognolo chiaro, senza policroismo e con estinzione massima a 45°-50°. Presenta nette sfaldature ed inclusioni vetrose e a bolla. I cristalli, quando si possono staccare dalla roccia, hanno la superficie sbiancata e apparenza fibrosa nel senso longitudinale con interposizione di solfuro di ferro.

Il dott. Aldo Maffei del laboratorio chimico della R. Scuola d'ingegneria di Roma, cui avevo richiesto di determinare la percentuale di silice contenuta nella roccia, mi ha gentilmente comunicato i seguenti dati:

Silice	52.01
Ossido di ferro	4.26
Allumina	17.66
Calce	6.81
Magnesia	2.71
Perdita a 110°	3.86
Perdita totale per arroventamento	10.16

Entro il fosso della Petronella la roccia sembra più compatta e talvolta più cristallina con poca parte vetrosa. Cristalli di augite, lunghi anche tre millimetri, spiccano in rilievo sulla parte alterata dove la roccia è meglio erosa e lisciata dall'acqua del fosso.

Il solfuro di ferro (1), che è intimamente diffuso nella roccia e tappezza o riempie le bollosità, ossidandosi contribuisce alla intensa alterazione di essa. Nella alterazione si forma anche un po' di opale. Ho notato inoltre solfo libero estraibile con tetracloruro di carbonio.

Nelle litoclasi si formano spalmature brune di limonite ed altre bigio-bluastre lucenti manganesifere. Alcune laminuccie luccicanti sono di selenite.

Attualmente non è possibile la materiale constatazione della superficie di posa della lava nè le sue terminazioni laterali, ma l'intaglio fatto nella collina per una delle cave lascia vedere la terminazione superiore ed il contatto con la sopragiacente sabbia silicea. A brevissima distanza questa stessa sabbia, di colore giallastro ora più chiaro, ora bruniccio, sostituisce la lava per la corrispondente altezza anche nel letto del fosso della Petronella.

Nella tenuta di Petronella la più antica formazione tufacea è costituita dal complesso del tufo granulare a impronte di vegetali, compresavi la facies a pallottole pisolitiche, il quale, per la sua maggiore resistenza alla denudazione, spicca sul profilo delle circostanti colline e giace, con separazione netta, sulla anzidetta sabbia, che più oltre verso valle è un po' ghiaiosa.

Delle successive parti della serie tufacea sono anche qui presenti le pozzolane e l'ordinario tufo litoide (2).

La lava è certamente di età anteriore al tufo granulare e può ritenersi faccia testimonianza di una corrente qui fluita sulle sabbie giallastre che, in parte eoliche, l'hanno poi ricoperta.

(1) Era pure abbondante nella pozzolana rossa attraversata con trivellazione tubolare rotativa nella tenuta Monte di Leva (ved. Clerici E., *In occasione della ricerca d'acqua a Monte di Leva in Agro Romano.* « Boll. Soc. Geol. It. », XLIV, 1925). Ne contiene anche il materiale estratto dalla profondità di circa 40 m. colla perforazione tubolare a percussione, ancora in corso, nella vicina tenuta Solforata.

(2) Per altri particolari sulla serie stratigrafica vedasi: Clerici E., *Sulla stratigrafia del Vulcano Laziale.* « Rend. R. Acc. Lincei », XIII, 2° sem., 1904.

Le quote del terreno in direzione del sistema laziale sono, anche nei luoghi più depressi, troppo alte per tentarvi la ricerca di altre tracce della corrente, che soltanto una fortunata trivellazione potrebbe svelare. Per ora manca qualsiasi elemento per fare congetture circa la ubicazione della bocca di emissione. Però si può concludere che la lava di Petronella differisce da tutte le lave laziali sia per la maggiore antichità, sia per la composizione mineralogica.

Circa il posto da assegnarle nella classificazione delle roccie effusive sembrerebbe dovesse porsi fra le andesiti augitiche oppure, in considerazione della scarsa percentuale di silice, vicino ai termini di passaggio fra andesiti augitiche e basalti.

Biologia. — *Variazione del pH delle soluzioni equilibratrici per azione del potere regolatore dei tessuti.* Nota di M. Comel, presentata [1] dal Corrisp. A. Herlitzka.

Le ricerche che formano l'oggetto della presente Nota furono eseguite allo scopo di controllare qual'è il valore del *p*H quando si aggiunga a una soluzione regolatrice la poltiglia di tessuto, e ciò per controllo di esperimenti sul ricambio respiratorio, già qui pubblicati [2].

Per risolvere questo quesito ho intrapreso una serie di determinazioni elettrometriche della concentrazione degli idrogenioni nelle miscele formate dalle soluzioni equilibratrici di fosfati, in cui avevo immerso poltiglie di muscoli e di fégato di rana. Le soluzioni di fosfati usate sono quelle di Jarisch, costituite da quattro miscele in proporzioni diverse dei liquidi seguenti: 1) una soluzione M/30 di acido fosforico; 2) una soluzione M/30 di fosfato monosodico; 3) una soluzione M/30 di fosfato disodico; 4) una soluzione M/60 di fosfato trisodico. A 5 cmc. di miscele di queste soluzioni, combinate in modo da ottenere i varî *p*H, si aggiungevano nelle due prime serie di esperimenti, 0.5 gr. di poltiglia di muscolo e di fegato, nella seconda serie, 1 gr. di poltiglia, ottenuta nel modo già usato per le precedenti ricerche. La poltiglia veniva rimescolata per cinque minuti e susseguentemente si decantava il liquido, di cui si determinava elettrometricamente il *p*H. Le determinazioni furono eseguite usando l'elettrode a chinidrone nella foggia a siringa datagli da E. Mislowitzer, e servendoci come elettrode normale di quello a calomelano.

I risultati delle quattro serie di ricerche sono riportati nelle tabelle e nelle grafiche che seguono. Nella prima tabella sono citati i dati ottenuti con poltiglie muscolari immerse nelle soluzioni di fosfati nelle proporzioni

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) V. «Atti d. R. Acc. d. Lincei, Rendic.», Sez. VI, vol. V, 1927, p. 808.

1 : 10. Nella prima colonna è indicata in volta la forza elettromotrice ottenuta con una soluzione moderatrice senza tessuti; la seconda colonna ne indica il *p*H. La terza e la quarta riportano la forza elettromotrice avuta con una miscela di questa soluzione e della poltiglia muscolare, e il *p*H corrispondente. La quinta colonna dà la differenza tra le due forze elettromotrici. La sesta dà la differenza tra i *p*H dei due liquidi. I valori riportati nella tabella sono le medie dei varî esperimenti eseguiti, che non si riportano singolarmente per amore di brevità.

TABELLA I.

Influenza del pH *delle poltiglie muscolari sul* pH *delle soluzioni di fosfati Jarisch. Proporzioni tra poltiglia e soluzioni*: 0.5 gr. : 5 cc.

FEM	*p*H	FEM	*p*H	Differenza	
della soluzione moderatrice		della soluz. + succo muscol.		tra le FEM	tra i *p*H
0.309	3.27	0.197	5.22	— 0.112	+ 1.95
0.221	4.80	0.164	5.79	— 0.057	+ 0.99
0.163	5.60	0.137	6.26	— 0.027	+ 0.46
0.132	6.34	0.122	6.52	— 0.011	+ 0.18
0.101	6.88	0.105	6.81	+ 0.004	— 0.07
0.058	7.62	0.065	7.51	+ 0.007	— 0.11

La figura 1 si riferisce alla Tabella I: in essa sono portati sull'asse delle ascisse, i valori del *p*H delle soluzioni senza tessuti; mentre sull'asse

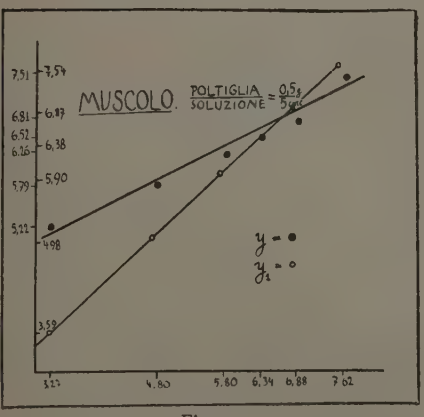


Fig. 1.

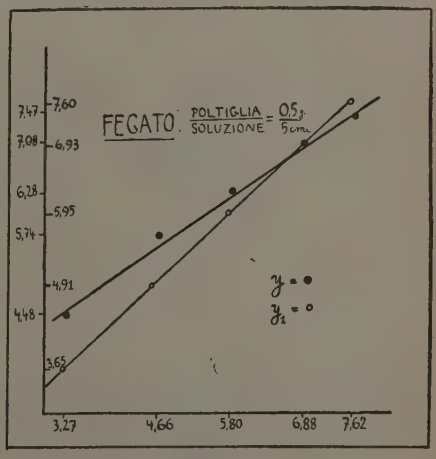


Fig. 2.

delle ordinate sono portati i valori del *p*H della miscela delle stesse soluzioni con poltiglie muscolari di rana, nella proporzione detta. Un tracciato analogo si ottiene portando sull'asse delle ascisse i valori del *p*H delle soluzioni, su quello delle ordinate i valori della differenza di *p*H indotta dalla aggiunta di poltiglia muscolare.

Le determinazioni eseguite con poltiglie di fegato di rana sono raccolte, con lo stesso metodo, nella Tabella II, e a questa fa riscontro la figura 2, il cui tracciato è stato eseguito analogamente a quanto è detto per la figura 1.

TABELLA II.

Influenza del pH delle poltiglie di fegato sul pH delle soluzioni di fosfati Jarisch. Proporzione tra poltiglia e soluzione: 0.5 gr. : 5 cc.

FEM	*p*H	FEM	*p*H	Differenza	
della soluzione moderatrice		della soluz. + succo di fegato		tra le FEM	tra i *p*H
0.309	3.27	0.238	4.48	— 0.070	+ 1.23
0.229	4.66	0.167	5.74	— 0.061	+ 1.08
0.163	5.80	0.136	6.28	— 0.028	+ 0.48
0.101	6.88	0.089	7,08	— 0.012	+ 0.20
0.058	7.62	0.067	7.47	+ 0.009	— 0.16

Le due citate serie di determinazioni elettrometriche del *p*H furono eseguite, come s'è detto, mescolando poltiglia e soluzione regolatrice nelle

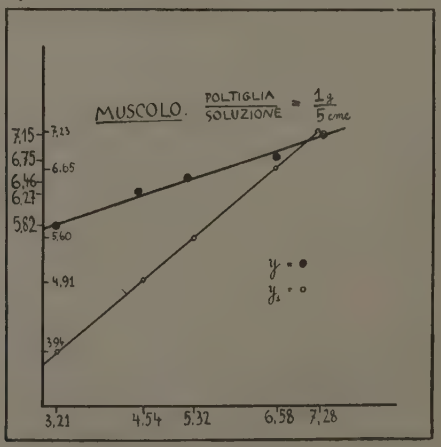


Fig. 3.

proporzioni 1 : 10. Per vedere, ora, quale e quanta fosse l'importanza del rapporto volumetrico tra i due sistemi regolatori (soluzione e tessuti) furono eseguite due ulteriori serie di determinazioni, in cui la poltiglia e la soluzione regolatrice furono mescolate nelle proporzioni 1 : 5. Ciò mi interessava particolarmente, perchè era appunto in tale proporzione che veniva saggiata la sospensione di tessuti nel microrespirometro di Rabbeno, per determinarne lo scambio gassoso.

I risultati ottenuti con le miscele soluzione + poltiglia muscolare sono riportati nella Tabella III, col metodo suddetto, e nella figura 3.

TABELLA III.

Influenza del pH delle poltiglie muscolari sul pH delle soluzioni di fosfati Jarisch. Proporzioni tra poltiglia e soluzioni: 1 gr. : 5 cc.

FEM	*p*H	FEM	*p*H	Differenza	
della soluzione moderatrice		della soluz. + succo muscol.		tra le FEM	tra i *p*H
0.313	3.21	0.163	5.82	— 0.151	+ 2.61
0.236	4.54	0.136	6.27	— 0.100	+ 1.73
0.191	5.32	0.125	6.46	— 0.066	+ 1.14
0.118	6.58	0.109	6.75	— 0.010	+ 0.17
0.078	7.28	0.086	7.15	+ 0.008	— 0.13

Infine i risultati ottenuti con le miscele: soluzione regolatrice più poltiglia di fegato nelle proporzioni 1 : 5 sono citati nella Tabella IV e nella

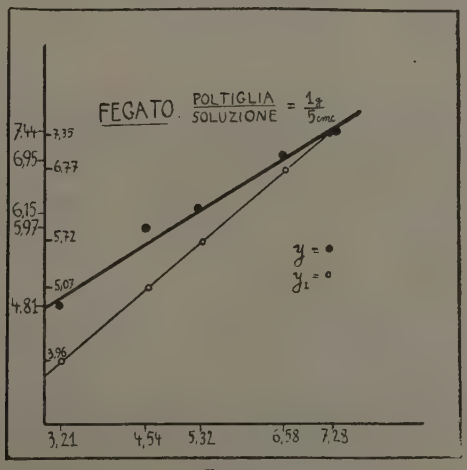


Fig. 4

figura 4. In tutte queste tabelle, ripeto, ho riportato i valori medi dei varî esperimenti eseguiti con ciascun *p*H, che furono però, data l'esattezza del metodo, sensibilmente concordanti.

Tabella IV.

*Influenza del p*H *delle poltiglie di fegato sul p*H *delle soluzioni di fosfati Jarisch. Proporzioni tra poltiglia e soluzione:* 1 gr. : 5 cc.

FEM	*p*H	FEM	*p*H	Differenza	
della soluzione moderatrice		della soluz. + succo di fegato		tra le FEM	tra i *p*H
0.313	3.21	0.220	4.81	— 0.093	+ 1.60
0.236	4.54	0.154	5.97	— 0 083	+ 1.43
0.191	5.32	0.142	6.15	— 0.050	+ 0.83
0.118	6.58	0 097	6.95	— 0.021	+ 0.37
0.078	7.28	0.069	7.44	— 0.010	+ 0.16

Come si può constatare anche da uno sguardo sommario alle tabelle e ai relativi tracciati, i risultati di queste numerose determinazioni sono univoci, e indicano concordemente una notevole influenza esercitata dal sistema regolatore posseduto dai tessuti sul *p*H della soluzione regolatrice di fosfati.

Il rapporto che lega il valore del *p*H (y) risultante e quello del *p*H (x) della soluzione adoperata è espresso dalla formula:

$$(1) \qquad y = a + bx,$$

che rappresenta, naturalmente, una retta.

a e b sono due parametri, di cui il primo indica il *p*H che avrebbe la miscela poltiglia più soluzione se il *p*H di questa fosse eguale a zero; e b è il coefficiente di spostamento del *p*H della soluzione per il variare dei valori di x.

Per esempio, mescolando poltiglia muscolare e soluzioni di fosfati Jarisch nelle proporzioni 1 : 5 (cfr. Tabella III e fig. 3), si ottengono spostamenti del *p*H delle soluzioni, per cui da $p\text{H} = 3.21$, si va a $p\text{H} = 5.82$, da $p\text{H} = 4.54$ si passa a $p\text{H} = 6.27$, e così via.

Costruendo il tracciato e applicando la formula della retta che vi corrisponde, si ottengono per i parametri i valori di 4.92 per a. e di 0.28 per b. Mescolando dunque la poltiglia muscolare nelle dette proporzioni

con una soluzione di fosfati a $p\mathrm{H} = 0$, ossia di concentrazione normale degli idrogenioni, il pH della miscela sarebbe di 4.92.

Riservandomi di discutere dettagliatamente la formula $y = a + bx$ nella pubblicazione *in extenso* di queste ricerche, osservo che, come vedremo, si ha $y = x$, quando il pH della soluzione aggiunta e quello della poltiglia sono eguali; in tal modo si può determinare quest'ultimo valore, che nella serie di determinazioni di cui alla Tabella III, p. es., risultò eguale a 6.97. Tenendo poi conto delle proporzioni (1 : 5) in cui avveniva la miscela, e, supponendo che la forza equilibratrice del muscolo dovesse essere eguale a quella delle soluzioni Jarisch, il valore del pH risultante dall'azione della poltiglia verrebbe dato dalla relazione $y_1 = \frac{5\,p\mathrm{H}_f + p\mathrm{H}_m}{6}$, dove con $p\mathrm{H}_f$ e $p\mathrm{H}_m$ si indicano rispettivamente i pH delle soluzioni di fosfati e della poltiglia muscolare. Il calcolo conduce alla formula di una retta, $y_1 = a_1 + b_1 x$; nel caso delle esperienze di cui alla Tabella III, p. es., il valore di $a_1 = 1.17$, e b_1 naturalmente è uguale a 5/6 cioè a 0.83. Poichè però la premessa, che il potere equilibratore della poltiglia e delle soluzioni Jarisch di pH diverso da quello corrispondente alla neutralità dovesse essere lo stesso, non regge, questo pH risultante y_1 è diverso da quello constatato sperimentalmente y; il quale è dunque:

$$y = a_1 + 0.83\,x + c + dx \qquad (2)$$

e se $a_1 + c = a$ e $0.83 + d = b$, ritorniamo all'equazione (1).

Queste considerazioni ci permettono di venire a determinare il potere equilibratore del tessuto muscolare, relativamente alle soluzioni regolatrici Jarisch. Partendo dalla considerazione che y deriva dalla media dei valori di pH delle due soluzioni mescolate, moltiplicato ciascuno per il relativo volume e il relativo potere equilibratore, avremo: $y = \frac{5\,p\mathrm{H}_f + p\mathrm{H}_m\,\mathrm{V}}{6}$, chiamando V il potere regolatore del tessuto (relativamente a quello della soluzione Jarisch considerata come unità). Dal rapporto $y : y_1$ si calcola il valore di V che risulta, come dimostreremo altrove:

$$\mathrm{V} = a_2 - b_2 x\,. \qquad (3)$$

Cioè, il potere regolatore del muscolo varia per un coefficiente b_2 a ogni valore di pH delle soluzioni Jarisch (x), come si comprende facilmente. a_2 rappresenta il potere equilibratore del muscolo di fronte a una soluzione Jarisch con $p\mathrm{H} = 0$, cioè di fronte alla soluzione normale di idrogenioni; i valori dei due parametri per questa serie di ricerche, risultarono: $a_2 = 4.21 : b_2 = 0.47$.

I valori per le altre serie e la deduzione della formula (3) saranno dati altrove.

Da questi fatti risulta che i tessuti possiedono un sistema regolatore che si oppone a qualsiasi variazione del loro *p*H per opera di altri sistemi regolatori di *p*H diverso.

Di questa forte azione equilibratrice dei tessuti di fronte all'azione di soluzioni regolatrici conviene pertanto tenere conto in tutte le ricerche in cui ci si propone di studiare un fenomeno quale variabile dipendente, prendendo quale variabile indipendente la concentrazione degli idrogenioni dei tessuti animali.

Lo studio dei dati sperimentali e della loro curva in queste determinazioni elettrometriche rende possibile di stabilire il *p*H di una poltiglia di tessuto, che è il valore constatato quando non avviene più, per opera del tessuto, uno spostamento del *p*H delle soluzioni equilibratrici in cui è sospeso. Poichè queste poltiglie, dato il modo come si preparano, introdotte nella soluzione vi immettono assieme a cellule con membrane intatte, buona quantità di contenuto cellulare assieme a liquido interstiziale, non si va molto lontano dal vero ammettendo che questi valori di *p*H indichino il *p*H del tessuto.

Occorre esaminare ora, come si comportino due soluzioni equilibratrici di fosfati, poste di fronte l'una all'altra, quando una delle due abbia un *p*H corrispondente press'a poco a quello delle poltiglie di tessuti.

Biologia. — *Sul potere equilibratore reciproco di due soluzioni regolatrici di fosfati.* Nota di M. Comel, presentata dal Corrisp. A. Herlitzka.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Istogenesi. — *Sul significato della degenerazione della zona reticolare del surrene del neonato umano* [1]. Nota di M. PENNACCHIETTI, presentata [2] dal Socio E. GIACOMINI.

Dal 1911 E. Thomas ha descritto nella surrenale dell'uomo notevoli variazioni di struttura, svolgentisi nel corso del primo anno di vita, e consistenti nella degenerazione di parte del tessuto corticale, e precisamente di tutta la zona reticolare embrionale, e nella consecutiva costituzione di una massa midollare omogenea nella zona centrale dell'organo, per il confluire dei numerosi complessi di cellule adrenali, che prima erano sparsi nella zona reticolare. La riduzione cospicua, cui va incontro la sostanza corticale della surrenale umana durante tale assestamento, non riesce ad essere compensata bastantemente dall'accrescimento della sostanza midollare, e comporta una certa diminuzione di volume di tutto l'organo. Nel descrivere queste modificazioni il Thomas mise in luce la coesistenza di turbe circolatorie. Questi reperti furono più volte confermati da numerosi autori; citerò fra gli altri Kern, Elliot, Armour, e fra i più recenti Scammonn e Ausenda.

Al fine di conoscere i dettagli e d'interpretare meglio il significato ed il valore di questi processi si cercò di studiarli nei comuni mammiferi di laboratorio: queste ricerche di confronto, intraprese nel 1913 sul topo e sulla cavia da Kern, da Elliot, e da Bloch recentemente (1923) ancora nella cavia, mirarono tutte a stabilire se nei neonati di queste specie avvenissero variazioni strutturali paragonabili a quelle descritte nella specie umana.

Però, a malgrado il numero e la precisione di queste indagini, non riuscì ad alcuno di individuare una qualsiasi corrispondenza di reperti fra le surrenali di neonati di *Cavia*, di *Mus*, e quelle di *Homo*. E poichè dal risultato positivo di questi confronti sarebbe derivata incontrastata la certezza della normalità del processo di degenerazione della zona reticolare embrionale del neonato umano, da molti messa in dubbio: la inesistenza di questo processo nelle specie studiate fece considerare da molti la regressione della porzione reticolare dell'uomo come più probabilmente legata a fenomeni patologici. D'altra parte quegli autori che sostenevano la normalità ed il valore fisiologico di questa involuzione, furono legittimati dalla mancanza di analoghi reperti nei mammiferi, a considerarla come caratteristica

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

della specie umana, e perfino (Landau) come il segno di un progresso nella filogenesi. Dibattito profondo che pareva non potesse esser composto da una sicura conoscenza risolutiva.

Da uno studio dello sviluppo somatico generale delle specie *Cavia cobaja*, *Mus decumanus*, *Lepus cuniculus*, e *Homo*, fra le quali erano stati istituiti i confronti suaccennati, io ho potuto chiarire la intricata questione: ho potuto cioè rilevare, che l'esito contradditorio delle ricerche summenzionate si deve attribuire alla notevolissima differenza dello stato di sviluppo dei neonati delle diverse dette specie. In altre parole nelle profonde differenze strutturali e funzionali che gli individui presentano al momento della nascita nella specie *Homo*, a prole inetta, e nella specie *Cavia c.*, a prole tipicamente atta, ho potuto rintracciare la via di spiegazione delle diversità dei reperti degli autori che ho citato, la spiegazione dei fatti che ho minutamente studiato e controllato.

Ma volli ancora proseguire nella indagine, verso quella conoscenza decisiva che poteva assicurare la realtà della mia interpretazione convalidandola in modo definitivo: ricercai, cioè, se non si potessero per avventura ritrovare nella surrenale del feto della cavia quelle modificazioni di struttura che Thomas aveva descritto per l'uomo durante i primi mesi di vita extrauterina. Ottenni così i seguenti positivi risultati: nei feti di cavia della settima settimana si verifica una riduzione della zona reticolare, che sino a questo periodo si spingeva ad occupare, commista al tessuto adrenale, le zone centrali dell'organo; il tessuto adrenale, che prima risultava di complessi cellulari in forma di isole e di cordoni, separati gli uni dagli altri, acquista per il confluire e l'accrescersi dei singoli gruppi, la omogeneità di una massa centrale, la massa midollare. Al processo di involuzione della zona reticolare dell'embrione, la quale diremo quindi zona reticolare embrionale per distinguerla da quella che andrà riformandosi nella vita extrauterina, si accompagnano similmente e come si vede nell'uomo, cospicue modificazioni circolatorie. Sono dunque riuscito a trovare nella *Cavia cobaja*, come, in periodi posteriori alla nascita, pur nel *Mus decumanus*, a prole, come ognun sa, tipicamente inetta, quel fenomeno d'involuzione della reticolata embrionale, che si riteneva caratteristico della specie umana, essendo partito per il confronto da una considerazione quanto più potei esatta del rispettivo stato di sviluppo degli individui delle singole forme studiate.

L'involuzione di una parte del tessuto corticale della surrenale umana durante il primo anno di vita, per la constatazione di identici reperti in altri mammiferi, acquista così il significato di un processo indipendente da eventuali condizioni patologiche; e viene ad essere condotto, da fenomeno voluto caratteristico ed esclusivo della nostra specie, a manifestazione di un processo più generale dell'assestamento strutturale del surrene dei mammiferi. In un lavoro di prossima pubblicazione nell' « Archivio di Anatomia e di Embriologia » ho descritto nei dettagli queste mie indagini.

Embriologia sperimentale. — *Osservazioni sul trapianto della vescicola ottica primaria in Rana esculenta sull'influenza dei diversi stadî embrionali nel successivo differenziamento* [1]. Nota di ALDO SPIRITO, presentata [2] dal Corrisp. F. RAFFAELE.

La tecnica dei trapianti di organi embrionali, già da tempo in uso presso gli studiosi di embriologia sperimentale, si è dimostrata particolarmente utile nella risoluzione di taluni problemi sulla meccanica dello sviluppo dell'occhio dei Vertebrati. Alcuni di questi problemi si possono considerare risolti, altri sono ancora in esame, talchè una ricca bibliografia si è venuta raccogliendo intorno alle varie questioni. Meritano particolare menzione gli studi sul determinismo dell'abbozzo oculare (Spemann, Hoadley); quelli condotti ad indagare la natura dei processi di autodifferenziamento cui va incontro l'abbozzo oculare asportato dall'embrione - sia nei primitivi stadî di sviluppo (prima della chiusura delle pieghe midollari), sia in quelli successivi (vescicola ottica primaria) - e trapiantato in differenti regioni di un altro embrione dello stesso o di differente stadio (Lewis, Harrison, Bell, King, Detwiler e May, Pasquini, May, ecc.); le ricerche sulla mancata rigenerazione della vescicola ottica negli Uccelli (Dragendorf), negli Anuri e negli Urodeli (Pasquini); gli studi sulla possibile regolazione di due vescicole ottiche in un occhio prodotto da fusione completa di due abbozzi (Pasquini), ed infine i processi di accrescimento delle fibre del nervo ottico negli occhi trapiantati.

Un gran numero di lavori concerne inoltre le modalità dello sviluppo della lente e il valore dei rapporti che intercedono tra l'ectoderma lentogeno e il calice ottico in formazione, ed a questo proposito ricordo che la capacità della vescicola ottica, che induce la lente a svilupparsi, è stata intesa come derivata dalla presenza di « centri organizzatori » (Spemann, Pasquini) [3].

In questo lavoro, ho voluto studiare l'influenza degli embrioni ospiti dell'innesto sulla velocità di differenziamento delle vescicole ottiche primarie trapiantate e le possibili relazioni tra nervi ottici e midollo spinale [4].

(1) Ricerche fatte per il conseguimento della Laurea in Scienze Naturali, presso l'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma, per consiglio e colla guida dell'Aiuto prof. Pasquale Pasquini, al quale desidero esprimere la mia sincera gratitudine.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(3) PASQUINI P., « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. VI, 1927.

(4) Le operazioni sono state eseguite trapiantando la vescicola ottica primaria di destra, nella regione laterale del tubo neurale, non leso, di un altro embrione; regione corrispondente a circa la metà della sua lunghezza.

Poichè gli embrioni usati nelle operazioni di trapianto appartenevano a differenti stadî, ho distinto gli esperimenti in quattro gruppi, rispettivamente del tipo I, II, III e IV. Gli embrioni del tipo I sono, sia il donatore che l'ospite dell'innesto, nello stadio di bottone codale bene sviluppato ed archi branchiali evidenti; così pure il donatore delle operazioni del tipo II per il quale furono usati come ospiti embrioni con pinna codale accennata e branchie esterne del primo e secondo arco branchiale in via di sviluppo. Queste differenze di età sono ancora più accentuate nei tipi di operazione III e IV, nei quali i donatori erano embrioni in stadî di pinna codale accennata, e gli ospiti corrispondenti, embrioni in stadî di pinna codale già sviluppata e di branchie esterne provviste di lobi.

Dall'osservazione cotidiana degli embrioni operati e, successivamente, dallo studio dei preparati delle sezioni seriali ho potuto rilevare che in un primo tempo la vescicola ottica trapiantata segue il suo normale sviluppo come se lasciata *in situ*; e che *solo dopo l'assorbimento del vitello* si determina in essa *un' accelerazione dello sviluppo*, in modo che rapidamente il grado di differenziamento dell'occhio trapiantato viene ad uguagliare quello dell'occhio normale sviluppatosi nell'embrione porta–innesti.

Soltanto il Lewis [1] in un suo lavoro porta un certo contributo alla conoscenza esatta del fenomeno, notando che l'abbozzo oculare trapiantato può subire in un primo tempo un notevole ritardo nel differenziamento degli strati retinici, sebbene in stadî più avanzati non vi sia più distinzione tra « *the amount of differentiation of transplanted and normal eyes* ».

Recentemente il Pasquini [2] e il May [3], rispettivamente negli Urodeli e negli Anuri, mettono in rilievo, per la prima volta, la sincronia di sviluppo degli organi trapiantati rispetto a quelli normali, e mentre il Pasquini in *Pleurodeles* dimostra che « la v. o. del donatore, trapiantata nell'ospite continua a differenziarsi in un calice ottico impiegando pel suo differenziamento lo stesso tempo della vescicola ottica normale », il May attribuisce, ma dubbiamente, la ragione di questa sincronia, all' influenza del sistema simpatico o a correlazioni umorali, pur non spiegando sufficientemente i suoi reperti, che non sono riconducibili a quelli ottenuti dal Lewis e da me con operazioni condotte su embrioni in differenti stadî di sviluppo.

Per la comprensione dei miei risultati credo opportuno riportarmi alle ricerche del Cotronei [4] che, innestando ventre a ventre 2 embrioni di *Bufo vulgaris* (uno dei quali era stato assoggettato ad un trattamento con cloruro di litio), notò che solo dopo il riassorbimento del vitello intervengono fe-

(1) Lewis W. H., « Amer. Journ. of Anat. », vol. VII, 1907, pp. 259–271.

(2) Pasquini P., « Boll. Ist. di Zool. R. Univ. di Roma », vol. V, 1927, pp. 1–83.

(3) May R. M., « Archives. de Biologie », t. 37, 1927, pp. 337–395.

(4) Cotronei G., « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XXX, fasc. 10, 1921; « Arch. Zool. », vol. X, 1922; « Rend. R. Acc. dei Lincei » vol. V, 1927: « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. VI, 1927.

nomeni accelerativi nella larva regredita (al litio), deducendone logicamente che fino al termine del riassorbimento vitellino, non v'è alcuna diffusione di sostanze morfogenetiche fra i due individui uniti a coppia. Inoltre, in una Nota seguente (1927, II), egli dice: « Da ciò concludiamo che durante il periodo di autodifferenziamento, che è collegato all'assorbimento vitellino, le cellule non hanno bisogno o meglio non sono in grado di risentire un'azione umorale. Una bella verifica di questa concezione la si desume dallo studio del differenziamento istologico della tiroide. Noi possiamo ritenere che il sorgere della funzione tiroidea si verifichi con la produzione del colloide. Orbene, ciò corrisponde appunto con il termine dell'assorbimento vitellino ».

Il May [1] è incerto nell'attribuire la causa della sincronia dello sviluppo degli occhi trapiantati e di quelli normali a correlazioni umorali o all'influenza del sistema simpatico, ma nei casi da me osservati appare evidente che essa deve attribuirsi unicamente a fenomeni ormonici.

Infatti, a prescindere dal valore indiretto del sistema nervoso in quanto stimolatore delle secrezioni interne (gli occhi trapiantati nelle mie esperienze non presentano connessione alcuna col sistema nervoso), rimane accertato che *solo all' iniziarsi di queste sono intervenuti fenomeni di accelerazione nello sviluppo degli organi trapiantati, e che solo ad esse, quindi, è da attribuire logicamente la causa della sincronia.*

Nello studio istologico della retina ho potuto constatare che lo strato delle cellule ganglionari si presenta sempre scarso e interrotto anzichè cospicuo e omogeneo. Sembra che tale scarsezza sia una delle principali differenze riscontrabili fra gli occhi trapiantati e quelli normali: differenza già notata dal Lewis [2], da Laurens e Williams [3], da May e Detwiler [4], e dal Matthey [5] anche con innesti eseguiti su tritoni adulti. Però altre anomalie sono riscontrabili e, recentemente, il Pasquini [6] ha posto in rilievo, in *Pleurodeles*, una difettosa pigmentazione dei calici ottici derivati da abbozzi oculari trapiantati.

È opportuno tuttavia notare che soltanto Laurens e Williams non hanno riscontrato tracce del nervo ottico così come il Pasquini, il quale rileva che « nei casi di fusione totale delle vescicole, l'occhio presenta un nervo ottico unico che si comporta diversamente nei varî esperimenti o la retina si continua direttamente col cervello il nervo essendo talora assente ». Quindi la suddetta scarsezza delle cellule dello strato ganglionare non deve ritenersi

(1) May R. M., lavoro citato.

(2) Lewis W. M., lavoro citato.

(3) Laurens e Williams, « Journ. Exper. Zoöl. », vol. XXIII, 1917, pp. 71–81.

(4) May R. M. e Detwiler S. R., « Journ. Exper. Zoöl. », vol. XLIII, 1925, pp. 83-103.

(5) Matthey R., « C. R. Soc. Biol. », t. 94, 1926, pp. 4-5.

(6) Pasquini P., lavoro citato, 1927 e « Riv. di Biol. », vol. IX, 1927, fasc. IV–V.

in relazione con l'assenza del nervo, assenza che ho dovuto constatare, salvo una sola eccezione, in tutti i casi da me studiati. Infatti soltanto l'occhio trapiantato dell'embrione del T. 4 è munito di un esile nervo ottico di discreta lunghezza, che attraversa la parete sinistra del midollo spinale leso, senza determinare in esso nessun aumento nel numero delle cellule che costituiscono la sostanza grigia. Ciò è perfettamente d'accordo con le idee del May[1], il quale trova che il semplice passaggio di fibre attraverso un centro nervoso non vi determina alcuna iperplasia cellulare.

Ciò premesso, ci si domanda a quale fenomeno attribuire l'assenza del nervo ottico.

Secondo la teoria di Hensen avrei potuto ammettere che, nell'operazione di trapianto, dalla vescicola ottica si fosse separata la catena cellulare, dalla quale il futuro nervo ottico avrebbe dovuto originarsi, ma è fuor di luogo fare una simile ipotesi ora che sono state così bene accertate le modalità dello sviluppo della fibra nervosa, specie mediante il metodo delle culture dei tessuti *in vitro*.

Del resto, la presenza, ripetutamente riscontrata da varî autori (Luna, May e Detwiler, Pasquini, May), di nervi olfattorî uscenti da frammenti di vescicole olfattorie incidentalmente trapiantate, e quella di nervi che si originano da tessuti neurassiali coinvolti nelle operazioni, rappresentano una nuova conferma dei risultati dell'Harrison[2] e del Lewis sull'accrescimento della fibra nervosa come « *an outgrowth of a nerve cell* ».

Per queste considerazioni è difficile giungere a una conclusione circa le cause della mancanza del nervo ottico; tuttavia credo opportuno richiamare l'attenzione sul fatto che la *presenza di fibre nervose partenti dall'organo olfattorio si è verificata soltanto allorchè insieme a questo si è trapiantato un frammento di encefalo, e che la formazione del nervo ottico si è avuta nell'unico caso in cui l'occhio è venuto a trovarsi a contatto col midollo leso.*

Voglio con questo ammettere che è probabile l'*esistenza di speciali fattori*, la cui natura non posso specificare, i quali agirebbero sulle cellule nervose *con un'azione liberatrice delle loro capacità insite*, in quanto formatrici delle fibre nervose. Laddove queste influenze mancassero si avrebbe inibizione dei nervi sia olfattorî che ottici, inibizione che può essere causata anche da particolari deficienze spaziali (Cotronei, 1921, 1922).

Nuove esperienze in corso, spero potranno apportare qualche contributo a una migliore conoscenza di tali importanti fenomeni.

(1) May R. M., lavoro citato.
(2) Harrison R. G., « Amer. Journ. of Anat. », vol. V, 1906, pp. 121–131.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. D'Ovidio comunica la dolorosa notizia della morte del Socio Corrispondente Luigi Brugnatelli dell'Università di Pavia, ed annuncia che la Presidenza provvederà perchè in una delle prossime sedute egli venga particolarmente commemorato.

Il Socio F. Severi commemora il compianto Socio G. Bagnera.

Il Presidente ringrazia il Socio Severi per la bella e commossa commemorazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Corrisp. L. Lombardi fa omaggio all'Accademia della 3ª edizione del suo volume « Principî scientifici di elettrotecnica ».

Il Segretario Accademico prof. N. Parravano presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando i due grossi volumi del « Trattato di Ostetricia e Ginecologia » del sen. prof. L. Mangiagalli; due opuscoli del Socio B. Longo « Sopra un cimelio della scoperta di G. B. Amici sulla fecondazione delle piante » e « Un gruppo di *Taxus baccata L.* nelle Alpi Apuane »; « Lezioni sulla malaria », opera postuma del compianto Socio G. B. Grassi, pubblicata a cura del Ministero dell'Economia, e l'opuscolo « Onoranze a Battista Grassi »; « Nel Primo Centenario della fondazione dell'Osservatorio Geofisico della R. Università di Modena (1827–1927) »; tre fascicoli degli « Annales de géologie et de paléontologie » pubblicati a Palermo dal march. A. De Gregorio.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio T. Levi-Civita legge, anche a nome del Socio G. Castelnuovo, la relazione con la quale si propone la stampa negli « Atti Accademici » della Memoria della sig. A. Cabras « Sulla teoria balistica della luce ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE

Il Socio N. Parravano presenta una Nota in collaborazione con G. Malquori, dal titolo: « La demolizione termica dell'allumina Bayer ». Gli autori dimostrano che questa si effettua in tre stadî, i quali corri-

spondono alla formazione di idrati dell'ossido di alluminio con due e con una molecola di acqua. La natura di idrati definiti di questi prodotti è messa in evidenza dagli spettri dei raggi X ottenuti con essi e confrontati con quelli degli idrati naturali ben cristallizzati (idrargillite e bauxite) e dallo spettro caratteristico posseduto dall'idrato con due molecole di acqua.

L'ossido di alluminio che si ottiene per disidratazione completa della Bayer è a densità elevata e perciò nettamente diverso dall'allumina Blanc.

Il Socio O. M. Corbino presenta la Nota di E. Fermi, dal titolo: « Sopra la deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo: Calcolo della correzione di Rydberg per i termini spettrali *s* » e ne illustra il contenuto. Ricorda come il potenziale dell'atomo determinato statisticamente in una Nota precedente permetta di determinare l'energia degli stati quantici. Per mezzo della meccanica ondulatoria è stata così determinata la correzione di Rydberg per i termini *s* di tutti gli elementi. Naturalmente trattandosi di una deduzione statistica sopra i termini ottici che hanno nel sistema periodico un andamento piuttosto irregolare, la teoria può rendere conto soltanto delle caratteristiche generali e non delle differenze irregolari da atomo ad atomo. Il confronto tra teoria ed esperienza è rappresentata nel grafico annesso.

Presenta la Nota di F. Rasetti, dal titolo: « Sopra il calcolo dei livelli M per mezzo del potenziale statistico dell'atomo » e anche di questa espone il contenuto. La legge di potenziale entro l'atomo trovata con metodi statistici da Fermi permette di calcolare le energie dei livelli dello spettro dei raggi X.In questo campo c'è da attendersi un buon accordo tra la teoria statistica e l'esperienza perchè i livelli Roentgen variano con regolarità da elemento a elemento nel sistema periodico.

Il calcolo è stato effettuato per i termini M_3 e ha dato effettivamente un'ottima concordanza con l'esperienza, come è mostrato nel grafico annesso in cui in ascisse sono riportati i numeri atomici e in ordinate le radici quadrate dei termini.

Hanno presentato altre Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci M. Corbino, E. Giacomini, G. Giorgi, T. Levi-Civita, A. Lo Surdo, F. Millosevich, R. Nasini, N. Parravano, E. Paternò, F. Raffaele, F. Severi.

L'Accademico Segretario prof. N. Parravano legge l'elenco delle Note pervenute alla Segreteria.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio S. Pincherle riferisce sull'organizzazione del Congresso Internazionale dei Matematici che avrà luogo a Bologna nella prossima estate.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 maggio 1928

CASTELOT J. — La Fabrication chimique de l'Or. Douai, 1928. 8°, pp. 1-126.

COLLA S. — Su alcuni funghi parassiti delle Termiti. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario». Volume XII, pp. 39-48). Portici, 1928. 8°.

DE GREGORIO A. — Annales de Géologie et de Paléontologie. Livraison 36, 37, 43. Palermo, 1922-25. 4°, pp. 1-28, 1-13, 1-18.

DE SAMPAIO FERRAZ J. — A Aviação e a Meteorologia no Brasil. Conferencia. Rio de Janeiro, 1928. 8°, pp. 1-19.

GERLING CH. L. — Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling. Herausgegeben von Schaefer C. Berlin, 1927. 8°, pp. I-XX, 1-820.

GRASSI G. B. — Lezioni sulla malaria (Estr. dai « Nuovi Annali dell'Agricoltura ». Anno VII, pp. 153-280). Roma, 1927. 8°.

GRASSI B. — Onoranze a Battista Grassi. Roma, 1925. 8°, pp. 1-108.

HORNOCH A. — Ueber Hauptpunkt und Bildweitenbestimmung aus Photogrammen. (Sonder-abdr. aus der « Zeitschrift für Instrumentenkunde ». Jahgang XLVII, pp. 579-583). Berlin, 1927. 8°.

IMRE P. A. — Szakaszos Üzemü Elektromótorok Teljesitöképessége. Budapest, 1927. 8°, pp. 1-37.

Index Plantarum Estonicarum. Tartu, 1928. 8°, pp. 1-58.

LINGENBERG E. — Das Weltbild der Naturwissenschaft im Lichte voraussetzungsloser Forschung. Bad Kissingen, 1928. 8°, pp. 1-44.

LOMBARDI L. — Principii scientifici di elettrotecnica. Ediz. III, Napoli, 1928. 8°, pp. I-IV, 1-530.

LONGO B. — Sopra un cimelio della scoperta di G. B. Amici sulla fecondazione delle piante. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXIX). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-16.

LONGO B. — Un gruppo di *Taxus baccata* L. nelle Alpi Apuane (Estr. dal « Nuovo Giornale Botanico Italiano ». Vol. XXXIV, pp. 1047-1048). Forlì, s. d. 8°.

A Magvak Höellenállásáról (Sonderabd. aus « Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften ». Band. XLIV, pp. 340-357). Budapest, 1927. 8°.

MANGIAGALLI L. — Trattato di ostetricia e ginecologia. Parte I, II. Milano, 1926. 8°, pp. I-IX, 1-1038, I-VI, 1039-2120.

MORTON WEHEELER W. — Auts collected by Professor F. Silvestri in Japan and Korea (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXI). Spoleto, 1928. 8°, pp. 1-125.

NECHVILE M. V. — Détermination des mouvements des étoiles de la 5ᵉ à la 16ᵉ grandeur photographiées sur les premiers clichés des Henry. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. CLXXXI). Paris, 1925. 4°, pp. 1-3.

NECHVILE M. V. — Sur la fréquence des mouvements apparents des étoiles. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». Tome CLXXXV). Paris, 1927. 4°, pp. 1-3.

NECHVILE M. V. — Sur les courants d'étoiles et sur l'apex solaire (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. CLXXXIV). Paris, 1927. 4°, pp. 1-3.

NECHVILE M. V. — Sur une nouvelle forme d'équations différentielles du probléme restreint elliptique. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des

Sciences » Tome CLXXXII). Paris, 1926. 4°, pp. 1-2.

NECHVILE M. V. — Sur une relation entre le mouvement propre moyen et la grandeur stellaire d'après les premiers clichés des Henry. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». Tome CLXXXI). Paris, 1925. 4°, pp. 1-3.

Nel primo centenario dalla fondazione dell'Osservatorio Geofisico della R. Università di Modena (1827-1927). Modena, 1927. 4°, pp. I-XLII, 1-188.

PAYNE C. H. and HOGG S. F. — On Methods and Applications in Spectrophotometry. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XIV. pp. 88-93). Washington, 1927. 8°.

STRAOBANT P. — Sur l'agrandissement apparent des constellations du soleil et de la lune à l'horizon. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». T. XIV, pp. 91-108). Bruxelles, 1928. 8°.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 maggio 1928 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Proprietà delle omografie assiali in un* S_n *euclideo con applicazione alle formule di Frenet.* Nota[1] del Corrisp. P. Burgatti.

1. Nello spazio euclideo S_n sia γ una *omografia assiale* costante, definita cioè dalla proprietà di essere uguale e di segno opposto alla sua coniugata: $K\gamma = -\gamma$. Ne consegue $\gamma\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0$ qualunque sia il vettore $\boldsymbol{u}$. In coordinate cartesiane è rappresentata dalla matrice $[a_{rs}]$ *emisimmetrica* ($a_{rs} + a_{sr} = 0$). Il suo invariante ennesimo, cioè $I_n\gamma$, è uguale al determinante di quella matrice, il quale è nullo se n è dispari. Invero si ha

$$I_n\gamma = I_n K\gamma = I_n(-\gamma) = (-1)^n I_n\gamma,$$

che porta a cotesta conclusione per n dispari[2]. Si vede anzi che tutti gli invarianti di ordine dispari son nulli.

Sia $\boldsymbol{u}_1$ un vettore unitario per il quale non risulti $\gamma\boldsymbol{u}_1 = 0$. Potremo porre

$$\gamma\boldsymbol{u}_1 = m_1\boldsymbol{u}_2 \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{u}_2^2 = 1.$$

Sarà, per la proprietà sopra detta, $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = 0$.

(1) Presentata nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) Si ricordino le formule $I_n\alpha = I_n K\alpha$, $I_n\alpha\beta = I_n\alpha \cdot I_n\beta$, $I_n m = m^n$ (m numero) e la proprietà che se $I_n\alpha = 0$ (α degenere) esiste almeno un vettore $\boldsymbol{u}$ soddisfacente alla condizione $\alpha\boldsymbol{u} = 0$.

Allora poniamo

$$\gamma u_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_3$$

supposto per ora $m_2 \neq 0$. Ne consegue $u_2 \times u_3 = 0$, e

$$m_2 u_1 \times u_3 = m_1 + \gamma u_2 \times u_1 = m_1 - u_2 \times \gamma u_1 = 0.$$

Possiamo seguitare in questo modo con le posizioni

$$\gamma u_3 = -m_2 u_2 + m_3 u_4$$

fino a

$$\gamma u_{n-1} = -m_{n-2} u_{n-2} + m_{n-1} u_n .$$

Tutti questi vettori unitari u_i sono perpendicolari fra loro. Se poi si pone

$$\gamma u_n = -m_{n-1} u_{n-1} + m_n u_{n+1} ,$$

si trae

$$u_i \times \gamma u_n = -u_n \times \gamma u_i = m_n u_i \times u_{n+1} .$$

La prima parte è nulla per $i = 1, 2, \cdots, n-2, n$; tale perciò dovrebbe essere il secondo membro. Da questo si conclude $m_n = 0$, oppure u_{n+1} non distinto da u_{n-1}. Ne risulta semplicemente

$$\gamma u_n = -m_{n-1} u_{n-1} .$$

Abbiamo supposto $m_2 \neq 0$, e così successivamente per le altre m.

Se fosse $m_2 = 0$, ossia

$$\gamma u_2 = -m_1 u_1 ,$$

ne verrebbe

$$\gamma^2 u_1 = -m_1^2 u_1 .$$

Per impedir questo basta non scegliere per u_1 una direzione unita di γ^2. Se risultasse $m_3 = 0$, si avrebbe

$$\gamma u_3 = -m_2 u_2$$

e quindi successivamente

$$\gamma (m_2 u_3) = -m_2^2 u_2 \quad , \quad \gamma (\gamma u_2 + m_1 u_1) = -m_2^2 u_2$$

$$\gamma^2 u_2 = -(m_1^2 + m_2^2) u_2$$

$$\gamma^3 u_1 = -(m_1^2 + m_2^2) \gamma u_1 .$$

Posto $v = \gamma^2 u_1 + (m_1^2 + m_2^2) u_1$, questa condizione si scrive $\gamma v = 0$, la quale non può essere soddisfatta se γ non è degenere ($I_n \gamma = 0$). E se è degenere, data la grande arbitrarietà nella scelta di u_1, si può sempre ammettere che non risulti $\gamma v = 0$. Così seguitando, si può ben concludere

per *l'esistenza di una ennupla ortogonale unitaria* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ *per la quale hanno luogo l'uguaglianze*

$$(I) \qquad \begin{cases} \gamma\boldsymbol{u}_1 = m_1 \boldsymbol{u}_2 \\ \gamma\boldsymbol{u}_i = -m_{i-1}\boldsymbol{u}_{i-1} + m_i \boldsymbol{u}_{i+1} \qquad (i = 2, \cdots, n-1) \\ \gamma\boldsymbol{u}_n = -m_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1} \end{cases}$$ (1).

2. Dalla proprietà $\gamma\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0$ segue che non ci può essere per γ una direzione unita $\gamma\boldsymbol{u} = m\boldsymbol{u}$ con $m \neq 0$; potrà risultare $\gamma\boldsymbol{u} = 0$ soltanto se γ è degenere. L'equazione in x che dà le direzioni unite

$$x^n - I_1\gamma \cdot x^{n-1} + I_2\gamma x^{n-2}, \cdots, \pm I_n\gamma = 0$$

contiene i soli termini di grado n , $n-2$, $n-4$ ecc. (abbiamo detto che gl'invarianti dispari son nulli); non può perciò avere che radici reali nulle, in numero dispari se n è dispari, in numero pari se n è pari. Ne risulta che una γ degenere potrà avere $1, 3, 5 \cdots$ oppure $2, 4, 6 \cdots$ *direzioni nulle* (2) distinte, ma non più di $n-2$. Invero, se ne avesse $n-1$ risulterebbe

$$\gamma\boldsymbol{u}_1 = 0 \quad , \quad \gamma\boldsymbol{u}_2 = 0, \cdots, \gamma\boldsymbol{u}_{n-1} = 0$$

e allora aggiunto un'altro vettore $\boldsymbol{u}_n$ indipendente, per ogni altro vettore

$$\boldsymbol{v} = \sum a_i \boldsymbol{u}_i$$

si avrebbe

$$\gamma\boldsymbol{v} = a_n \gamma\boldsymbol{u}_n$$

e quindi

$$\gamma\boldsymbol{u}_n \times \boldsymbol{v} = 0$$

per qualunque $\boldsymbol{v}$; il che richiede che sia anche $\gamma\boldsymbol{u}_n = 0$, o infine $\gamma = 0$.

In base a questo si possono classificare le omografie assiali in S_n: *la* γ *si dirà di* ***rango*** i *se esistono per essa* i *direzioni nulle*

$$\gamma\boldsymbol{u}_1 = \gamma\boldsymbol{u}_2, \cdots, \gamma\boldsymbol{u}_i = 0.$$

Il rango non può superare $n-2$. Se n è dispari, le γ sono tutte almeno di rango uno; se n è pari, le γ non degeneri sono di rango zero. Dovendo mettere in evidenza il rango si potrà scrivere γ_i.

3. Notevole proprietà hanno le omografie assiali di rango $n-2$. Sia γ una tale omografia, che ora, non essendovi luogo ad equivoco, scriveremo

(1) Un'altra proprietà delle γ si può vedere nella mia Nota, *Sull'equazioni a matrici*, «Boll. Un. Mat.», 1928.

(2) Per semplicità diciamo che $\boldsymbol{u}$ è *direzione nulla* per γ se $\gamma\boldsymbol{u} = 0$.

per semplicità senza indice. Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-2}$ le sue direzioni nulle, $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \cdots, \boldsymbol{i}_n$ una ennupla fondamentale. Posto

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_1^n u_{hr}\, \boldsymbol{i}_r \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-2)$$

si ha

$$(1) \qquad \gamma \boldsymbol{u}_h = \sum u_{hr}\, \gamma \boldsymbol{i}_r = 0 .$$

Consideriamo poi due altri vettori

$$\boldsymbol{u}_{n-1} = \sum u_{n-1,r}\, \boldsymbol{i}_r \quad , \quad \boldsymbol{u}_n = \sum u_{nr}\, \boldsymbol{i}_r ,$$

indipendenti dai precedenti, e facciamo il prodotto scalare

$$\gamma \boldsymbol{u}_{n-1} \times \boldsymbol{u}_n .$$

Si trova (ricordando che è $\gamma \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = -\gamma \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_r$)

$$(2) \qquad \gamma \boldsymbol{u}_{n-1} \times \boldsymbol{u}_n = \sum_{r,s} (u_{n-1,r}\, u_{ns} - u_{n-1,s}\, u_{nr})\, \gamma \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s ,$$

somma estesa a tutte le combinazioni (senza ripetizione) due a due degli indici $1, 2, \cdots, n$. Ora dalle (1) si deduce il sistema d'equazioni

$$\begin{aligned} &\sum u_{1r} (\gamma \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s) = 0 \\ &\sum u_{2r} (\gamma \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum u_{n-2,r} (\gamma \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s) = 0 . \end{aligned}$$

I termini dove $r = s$ son nulli (manca cioè la s^{esima} colonna), e si ricava

$$\gamma \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = \mathrm{K} D_{rs},$$

ove D_{rs} è il determinante che si ottiene dalla matrice delle u_{hr} cancellando le colonne s^{esima} e r^{esima}, e K un fattore di proporzionalità. Per la proprietà $\gamma \boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_s = -\gamma \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_r$ si vede che, presi i minori D_{rs} con segni opportuni secondo la nota regola delle classi pari e dispari, il fattore K dev'essere lo stesso per tutti i minori, del resto arbitrario. Dopo ciò, sostituendo coteste espressioni in (2) facilmente si scorge che, a parte il fattore K, il secondo membro diventa lo sviluppo secondo i minori delle linee n^{esima} e $n-1^{esima}$ del determinante D_n della matrice $[u_{rs}]$ formata con tutte le componenti dei vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ nell'ordine indicato. Segue dunque

$$\gamma \boldsymbol{u}_{n-1} \times \boldsymbol{u}_n = \mathrm{K} D_n .$$

Il K è indipendente da n, e precisamente uguale all'unità, come si vede nei casi particolari $n = 2$, $n = 3$; onde viene

$$\gamma \boldsymbol{u}_{n-1} \times \boldsymbol{u}_n = \mathrm{D}_n .$$

Il D_n s'interpreta come la misura del volume del parallelepipedo n–dimensionale avente gli spigoli uguali a $\boldsymbol{u}_1 , \boldsymbol{u}_2 , \cdots , \boldsymbol{u}_n$ [1].

Il vettore $\gamma \boldsymbol{u}_{n-1}$ coincide col vettore $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_1 , \boldsymbol{u}_2 , \cdots , \boldsymbol{u}_{n-1})$ introdotto nel calcolo vettoriale in un S_n euclideo da Pensa e Burali-Forti [2], il quale gode appunto della proprietà

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_1 , \boldsymbol{u}_2 , \cdots , \boldsymbol{u}_{n-1}) \times \boldsymbol{u}_n = \mathrm{D}_n .$$

Le omografie assiali di rango $n - 2$ generalizzano le importanti omografie $\boldsymbol{v} \wedge$ dello spazio ordinario.

4. Sono varie le applicazioni in cui capitano le omografie γ di qualunque rango; perciò la conoscenza *a priori* delle loro proprietà è utile. Qui mi limito a mettere in evidenza l'omografia assiale che s'incontra nello studio delle curve appartenenti a un S_n.

Abbiasi una curva (C) luogo dei punti $\mathrm{P}(t)$ che si ottengono facendo variare il parametro t entro certi limiti, ammettendo l'esistenza delle derivate di P fino a quell'ordine che occorrerà considerare. Siano $\mathrm{P}(t)$ e $\mathrm{P}(t + h) = \mathrm{P}_1$ due punti vicinissimi. Allora per definizione il vettore

$$\lim_{h=0} \frac{\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}}{h} = \frac{d\mathrm{P}}{dt} = \mathrm{P}' = \boldsymbol{n}_1$$

dà la direzione della tangente a (C) in P. Se $\boldsymbol{n}_1$ risulta unitario, il parametro t misura l'arco s contato a partire da un certo punto O della curva. Sia precisamente per il seguito $t = s$.

Consideriamo i vettori $\mathrm{P}'' , \mathrm{P}''' , \cdots , \mathrm{P}^{(n-1)}$ (le derivate). Essi non sono ortogonali, ma si possono esprimere linearmente mediante vettori ortogonali. Poniamo

$$\mathrm{P}'' = \mathrm{K}_1 \boldsymbol{n}_2 \qquad (\boldsymbol{n}_2^2 = 1)$$

e quindi

$$\frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds} = \mathrm{K}_1 \boldsymbol{n}_2 .$$

Ne consegue, essendo $\boldsymbol{n}_1$ unitario, $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = 0$. Poniamo ancora

$$\mathrm{P}''' = h_1 \boldsymbol{n}_1 + h_2 \boldsymbol{n}_2 + h_3 \boldsymbol{n}_3 \qquad (\boldsymbol{n}_3^2 = 1)$$

(1) Come si vede dai ragionamenti fatti, gli $\boldsymbol{u}_2$ possono anche essere non unitari.

(2) *Geometria assoluta dei vettori e delle omografie in un* S_n *euclideo*, «R. Istit. Lombardo», 1919.

cosa sempre possibile. Per la precedente viene

$$K_1 \frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds} = h_1 \boldsymbol{n}_1 + (h_2 - K_1') \boldsymbol{n}_2 + h_3 \boldsymbol{n}_3 .$$

Se prendiamo $h_2 = K_1'$, risulta $\boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n}_3 = 0$. Essendo poi

$$\boldsymbol{n}_1 \times \frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds} + \boldsymbol{n}_2 \times \frac{d\boldsymbol{n}_1}{ds} = 0,$$

se si sostituisce, si vede che prendendo $h_1 = - K_1^2$ risulta anche $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_3 = 0$. Con ciò viene

$$\frac{d\boldsymbol{n}_2}{ds} = - K_1 \boldsymbol{n}_1 + K_2 \boldsymbol{n}_3 .$$

Ponendo poi

$$P^{IV} = l_1 \boldsymbol{n}_1 + l_2 \boldsymbol{n}_2 + l_3 \boldsymbol{n}_3 + l_4 \boldsymbol{n}_4 ,$$

si può seguitare il ragionamento, onde ottenere che $\boldsymbol{n}_4$ sia ortogonale a tutti gli altri, e si trova

$$\frac{d\boldsymbol{n}_3}{ds} = - K_2 \boldsymbol{n}_2 + K_3 \boldsymbol{n}_4 .$$

Così proseguendo si giunge manifestamente alla formula

$$\frac{d\boldsymbol{n}_{n-1}}{ds} = - K_{n-2} \boldsymbol{n}_{n-2} + K_{n-1} \boldsymbol{n}_n .$$

Arrivati alla derivata $P^{(n+1)}$, non potendo questa venire espressa con più di n vettori $\boldsymbol{n}_1 , \boldsymbol{n}_2 , \cdots , \boldsymbol{n}_n$, dà luogo alla formula

$$\frac{d\boldsymbol{n}_n}{ds} = - K_{n-1} \boldsymbol{n}_{n-1} .$$

Concludendo, le n direzioni $\boldsymbol{n}_1 , \boldsymbol{n}_2 , \cdots , \boldsymbol{n}_n$ due a due ortogonali che formano la così detta *ennupla principale* della curva in P (la $\boldsymbol{n}_1$ è la direzione della tangente) soddisfano al sistema

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{n}_1}{ds} = K_1 \boldsymbol{n}_2 \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}_i}{ds} = - K_{i-1} \boldsymbol{n}_{i-1} + K_i \boldsymbol{n}_{i+1} \qquad (i = 2 , \cdots , n-1) \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}_n}{ds} = - K_{n-1} \boldsymbol{n}_{n-1} . \end{cases}$$

Sono le *formule di Frenet* (1). I coefficienti $K_1 , K \cdots$ misurano le così dette *prima, seconda* $\cdots$ *curvatura* di (C) in P.

(1) Molti autori hanno considerato queste formule, com'è ben noto; ma non sfuggirà al lettore la grande semplicità della deduzione qui fatta.

Paragonate alle (I) mostrano l'*esistenza d'una omografia assiale* γ, con l'uso della quale le (II) si compendiano in

$$\text{(II')} \qquad \frac{d\boldsymbol{n}_i}{ds} = \gamma \boldsymbol{n}_i . \qquad (i = 1,2 \cdots, n)$$

Riferita alle stesse direzioni principali, la γ viene rappresentata dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & K_1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & -K_2 & 0 & K_3 \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots -K_{n-1} & 0 \end{vmatrix} .$$

Può chiamarsi l'*omografia delle curvature.*

I calcoli fatti permettono poi di dedurre i vettori $\boldsymbol{n}_i$ in funzione delle derivate $P^{(i)}$:

$$\boldsymbol{n}_1 = P' \quad \boldsymbol{n}_2 = \rho_1 P'' \quad \boldsymbol{n}_3 = \rho_1 \rho_2 \left[P''' + \frac{1}{\rho_1^2} P' - \rho_1 \left(\frac{1}{\rho_1} \right)' P'' \right] \text{ecc.}$$

essendo $1 : \rho_i = K_i$. E di qui si possono dedurre, quando occorra, i coseni di queste direzioni con gli assi di una ennupla fissa.

Supponiamo che il punto P si muova sulla curva (C) con la legge $s = s(t)$ trasportando seco la ennupla principale in modo che resti sempre tale. Sia M un punto rigidamente collegato con l'ennupla

$$M = P + \sum x_r \boldsymbol{n}_r .$$

La sua velocità è data da

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dP}{ds} + \sum x_r \frac{d\boldsymbol{n}_r}{ds} \right) s' ;$$

ossia per le (II')

$$\frac{dM}{dt} = s' \left(\boldsymbol{n}_1 + \gamma (M - P) \right) .$$

L'analogia con lo spazio ordinario permette d'interpretare la γ come *l'omografia che definisce il moto occorrente per far passare l'ennupla principale di* P *in quella di* P + *d*P *(a parte la traslazione).*

Se lo spazio S_n ha un numero dispari di dimensioni, esiste un vettore $\boldsymbol{u}$ per il quale è $\gamma \boldsymbol{u} = 0$. Allora i punti M_1 della retta $M_1 - P = m\boldsymbol{u}$ hanno velocità nulla (tolta la traslazione), epperò essa può ben dirsi un asse di rotazione. La velocità di ogni altro punto è normale a quest'asse, perchè

$$\frac{dM}{dt} \times \boldsymbol{u} = -(M - P) \times \gamma \boldsymbol{u} = 0 .$$

Esso è definito, com'è facile vedere, da (posto $n = 2m + 1$)

$$\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{n}_1 + \frac{K_1}{K_2}\boldsymbol{n}_3 + \frac{K_1 K_3}{K_2 K_4}\boldsymbol{n}_5 + \cdots + \frac{K_1 K_3 \cdots K_{2m-1}}{K_2 K_4 \cdots K_{2m}}\boldsymbol{n}_{2m+1}$$

Manifestamente esistono coppie d'assi uscenti da P normali a $\boldsymbol{u}$ e perpendicolari tra loro, tali che le velocità dei punti di un asse sono parallele all'altro. Orbene, se n è pari non esiste l'asse di rotazione, ma seguitano ad esistere coteste coppie d'assi. Invero anche per n pari ho mostrato nella mia Nota citata al n. 1 l'esistenza di almeno $n/2$ coppie di vettori $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i$ soddisfacenti alle relazioni

$$\gamma \boldsymbol{u}_i = -b_i \boldsymbol{v}_i \qquad \gamma \boldsymbol{v}_i = b_i \boldsymbol{u}_i \qquad \boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_i = 0.$$

Posto $M - P = h\boldsymbol{u}_i$ risulta (a parte la traslazione)

$$\frac{dM}{dt} = -s' h \gamma \dot{\boldsymbol{u}}_i = -s' h b_i \boldsymbol{v}_i;$$

e così pure con la posizione

$$M - P = h\boldsymbol{v}_i$$

viene

$$\frac{dM}{dt} = s' h b_i \boldsymbol{u}_i.$$

Dunque le velocità dei punti dell'asse $(P, \boldsymbol{v}_i)$ sono parallele a $\boldsymbol{u}_i$, e quelle di $(P, \boldsymbol{u}_i)$ parallele a $\boldsymbol{v}_i$.

Astronomia. — *Osservazioni eseguite durante l'eclisse solare del 29 giugno 1927 nel R. Osservatorio di Capodimonte.* Nota [1] del Corrisp. A. Bemporad.

L'osservazione dei contatti ha dato i risultati seguenti (espressi in tempo medio civile TME):

Osservatori	Ingresso	O — C	Egresso	O — C
A. Bemporad	$5^h 8^m 24^s.9$	$+ 14^s.3$	$6^h 57^m 52^s.8$	$- 5^s.7$
Contarino	23 .0	+ 12 .4	48 .0	— 10 .5
Guerrieri	26 .9	+ 16 .3	53 .2	— 5 .3
Merola	24 .0	+ 13 .4	57 .5	— 1 .0
M. Viaro	28 .8	+ 18 .2	52 .5	— 6 .0

(1) Presentata nella seduta del 6 maggio 1928.

Le discordanze fra i varî osservatori non sono superiori alle normali e trovano la loro spiegazione in gran parte nella diversità degli strumenti e dei metodi usati. Gli scarti (Osservazione meno Calcolo) si riferiscono alle circostanze previste nel Calendario dell'Osservatorio in base agli elementi delle effemeridi. Calcoli ulteriori eseguiti dal dott. Merola dimostrano che questi risultati, nel complesso sono in buono accordo con quelli ottenuti all'Osservatorio di Leida assai prossimo alla regione della totalità.

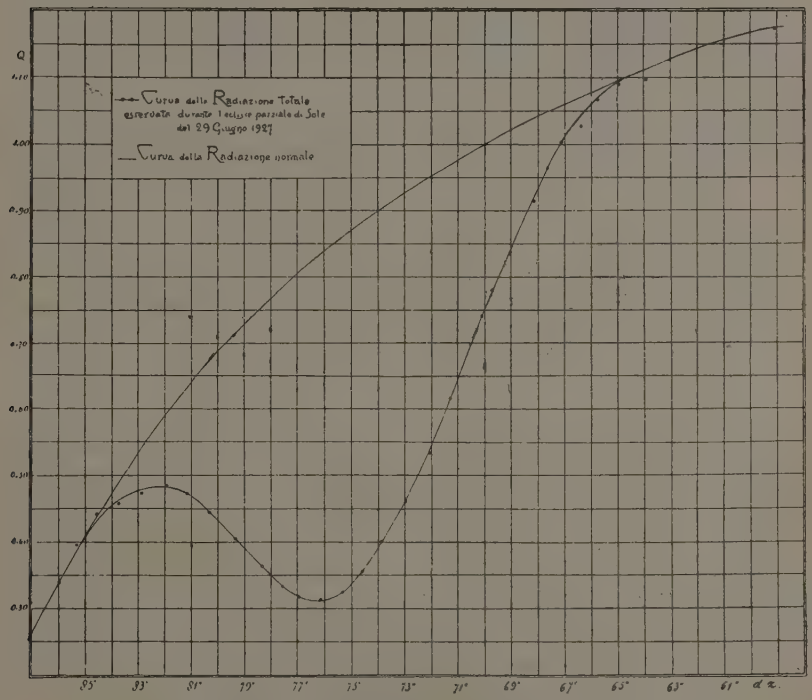


Fig. 1.
Curva dei valori ottenuti dal dott. Aurino col pireliometro di Ångström.

Di maggiore interesse, perchè singolarmente favorite dal tempo splendido, sono riuscite le osservazioni pireliometriche eseguite dal dott. S. Aurino con un pireliometro di Ångström e dal dott. Merola insieme al dott. Fresa con un pireliometro di Abbot. Malgrado la grande diversità dei due strumenti, il primo a compensazione elettrica, il secondo fondato sul principio di Pouillet (termometro con bulbo costituito da una capsula d'argento colla faccia esterna annerita) le due serie di osservazioni, integrate da altre eseguite nei giorni precedenti e seguenti, hanno dato risultati veramente notevoli per la regolarità delle curve e per l'accordo dei risultati.

La fig. 1 riproduce i valori (in calorie) della radiazione osservata dal dott. S. Aurino, non che i valori della radiazione normale (quale sarebbe stata senza l'eclisse) dedotti dalle osservazioni fatte in giorni precedenti e seguenti.

La fig. 2 riproduce l'andamento dei valori della radiazione liberata dall'assorbimento atmosferico e per confronto è tracciata con tratto continuo la curva teorica desunta dal dott. Merola per via di calcolo da tabelle da me disposte molti anni or sono [1].

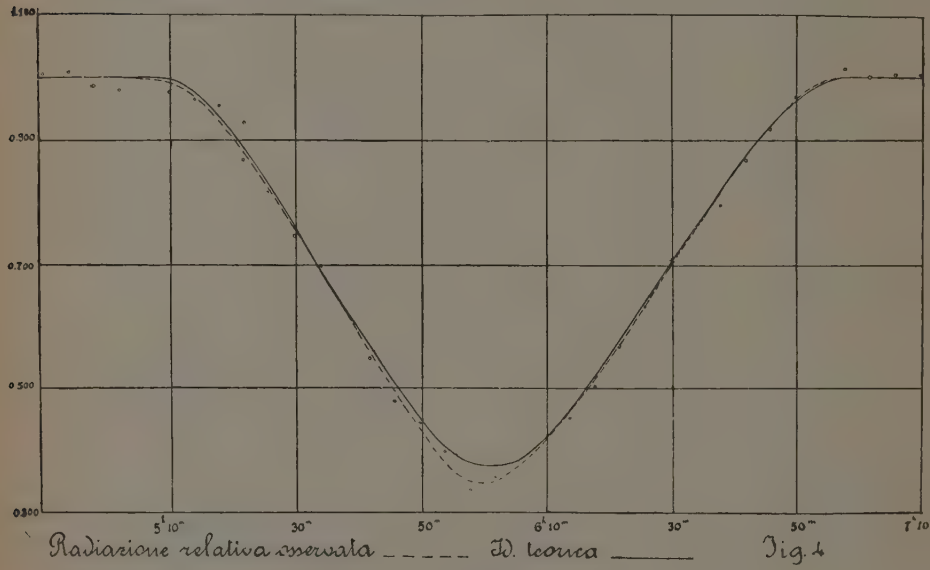


Fig. 2.
Intensità di radiazione liberata dall'assorbimento atmosferico, secondo misure e calcoli del dott. Merola.

L'accordo è in generale molto soddisfacente, salvo intorno alla fase massima, dove la curva *osservata* scende sensibilmente sotto la curva *teorica*. Anche questo è in buon accordo colla constatazione fatta da me e da altri, che lo stesso fenomeno dell'eclisse è causa diretta di una diminuzione di diatermanità dell'atmosfera.

La discussione particolareggiata delle osservazioni in discorso formerà oggetto di due note nei Contributi dell'Osservatorio. Qui ci limitiamo a trascrivere le conclusioni principali:

(1) *Sul modo di variare della radiazione solare durante le fasi di un'eclisse.* « Atti dell'Accad. Gioenia di Scienze naturali in Catania », serie IV, vol. XIX, 1907.

a) le osservazioni eseguite con due pireliometri di tipo diverso confermano la legge di decrescimento del potere radiante del disco solare dal centro alla periferia formulata dallo scrivente in base alle osservazioni di Secchi, Vogel, Langley e Frost, non confermano la legge ricavata dal professor Julius che accennerebbe ad una diminuzione assai più rapida;

b) le osservazioni recenti di Schwarzschild, Villiger e di Abbot sono pure in buon accordo colle precitate;

c) è confermata l'ipotesi emessa dallo scrivente di un aumento del potere assorbente dell'atmosfera intorno alla fase massima;

d) la bontà di questi risultati fa comprendere il grande interesse che presenterebbero ricerche sistematiche sulla radiazione solare fatte nell'isola di Capri – cioè in un'atmosfera di trasparenza eccezionale – in conformità al voto espresso dallo scrivente nel Congresso internazionale di Roma del 1922.

Meccanica. — *A proposito di due recenti Note di M. Pascal.* Nota del Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Su di un fenomeno fotoelettrico constatabile con gli audion.* Nota [1] del Socio Q. Majorana.

Il fenomeno fotoelettrico che ora descriverò, è stato da me constatato sperimentando con un amplificatore a bassa frequenza a trasformatori fornito di tre lampade termoioniche od audion.

Per quanto taluna delle contingenze necessarie per l'osservazione dei fatti di cui ora dirò, possa apparire a prima vista troppo particolare o strana, ritengo opportuno richiamare l'attenzione dei fisici sul fenomeno in parola.

Lo schema dell'amplificatore, del tipo consueto, è indicato in fig. 1. I tre audion impiegati sono della casa Philips, e preferibilmente del tipo A 409, cioè triodi *miniwatt*, aventi filamento toriato e parete di vetro con « *getter* », ossia metallizzata all'interno nella parte superiore. Come è noto in tali audion ed in altri consimili, resta visibile dall'esterno l'attacco dei tre elettrodi (filamento, griglia e placca), ma non gli elettrodi stessi, che rimangono quasi completamente nascosti allo sguardo, dalla detta metallizzazione. Il coefficiente di amplificazione di tali audion è 9. Dirò subito che per la ripetizione delle esperienze che ora descriverò, non è necessario servirsi

(1) Presentata nella seduta del 6 maggio 1928.

esclusivamente di tali lampade od audion; altri tipi in commercio della stessa casa o di altre case possono essere impiegati, ma ve ne sono di quelli che non si prestano affatto o quasi allo scopo, mentre il tipo indicato appare forse il migliore.

La griglia dell'audion I è lasciata libera, cioè senza connessioni esterne. Così il suo potenziale rimane determinato dalle particolari condizioni di funzionamento dell'audion stesso, in relazione con l'isolamento elettrico (mai perfetto) della griglia, dal filamento e dalla placca. In causa di ciò l'amplificatore è particolarmente sensibile alle minime cause che possono perturbare tale potenziale, ed occorre regolare bene l'accensione dei filamenti delle tre lampade perchè, pur conservando una buona sensibilità, non si ascolti alla cuffia telefonica C alcuna perturbazione o suono, dovuto all'innescarsi di oscillazioni elettriche proprie del sistema.

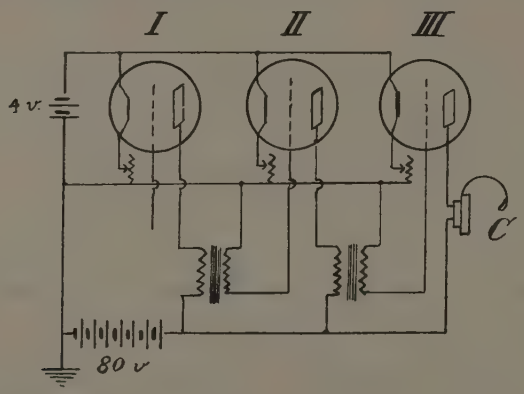


Fig. 1.

Sperimentando con tale amplificatore, mi sono accorto che quando la luce di una lampada elettrica periodicamente interrotta da un disco a fori rotante, è opportunamente concentrata sopra agli audion, si ascolta al telefono un suono esattamente corrispondente alla frequenza di interruzione della luce stessa. Principalmente è efficiente per la constatazione dell'effetto, che la luce cada sul primo audion.

Con una lampada a incandescenza di circa 800 candele, si arriva facilmente ad ottenere una intensità luminosa periodicamente interrotta, di una ventina di lumen, ed una illuminazione di qualche centinaio di migliaia di lux, concentrata nel fuoco (di circa 1 cmq.) di una lente. Questa luce è fatta cadere sull'audion I; muovendo la lente si può illuminare una piccola zona della superficie vitrea dell'audion.

Si osserva anzitutto che l'ascoltazione del suono dipende dal fatto che la luce penetra effettivamente nell'interno dell'audion; se essa colpisce la

parte metallizzata o come si dice il « *getter* » di magnesio (che è completamente opaco), il suono cessa del tutto. Con la intensità luminosa anzidetta, e quando si ha a che fare con audion molto sensibili e ben regolati nella loro accensione, il suono al telefono è tanto intenso da provocare una vera molestia all'udito. Esso è perciò udibile anche fuori dal telefono, e può benissimo essere ascoltato in altoparlante. In tali condizioni basta dunque che la luce penetri nell'audion, colpendo una località qualsiasi del congegno, perchè il suono sia udito. Ma non tutte tali località sono ugualmente attive. Nella fig. 2 è segnata la parte inferiore di un audion Philips A 409; la parte superiore, mancante nel disegno, è opaca per la presenza del « getter » di magnesio. Si scorgono nella figura i fili adduttori di corrente dei quattro

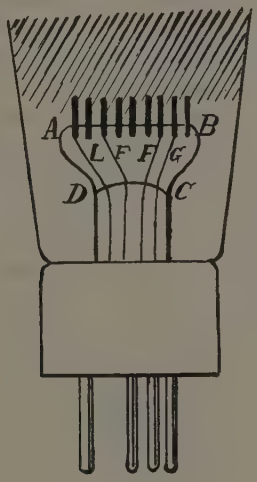


Fig. 2.

elettrodi della lampada: uno L per la lamina, due F per il filamento, uno G per la griglia; e si vedono inoltre altri cinque fili di sostegno meccanico delle stesse parti. In complesso vi sono dunque 9 di tali fili, costituiti da nichel o ferro al nichel, aventi tutti funzioni meccaniche, e di essi i detti quattro, anche funzione elettrica. Questi ultimi sono però costituiti da filo di ferro al nichel speciale, detto filo « *dumet* », di diametro più sottile nella parte centrale annegata nel tratto di vetro al piombo stampato, A B C D. Al disotto di C D emergono i quattro reofori che fanno capo in basso, attraverso lo zoccolo, alle quattro spine di fissaggio. Ha particolare importanza rendersi conto della costituzione del filo « *dumet* ». Esso, come è noto, ha sostituito da qualche tempo il platino nella fabbricazione delle lampade elettriche e degli stessi audion. Cosiste in un filo di ferro al nichel di circa 0.2 mm. di diametro ricoperto, per trattamento con solfato di rame, da

rame metallico; il rame viene poi leggermente ossidato e trattato con una soluzione di borace. Con ciò il conduttore viene ad essere rivestito da uno strato sottile di un borato di rame, presentandosi con un aspetto rosso cupo. Quando il filo è imprigionato a caldo nel vetro, questo assorbe il borato di rame, realizzandosi una tenuta perfetta, migliore di quella che si aveva col platino. I tratti L F F G della lampada, presentano dunque la colorazione rossa caratteristica dell'ossido ramoso Cu_2O o cuprite.

Ho descritto minutamente tale parte della lampada per poter ora dire che l'effetto massimo, ossia l'ascoltazione del suono più intenso, si ha quando la luce batte sull'attacco in vetro A B C D. Inoltre il suono è straordinariamente intenso quando la luce, traversando l'involucro esterno della lampada e poi lo spessore del detto attacco, va ad illuminare il filamento rosso G che, come si è detto, fa capo alla griglia. Da un attento esame del percorso della luce che arriva sull'audion, che si riflette nel suo interno, o ancora, si rifrange dentro l'attacco A B C D (rimanendovi imprigionata per qualche tratto in seguito a riflessioni multiple totali), ho potuto convincermi che in grandissima parte l'effetto è dovuto all'azione della luce sul filo rosso G.

Al fine di indagare le più intime modalità del fenomeno, collego in seguito le quattro singole spine dello zoccolo della lampada I con le spine analoghe di una quarta lampada non appartenente al sistema di amplificazione. Illuminando col fascio di raggi periodicamente interrotto questa lampada quando il suo filamento è spento, si constata che anche così si fa luogo alla produzione del suono, quantunque in misura notevolmente più debole. Ed anche ora il suono ha la massima intensità quando la luce colpisce il filamento rosso facente capo alla griglia. Se la lampada sussidiaria è accesa, essa viene naturalmente a lavorare in parallelo colla lampada I del sistema semplificatore. Ed allora è indifferente illuminare l'una e l'altra di queste due lampade per ottenere il suono con la stessa intensità di prima.

Successivamente ho rotto l'involucro della lampada sussidiaria facendovi così rientrare l'aria. L'effetto persiste come quando la lampada è integra ed il suo filamento spento. Anzi, basta servirsi dell'attacco di un audion fuori uso, che è stato ridotto semplicemente alla parte A B C D della fig. 2; collegando insieme i quattro suoi fili rossi col filo rosso G della lampada I, l'effetto si appalesa illuminando uno qualsiasi dei fili del troncone di lampada adoprato.

Sembra dunque che l'effetto sia caratteristico della sostanza rossa che ricopre il filo d'attacco della griglia all'audion. Per assicurarmi di tale conclusione, derivo all'esterno dell'audion I, sulla griglia di esso, un tratto di filo « *dumet* » come viene adoprato dalle fabbriche di lampade ad incandescenza, e su tale filo faccio cadere la luce pulsante. L'effetto si manifesta, ma in modo assai debole. Per contro se adopro del filo « *dumet* » preventivamente circondato da vetro fuso (sia al piombo che di Turingia), si constata l'effetto in modo simile a quando si illuminava la tampada sussidiaria spenta.

Ma anche del filo di rame preventivamente ossidato all'aria, e connesso con la griglia esternamente all'audion I, dà una traccia di effetto. Altri fili metallici, puliti ed ossidati, non danno effetto sensibile. Inoltre, una lamina di platino viene ricoperta da minutissimi cristallini di cuprite, per lenta elettrolisi del solfato di rame non acido, come già ebbi occasione di indicare molti anni addietro (1). Tale lamina, collegata alla griglia di I e colpita dalla luce, dà l'effetto in misura discreta.

Gli audion che non sono stati costruiti mediante attacchi con filo ramato, di altre case che non la Philips, non danno effetto o, se mai, ne danno appena una traccia.

Rimane dunque accertato che l'effetto è dovuto ad una particolare proprietà fotoelettrica del rame ossidato, e più precisamente del rame che trovasi imprigionato nella massa vitrea, come avviene negli audion o nelle lampade elettriche.

Ma a parte il fatto che tale effetto fotoelettrico non è simile a quelli sinora studiati (in quanto che manca il gas ambiente nel quale gli elettroni possono sfuggire, o non si tratta di variazione di resistenza elettrica come avviene nella cellula al selenio, nella tallophide o simili), rimane da spiegarsi perchè l'effetto ottenuto illuminando ad audion sussidiario spento, è più debole che non illuminando direttamente l'audion I. Dopo accurate e lunghe prove, credo poter affermare che tale differenza, pur essendo assai cospicua, è dovuta alla seguente ragione. La griglia dell'audion I è molto più prossima al proprio filamento rosso di attacco G che non all'altro filamento rosso della lampada sussidiaria. Ora, per quanto sia accurato l'isolamento delle varie parti, si comprende facilmente che esso non essendo perfetto, questo fatto possa nuocere di più alla manifestazione dell'effetto, quando la sede di questo è nella lampada sussidiaria, che trovasi al di là della fuga inevitabile proveniente dall'accennato difetto.

L'effetto presenta differenti sensibilità per le varie lunghezze d'onda. Da ricerche fatte interponendo sul percorso del raggio luminoso pulsante dei vetri colorati, o meglio servendosi di un prisma, risulta che esso ha un massimo per le radiazioni gialle o verdi. Esso è ancora abbastanza sensibile per le radiaziazioni appena ultraviolette mentre per le ultrarosse lo è meno.

L'effetto è constatabile, come si è detto, illuminando il primo andion amplificatore avente la griglia libera. Se si sopprime tale audion I e si rende libera la griglia del II, l'effetto è ancora constatabile con ottima intensità, ma naturalmente in misura di molto affievolita, quando si illumina II. Così pure, sopprimendo anche l'audion II e liberando la griglia di III, basta questo solo audion, se illuminato, per ascoltare il suono, quantunque in modo debole. Ma se si illumina III quando I e II sono schermati e spenti, ma collegati come nello schema con III, il suono è inudibile. Ciò va interpretato

(1) Questi «Rendiconti», Volume IV, p. 371, 1895.

ammettendo che le connessioni metalliche esistenti sulla griglia di III, rendono questa insensibile all'effetto fotoelettrico. Inoltre se, ferme restando tutte le connessioni indicate nello schema, si schermano le lampade I e II in guisa che su esse non batta la luce, e se ne accendono i filamenti, insieme con quello della III, mentre questa è colpita dalla luce pulsante, si riode il suono al telefono abbastanza fortemente. Ciò dipende evidentemente da un effetto amplificatore retroattivo, cioè propagantesi dalla III in II e in I e ritornante al telefono.

Come ho già detto, col sistema amplificatore a tre valvole, è marcatissimo e violentemente sonoro l'effetto constatabile, quando si adoperi l'intensità luminosa di circa 20 lumen. Volendo assicurarmi della sensibilità ultima dell'effetto ho diminuito tale intensità, sostituendo alla lampada di circa 800 candele una piccola lampada di 50 candele ed ho osservato che ponendo tale lampada a circa tre metri dall'audion I, e senza l'uso di alcuna lente per concentrare la luce, interrotta come sempre dal disco girante a fori, il suono è nettamente udibile.

L'intensità della luce, quando il raggio non è interrotto dal disco girante, cadente sulla parte utile dell'audion I, è allora solo di circa 1/100 di lumen.

Concludendo, si rileva da un canto la notevole sensibilità dell'ossido di rame nelle descritte condizioni, alla luce, e le particolari modalità del fenomeno fotoelettrico accennato, sul quale mi riserbo di riferire ulteriormente.

In queste ricerche sono stato abilmente assistito dal dottor Giorgio Tedesco.

Fisica-Chimica. — *Elettronili simmetrici e molecole.* Nota del Corrisp. Vinassa de Regny P.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Figure cellulari nella riolite* [1]. Nota [2] del Socio straniero L. A. Herrera.

A diverse riprese sono state segnalate figure periodiche o cellulari nelle roccie. F. H. Hatch descrive figure di tessuti cellulari e nuclei nella felsite d'Arran [3], secondo Bonney. Nella riolite di Los Arquitos, Aguascaliente, Messico, ho trovato delle notevoli forme di amebe [4] H. L. Chhibber ha osservato nella riolite silicizzata delle striscie ritmiche d'ossido di ferro rosse e gialle, ed anelli di Liesegang [5], inoltre sono stati segnalati nei minerali molti casi di forme organiche.

Il sig. F. Montes mi ha regalato esemplari di una riolite del distretto di Contepec, Rancho de Ojo de Agua, presso i confini degli Stati Messicani di Guanayuato e Queretaro, presso Maravatio a quattro chilometri da Coroneo.

Questa riolite è particolarmente bella e mostra una grande abbondanza di figure cellulari visibili ad occhio nudo. Questa roccia è profondamente silicizzata, e si sa che si riscontrano sempre aspetti organici ove domina la silice [6].

Il prof. Aurelio del Rio, mineralologo del museo di storia naturale di Messico ne ha dato la seguente descrizione:

« Questo minerale è una riolite contenente quarzo, sanidina, tridimite, albite, andesite ecc., della composizione chimica:

SiO_2	74.23
Al_2O_3	14.65
Fe_2O_3	1.80
FeO	0.05
K_2O	3.66
Na_2O	3.83
H_2O	1.05
	99.27

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio degli Alti Studi Biologici di Messico D. F.

(2) Presentata all'Accademia nella seduta del 20 maggio 1928.

(3) F. H. Hatch. Ph. D., *The Petrology of the Igneous Rocks*. London 1914; A. L. Herrera, *Biologia y Plasmogenia*, 1924, Messico, p. 507.

(4) A. L. Herrera, *Formas de amibas en una roca de Aguascalientes*. « Boletin de la Dirección de Estudios Biológicos ». Messico 1917, tomo II, p. 62.

(5) « Geological Magazin » *64*, 7-10 (1927).

(6) Phusis, *Près du secret de la vie*. Paris 1927, p. 53; Mary, *Dictionnaire de biologie physiciste*. Paris 1921, pp. 261-263.

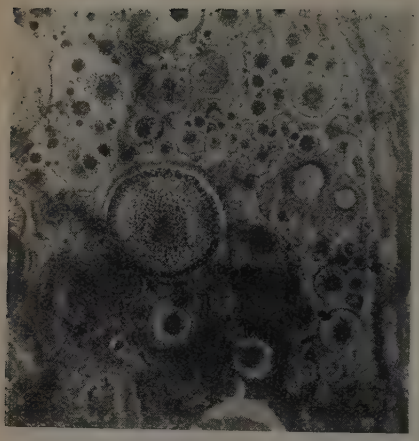


Fig. 1.

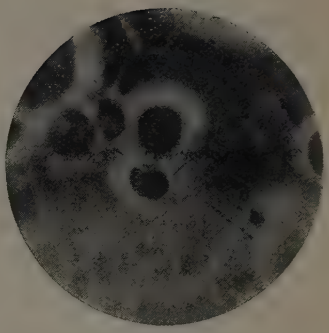


Fig. 2.

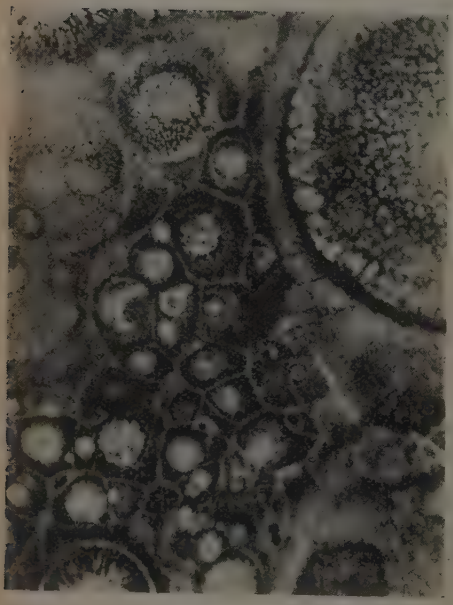


Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Le rioliti messicane sono abbondantissime, acide terziarie, formate da una massa amorfa di quarzo e feldspatto potassico e sodico in quantità presso che eguali e piccole quantità d'albite andesite, labradorite e quarzo libero, qualche volta fenocristalline. Queste roccie sono i rappresentanti moderni dei graniti.

Si classificano in litoidi o pietrose e vetrose o ossidianiche. Le prime mostrano quasi sempre la struttura sferolitica, come questo esemplare e che consiste in sfere o sferette più o meno grandi e perfette e che si distaccano dalla massa micro-felsitica fondamentale per una colorazione differente o per presentare una zona oscura; possono possedere una cristallizzazione radiale di sferoliti od una formazione concentrica di elementi cristallizzati. In ogni caso la formazione sferolitica è il risultato della cristallizzazione simultanea ed intima del quarzo e del feldspato per dare origine alla micropegmatite: cristallizzazione incipiente che da la croce colla luce polarizzata».

Descrizione delle figure cellulari. — Sulla superficie levigata della roccia si osserva un grande numero di macchie bluastre, gialle, bianche o rossastre, circolari semplici, o doppie o multiple disposte irregolarmente. La maggior parte hanno centri o nuclei di un colore più scuro o diverso da quello che corrisponde alla periferia. Dimensioni variabilissime, da 1 mm. a 15 mm. (fig. 1).

Attorno alle forme cellulari si osservano linee nere o bianche. I nuclei possono essere semplici, doppi o tripli, come se una divisione indiretta li avesse separati, ma in realtà questi aspetti di divisione son dovuti alla compressione di due o più sferoliti che si schiacciano nei punti di contatto. Attorno ad alcuni nuclei si osservano delle radiazioni bianche. I loro raggi passano spesso attraverso le linee di separazione come dei plasmodeni (fig. 2). Raddoppiando l'ingrandimento si distinguono meglio la struttura sferolitica ed i setti di separazione, dovuti probabilmente allo schiacciamento delle parti periferiche durante lo stato semiliquido, come avviene spesso nelle figure cellulari di diffusione di Runge e Leduc. Gli esagoni sono perfetti. I nuclei mostrano una struttura fibrosa, radiata, granulare o semi-cristallina (fig. 3). Si vedono spesso dei nucleoli come nelle cellule naturali. Quando un grande numero di sferoliti si trovano compressi, i nuclei si fondono in una linea nera assiale ed i setti di separazione sono appena visibili (fig. 4).

Le sezioni mostrano al microscopio polarizzatore le croci caratteristiche delle sferoliti. Col microscopio si osserva un gran numero di particolari interessanti (fig. 5). Setti doppi come nei parenchimi dei vegetali (*a*); anelli concentrici granulari assai fini (*b*); anelli raggiati (*c*); notevoli aspetti di tessuto cellulare senza nuclei, imitanti quelle delle tuniche esterne della cipolla (*d*); magnifici tessuti esagonali come quelli delle piante (*e*); sferoliti con 5 nuclei ed una specie di citoplasma granulare fino (*f*); sferoliti raggiati (*g*); gruppi di due o più cristalli imperfetti (*h-k*). Si direbbe che vi

sieno delle figure di cariocinesi finissime. In *l* lo sferolita ha un grande nucleo raggiato. In *k* si ha un'imitazione della moltiplicazione cellulare, ma i due nuclei provengono dalla saldatura dei due sferoliti e la soluzione successiva della sostanza interiore.

Considerazioni finali. — La cristallizzazione imperfetta in seno alla silice ha dato luogo, come sempre, a figure cellulari. La soluzione ed altre influenze hanno modificato le forme prodotte, che comprimendosi mutualmente hanno preso l'aspetto di esagoni di tessuti e di figure mitosiche imperfette.

La silice che si trova in natura dapertutto, dentro e fuori degli organismi, è un colloide antagonista che contribuisce sempre a modellare le forme viventi e pseudo-viventi, cancellando le antiche barriere tra i regni della natura.

La silice dovrà essere considerata come uno dei colloidi più diffusi ed importanti [1].

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo.* Nota di T. Boggio, presentata [2] dal Socio T. Levi-Civita.

In questa Nota, e in altre che faranno seguito, mi occupo di alcune proprietà ben note relative agli spazi curvi, che in massima parte sono anche esposte nell'opera: C. Burali-Forti et T. Boggio, *Espaces courbes et critique de la relativité* (S. T. E. N., Torino, a. 1924) - libro che nel seguito citerò coll'abbreviazione *Espaces* - ma ora ne darò dimostrazioni assai più semplici, operando esclusivamente sullo spazio curvo effettivo, mentre in *Espaces* esse erano stabilite ricorrendo anche allo spazio euclideo rappresentativo dello spazio curvo.

Dal confronto fra le dimostrazioni che esporrò e quelle ordinarie, risulta evidente la grande semplicità e superiorità dei metodi vettoriali adoperati in *Espaces*, rispetto a *tutti* gli altri metodi, perciò sarebbe vivamente desiderabile che questi metodi vettoriali entrassero presto nell'uso comune.

(1) Si direbbe che la silice governa le proprietà morfogenetiche dell'albumina, fatto d'una importanza enorme in biologia ed in plasmogenia. Coll'acido fluoridrico e scaglie sottili di ovoalbumina si possono preparare magnifiche imitazioni di radiolari e foraminiferi e, cosa notevole, queste figure, ancora senza movimento metabolismo ed evoluzione, resistono alla carbonizzazione, mostrando una composizione fondamentale silicica, fig. 6 *e* e *d*.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

In particolare, coi metodi vettoriali sono del tutto aboliti i sistemi covarianti, contravarianti, le derivate covarianti, contravarianti, ecc., che sono invece indispensabili cogli ordinari metodi [1]; operando direttamente sugli elementi dello spazio curvo, non si incontrano che i differenziali *superficiali* di punti, vettori, omografie, ecc., e le omografie che da essi traggono origine, differenziali che hanno un algoritmo identico a quello dei differenziali ordinari.

Ancora si può aggiungere che i mezzi analitici adoperati per stabilire i risultati che esporremo sono assolutamente minimi.

In questa prima Nota definisco i differenziali superficiali di vettori e omografie relative ad uno spazio curvo e ne stabilisco le proprietà fondamentali.

1. *Differenziale superficiale di un vettore.* - Consideriamo uno spazio curvo C_n, ad n dimensioni, descritto da un punto generico Q, e immerso in uno spazio euclideo E_N, avente un numero N di dimensioni sufficientemente grande.

Un tale spazio curvo si può definire in modo puramente geometrico come è fatto in *Espaces*, p. 117.

Nel punto generico Q di C_n supporremo che esista uno spazio euclideo ben determinato, S_n, ad n dimensioni (immerso in E_N) *tangente* a C_n; esso è formato da tutte le *tangenti* a C_n in Q.

Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore, funzione del punto Q, tale che la retta $Q\boldsymbol{u}$ sia tangente a C_n in Q, diremo brevemente che il vettore $\boldsymbol{u}$ è tangente a C_n in Q. Se ora diamo al punto Q uno spostamento infinitesimo qualunque dQ sullo spazio curvo, il vettore $\boldsymbol{u}$ subirà un incremento, pure infinitesimo, che indicheremo con $d^*\boldsymbol{u}$, ed è chiaro che il vettore $d^*\boldsymbol{u}$, in generale, non è più tangente a C_n in Q, ma è un vettore di E_N. In ciò che segue ci è indispensabile considerare la *componente tangenziale* di tale vettore, cioè la sua proiezione (ortogonale) sullo spazio S_n tangente a C_n in Q; tale componente la indicheremo con $d\boldsymbol{u}$, e risulta definita dalla condizione

$$(1) \qquad (d\boldsymbol{u} - d^*\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{a} = 0 ,$$

ove $\boldsymbol{a}$ è un vettore qualunque, tangente a C_n in Q.

Dalla (1) si deduce

$$(2) \qquad d\boldsymbol{u} = d^*\boldsymbol{u} + \mathbf{U} ,$$

ove $\mathbf{U}$ è un vettore *normale* allo spazio curvo C_n in Q.

Il vettore $d\boldsymbol{u}$ lo chiameremo *differenziale superficiale*, o *differenziale di* $\boldsymbol{u}$ *in* C_n, mentre $d^*\boldsymbol{u}$ è il differenziale ordinario di $\boldsymbol{u}$ in E_N.

(1) Inoltre coi metodi ordinari comparisce sempre la *metrica* dello spazio curvo, che dipende dal sistema di variabili scelte (come coi vettoriali dipende dalla rappresentazione dello spazio curvo sullo spazio rappresentativo), quindi questa metrica non è certo un ente intrinseco. Nella trattazione che qui esporrò, la metrica non comparisce affatto, il che è ben naturale perchè si opera esclusivamente su elementi veramente intrinseci.

Dalla (1) si deduce tosto:

$$(3) \qquad d\boldsymbol{u} = \sum d^*\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i ,$$

ove $\boldsymbol{a}_1 , \boldsymbol{a}_2 , \cdots , \boldsymbol{a}_n$ sono n vettori unitari, a due a due ortogonali (funzioni di Q) e tangenti a C_n in Q, e nella $\sum$ è inteso che i varia da 1 ad n.

Si ha evidentemente $\boldsymbol{u} = \sum \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i$, perciò la (3) mostra che il differenziale superficiale di $\boldsymbol{u}$ si può ottenere calcolando il differenziale ordinario in E_N del secondo membro, riguardandovi però i vettori $\boldsymbol{a}_i$ come *costanti*.

È chiaro che per ogni spostamento di Q su C_n si ha: $d\mathrm{Q} = d^*\mathrm{Q}$, perciò la (3) porge, considerando un altro spostamento $\delta\mathrm{Q}$ di Q in C_n:

$$d\delta\mathrm{Q} = \sum d^*\delta^*\mathrm{Q} \times \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i ;$$

ne segue l'importante relazione:

$$(3') \qquad d\delta\mathrm{Q} = \delta d\mathrm{Q} .$$

Se il punto Q si muove sopra una curva γ di C_n, e se il vettore $d\boldsymbol{u}$ risulta nullo corrispondentemente allo spostamento di Q su γ, si dice, secondo il Levi-Civita [1], che il vettore $\boldsymbol{u}$ si sposta *per parallelismo* lungo γ; in tal caso il vettore $d^*\boldsymbol{u}$ risulta normale allo spazio curvo in Q. Le proprietà fondamentali dello spostamento per parallelismo si possono dedurre facilmente dalla considerazione dei differenziali superficiali; ma non intendo qui di occuparmi di tali questioni.

2. *Proprietà dei differenziali superficiali.* – Il simbolo d di differenziale superficiale definito dalla (1), o dalla (3), gode di proprietà identiche a quelle che ha l'ordinario simbolo d^* di differenziale in E_N, da cui risulta l'opportunità della notazione d.

Vediamole brevemente; con $\boldsymbol{u} , \boldsymbol{v} , \cdots$ indicheremo, in ciò che segue, vettori tangenti a C_n in Q.

a) Si ha:

$$(4) \qquad d(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = d\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} .$$

È conseguenza ovvia della (2) o della (3).

b) Se m è una funzione numerica di Q, e si conviene che $dm = d^*m$, si ha:

$$(5) \qquad d(m\boldsymbol{u}) = dm \cdot \boldsymbol{u} + m d\boldsymbol{u} .$$

Infatti, dalla (2) si ha, se $\mathbf{U} , \mathbf{V}$ sono vettori normali a C_n in Q:

$$d(m\boldsymbol{u}) = d^*(m\boldsymbol{u}) + \mathbf{V} = dm \cdot \boldsymbol{u} + m d^*\boldsymbol{u} + \mathbf{V} = dm \cdot \boldsymbol{u} + m d\boldsymbol{u} + (\mathbf{V} - m\mathbf{U}),$$

da cui segue la (5).

(1) T. Levi-Civita, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 157 (A. Stock, Roma, a. 1925).

c) Si ha:

$$d(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{u}. \tag{6}$$

Infatti, applicando la (2) si ha:

$$d(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = d^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times d^*\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times d^*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times (d\boldsymbol{v} - \mathbf{V}) + \\ + \boldsymbol{v} \times (d\boldsymbol{u} - \mathbf{U}) = \boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{u}.$$

d) Nel caso di uno spazio curvo C_3 a 3 dimensioni, si ha:

$$d(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = d\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \wedge d\boldsymbol{v}, \tag{7}$$

$$d(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = d\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \wedge d\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{w}. \tag{7'}$$

Infatti, dalla (2) si deduce che si può porre, se $\mathbf{W}$ è un vettore normale a C_3 in Q:

$$d(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = d^*(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) + \mathbf{W} = d^*\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \wedge d^*\boldsymbol{v} + \mathbf{W} = d\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \\ + \boldsymbol{u} \wedge d\boldsymbol{v} + (\mathbf{W} - \mathbf{U} \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \wedge \mathbf{V}),$$

ma si vede subito che i vettori $\mathbf{U} \wedge \boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{u} \wedge \mathbf{V}$ sono normali a C_3 in Q, quindi si conclude la (7).

Analogamente si può stabilire la (7').

3. *Omografie dei vari ordini e loro differenziali superficiali.* - È ben noto che un'*omografia* (vettoriale) *ordinaria, o di 1° ordine*, è un operatore *lineare* che trasforma vettori in vettori; analogamente (*Espaces*, p. 24) si chiama *omografia di 2° ordine* un operatore lineare che trasforma una coppia di vettori in un vettore, *omografia di 3° ordine* un operatore lineare che trasforma una terna di vettori in un vettore, e così via. Queste omografie d'ordine maggiore di 1 si possono chiamare genericamente *iperomografie* [1].

Ne segue che se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$ sono vettori, e μ_r è un'omografia di ordine r, le espressioni

$$\mu_1\boldsymbol{a}, \quad \mu_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad \mu_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad \mu_4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}), \cdots$$

che si possono scrivere più semplicemente così:

$$\mu_1\boldsymbol{a}, \quad \mu_2\boldsymbol{ab}, \quad \mu_3\boldsymbol{abc}, \quad \mu_4\boldsymbol{abcd}, \cdots$$

rappresentano vettori ben determinati.

(1) Alcuni Autori, adottando recenti denominazioni tedesche, chiamano *tensori* di 1° ordine, di 2° ordine, ecc., le omografie di 1° ordine, di 2° ordine, ecc. È però preferibile la denominazione di omografia, perchè le omografie ordinarie danno effettivamente origine ad omografie, nel senso della Geometria proiettiva, e precisamente ad omografie che conservano il piano all'infinito, cioè ad *affinità*.

Il recente calcolo delle *matrici*, che ha assunto grandissima importanza in seguito alle ricerche di Eisenberg e di altri sulla meccanica atomica, altro non è che la teoria delle omografie vettoriali in spazi a più dimensioni, che appunto si trova sviluppata in *Espaces* coi metodi assoluti.

Supponiamo ora che μ_1 sia un'omografia ordinaria, funzione del punto Q di C_n e che trasformi vettori tangenti a C_n in Q in vettori pure tangenti a C_n in Q; chiameremo differenziale superficiale di μ_1, e l'indicheremo con $d\mu_1$, quell'omografia (ordinaria) tale che, qualunque sia il vettore $\boldsymbol{u}$ tangente a C_n in Q, si abbia:

$$(8) \qquad (d\mu_1)\boldsymbol{u} = d(\mu_1 \boldsymbol{u}) - \mu_1 d\boldsymbol{u} .$$

L'operatore $d\mu_1$ che risulta definito dalla (8) è effettivamente un'omografia, che trasforma vettori tangenti a C_n in Q in vettori pure tangenti a C_n in Q.

Infatti, se $\boldsymbol{v}$ è un altro vettore tangente a C_n in Q, ed m è una funzione numerica di Q, si ha dalla (8), tenendo conto delle (4), (5):

$$(d\mu_1)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = d(\mu_1 \boldsymbol{u} + \mu_1 \boldsymbol{v}) - \mu_1(d\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = [d(\mu_1 \boldsymbol{u}) - \mu_1 d\boldsymbol{u}] + \\ + [d(\mu_1 \boldsymbol{v}) - \mu_1 d\boldsymbol{v}] = (d\mu_1)\boldsymbol{u} + (d\mu_1)\boldsymbol{v} ,$$

$$(d\mu_1)(m\boldsymbol{u}) = d(m\mu_1 \boldsymbol{u}) - \mu_1 d(m\boldsymbol{u}) = dm \cdot \mu_1 \boldsymbol{u} + m d(\mu_1 \boldsymbol{u}) - \\ - (dm \cdot \mu_1 \boldsymbol{u} + m\mu_1 d\boldsymbol{u}) = m[d(\mu_1 \boldsymbol{u}) - \mu_1 d\boldsymbol{u}] = m(d\mu_1)\boldsymbol{u} ,$$

e queste relazioni dimostrano l'asserto.

Similmente se μ_2 è un'omografia di 2° ordine funzione di Q, che trasforma coppie di vettori tangenti a C_n in Q in vettori tangenti a C_n in Q, indicheremo con $d\mu_2$ l'omografia di 2° ordine che risulta definita ponendo:

$$(d\mu_2)\boldsymbol{u} = d(\mu_2 \boldsymbol{u}) - \mu_2 d\boldsymbol{u} ;$$

e ne segue poi

$$d(\mu_2 \boldsymbol{uv}) = d\mu_2 \cdot \boldsymbol{uv} + \mu_2 d\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \mu_2 \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{v} ;$$

analogamente si definisce il differenziale superficiale $d\mu_3$ di un'omografia μ_3 di 3° ordine, funzione di Q e che trasforma terne di vettori tangenti a C_n in Q in vettori tangenti a C_n in Q e risulta

$$(8') \qquad d(\mu_3 \boldsymbol{uvw}) = d\mu_3 \cdot \boldsymbol{uvw} + \mu_3 d\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{vw} + \mu_3 \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + \mu_3 \boldsymbol{uv}\, d\boldsymbol{w} ,$$

precisamente come per i differenziali nello spazio euclideo E_N.

4. *Operatori lineari per le omografie.* – Consideriamo ad es. un'omografia μ_3 di 3° ordine; colla notazione $k\mu_3$ si indica l'omografia di 3° ordine tale che, qualunque siano i vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ si abbia (*Espaces*, p. 31):

$$(9) \qquad k\mu_3 \boldsymbol{abc} = \mu_3 \boldsymbol{acb} ;$$

l'operatore k applicato ad un'omografia di ordine qualunque (maggiore di 1) produce dunque lo scambio dei due ultimi vettori.

Analogamente, colla notazione $k^*\mu_3$ si indica l'omografia di 3° ordine tale che (*Espaces*, p. 31):

$$k^*\mu_3\, \boldsymbol{abc} = \mu_3\, \boldsymbol{bac}\,; \tag{10}$$

l'operatore k^* produce dunque lo scambio dei primi due vettori.

È chiaro che qualunque sia r, purchè maggiore di 1, si ha:

$$kk\mu_r = \mu_r \quad , \quad k^*k^*\mu_r = \mu_r\,; \tag{10'}$$

per omografie di 2° ordine gli operatori k e k^* sono identici.

Mediante gli operatori k, k^* è possibile trasformare l'espressione $\mu_3\, \boldsymbol{abc}$ in un'altra in cui i vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ si susseguano in ordine qualunque.

Così si ha:

$$kk^*\mu_3\, \boldsymbol{abc} = k^*\mu_3\, \boldsymbol{acb} = \mu_3\, \boldsymbol{cab} \quad , \quad k^*k\mu_3\, \boldsymbol{abc} = \mu_3\, \boldsymbol{bca}\,, \tag{11}$$
$$k^*kk^*\mu_3\, \boldsymbol{abc} = \mu_3\, \boldsymbol{cba} = kk^*k\mu_3\, \boldsymbol{abc}\,.$$

Per una omografia ordinaria μ_1, colla notazione $K\mu_1$, che si legge *coniugata* di μ_1, si indica l'omografia (ordinaria) tale che (*Espaces*, p. 16):

$$\boldsymbol{a} \times K\mu_1\, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \mu_1\, \boldsymbol{a}\,. \tag{12}$$

È chiaro che $KK\mu_1 = \mu_1$.

La notazione $I_1\mu_1$, che si legge *invariante primo* di μ_1, rappresenta un numero reale ben determinato, e si può esprimere colla formula (*Espaces*, p. 14):

$$I_1\mu_1 = \sum \boldsymbol{a}_i \times \mu_1 \boldsymbol{a}_i\,, \tag{13}$$

ove $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ sono vettori unitari, a due a due ortogonali dello spazio ad n dimensioni in cui opera la μ_1.

Sia ora μ_4 un'omografia di 4° ordine; colla notazione $v\mu_4$, che si legge *vettore* di μ_4, si intende quella omografia di 2° ordine tale che, qualunque siano i vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ si abbia (*Espaces*, p. 37):

$$(v\mu_4)\boldsymbol{ab} \times \boldsymbol{c} = I_1(kK\mu_4\, \boldsymbol{abc})\,; \tag{14}$$

nel 2° membro figura l'invariante primo di un'omografia ordinaria, quindi possiamo applicare la (13) e poi eliminare k, K mediante le (9), (12) e si ottiene così:

$$(v\mu_4)\boldsymbol{ab} \times \boldsymbol{c} = \sum \boldsymbol{a}_i \times kK\mu_4\, \boldsymbol{abc}\boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{a}_i \times K\mu_4\, \boldsymbol{aba}_i\boldsymbol{c} =$$
$$= \boldsymbol{c} \times \sum \mu_4\, \boldsymbol{aba}_i\boldsymbol{a}_i\,,$$

e quindi si conclude (*Espaces*, p. 40):

$$(v\mu_4)\boldsymbol{ab} = \sum \mu_4\, \boldsymbol{aba}_i\boldsymbol{a}_i\,. \tag{15}$$

Per un'omografia di 3° ordine μ_3, o di 2° ordine μ_2, si avrebbe rispettivamente:

$$(16) \qquad (v\mu_3)\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = I_1(kK\mu_3 \boldsymbol{ac}) \quad , \quad (v\mu_3)\boldsymbol{a} = \sum \mu_3 \boldsymbol{a a_i a_i} \, ,$$

$$(17) \qquad v\mu_2 \times \boldsymbol{c} = I_1(kK\mu_2 \boldsymbol{c}) \quad , \quad v\mu_2 = \sum \mu_2 \boldsymbol{a_i a_i} \, .$$

L'operatore v trasforma quindi un'omografia di ordine maggiore di 1 in un'altra in cui l'ordine è minore di 2 unità, e può essere applicato anche più volte ad un'omografia di ordine qualsiasi. Esso corrisponde all'operazione che comunemente [1] si chiama « saturazione degli indici » o « contrazione dei tensori ».

In una prossima Nota mi occuperò del differenziale superficiale degli operatori ora introdotti e delle sue applicazioni.

Matematica. — *Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili.* Nota di M. Caccioppoli presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche.* Nota I di G. Colonnetti, presentata [2] dal Corrisp. C. Guidi.

Data un travatura reticolare iperstatica - cioè un sistema di punti materiali o *nodi* collegati fra loro da *aste* (prismatiche, perfettamente elastiche, ed articolate a cerniera ad entrambi gli estremi) in numero superiore a quello strettamente indispensabile per definire le posizioni relative dei singoli nodi - immaginiamo di poter alterare a volontà le lunghezze delle singole aste.

In generale la nuova lunghezza che noi veniamo così ad attribuire a ciascuna asta non sarà compatibile colle lunghezze delle altre aste, sicchè l'operazione si potrà effettivamente eseguire solo in quanto, per l'elasticità dei materiali, la travatura sia suscettibile di deformarsi.

Nasceranno così nelle singole aste certi sforzi di trazione o di compressione i quali, in assenza di forze esterne, dovranno naturalmente farsi equilibrio tra loro.

Per un'asta generica della travatura, denoteremo:

con E il modulo di elasticità normale del materiale,

(1) T. Levi-Civita, op. cit., p. 92.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

con l e con A rispettivamente la sua lunghezza e l'area della sua sezione retta.

con Δ la variazione (piccolissima) che ad l noi veniamo artificialmente ad imprimere,

con S lo sforzo che all'asta stessa compete nello stato di coazione elastica che si viene così a generare nella travatura (sforzo, che, uniformandoci alle convenzioni solite, considereremo come positivo se di trazione negativo se di compressione),

e per conseguenza con

$$\frac{Sl}{EA} + \Delta$$

la effettiva variazione totale di lunghezza dell'asta, vale a dire la variazione di distanza che nello stato finale di equilibrio verranno ad aver subito i due nodi da essa asta collegati per il combinato effetto delle variazioni Δ da noi artificialmente impresse, e delle conseguenti deformazioni elastiche $\frac{Sl}{EA}$.

Ciò posto è noto che, se la travatura contiene r aste sovrabbondanti, ciascuno degli sforzi S può sempre esprimersi, coll'aiuto delle sole leggi della statica dei corpi rigidi, come una funzione lineare di r parametri indipendenti (incognite iperstatiche)

$$x_1 , x_2 , x_3 , \cdots x_r$$

che possono anche essere semplicemente gli sforzi relativi a quelle r aste.

In precedenti miei scritti [1] ho enunciato e dimostrato un teorema generale, grazie al quale la determinazione dei valori delle r incognite iperstatiche si può in ogni caso far dipendere dalla risoluzione di un sistema di r equazioni lineari e non omogenee nelle incognite stesse.

Qui mi propongo di far vedere come, applicando opportunamente al caso concreto il procedimento classico che fa capo al principio di reciprocità, si possa procedere alla determinazione diretta di uno qualunque degli sforzi S indipendentemente dagli altri, giungendo anzi ad esprimere graficamente la legge stessa di dipendenza dello sforzo generico S dalle diverse variazioni Δ impresse alle diverse aste della travatura.

Alla coazione elastica data immaginiamone idealmente sovrapposta un'altra caratterizzata da un'unica variazione di lunghezza impressa precisamente all'asta di cui si vuol determinare lo sforzo: asta le cui caratteri-

(1) Cfr. G. Colonnetti, *Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LIV (adunanza del 1° dicembre 1918).

stiche geometriche e meccaniche contrassegneremo sempre, per intenderci, coll'indice k.

Con tale intento si pensi praticato nell'asta stessa un taglio che la divida in due parti (seguendo p. es. una sua sezione retta arbitraria) ed applicate alle due facce del taglio due forze eguali e contrarie, quali occorrono per conservare immutata la tensione S_k nell'asta, sicchè nulla venga ad alterarsi nel primitivo stato di coazione elastica del sistema.

Si imprima poi alle stesse facce uno spostamento relativo nella direzione dell'asse geometrico dell'asta, la cui grandezza (al solito piccolissima) denoteremo con Δ'_k convenendo di contrassegnare sistematicamente con un accento tutte le grandezze che da questa dipendono.

Poichè lo stato iniziale di coazione era per il sistema considerato uno stato di equilibrio, il principio dei lavori virtuali esige che sia nulla la variazione prima dell'energia potenziale per qualunque variazione di configurazione piccolissima e compatibile coi vincoli.

Ora nulla ci vieta di adottare come variazione virtuale di configurazione proprio quella che effettivamente si verifica nelle condizioni sopra esposte. Soltanto, poichè essa si effettua sul sistema tagliato, le due forze che si son supposte applicate alle due facce del taglio van riguardate come delle vere e proprie forze esterne, ed il lavoro da esse fatto va algebricamente sommato con quello fatto dalle tensioni interne.

L'equazione dei lavori virtuali assume pertanto la forma:

$$\text{(I)} \qquad S_k \Delta'_k + \sum S \frac{S' l}{EA} = 0$$

nella quale con S' si sono indicati gli sforzi generati nelle singole aste della travatura dalla coazione determinata dallo spostamento Δ'_k, e con $\frac{S' l}{EA}$ le conseguenti variazioni elastiche di lunghezza delle medesime aste.

La sommatoria s'intende naturalmente estesa a tutte indistintamente le aste che costituiscono la travatura.

Ora questa sommatoria è suscettibile di una interessante interpretazione.

Immaginiamo infatti per un momento che l'operazione sopra descritta (taglio dell'asta, e successivo spostamento relativo delle due facce del taglio) si sia effettuata sopra una travatura priva di coazioni, in cui cioè tutte le aste si trovino inizialmente allo stato naturale non deformato.

Ed immaginiamo che le due facce del taglio vengano, ad operazione compiuta, risaldate l'una all'altra (previa interposizione di uno strato sottilissimo di materia atto a mantenere immutato lo spostamento relativo creato tra esse) per modo che le forze si tornino liberamente a trasmettere inalterate dall'una all'altra parte dell'asta tagliata.

In assenza di ogni qualsiasi forza esterna, gli sforzi S′ che si sono così generati nelle varie aste del sistema devono farsi equilibrio fra loro: devono pertanto soddisfare all'equazione dei lavori virtuali

$$\sum S' \delta l = 0$$

per valori qualunque delle variazioni δl delle lunghezze delle singole aste, purchè al solito piccolissimi e compatibili.

In particolare quest'equazione dovrà dunque riuscir soddisfatta se per δl si prendono le variazioni effettive

$$\frac{Sl}{EA} + \Delta$$

le quali, per quel che abbiamo detto da principio, costituiscono un sistema sicuramente congruente.

Si ottiene allora la relazione

$$\sum S' \frac{Sl}{EA} + \sum S' \Delta = 0$$

dalla quale si ricava subito che

$$\sum S \frac{S' l}{EA} = \sum S' \frac{Sl}{EA} = - \sum S' \Delta .$$

Sostituendo nella (I), si trova

(II) $$S_k \Delta'_k = \sum S' \Delta$$

e quindi

$$S_k = \sum S' \frac{\Delta}{\Delta'_k} .$$

Lo sforzo determinato in un'asta qualunque della travatura da un sistema di variazioni impresse Δ si ottiene dunque immaginando impressa all'asta stessa una variazione di lunghezza arbitraria Δ'_k, e sommando insieme gli sforzi così generati nelle varie aste della travatura, moltiplicati rispettivamente per le corrispondenti variazioni impresse Δ riferite a Δ'_k come ad unità di misura.

Immaginiamo che lo stato di coazione dato sia stato esso pure determinato alterando la lunghezza di una sola asta, le cui caratteristiche contrassegneremo coll'indice h.

La (II) assume allora la forma

$$S_k \Delta'_k = S'_h \Delta_h .$$

Per $\Delta'_k = \Delta_h$ si ha, anche più semplicemente

(III) $$S_k = S'_h.$$

Lo sforzo determinato in un'asta qualunque della travatura da una data variazione di lunghezza impressa ad un'altra asta, è uguale allo sforzo che in questa seconda asta si genera imprimendo la stessa variazione di lunghezza alla prima (PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ).

Ne segue ancora che:

Il diagramma degli sforzi che nelle diverse aste di una travatura reticolare iperstatica si generano immaginando impressa ad una determinata asta una variazione di lunghezza Δ'_k ci dà anche gli sforzi che in quest'ultima asta si determinano imprimendo eguali variazioni di lunghezza a tutte le aste rimanenti.

In questo senso quel diagramma può considerarsi come il DIAGRAMMA D'INFLUENZA dello sforzo nell'asta considerata per le variazioni di lunghezza impresse alle altre aste, e può venire utilmente impiegato in tutte le ricerche aventi per iscopo la determinazione degli sforzi massimi che in una data asta si possono verificare in dipendenza delle variazioni di lunghezza che a tutte le altre aste possono venire impresse, sia meccanicamente all'atto del montaggio (o anche in seguito, se le aste sono dotate di tenditori), sia termicamente, vale a dire in causa del differente riscaldamento, o anche soltanto della differente dilatabilità delle diverse aste.

Meccanica. — *La piastra piana e la legge di Kutta-Joukowski.* Nota di C. FERRARI, presentata[1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota[2] pubblicata in questi « Rendiconti » ho studiato l'azione dinamica di una corrente piana irrotazionale, di densità ρ, di velocità assintotica c sopra una lamina piana λ in presenza di una circuitazione C e ho dimostrato che il valore limite del risultante delle pressioni sopra un circuito s racchiudente nel suo interno la piastra e costituito da due archi di parabola di parametro ε, aventi i fuochi negli orli A e B della piastra stessa, e da due segmenti rettilinei paralleli alla lamina e distanti da essa del parametro ε, quando si faccia rinserrare detto circuito attorno alla lamina, è $\rho c C$, ha cioè l'espressione voluta dal teorema di Kutta-Joukowski. Non pare però *a priori* evidente che la stessa espressione valga anche per l'azione della corrente sulla piastra: indico infatti con $\overline{Q}_a$ il vettore quantità di moto del fluido che in un dato istante t occupa il campo compreso fra il doppio

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) C. FERRARI, *La piastra piana ed il teorema di Kutta-Joukowski.* « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », fasc. n. 6, vol. VII, 1928, p. 487.

segmento λ sezione della lamina ed il circuito considerato s, con $\overline{R}_s$ il risultante delle pressioni su s, e con $\overline{X}$ l'azione che la corrente esercita su λ; per il teorema della quantità di moto si ha

$$\overline{X} + \frac{d\overline{Q}_a}{dt} = \overline{R}_s .$$

Quando si faccia tendere s a λ, $\overline{R}_s$ tende, come ho dimostrato nella Nota citata, ad una forza $\overline{R}$ normale alla direzione assintottica della velocità e di intensità $\rho c C$; ma affinchè si possa affermare che $\overline{X} = \overline{R}$ è necessario dimostrare che (1) $\lim_{s \to \lambda} \frac{d\overline{Q}_a}{dt} = 0$, come sarebbe evidentemente se la lamina λ fosse priva di singolarità.

Si può dimostrare in modo semplice la (1) osservando che è [1]

$$\frac{d\overline{Q}_a}{dt} = \int_{\Gamma} \frac{\partial(\rho\overline{v})}{\partial t} d\Gamma - \int_{s} \rho\overline{v} \times \overline{n} ds$$

dove Γ è il campo racchiuso da s e $\overline{n}$ la normale ad s volta all'interno.

Ora il primo integrale è certamente nullo essendo il moto permanente; indicando poi con s_1 la porzione di s costituita dai due archi di parabola e con s_2 quella formata dai segmenti rettilinei si ha

$$\int_{s} \rho\overline{v} \times \overline{n} ds = \int_{s_1} \rho\overline{v} \times \overline{n} ds_1 + \int_{s_2} \rho\overline{v} \times \overline{n} ds_2 = \int_{s_2} \rho\overline{v} \times \overline{n} ds_2 \ ;$$

ed infatti gli archi di parabola appartengono a linee di flusso, come ho dimostrato nella Nota citata, e quindi per tutti i punti di s_1 è $\overline{v} \times \overline{n} = 0$.

Si deduce pertanto

$$\lim_{s \to \lambda} \frac{d\overline{Q}_a}{dt} = \lim_{s \to \lambda} \int_{s_2} \rho\overline{v} \times \overline{n} ds_2 .$$

Ma quando $s \to \lambda$, s_2 tende al doppio segmento sezione della lamina ed essendo questa linea di flusso, la velocità normale ad s_2 sarà al limite nulla in tutti i punti e quindi

$$\lim_{s \to \lambda} \frac{d\overline{Q}_a}{dt} = \lim_{s \to \lambda} \int_{s_2} \rho\overline{v} \times \overline{n} ds_2 = 0$$

che permette senz'altro di affermare la validità della legge di Kutta-Joukowski anche per la lamina piana.

(1) Lelli, *Una forma più generale del principio di Archimede.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », vol. IV, 1925, pp. 63–64 e 204–206.

Meccanica. — *Sul profilo dei corpi ruotanti la cui deformazione non resta turbata quando si decompongono in tronchi mediante piani normali dell'asse.* Nota di E. Gugino, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle onde progressive di tipo permanente nelle vasche circolari.* Nota di Geppert Harald, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sur le problème fondamental d'Hydro-dynamique à deux dimensions.* Nota di N. Mouskhelichvili, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Sul teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di A. Signorini, presentata [1] dal Socio V. Volterra.

Nel piano (x, y) consideriamo un profilo rigido g investito da una corrente liquida irrotazionale di densità uniforme $= \mu$, la quale risulti: 1° da una corrente traslatoria la cui velocità asintotica abbia la grandezza V_∞ e l'orientamento dell'asse x; 2° da una corrente circolatoria la cui circolazione, computata positivamente nel verso $y \rightarrow x$, sia C.

Una Nota del Cisotti [2], già ampiamente discussa nel presente volume di questi « Rendiconti », ha fatto sorgere il dubbio - d'interesse puramente matematico - che la presenza in g di qualche punto angolare possa dar luogo ad una discontinuità di prima specie per la risultante $\mathbf{R}_g$ delle pressioni sopportate dal profilo: nel senso che calcolando $\mathbf{R}_g$ - con un opportuno passaggio al limite - sulle formole relative a g, si possa trovare un vettore diverso da $(0, \mu C V_\infty)$: cioè [stante l'indiscussa validità del teorema di Kutta-Joukowski per ogni profilo regolare e la sua indipendenza dalla forma del profilo] un vettore non coincidente col limite dell'analogo vettore per un profilo regolare che vari tendendo a g.

Per rimuovere tale dubbio - ed insieme quello che si potrebbe affacciare in riguardo al momento risultante M_g - possono bastare le semplici

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) V. questi « Rend. », vol. V, serie 6ª, 1° sem., pp. 16-21.

espressioni che al n. 3 verranno attribuite alla risultante ed al momento risultante delle pressioni relative alla generica linea di flusso della corrente circolatoria [invece che, come nelle formole del Blasius, ad una linea di flusso chiusa della corrente totale].

Volendo poi trattare la questione senza restrizioni quantitative circa le linee da fare intervenire nel passaggio al limite necessario pel calcolo di $\mathbf{R}_g$ ed M_g, basta servirsi del teorema che verrà enunciato al n. 4 e succintamente dimostrato al n. 5.

1. Nel piano complesso $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$ sia γ la circonferenza $\rho = 1$ e Γ tutta la regione esterna a γ.

Pensiamo effettuata la rappresentazione conforme (diretta) su Γ della regione del piano $z = x + iy$ esterna al profilo g, definita dalla condizione che per $\zeta = \infty$: 1° sia $z = \infty$; 2° si annulli l'argomento di $\frac{dz}{d\zeta}$.

Fatta coincidere l'origine G degli assi (x, y) col « centro del profilo » [1] la legge di corrispondenza risulterà del tipo

$$z = \frac{1}{k}\left\{\zeta + \sum_1^\infty{}_r \frac{a_r}{\zeta^r}\right\} \tag{1}$$

con $k = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_\infty$ reale e positivo: ed insieme si avrà

$$\frac{d\zeta}{dz} = k\left\{1 + \frac{a_1}{\zeta^2} + \cdots\right\}, \tag{2}$$

$$z\frac{d\zeta}{dz} = \zeta\left\{1 + \frac{2\,a_1}{\zeta^2} + \cdots\right\}. \tag{3}$$

Posto

$$f(\zeta) = -\frac{C}{2\pi i}\log\zeta + \frac{V_\infty}{k}\left\{\zeta + \frac{1}{\zeta}\right\}, \tag{4}$$

le componenti della velocità effettiva rimarranno definite dalla ben nota relazione [2]

$$w = v - iv = \frac{df}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}. \tag{5}$$

Simultaneamente, pel teorema di Bernoulli, la pressione sarà espressa da

$$p = -\frac{1}{2}\mu\,|w|^2 + \text{cost.} \tag{6}$$

(1) Per la definizione stessa di centro del profilo verrà ad annullarsi la costante additiva che dovrebbe figurare in (1) ove si lasciasse arbitraria la posizione di G rispetto a g.

(2) Cfr., ad es., CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte prima [Milano, 1921, cap. IV].

2. Indichiamo con λ una qualunque linea semplice chiusa del piano ζ che circondi γ [senza avere alcun punto in comune con γ], con l la linea corrispondente nel piano z, con X_l, Y_l le componenti della risultante e con M_l il momento risultante delle pressioni relative al bordo esterno di l.

Coi simboli consueti sarà

$$(7)\qquad \begin{cases} X_l = \int_l p \cos \widehat{nx}\, dl \quad , \quad Y_l = \int_l p \cos \widehat{ny}\, dl \\ M_l = \int_l p\,(x \cos \widehat{ny} - y \cos \widehat{nx})\, dl; \end{cases}$$

e quindi anche, per la (6) [1],

$$\begin{cases} Y_l + iX_l = -\frac{1}{2}\mu \int_l |w|^2\,(\cos \widehat{ny} + i \cos \widehat{nx})\, dl \\ M_l = -\frac{\mu}{2} \Re \int_l |w|^2\,(x + iy)(\cos \widehat{ny} + i \cos \widehat{nx})\, dl. \end{cases}$$

Successivamente, pur d'intendere i differenziali lungo l contati nel verso $x \to y$ [e quindi, i corrispondenti differenziali lungo λ contati nel verso $\xi \to \eta$] dalla (5) si trae [2]

$$|w|^2 (\cos \widehat{ny} + i \cos \widehat{nx})\, dl = w\,\bar{w}\,(dx - idy) = \frac{df}{d\zeta}\,\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{dz}\,\frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\,d\bar{z}.$$

Posto

$$V_\zeta^2 = \frac{df}{d\zeta}\,\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}},$$

in definitiva scriveremo le (7) nella forma

$$(8)\qquad \begin{cases} Y_l + iX_l = -\frac{1}{2}\mu \int_\lambda \frac{d\zeta}{dz}\, V_\zeta^2\, d\bar{\zeta} \\ M_l = -\frac{\mu}{2} \Re \int_\lambda z\,\frac{d\zeta}{dz}\, V_\zeta^2\, d\bar{\zeta}; \end{cases}$$

rilevando subito che – in conseguenza dell'identità $\zeta\bar{\zeta} = \rho^2$ – a V_ζ^2 si può attribuire l'espressione

$$(9)\qquad V_\zeta^2 = g_0(\zeta) + \frac{1}{\rho^2}\, g_2(\zeta) + \frac{1}{\rho^4}\, g_4(\zeta)$$

(1) $\Re$ significa « parte reale », $\Im m$ « parte immaginaria ».

(2) Il soprassegno denota il passaggio da una quantità complessa alla sua coniugata.

con

$$(10)\qquad \begin{cases} g_0(\zeta) = \dfrac{V_\infty^2}{k^2} - \dfrac{C}{2\pi i}\dfrac{V_\infty}{k}\dfrac{1}{\zeta} - \dfrac{V_\infty^2}{k^2}\dfrac{1}{\zeta^2} \\ g_2(\zeta) = \dfrac{C}{2\pi i}\dfrac{V_\infty}{k}\zeta + \dfrac{C^2}{4\pi^2} - \dfrac{C}{2\pi i}\dfrac{V_\infty}{k}\dfrac{1}{\zeta} \\ g_4(\zeta) = -\dfrac{V_\infty^2}{k^2}\zeta^2 + \dfrac{C}{2\pi i}\dfrac{V_\infty}{k}\zeta + \dfrac{V_\infty^2}{k^2}. \end{cases}$$

3. Nel piano ζ sia λ_ρ la generica circonferenza $\rho = \text{cost.} \geqq 1$: lungo di essa, poichè $\zeta\bar{\zeta} = \rho^2$, risulta

$$(11)\qquad d\bar{\zeta} = -\frac{\rho^2}{\zeta^2}d\zeta.$$

La corrente circolatoria ha come funzione di Stokes [cfr. ad es. (4)]

$$(12)\qquad \psi_c = \frac{C}{2\pi}\log\rho;$$

in modo che le sue linee di flusso non sono altro che le trasformate delle λ_ρ.

Riferendo le (8) ad una qualunque di tali linee di flusso (purchè distinta da g) e servendoci di (9) ed (11), scriveremo, con evidente significato dei simboli:

$$(13)\qquad \begin{cases} Y_{\psi_c} + iX_{\psi_c} = \dfrac{\mu}{2}\sum_0^2{}_s \dfrac{1}{\rho^{2(s-1)}}\displaystyle\int_{\lambda_\rho}\frac{d\zeta}{dz}g_{2s}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} \\ M_{\psi_c} = \dfrac{\mu}{2}\sum_0^2{}_s \dfrac{1}{\rho^{2(s-1)}}\,\Re\displaystyle\int_{\lambda} z\frac{d\zeta}{dz}g_{2s}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2}. \end{cases}$$

Con questo il calcolo di X_{ψ_c}, Y_{ψ_c}, M_{ψ_c} resta ricondotto nell'ambito del teorema dei residui. Precisamente da (2), (3) e (10) segue

$$\int_{\lambda_\rho}\frac{d\zeta}{dz}g_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} = 0 \quad , \quad \int_{\lambda_\rho}\frac{d\zeta}{dz}g_{2s}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} = CV_\infty\,(s = 1, 2),$$

$$\Re\int_{\lambda_\rho} z\frac{d\zeta}{dz}g_{2s}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} = 0 \quad (s = 0, 1) \quad , \quad \Re\int_{\lambda_\rho} z\frac{d\zeta}{dz}g_4(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} = 4\pi\frac{V_\infty^2}{k^2}\mathfrak{I}_m(a_1);$$

onde alle (13) si può dare la forma definitiva [cfr. (12)]

$$\begin{cases} X_{\psi_c} = 0 \qquad Y_{\psi_c} = \dfrac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{4\pi\psi_c}{C}}\right)\mu CV_\infty \\ M_{\psi_c} = e^{-\frac{4\pi\psi_c}{C}}\,2\pi\mu\,\dfrac{V_\infty^2}{k^2}\,\mathfrak{I}_m(a_1). \end{cases}$$

Facendo tendere ψ_c a zero, da queste formole si trae – conformemente ai teoremi di Kutta-Joukowski e di Grammel –

$$(14) \qquad X_g = 0 \;\; , \;\; Y_g = \mu C V_\infty \;\; , \;\; M_g = 2\pi\mu \frac{V_\infty^2}{k^2} \mathfrak{I}_m(a_1);$$

in particolare vien messa in evidenza l'indipendenza di M_g da C.

Facendo invece tendere $\frac{\psi_c}{C}$ a $+\infty$ (cioè, ρ a $+\infty$) al limite risulta $X = 0$, $Y = \frac{1}{2}\mu C V_\infty$, $M = 0$; ciò che è facile controllare con qualche considerazione diretta.

4. Ritorniamo alle (8) liberando λ dalla condizione quantitativa di essere una λ_ρ, ma stabilendo che – rappresentata con $\rho = \lambda(\theta)$ l'equazione di λ in coordinate polari – $\lambda(\theta)$ soddisfi sempre alla condizione di Dirichlet e, quando si voglia far tendere λ a γ, restino sottintese le seguenti restrizioni qualitative:

$$(15) \qquad N\lambda < N \;\; , \;\; \lim_{\lambda \to \gamma} \frac{\rho_{max} - I}{\rho_{min} - I} = 1 ,$$

ove $N\lambda$ rappresenta il numero delle oscillazioni di $\lambda(\theta)$ in $(0, 2\pi)$ ed il significato degli altri simboli è il più spontaneo.

Evidentemente V_ζ^2 non è funzione monogena della ζ, ma su γ [cfr. (9)] si identifica colla funzione monogena $\sum_0^2 s\, g_{2s}(\zeta)$.

Gli integrali che figurano a 2° membro delle (8) rientrano dunque ambedue nel tipo

$$I = \int_\lambda F(\zeta)(\Xi + iH)\, d\bar{\zeta},$$

ove la $F(\zeta)$ è regolare in ogni punto al finito interno a Γ, ma può presentare delle singolarità su γ: mentre Ξ, H rappresentano due funzioni (reali) regolari di ρ e θ, che su γ rispettivamente s'identificano colla parte reale e colla parte immaginaria di una funzione monogena regolare $g(\zeta)$.

Sotto condizioni poco restrittive per $F(\zeta), \Xi, H$, si può dimostrare [vedi numero seguente] che esiste $\lim_{\lambda \to \gamma} I$ e che lo si può calcolare mediante il teorema dei residui [come se per la $F(\zeta)$ fosse esclusa ogni singolarità su γ] in quanto risulta

$$(16) \qquad \lim_{\lambda \to \gamma} \int_\lambda F(\zeta)(\Xi + iH)\, d\bar{\zeta} = -\int_\lambda F(\zeta)\, g(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

Per la validità del teorema ora enunciato basta ad es. che: *a*) lo sviluppo di Laurent relativo a Γ - tanto per la $F(\zeta)$, quanto per la $F(\zeta)\,g(\zeta)$ - abbia i moduli dei suoi coefficienti tutti inferiori alla quantità finita A e contenga solo un numero finito di termini con potenze positive di ζ; *b*) almeno in una corona circolare aderente esternamente a γ la parte reale Ξ_* e la parte immaginaria H_* della differenza $\Xi + iH - g(\zeta)$ abbiano derivata 1ª e 2ª rispetto a ρ limitata, $< D$; *c*) posto $\mathfrak{D}(\theta) = \left(\frac{\partial \Xi_*}{\partial \rho}\right)_{\rho=1}$ ovvero $= \left(\frac{\partial H_*}{\partial \rho}\right)_{\rho=1}$, $\mathfrak{D}(\theta)$ presenti in $(0, 2\pi)$ solo un numero finito ν di oscillazioni.

Tutte le condizioni ora specificate debbono ritenersi soddisfatte nei casi che specialmente ci interessano, con $g(\zeta) = \sum_0^2 {}_s\, g_s(\zeta)$; onde resta garantita l'esistenza di $\lim_{l \to g} X_l$, $\lim_{l \to g} Y_l$, $\lim_{l \to g} M_l$ e la rispettiva coincidenza di tali limiti coi 2^i membri delle (14).

Insieme a (16) [ad es., sotto le condizioni per $F(\zeta)$, Ξ, H ora specificate] si ha pure

$$\lim_{\lambda \to \gamma} \int_\lambda F(\zeta)\,(\Xi + iH)\,d\zeta = \int_\lambda F(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta. \tag{17}$$

5. La dimostrazione delle (16) e (17) non offre alcuna difficoltà quando si sia stabilito che

$$\lim_{\lambda \to \gamma} \int_\lambda F(\zeta)\,\mathfrak{D}(\theta)\,\{\lambda(\theta) - 1\}\,d\theta = 0. \tag{18}$$

Nel far questo potremo assumere

$$F(\zeta) = \sum_1^\infty {}_r\, \frac{a_r}{\zeta^r},$$

perchè gli eventuali termini trascurati, essendo per ipotesi in numero finito [cfr. numero precedente *a*)] non sono certo in grado d'influire sul limite preso in esame.

Per le stesse ipotesi - in corrispondenza alla generica configurazione di λ - potremo anche pensare l'intervallo $(0, 2\pi)$ diviso in un certo numero $< N + \nu$ d'intervalli parziali (θ_1, θ_2), in ciascuno dei quali sia monotona tanto la $\mathfrak{D}(\theta)$ quanto la $\lambda(\theta)$, e quindi anche la funzione $\frac{1}{\lambda^r(\theta)}$ per ogni r da 1 ad ∞.

Posto

$$(19)\quad I_* = \int_{\lambda}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_r}{\zeta^r} \mathfrak{D}(\theta)\{\lambda(\theta) - 1\}\, d\theta = \sum_{1}^{\infty}{}_r\, a_r \int_{0}^{2\pi} \frac{\lambda(\theta) - 1}{\lambda^r(\theta)}\, e^{-ir\theta}\, \mathfrak{D}(\theta)\, d\theta,$$

serviamoci opportunamente dell'identità

$$(20)\quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda(\theta) - 1}{\lambda^r(\theta)}\, e^{-ir\theta}\, \mathfrak{D}(\theta)\, d\theta = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \frac{1}{\rho_{\min}^{r-1}} - \frac{1}{\lambda^{r-1}(\theta)} \right\} e^{-ir\theta}\, \mathfrak{D}(\theta)\, d\theta -$$

$$-\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \frac{1}{\lambda^r(\theta)} - \frac{1}{\rho_{\max}^r} \right\} e^{-ir\theta}\, \mathfrak{D}(\theta)\, d\theta + \left\{ \frac{1}{\rho_{\min}^{r-1}} - \frac{1}{\rho_{\max}^r} \right\} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-ir\theta}\, \mathfrak{D}(\theta)\, d\theta.$$

Tanto la parte reale quanto la parte immaginaria di ognuno dei tre integrali a 2° membro rientra nel tipo

$$i_* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_1(\theta)\, f_2(\theta) \cos\{r\theta + \text{cost.}\}\, d\theta$$

con $f_1(\theta)$ ed $f_2(\theta)$ continue e monotone in (θ_1, θ_2) ed $r > 0$. Indicando con F_1 ed F_2 rispettivamente un limite superiore di $f_1(\theta)$ ed $f_2(\theta)$, con una doppia applicazione del 2° teorema della media, si trova subito

$$|i_*| < 8\, \frac{F_1 F_2}{r}.$$

Tornando allora alla (20) ed osservando che

$$0 < \frac{1}{\rho_{\min}^{r-1}} - \frac{1}{\rho_{\max}^{r-1}} < \frac{1}{\rho_{\min}^{r-1}} - \frac{1}{\rho_{\max}^r}, \quad 0 < \frac{1}{\rho_{\min}^r} - \frac{1}{\rho_{\max}^r} < \frac{1}{\rho_{\min}^{r-1}} - \frac{1}{\rho_{\max}^r},$$

se ne trae

$$\left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda(\theta) - 1}{\lambda^r(\theta)}\, e^{-ir\theta}\, \mathfrak{D}(\theta)\, d\theta \right| < 40\, \frac{D}{r} \left(\frac{1}{\rho_{\min}^{r-1}} - \frac{1}{\rho_{\max}^r} \right).$$

Successivamente dalla (19) si ha

$$|I_*| < 40\, D\, (N + \nu)\, A \left\{ \rho_{\min} \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{1}{r} \frac{1}{\rho_{\min}^r} - \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{1}{r} \frac{1}{\rho_{\max}^r} \right\} =$$

$$= 40\, D\, (N + \nu)\, A \left\{ \log \frac{\rho_{\max} - 1}{\rho_{\min} - 1} - (\rho_{\min} - 1) \log (\rho_{\min} - 1) - \right.$$

$$\left. - \log \rho_{\max} + \rho_{\min} \log \rho_{\min} \right\},$$

ciò che porta all'asserto

$$\lim_{\lambda \to \gamma} I_* = 0,$$

non appena si applichi la 2ª delle (15).

Astronomia. — *Ricerca del passo della vite micrometrica del meridiano Ertel del R. Osservatorio del Campidoglio.* Nota di R. Masciotti, presentata dal Corrisp. G. Armellini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica-Matematica. — *Sulla preparazione di correnti elettriche stazionarie in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme.* Nota II di Elena Freda, presentata [1] dal Socio V. Volterra.

3. Il vettore j sia sotto l'azione del campo magnetico sia senza campo deve soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

(in ogni punto del conduttore non occupato da elettrodi)

$$j_n = 0 \tag{3}$$

(in ogni punto della superficie libera del conduttore)

e la condizione

$$\int_\tau j_n \, d\tau = \pm J \tag{4}$$

(per ogni superficie τ che separi dal conduttore una parte di esso contenente un solo elettrodo da cui entra o esce la corrente d'intensità J).

Poichè le condizioni (2), (3), (4) sono le stesse con e senza campo magnetico, se esse fossero sufficienti ad individuare j la distribuzione delle correnti per ogni conduttore potrebbe essere la stessa con e senza campo. Il vettore $\mathbf{F}$ si dedurrebbe da j quando la propagazione delle correnti avviene sotto l'azione del campo magnetico mediante le (1') del § 1 e in assenza del campo mediante le formule

$$X^0 = \frac{1}{\sigma_0} j_x \quad ; \quad Y^0 = \frac{1}{\sigma_0} j_y \quad ; \quad Z^0 = \frac{1}{\sigma_0} j_z \,. \tag{1''}$$

Ma le condizioni (2), (3), (4) non bastano a determinare la distribuzione delle correnti. Si ottengono ulteriori condizioni per j quando, am-

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

messa l'esistenza del potenziale elettrico, s'impone ai secondi membri delle (1'), o ai secondi membri delle (1''), di essere le derivate rispetto a $x\ y\ z$ di una stessa funzione, regolare in ogni porzione del conduttore non contenente elettrodi e costante lungo le parti del contorno eventualmente occupate da elettrodi di resistenza trascurabile.

Se s'impone al vettore j di rendere contemporaneamente i secondi membri delle (1') uguali alle derivate rispetto a x, y, z di una stessa funzione $-V$ e i secondi membri delle (1'') uguali alle derivate rispetto a x, y, z di una stessa funzione $-V^0$, si trova, tenendo conto anche della (2), che j deve soddisfare in ogni punto del conduttore le condizioni

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\partial j_z}{\partial y} = \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial j_x}{\partial z} = \frac{\partial j_y}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x} = 0 .$$

Dunque perchè il vettore j possa rimanere inalterato in ogni punto del conduttore, con e senza campo magnetico, si dovrà avere, detta θ una funzione delle variabili $x\ y$ soddisfacente l'equazione di Laplace e θ_1 la sua coniugata

$$(5) \quad j_x = -\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_1}{\partial y} \quad ; \quad j_y = -\frac{\partial \theta}{\partial y} = +\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad ; \quad j_z = -c \quad (c \text{ costante})$$

Il potenziale elettrico corrispondente alla distribuzione di correnti (5) è, senza campo,

$$(6) \qquad V^0 = \frac{1}{\sigma_0}[\theta(xy) + cz]$$

e, con il campo,

$$(7) \qquad V = \frac{1}{\varepsilon^2 + k^2}[\pm \varepsilon \theta_1(xy) + k\theta(xy)] + \frac{c}{\sigma} z .$$

Dalla teoria della propagazione delle correnti stazionarie in assenza del campo magnetico, si sa che se un punto P di un conduttore a tre dimensioni è occupato da un elettrodo puntiforme, detta r_P la distanza di un punto generico del conduttore da P, si ha:

$$(8) \qquad V^0 = \frac{J}{\alpha \pi \sigma_0} \frac{1}{r_P} + \psi$$

dove J è l'intensità della corrente che dall'elettrodo penetra nel conduttore; α è uguale a 2 o a 4, secondo che l'elettrodo è al contorno o interno e ψ è una funzione armonica dei punti del conduttore regolare in P. Si vede allora subito che, qualunque sia la funzione θ, la (6) non può dare la distribuzione dei potenziali in un conduttore a 3 dimensioni munito di qualche elettrodo puntiforme.

Dunque *in nessun conduttore a 3 dimensioni nel quale ci sia qualche elettrodo puntiforme la distribuzione delle correnti può rimanere inalterata con e senza campo magnetico.*

Se delle parti finite del contorno di un conduttore sono occupate da elettrodi di resistenza trascurabile, lungo esse il potenziale, tanto con il campo magnetico quanto senza campo, è costante. Perciò lungo queste parti del contorno il vettore $\boldsymbol{j}$ in assenza del campo magnetico ha la direzione della normale al contorno stesso, mentre con il campo ha la direzione della detta normale solo se questa è parallela ad $\mathbf{H}$ (v. § 1) cioè se le parti del contorno occupate dagli elettrodi sono perpendicolari ad $\mathbf{H}$. La distribuzione delle correnti può rimanere inalterata con e senza campo solo se $\boldsymbol{j}$, V° e V sono dati da formule del tipo (5), (6), (7); i secondi membri della (6) e della (7) possono essere costanti lungo delle parti di piani perpendicolari all'asse z solo se θ è identicamente uguale ad una costante, cioè se V° e V sono funzioni lineari della sola z; ma allora $\boldsymbol{j}$ è in ogni punto parallelo ad $\mathbf{H}$ e quindi si potrà avere $j_n = 0$ lungo la parte libera del contorno solo se questa è parallela alla direzione del campo magnetico.

Dunque *in un conduttore a 3 dimensioni nel quale la corrente entri ed esca da elettrodi estesi a parti finite del contorno e di resistenza trascurabile, la distribuzione delle correnti può rimanere inalterata con e senza campo magnetico solo se le parti del contorno occupate dagli elettrodi sono piane e perpendicolari ad* $\mathbf{H}$ *e se il contorno libero è costituito da una o più superficie parallele ad* $\mathbf{H}$. (Gli elettrodi potranno anche essere più di 2 purchè le differenze dei loro potenziali siano proporzionali alle corrispondenti loro mutue distanze). In un conduttore della specie detta perchè $\boldsymbol{j}$ resti inalterato in ogni punto con un campo magnetico d'intensità arbitraria e senza campo, basta che l'intensità della corrente totale sia sempre la stessa.

4. Dalle equazioni (1) e (2) (v. § 1) si deduce

$$k\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)+\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0\,. \tag{2'}$$

Se la distribuzione dei potenziali deve essere la stessa con e senza campo magnetico, si dovrà anche avere

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

e quindi dovrà essere

$$V = V^\circ = z\,\theta_1(xy)+\theta_2(xy) \tag{9}$$

dove θ_1, θ_2 sono funzioni armoniche delle variabili x y.

In un conduttore a 3 dimensioni che abbia qualche elettrodo puntiforme la (9) non può dare la distribuzione dei potenziali in assenza del campo magnetico (perchè non può coincidere con la (8) del paragrafo precedente); quindi *la distribuzione dei potenziali non può rimanere inalterata con e senza campo magnetico.*

Se delle parti finite della superficie del conduttore sono occupate da elettrodi di resistenza trascurabile, perchè la distribuzione dei potenziali possa rimanere inalterata con e senza campo, le dette parti del contorno dovranno essere tali che lungo esse una funzione del tipo (9) possa assumere valori costanti; non potranno perciò essere di natura arbitraria. Una funzione del tipo (9) (se non è identicamente uguale ad una costante) non può essere costante lungo una superficie chiusa; quindi *in nessun conduttore limitato da 2 o più superficie chiuse lungo ognuna delle quali sia saldato un elettrodo di resistenza trascurabile la distribuzione dei potenziali può rimanere inalterata con e senza campo magnetico.*

Da quanto si è detto segue che, perchè in un conduttore munito di elettrodi di resistenza trascurabile la distribuzione dei potenziali possa rimanere inalterata con e senza campo è necessario che alcune parti del contorno siano libere (non occupate da elettrodi). In ogni punto P del contorno libero detta n la normale (positiva) al contorno ed n_1 la direzione la cui orientazione rispetto ad n e a $\mathbf{H}$ è individuata dalle condizioni (B) e (C) del § 1, si deve avere senza campo $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ e con il campo $\frac{\partial V}{\partial n_1} = 0$. Nel punto P le due direzioni n, n_1 coincidono solo se n è parallela ad $\mathbf{H}$ (v. § 1). Perchè la distribuzione dei potenziali possa rimanere inalterata con e senza campo è necessario che in ogni punto P del contorno libero nel quale non è n parallela ad $\mathbf{H}$ il piano $n\,n_1$ sia tangente alla superficie equipotenziale passante per P. Ma il piano $n\,n_1$ relativo al punto P resta fisso al variare dell'intensità del campo solo se n è perpendicolare ad $\mathbf{H}$ (nel qual caso anche n_1 è perpendicolare ad $\mathbf{H}$); dunque, *perchè la distribuzione dei potenziali possa rimanere qualunque sia l'intensità del campo magnetico quella che è senza campo, è necessario che le parti libere del contorno siano o porzioni di piani perpendicolari ad* $\mathbf{H}$ *o superficie parallele ad* $\mathbf{H}$.

Non possono esserci nel conduttore (se la distribuzione dei potenziali deve rimanere inalterata con e senza campo) parti del contorno libero perpendicolari ad $\mathbf{H}$ *ed altre parallele ad* $\mathbf{H}$; infatti la presenza delle prime porta di conseguenza $\left(\text{dovendo essere lungo esse } f_n^0 = 0 \text{ e quindi } \frac{\partial V^0}{\partial \chi} = 0\right)$ $\Theta_1(xy) = 0$ nella (9), quindi $V = \Theta_2(xy)$, e cioè superficie equipotenziali parallele ad $\mathbf{H}$; mentre in ogni punto del contorno libero parallelo ad $\mathbf{H}$ si può avere $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n_1} = 0$ solo se in ogni punto di detto contorno $\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} = 0$, cioè se le funzioni armoniche $\Theta_1\,\Theta_2$ si riducono a due costanti e le superficie equipotenziali sono di conseguenza piani perpendicolari ad $\mathbf{H}$.

Dunque, *se si considerano tutti i conduttori a tre dimensioni nei quali gli elettrodi che permettono l'entrata e l'uscita della corrente sono puntiformi o estesi*

e di resistenza trascurabile, si può asserire che la distribuzione dei potenziali può rimanere inalterata con un campo magnetico d'intensità arbitraria e senza campo solo per i seguenti due tipi:

1° *Conduttori limitati da porzioni di 2 piani perpendicolari ad* **H** *costituenti il contorno libero e da 2 o più superficie tubulari parallele ad* **H** *lungo ciascuna delle quali sia saldato un elettrodo di resistenza trascurabile.*

2° *Conduttori limitati da superficie parallele ad* **H** *costituenti il contorno libero e da porzioni di piani perpendicolari ad* **H** *ciascuna occupata da un elettrodo di resistenza trascurabile.* (Tali elettrodi possono anche essere più di due; v. paragrafo precedente).

Per conduttori della specie detta perchè la distribuzione dei potenziali resti inalterata con e senza campo basta conservare inalterati i potenziali degli elettrodi.

5. Per una lamina piana perpendicolare alla direzione del campo magnetico uniforme **H** si hanno i noti teoremi:

Quando la corrente entra ed esce da elettrodi puntiformi la distribuzione delle correnti rimane inalterata con un campo magnetico d'intensità arbitraria e senza campo (conservando inalterata l'intensità della corrente totale) solo se gli elettrodi sono situati al contorno e se è nulla la somma delle intensità di corrente relative a quelli situati su di una stessa linea chiusa che faccia parte del contorno [1].

Quando il contorno è costituito da 2 o più linee chiuse lungo ciascuna delle quali sia saldato un elettrodo di resistenza trascurabile, la distribuzione dei potenziali rimane inalterata con un campo magnetico d'intensità arbitraria e senza campo, se si conservano inalterati i potenziali degli elettrodi [1].

Si può facilmente vedere (con considerazioni analoghe a quelle dei precedenti paragrafi) che in una qualsiasi lamina piana disposta trasversalmente nel campo (se ad ogni elettrodo s'impone la condizione di essere o puntiforme o esteso e di resistenza trascurabile) le linee di corrente possono restare inalterate per $\mathbf{H} = 0$ e per **H** diverso da zero solo nelle condizioni contemplate dal primo dei teoremi sopra enunciati; perchè le linee equipolenziali possano restare inalterate con e senza campo è necessario che non ci siano parti libere del contorno, ma la lamina può anche non essere del tipo considerato nel secondo dei teoremi sopra ricordati: per es. può essere circolare, col centro occupato da un elettrodo puntiforme e il contorno occupato da un elettrodo di resistenza trascurabile [2].

(1) Volterra, «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem. 1915.

(2) Sarebbe anche facile dedurre (da quanto si è detto nei precedenti paragrafi) che in una lamina piana non perpendicolare al campo (ciascun elettrodo della quale sia puntiforme o esteso e di resistenza trascurabile) al variare dell'intensità del campo non possono rimanere inalterate nè le linee di corrente nè le linee equipotenziali se il piano della lamina non è parallelo alla direzione del campo e se il contorno non è formato da tratti

I risultati dei due paragrafi precedenti mostrano che nelle verifiche sperimentali relative al secondo dei teoremi sopra enunciati non ha importanza lo spessore della lamina, ma che la stessa cosa non può dirsi per le verifiche relative al primo teorema.

Osserveremo infine che naturalmente per i conduttori (sia a 3 che a 2 dimensioni) costituiti da metalli per i quali al variare dell'intensità del campo possa sempre ritenersi praticamente $k = \sigma = \sigma_0$, $\varepsilon = 0$, la distribuzione delle correnti e quella dei potenziali sotto l'azione del campo magnetico resteranno praticamente quali sono senza campo, qualunque siano il contorno e gli elettrodi.

Fisica. — *Nuovi contributi allo spettro del bromo nella scarica senza elettrodi*[1]. Nota di N. Siracusano, presentata[2] dal Corrisp. M. La Rosa.

I. — In una Memoria pubblicata altrove due anni addietro[3] esposi i risultati ottenuti esaminando gli spettri del cloro e dell'arsenico con la scarica senza elettrodi; insieme con una tabella di righe attribuibili, con ogni probabilità agli spettri di scintilla del primo e del secondo ordine degli stessi elementi.

I perfezionamenti apportati ai dispositivi sperimentali e sopratutto la possibilità di disporre di un ottimo spettrografo in quarzo (Hilger E 3) con scala di lunghezze d'onda, più tardi acquistato dall'Istituto, in vista anche dell'interesse che ricerche del genere sembrano destare in questi ultimi tempi (cfr. quelle recentissime di Millikan e Bowen) m'indussero ad estendere al bromo le ricerche.

La scarica senza elettrodi si ottiene avvolgendo in un tubo di vetro una bobina di filo isolato, che si fa attraversare dalla corrente di scarica di due grosse bottiglie di Leyda. Nel tubo si opera un vuoto spinto (dell'ordine di 1/100 di Hg.). Guardando nella direzione dell'asse la scarica appare con la forma di un anello, da dove perciò il nome di « scarica anulare ».

Questo tipo di elettroluminiscenza offre notevoli pregi spettroscopici. Così: *a*) essendo il campo elettrico rispetto a qualsiasi diametro del tubo lo stesso, è possibile mantenere, rimanendo costanti pressione del gas ed eccitazione esterna, la costanza dello spettro; *b*) la mancanza di elettrodi

rettilinei paralleli al campo costituenti il contorno libero e da tratti rettilinei perpendicolari al campo, ciascuno occupato da un elettrodo di resistenza trascurabile. (Se queste condizioni sono soddisfatte restano inalterate tanto le linee di corrente che quelle equipotenziali).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Catania.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(3) « Atti dell'Acc. Gioenia di Catania »; « Mem. », III, 1926.

diminuisce quelle impurità derivanti da questi (gas occlusi nel metallo, prodotti di reazione fra l'elemento cimentato e il metallo, ecc.); *c*) in condizioni opportune di pressione ed eccitazione esterna, fornisce le diverse forme di spettro conosciute per il gas o vapore preso in esame; *d*) lo spettro di linee si presenta ricco in linee di scintilla.

II. — Nella scarica anulare servendosi di un diametro dell'anello luminoso, facendo cadere l'immagine reale sulla fenditura dello spettrografo, si hanno *righe lunghe* e *corte*. Poichè nel centro dell'anello luminoso il campo è più debole, le righe lunghe sono quelle di minore eccitazione. Con l'aumentare la distanza esplosiva del circuito oscillante si possono osservare le variazioni dell'intensità relativa che sono caratteristiche per la classificazione sperimentale delle righe d'arco e di scintilla. Mi son valso di questo metodo, introdotto nel 1923 da L. ed E. Bloch, per identificare lo spettro d'arco e gli spettri di scintilla del bromo. Le proprietà della scarica anulare su menzionate dimostrano come sia molto opportuna, specie per il bromo, questa ricerca, e ciò non solo per lo scopo particolare ora detto, ma per le nozioni generali intorno allo spettro di questo elemento le cui conoscenze sono del resto tutt'ora, in molti punti, quelle forniteci dalle classiche ricerche di Eder e Valenta. Recenti studi teorici hanno mostrato come non sia ancora sufficiente il materiale sperimentale sugli spettri degli alogeni (cfr. Wolf, « Zeit. f. Phys. », 1926).

Questa ricerca peraltro è stata tentata, per il bromo, dallo stesso Bloch (« C: R. », 1927), però i dispositivi sperimentali da essi impiegati mi hanno fatto supporre che non abbiano ottenuto buon rendimento. E infatti ricavano il gas necessario utilizzando la dissociazione del sale sodico provocata dalla scarica stessa. Con ciò non possono evidentemente impedire il sovrapporsi dello spettro del sodio il quale può modificare le intensità relative delle righe. Questo fatto io ho potuto notare in maniera chiara con due bande: una, la 3064 Å del vapor d'acqua; l'altra, la 2930-2890 Å del bromo (Fowler-Strutt) e per un gruppo di cinque righe intense intorno a 2400 Å.

III. — Il dispositivo sperimentale sarà descritto in un prossimo lavoro. Esso era totalmente in vetro. Il gas veniva ottenuto per riscaldamento, mediante un forno a resistenza del bromuro di rame (prèviamente reso totalmente anidro per lungo riscaldamento in stufa) ed introdotto in un'apposita appendice del tubo di scarica e con le opportune cautele per evitare che granellini di sale potessero penetrare in questo; si faceva uso di un essiccatore collocato molto vicino alla porzione di tubo eccitato dalla scarica e manteneva ben secco l'ambiente del gas. Esso si dimostrò molto utile giacchè in sua assenza fu accertata la comparsa delle bande del vapor d'acqua. Fu costruito un tubo identico a questo, senza essiccatore, per avere la scarica nell'aria, allo scopo di facilitare il riconoscimento di righe ad essa appartenenti e che eventualmente si fossero presentate nelle osservazioni sul bromo. Questa precauzione è necessaria per la proprietà I-*c*). Ottenni infatti molte

nuove righe dell'aria con questo secondo tubo sebbene solo qualcuna - e qualche volta nessuna - si presentò nelle prove fotografiche per il bromo.

Riferisco i principali risultati ottenuti:

1. Per piccollssime distanze esplosive (1 mm., oppure 2 mm.) con pose di 45 minuti od un'ora si ottiene uno spettro continuo solcato da debolissime righe le quali formano un gruppo caratteristico. La scarica è color bleu pallido poco intensa. Questo spettro continuo non mi risulta che sia stato finora ottenuto da altri; più esattamente, non fu possibile finora isolarlo da bande estranee al bromo o da quelle del bromo stesso. Angerer lamenta questa deficienza a proposito del calcolo dell'energia di elettro affinità (cfr. « Rivista N. C. », Campetti, 1927).

2. Il gruppo di righe testè accennato aumenta d'intensità ad eccitazione crescente e si perviene ad una fase nella quale (v. tavola) le righe sono più intense al centro ed appuntite all'estremità.

Ecco le lunghezze d'onda di queste righe:

Tabella I.

$\lambda_{(aria)}$ in U.A	$\lambda_{(aria)}$ in U.A
3131.4	2397.0
3091.9	85.3
84.0	44.8
50.0	40.3
40.0	27.7
10.0	01.6
2984.9	2467.9
82.0	62 9
10 7	2397.7
07.7	86.0
2874.1	75.1
72.6	74.2
08.2	53.0
07.5	2290.4
2794.6	41.0
88.7	—
61.0	—
52.7	—
33.5	—
19.1	—
2004.8	—
06 2	—

Si riscontrano le seguenti separazioni che si possono considerare costanti:

Tabella II.

λ_1	λ_2	$\Delta\nu_{2,1}$	λ_2	λ_1	$\Delta\nu_{2,1}$
3131.4	2807.5	3684	2808.2	2544.8	3685
3040.0	2733.5	3682	2788.7	2567.9	3676
2872.6	2597.0	3694	2501.6	2290.4	3686

Sono particolarmente caratteristici i doppietti:

$$2788.7 — 2567.9 \; ; \; 2501.6 — 2290.4 .$$

È notevole il fatto che questa separazione *costante* (media 3685 $cm.^{-1}$) fu notata in una ricerca recente (« Phys. Rew. », 1926) da Turner nell'ultravioletto di Schumann, che ritiene, per varie considerazioni teoriche, appartenente alla serie principale dello spettro d'arco del bromo. Pare perciò che le righe della tabella I (che sono nella massima parte nuove) corrispondano allo spettro d'arco. Occorre dire che esse non sono tutte, perchè ancora non ho proceduto a misure nella regione fra 3000 Å e 6000 Å.

Da questa identificazione mi fu possibile separare gli spettri di scintilla del bromo, e riconoscere con ogni probabilità, il Br II e Br III – queste righe sono gran parte nuove.

3. Sono fornite nel dominio 2253 Å 2175 Å nove altre righe. Esse sono:

Br II = λ : 2237.9 ; Br III = λ : 2247.2 ; 2236.8 ; 2230.4 ; 2219.9 ; 2216.3 ; 2185.4 ; 2182.3 ; 2175.4 .

Misure più precise e confronti più dettagliati saranno pubblicati altrove.

4. Dalle mie prove fotografiche (v. Tavola) risulta che con ogni probabilità la banda continua 2930 Å sia da attribuire ad un livello di energia più elevato del fondo continuo. È questa una circostanza che parla molto in favore dell'attribuzione all'arco del gruppo di righe della tabella I. Gli spettri *a*) *b*) *c*) *d*) *e*) *f*) della Tavola, sono presi ad eccitazione ordinatamente crescente. Non parrebbe accettabile (e ciò d'accordo con i risultati delle recentissime ricerche di Mierdel sullo spettro continuo dell'idrogeno nella scarica senza elettrodi [« Ann. d. Phys. », 1928, 5]) l'ipotesi avanzata dal Wolf che lo spettro continuo del bromo derivi dalla ricombinazione di atomi, a meno che la banda su citata non provenga da ioni più stabili della molecola, ipotesi ancora da discutere.

Fisica. — *Sopra la meccanica ondulatoria di un atomo alcalino nel campo elettrico.* Nota I di F. Rasetti, presentata[1] dal Socio O. M. Corbino.

Come è noto, lo spettro dell'idrogeno occupa una posizione singolare per quanto riguarda la decomposizione nel campo elettrico, scindendosi ciascuna riga in più componenti, di separazione proporzionale all'intensità F del campo. Ciò dipende dal fatto che l'atomo di idrogeno nei vari stati quantici possiede un momento elettrico.

Al contrario, un atomo non idrogenoide, per es., quello di un metallo alcalino, ha un momento elettrico nullo, e la variazione dell'energia nel campo esterno, in *prima* approssimazione, sarà pure nulla. Il campo produrrà però una polarizzazione, proporzionale all'intensità F; sul momento elettrico così formatosi nell'atomo, il campo darà in *seconda* approssimazione, un contributo all'energia, il quale risulterà pertanto proporzionale a F^2. Un termine spettrale subirà uno spostamento crescente col quadrato dell'intensità.

Questo effetto è stato trattato con i metodi della meccanica quantistica da Unsöld[2], supponendo che la differenza fra il termine in questione e il corrispondente termine dell'idrogeno sia piccola; i resultati si accordano assai bene con le misure dell'effetto Stark quadratico dei termini più idrogenoidi del litio e dell'elio.

Per mostrare come si possa trattare il problema nel caso di termini comunque diversi da quelli dell'idrogeno, ci serviremo di un ben noto modello di un atomo alcalino. Esso consiste nel rappresentare l'azione di tutto il nocciolo (Rumpf) che circonda il nucleo, sopra l'elettrone luminoso, mediante un potenziale della forma $\frac{e}{r} + \frac{h^2 A}{8\pi^2 m e}\frac{1}{r^2}$, dove la costante A va determinata empiricamente in modo da ottenere i valori effettivi dei termini.

La scelta di questa forma di potenziale presenta il vantaggio che il calcolo dei termini si può eseguire esattamente, e che se ne ottengono delle formule del tipo di Rydberg, che rappresentano molto bene le serie degli alcalini.

L'equazione di Schroedinger[3] per l'elettrone luminoso si scriverà, nel caso in questione:

$$(1) \qquad \Delta_2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E + \frac{e^2}{r} + \frac{h^2 A}{8\pi^2 m}\frac{1}{r^2}\right]\psi = 0 \ .$$

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) A. Unsöld, « Ann. d. Phys. », *82*, 1927, p. 355.

(3) E. Schroedinger, ibid., 1926, *79*, p. 361, 489, 734; *80*, p. 437; *81*, p. 109.

Se si pone:

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2k+1)^2 - 4A} \tag{2}$$

dove k corrisponde al quanto azimutale, un calcolo del tutto analogo a quello relativo all'atomo di idrogeno mostra che gli autovalori di questa equazione sono:

$$E_{kl} = -\frac{Rch}{(\lambda + l)^2} = \frac{-Rch}{\frac{(2k+1)^2+1}{4} - A + l^2 - l + \left(l + \frac{1}{2}\right)\sqrt{(2k+1)^2 - 4A}} \tag{3}$$

dove R rappresenta il numero di Rydberg (in numeri d'onda) e l corrisponde al quanto radiale della teoria quantistica classica.

Le autofunzioni della (1) sono

$$\psi_{klm}(r, \vartheta, \varphi) = y_{kl}(r)\, Y_{km}(\vartheta, \varphi) \tag{4}$$

essendo

$$y_{kl}(r) = r^{\lambda} e^{-\sqrt{-\frac{8\pi^2 m E_{kl}}{h^2}}\, r} w_{kl}\left(2r\sqrt{-\frac{8\pi^2 m E_{kl}}{h^2}}\right) = r^{\lambda} e^{-\frac{\omega_{kl}}{2} r} w_{kl}(r\omega_{kl})$$

dove le $Y_{km}(\vartheta, \varphi)$ sono le $2k + 1$ funzioni sferiche di Laplace di ordine k, e le w_{kl} dei polinomi, di cui i primi sono:

$$w_1(x) = 1 \quad ; \quad w_2(x) = 1 - \frac{x}{2(\lambda + 1)}$$

$$w_3(x) = 1 - \frac{x}{\lambda + 1} + \frac{x^2}{2(\lambda + 1)(2\lambda + 3)} .$$

L'energia dipende soltanto da k e da l, e non da m, e quindi ad uno stesso autovalore E_{kl} corrispondono $2k + 1$ autofunzioni indipendenti; si ha cioè un caso di degenerazione. L'indice m corrisponde al quanto magnetico della teoria quantistica classica, il quale fissa l'orientazione dell'orbita; ad esso daremo tutti i valori interi fra $-k$ e $+k$.

Ottenuti gli autovalori e le autofunzioni del problema imperturbato, resta da introdurre l'energia di perturbazione, che nel nostro caso sarà quella dovuta al campo esterno F, cioè:

$$FV = -eFx = -eFr\cos\vartheta .$$

Naturalmente, la perturbazione degli autovalori, in prima approssimazione, sarà nulla. Dovremo pertanto spingerci alla seconda approssimazione.

Trattiamo prima il problema in generale. Siano rispettivamente E_k e ψ_k gli autovalori e le autofunzioni normalizzate di una equazione differenziale

$$E(\psi) = E\psi$$

dove $E(\psi)$ rappresenta una espressione differenziale lineare del secondo ordine; sarà allora:

$$E(\psi_k) = E_k \psi_k \ . \tag{5}$$

Consideriamo ora l'equazione del problema perturbato:

$$E(\psi) + F V \psi = E^* \psi \tag{6}$$

dove F è una quantità piccola. Potremo scrivere gli autovalori e le autofunzioni della (6), limitandoci ai termini in F^2, nella forma:

$$\begin{aligned} E_k^* &= E_k + F \varepsilon_k + F^2 \eta_k \\ \psi_k^* &= \psi_k + F u_k + F^2 v_k \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Sostituendo questi valori nella (6), troviamo che i termini non contenenti F per la (5) si annullano; e uguagliando separatamente i coefficienti di F e di F^2 nei due membri, abbiamo:

$$V \psi_k + E(u_k) = E_k u_k + \varepsilon_k \psi_k \tag{8}$$

$$V u_k + E(v_k) = E_k v_k + \varepsilon_k u_k + \eta_k \psi_k \tag{9}$$

Sviluppiamo ora le u_k in serie di autofunzioni del problema imperturbato, ponendo:

$$u_k = \sum_i \alpha_{ki} \psi_i \ .$$

Sostituendo questo valore nella (8), moltiplicando per $\psi_k d\tau$ e integrando abbiamo:

$$\varepsilon_k = \int_\tau V \psi_k^2 \, d\tau$$

mentre moltiplicando per $\psi_s d\tau$ e integrando si trova (per $s \neq k$)

$$\alpha_{ks} = \frac{\int V \psi_k \psi_s \, d\tau}{E_k - E_s} \tag{10}$$

α_{kk} risulta indeterminato, e possiamo prenderlo uguale a zero, con che le autofunzioni di prima approssimazione risultano ancora normalizzate.

Per ottenere la seconda approssimazione, poniamo:

$$v_k = \sum_j \beta_{kj} \psi_j$$

con che la (9) si trasforma nell'equazione:

$$\eta_k \psi_k + \sum_j \beta_{kj} \psi_j (E_k - E_j) = \sum_s V \alpha_{ks} \psi_s - \sum_s \varepsilon_k \alpha_{ks} \psi_s \ . \tag{11}$$

Moltiplicando per $\psi_k d\tau$ e integrando si ha:

$$\eta_k = \sum_s \alpha_{ks} \int_\tau V \psi_k \psi_s \, d\tau = \sum_s \alpha_{ks} V_{sk}$$

avendo posto $V_{sk} = \int_\tau V \psi_s \psi_k \, d\tau$.

Ricordando le (10) si ha anche:

$$\eta_k = \sum_s \frac{V_{ks}^2}{E_k - E_s} \tag{12}$$

che dà la perturbazione degli autovalori in seconda approssimazione.

Moltiplicando per $\psi_\sigma d\tau$ e integrando, troviamo invece la perturbazione delle autofunzioni: infatti si ha:

$$\beta_{k\sigma} = \frac{\sum_s \alpha_{ks} V_{s\sigma} - \varepsilon_k \alpha_{k\sigma} - \eta_k \delta_{k\sigma}}{E_k - E_\sigma} \tag{13}$$

dove $\delta_{k\sigma}$ è uguale a uno o a zero secondo che k è uguale o diverso da σ.

Le (12) e (13) risolvono completamente il problema in seconda approssimazione; a meno che non si abbia degenerazione, come è appunto il caso per l'atomo. Vediamo come debbono modificarsi le considerazioni che precedono.

Perchè possano calcolarsi le α_{ks} dalle (10), occorre che, quando i due autovalori E_k e E_s sono uguali, si annulli V_{ks}; e ciò, come è noto, si ottiene prendendo, al posto delle autofunzioni primitive, delle loro opportune combinazioni lineari; nel caso particolare che a noi interessa, le V_{ks} in questione sono già nulle.

Procediamo al calcolo della seconda approssimazione. Supponiamo che un certo numero n di autofunzioni, di cui ψ_k e ψ_σ siano due qualsiansi, corrispondano a uno stesso autovalore $E_k = E_\sigma$. In tal caso, al posto delle ψ in questione, dovremo porre delle loro combinazioni lineari, scelte in modo che il numeratore della (13) si annulli. Nel nostro caso è $\varepsilon_k = 0$; dobbiamo allora fare in modo che sia:

$$\sum_s \alpha_{ks} V_{s\sigma} - \eta_k \delta_{k\sigma} = 0$$

e ciò si ottiene col solito procedimento: si forma la matrice di ordine n che ha per elemento generico

$$H_{k\sigma} = \sum_s \alpha_{ks} V_{s\sigma} = \sum_s \frac{V_{ks} V_{s\sigma}}{E_k - E_s}$$

e si riduce a forma diagonale, risolvendo l'equazione secolare:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} H_{11} - \eta & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} - \eta & \cdots & H_{2n} \\ \cdots & & & \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} - \eta \end{vmatrix} = 0$$

Essendo $H_{k\sigma} = H_{\sigma k}$, questa equazione avrà n radici reali che rappresentano le η relative all'autovalore $E_k = E_\sigma$.

Prima di passare all'applicazione di questa teoria al calcolo della perturbazione del campo esterno sopra un atomo di un metallo alcalino rappresentato dal nostro modello, occorre fare una importante osservazione di indole generale; e cioè, che la sostituzione degli elettroni del nocciolo con un potenziale è legittima soltanto sotto certe condizioni. Consideriamo un esempio particolare, e cioè l'atomo di sodio: in questo caso, l'elettrone di valenza si trova, nello stato fondamentale, in un'orbita 3 S, perchè tutte le orbite di quanto totale 1 e 2 sono occupate (nel senso del principio di Pauli) dagli altri 10 elettroni. I salti possibili per l'elettrone luminoso saranno tutti quelli dallo stato 3 S agli stati mP ($m \geqq 3$), ma non quelli verso lo stato 2 P, perchè i posti disponibili sono già occupati. Se noi invece rappresentiamo l'atomo mediante un modello costituito da un solo elettrone mobile in un campo centrale non kepleriano, tutti i passaggi non proibiti dalle regole di selezione potranno aver luogo, per esempio, nel modello dell'atomo di sodio, anche quello dallo stato 3 S allo stato 2 P.

Ora, risulta dalla (10) che l'effetto Stark quadratico, o, in altre parole, la polarizzazione dell'atomo nel campo elettrico di uno stato k è intimamente legato alle $V_{ks} = e\int_\tau x\psi_k\psi_s\,d\tau$, le quali, d'altra parte, rappresentano la componente x dell'ampiezza del momento elettrico dell'atomo variabile con frequenza $\nu_{ks} = \dfrac{E_k - E_s}{h}$; a questa ampiezza è legata l'intensità della riga, cioè la probabilità del passaggio dallo stato k allo stato s.

La questione che sorge è allora la seguente: nel calcolo dell'effetto Stark, come si deve tener conto del fatto che alcune delle V_{ks} non nulle corrispondono a transizioni verso stati già occupati, e quindi non possibili per il principio di Pauli? A questa domanda si deve rispondere, che se si facesse il calcolo della polarizzazione sul modello vero dell'atomo, si dovrebbe tener conto di tutte le V_{ks}; però, in questo caso, il contributo alla polarizzazione dato dall'elettrone luminoso non sarebbe tutto; bisognerebbe calcolare anche il contributo degli elettroni del nocciolo. E allora si vedrebbe, che i termini relativi a passaggi di elettroni verso stati occupati si elidono fra di loro.

Ma se, come abbiamo fatto, si schematizza il nocciolo mediante un potenziale, si deve fare il calcolo come se le V_{ks} corrispondenti a passaggi dell'elettrone luminoso verso stati occupati del nocciolo fossero nulle.

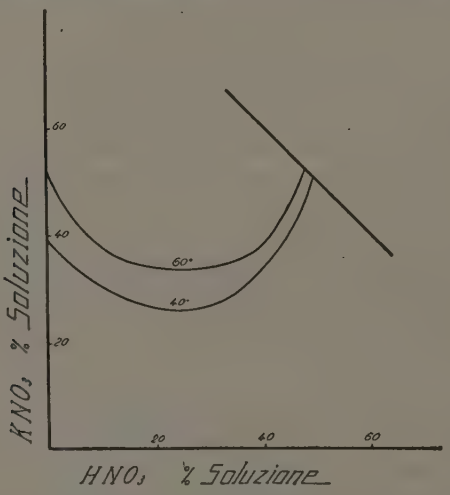
In una successiva Nota vedremo qualche applicazione numerica della teoria che abbiamo fin qui sviluppato.

Chimica. — *Il sistema* $KNO_3 — HNO_3 — H_2O$ *fra 25° e 60°* [1]. Nota di G. Malquori, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

L'isoterma a 0° del sistema $KNO_3 — HNO_3 — H_2O$ è stata precedentemente studiata da Engel [3] e da Groschuff [4].

Questo secondo Autore ha pure determinato l'isoterma a 21°.

Dai suoi risultati si rileva l'esistenza di un nitrato acido $KNO_3 \cdot 2HNO_3$ il cui campo di stabilità è assai esteso a 0°. Groschuff infatti indica la seguente composizione come quella della soluzione satura in equilibrio con i due sali KNO_3 e $KNO_3 \cdot 2HNO_3$: 22.9 mol. H_2O, 51.4 mol. HNO_3, 25.7 mol. KNO_3 il che corrisponde ad una conc. acida del 51.85 %.



A 21° il campo di stabilità è ristrettissimo: la massima quantità di acqua compatibile con l'esistenza di questo sale è di 3.1 mol. per 64.6 mol.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.
(3) « Bull. Soc. Chim. », (2); 47; 677 (1887).
(4) « Z. an. Chem. », 40; 1; (1904).

di HNO_3 e 32.3 mol. di KNO_3 il che corrisponde ad una concentrazione in acqua del 0.75 %.

A 22° il sale acido fonde.

In una Nota precedente[1] ho comunicati i valori ottenuti nello studio dell'isoterma a 25° di detto sistema. Come era da prevedersi a questa temperatura il sale acido non si incontra più tra i solidi possibili.

A complemento delle ricerche precedenti comunico i risultati ottenuti nello studio delle due isoterme a 40° ed a 60° del sistema KNO_3 — — HNO_3 — H_2O.

I risultati sono riportati nelle tabelle e riprodotti nella figura.

Tabella I.

Sistema KNO_3 — HNO_3 — H_2O *a 40°*

KNO_3	HNO_3	H_2O	Fasi solide
39.00	—	61.00	KNO_3
32.13	7.01	60.86	»
24.93	25.93	49.14	»
47.25	48.63	4.12	»
49.21	50.79	—	»

Tabella II.

Sistema KNO_3 — HNO_3 — H_2O *a 60°*

KNO_3	HNO_3	H_2O	Fasi solide
52.00	—	48.00	KNO_3
41.12	5.25	53.63	»
36.63	39.12	24.25	»
52.03	46.78	0.19	»

Come fu precedentemente notato alla temperatura di 25°, si vede che anche a 40° e 60° la quantità di nitrato potassico che passa in soluzione, diminuisce per piccole acidità, per poi aumentare di mano in mano che l'acidità aumenta.

(1) «Rend. Acc. Lincei», (6), 5, 576 (1927).

La diminuzione di solubilità è tanto maggiore quanto più alta è la temperatura, così mentre a 25° il 10.30 % di acido nitrico nella soluzione abbassa la solubilità del nitrato di potassio da 27.31 % a 25.03 %, a 40° il 7.01 % di acido porta la solubilità da 39 % a 32.13 %. A 60° la diminuzione è ancora più forte, infatti un'acidità del 5.25 % sposta la solubilità da 52 % a 41.12 %.

Invece l'aumento di solubilità che si riscontra per acidità forti diminuisce con l'innalzarsi della temperatura: basti osservare che la solubilità del nitrato potassico in acido nitrico al 100 % è rispettivamente a 25°, 40°, 60° di: 49.99 %, 49.21 %, 52.03 %, mentre alle stesse temperature la solubilità in acqua è di 27.31 %, 39 %, 52 %.

L'influenza che l'acido nitrico esercita sulla solubilità del nitrato di potassio, non può pertanto non farsi risalire alla esistenza di complessi in soluzione la cui stabilità diminuisce con l'innalzarsi della temperatura.

Chimica. — *Il sistema* $KNO_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$ *a 0°, 40°, 60°* [1]. Nota di G. Malquori, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Ho già descritto l'isoterma a 25° di questo sistema [3].

Descrivo in questa Nota le isoterme a 0°, 40°, 60°.

Le misure di solubilità alle diverse temperature sono state eseguite con i metodi usuali, e i valori ottenuti sono riportati nelle seguenti tabelle e riprodotti nella figura.

Tabella I.

Sistema $KNO_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$ *a 0°*

KNO_3	$Al(NO_3)_3$	H_2O	Fasi solide
11.7	—	88.3	KNO_3
4.03	23.25	72.72	»
4.15	22.12	73.73	»
5.25	34.02	60.73	$KNO_3 + Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$
3.48	35.92	60.70	$Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$
—	37.81	62.12	»

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1927.

(3) «Rend. Acc. Lincei», (6); 5; 451 (1927).

Tabella II.

Sistema $KNO_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$ *a* 40°

KNO_3	$Al(NO_3)_3$	H_2O	Fasi solide
39.00	—	61.00	KNO_3
15.15	25.38	59.47	»
21.16	17.12	61.72	»
8.51	41.71	49.78	$KNO_3 + Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$
—	46.25	53.75	$Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$

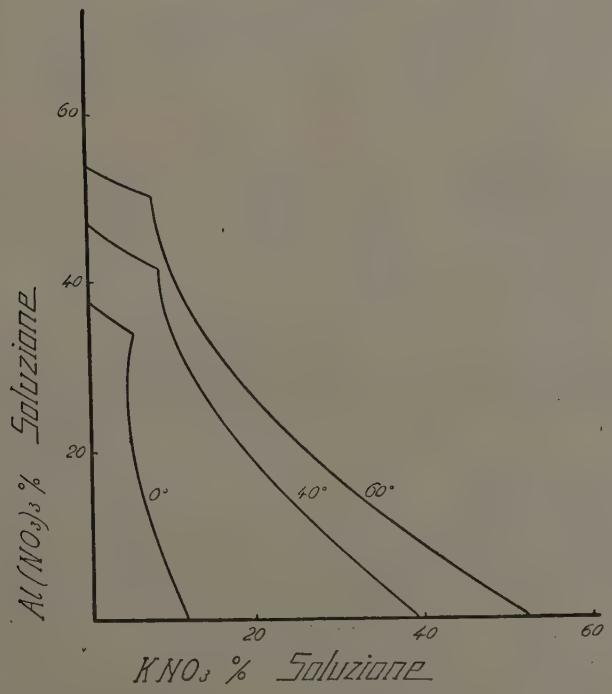


Tabella III.

Sistema $KNO_3 — Al(NO_3)_3 — H_2O$ *a 60°*

KNO_3	$Al(NO_3)_3$	H_2O	Fasi solide
52.00	—	48.00	KNO_3
17.08	32.50	50.42	»
9.81	38.90	51.23	»
7.22	50.75	42.03	$KNO_3 + Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$
—	50.95	49.05	$Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$

Anche in questo caso, come in quello precedentemente studiato dei cloruri di alluminio e potassio, gli unici solidi a contatto delle soluzioni sono i due sali: KNO_3 e $Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$.

Come si vede, la quantità di nitrato potassico nella soluzione satura dei due sali aumenta leggermente con la temperatura e precisamente a 0° detta soluzione contiene il 5.25 % di KNO_3 mentre a 60° ne contiene il 7.22 %.

Chimica fisica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* - I. *Analisi termica del sistema* $LiCl — CoCl_2$ *anidri* [1]. Nota di A. Ferrari e A. Baroni, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

L'analogia chimica dei componenti una soluzione solida e la forma cristallina simile sono, come è noto, i fattori determinanti della miscibilità stessa [3]. È interessante indagare alla luce dei nuovi risultati ottenuti dall'esame röntgenografico delle strutture cristalline l'importanza reciproca dei due predetti fattori. Un caso particolarmente interessante è quello costituito dalla coppia cloruro di litio – cloruro di magnesio anidri che malgrado la valenza diversa dànno soluzioni solide in tutti i rapporti come dimostra l'analisi termica eseguita da C. Sandonnini [4]. La completa miscibilità allo stato solido

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(3) Vedere G. Bruni, *Feste Lösungen und isomorphismus*. Leipzig 1908, p. 33 sg.

(4) «Gazz. Chim.», XLIV (1914), 378.

troverebbe, secondo il predetto autore, la sua ragione nella ben nota analogia chimica del magnesio col litio.

Lo studio röntgenografico di questo sistema fatto da uno di noi in collaborazione con G. Bruni [1] ha dimostrato che le celle elementari dei due cloruri hanno la medesima forma geometrica pur contenendo in un identico volume un diverso numero di molecole (due quella del cloruro di magnesio e quattro quella del cloruro di litio) e presentando diverso grado di simmetria.

Giunti a questo risultato ci si può domandare se la causa della formazione di soluzioni solide in ogni proporzione non possa trovarsi, oltre che nella analogia chimica, nella identità della forma geometrica delle celle elementari dei due cloruri e se questa seconda causa non sia eventualmente la più importante.

È facile pensare che in questo caso la formazione di soluzioni solide, ossia la sostituzione nel reticolo di uno dei componenti di un certo numero delle celle elementari con altrettante dell'altro composto possa avvenire con facilità.

Esistono, come A. Ferrari [2] ha dimostrato, due altri cloruri bivalenti, quelli di nichelio e di cobalto che hanno una cella elementare quasi identica a quella dei cloruri di magnesio e di litio. Abbiamo ritenuto interessante studiare se questi cloruri dànno soluzioni solide in ogni rapporto col cloruro di litio, perchè in questo caso non esistendo nessuna analogia chimica fra il litio da un lato e il cobalto e il nichelio dall'altro, la solubilità allo stato solido non potrebbe che derivare dalla somiglianza della forma cristallina e dall'eguaglianza o quasi dei parametri della cella elementare.

Lo studio termico delle miscele dei due cloruri presentava due difficoltà: l'igroscopicità dei due sali e la difficoltà di fusione del cloruro di cobalto. Il primo ostacolo fu superato impiegando il dispositivo della fig. 1, nel quale si vede come la fusione venga fatta in corrente di acido cloridrico in un tubo di vetro difficilmente fusibile chiuso ad una estremità. I sali erano stati in precedenza disidratati fondendoli in corrente di acido cloridrico. Le piccole quantità di umidità assorbite durante le successive manipolazioni si eliminano durante la fusione e l'atmosfera di acido cloridrico impedisce la formazione di cloruro basico.

Rispetto alle difficoltà di fusione del cloruro di cobalto Sandonnini [3] afferma che i cloruri di nichelio e di cobalto non fondono alla pressione ordinaria. Non possiamo fino ad ora affermare che il cloruro di nichelio alla pressione ambiente fonda, però nel caso del cloruro di cobalto la detta affermazione non è esatta giacchè un semplice saggio qualitativo mostra in

(1) Questi «Rendiconti» (6ª), II (1925), 457.
(2) Questi «Rendiconti» (6ª), VI (1927), 56.
(3) «Gazz. Chim.», XLIV (1914), 333.

modo indubbio, che pur sublimando in quantità notevole, buona parte del cloruro fonde nettamente alla pressione ordinaria.

L'alto costo del cloruro di cobalto esente da nichelio, e la convinzione che per la stretta assomiglianza chimica dei due metalli le piccole quantità di cloruro di nichelio sempre presenti nel cloruro di cobalto comune non influissero sul comportamento termico dello stesso, ci hanno indotto ad usare per lo studio termico del sistema in questione del coluro di cobalto tipo per analisi non esente da nichelio. Con questo prodotto, e solo usandone una grande quantità, si notava un rallentamento della curva di raffreddamento poco visibile a 778°. Ritenemmo che questo fosse il punto di fusione del cloruro di cobalto, che avrebbe quindi dovuto avere un calore di fusione assai piccolo ed in relazione a ciò le fusioni furono fatte con 40–50 gr. di sostanza per le miscele ricche in cloruro di cobalto. Lo studio successivo, che sarà riferito in seguito, di alcuni sistemi dei cloruri bivalenti con quello di nichelio hanno dimostrato che quest'ultimo anche in piccola quantità innalza fortemente il punto di fusione degli stessi cloruri. Abbiamo perciò eseguito la determinazione del punto di fusione del cloruro di cobalto esente da nichelio che risultò di 724° e determinata la percentuale di cloruro di nichelio presente nel cloruro di cobalto usato in questo lavoro, che si trovò essere del 5,85 %. La temperatura di 778° data come punto di fusione del cloruro di cobalto nella tabella I e quindi l'inizio della cristallizzazione della soluzione solida fra $NiCl_2$ e $CoCl_2$ nelle proporzioni 0,585 : 9,415. L'intervallo della cristallizzazione è già abbastanza grande e spiega la mancanza di un arresto netto nella solidificazione. A parte un abbassamento della curva per le miscele ricche di cobalto, non riteniamo che tali piccole quantità di cloruro di nichelio possano variare l'andamento del sistema.

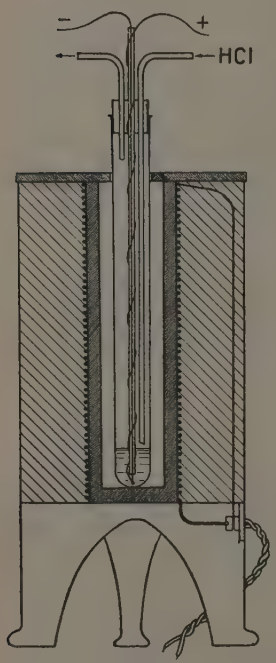


Fig. 1.

Abbiamo determinato sempre usando il dispositivo precedente e rilevanti quantità di sostanza il punto di fusione del cloruro ferroso che non era stato finora determinato, e che risultò di 673°.

Per ridurre il sale ferrico che si può eventualmente formare, la fusione fu eseguita in presenza di lamine di ferro puro. Delle miscele di cloruro ferroso con quello di litio ci occuperemo in un prossimo lavoro.

I risultati dell'analisi termica del sistema $LiCl - CoCl_2$ sono dati assumendo la molecola del cloruro di litio doppia onde riferirci ad uno stesso numero di atomi di cloro. La tabella I riassume i risultati sperimentali che sono rappresentati nella fig. 2.

Per la igroscopicità di questi cloruri ed in particolare di quello di litio, e per la volatilità del cloruro di cobalto le miscele fuse presentano una composizione talora assai diversa da quella che si sarebbe voluta ottenere e per questo sono state tutte analizzate dopo la fusione. Questo spiega i valori frazionari delle percentuali di molecole del cloruro di cobalto.

Tabella I.

Molecole % di $CoCl_2$	Inizio di cristallizzazione	Fine di cristallizzazione	Molecole % di $CoCl_2$	Inizio di cristallizzazione	Fine di cristallizzazione
0	602°	—	52.0	538°	535°
6.3	593	589°	53.0	533	530
14.5	589	586	56.0	529	523
21.5	580	578	60.0	530	524
25.0	572	569	62.5	533	530
32.0	560	555	64.5	542	539
35.5	555	553	68.1	564	562
39.8	548	546	72.9	592	590
43.7	546	545	76.5	625	624
45.4	549	547	82.0	650	642
47.5	553	548	88.2	690	689
48.7	556	548	92.4	720	716
50.1	558	554	100	778	—
51.0	554	551			

Nelle miscele ricche di cobalto e precisamente con 76.5 % e 82.0 % di $CoCl_2$ si osserva un accenno ad un rallentamento nella velocità di raffreddamento intorno a 500°.

Dal grafico della fig. 2 si osserva come la curva di solidificazione delle miscele $LiCl - CoCl_2$ presenta un massimo in corrispondenza del 50 % molecolare che dimostrerebbe probabile l'esistenza di un composto della formula Li_2CoCl_4. Ai due lati di questo massimo la curva ha un andamento continuo con due minimi che indicherebbero una solubilità in ogni rapporto

del composto nei due componenti. Questo tipo di curva è assai singolare; un altro esempio che si avvicina al nostro sarebbe tra i metalli la curva di solidificazione delle miscele oro–manganese, data da L. Hahn e S. Kyropoulos [1].

È interessante notare come nel sistema $LiCl + CoCl_2$ tutte le curve di raffreddamento hanno un intervallo di cristallizzazione praticamente nullo; questo si osserva in altri sistemi fra cloruri bivalenti e cloruri monovalenti a celle elementari simili che stiamo studiando. Invece per i sistemi fra clo-

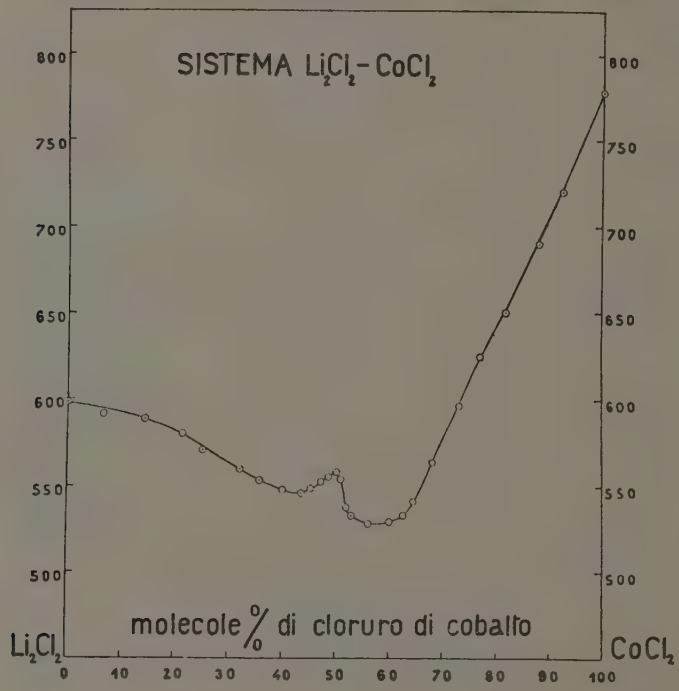


Fig. 2.

ruri bivalenti aventi cella simile, come mostreremo nelle prossime Note, l'intervallo di cristallizzazione è grandissimo e tipico delle soluzioni solide. Ciò corrisponde ad ammettere per i sistemi di cloruri a valenza diversa che la fase liquida abbia costantemente la stessa composizione della fase solida che va segregando. In altri termini, la curva del liquido e quella del solido sarebbero coincidenti; questo si potrebbe spiegare ammettendo che i cristalli misti separati abbiano la stessa composizione della fase liquida, ciò che sem-

(1) « Zeit. anorg. Chemie », *95* (1916), 105.

bra in contraddizione coi fatti perchè dovrebbe, se mai, corrispondere ad un isomorfismo perfetto.

Un'altra spiegazione di questa assenza di intervallo di cristallizzazione si avrebbe nell'ipotesi che la fase solida risulti formata dall'incunearsi di celle elementari di cloruro monovalente nel reticolo del cloruro bivalente e viceversa. Le singole celle conserverebbero cioè la loro individualità a differenza del caso di due cloruri bivalenti per i quali la sostituzione sarebbe in ogni caso statistica ed applicabile ai singoli atomi anzichè alle celle elementari e si comporterebbero come due fasi distinte che determinerebbero la costanza della temperatura di solidificazione.

Qui verrebbe una discussione sulla definizione di fase nel caso di reticoli uguali od estremamente simili di sostanze diverse ma regolarmente stratificate, e cioè si verrebbe ad avanzare la questione se alle singole celle elementari diverse corrispondono fasi distinte: ma una tale discussione ci pare prematura.

L'osservazione di H. Ambronn e M. Leblanc (1) che hanno dimostrato essere le pretese soluzioni solide dei nitrati di piombo e di bario, o di stronzio delle miscele di particelle orientate relativamente piccole (0.03 mm.) dei due componenti, può essere qui ricordata come un esempio su scala maggiore dello stesso tipo. In questo caso però la stessa valenza dei metalli e la uguale simmetria cristallina giustificano meno un simile comportamento.

L'esempio di Ambronn e Leblanc merita di essere esaminato coi metodi röntgenografici. La birifrangenza, che gli aggregati preparati da questi autori mostrano è accidentale e verosimilmente dovuta agli spazi vuoti che le lamelle del componente a cella elementare più piccola (nitrato di piombo) lasciano nell'edificio cristallino dell'altro (nitrato di bario).

Riassumendo:

a) Sono stati determinati i punti di fusione dei cloruri ferroso e di cobalto rispettivamente 673° e 724°.

b) È stato studiato il sistema $LiCl + CoCl_2$. La curva di solidificazione della miscela è continua e presenta un massimo che corrisponde ad un composto nelle proporzioni 2 : 1 ossia della formula Li_2CoCl_4.

c) Si rileva la proprietà che nelle presunte soluzioni solide fra cloruri bivalenti e cloruri monovalenti l'intervallo di cristallizzazione è nullo e si fa l'ipotesi che ciò sia dovuto alla conservazione della individualità delle celle elementari dei componenti.

(1) « Zeit. für phisik. Chemie », XXII (1897), 121.

Nota. - Nel corso della stampa del presente lavoro siamo venuti a conoscenza di una recente pubblicazione di L. Vegard e Hjalmar Dale (Norske Vid. Akad. Skr. I. M. N. Kl. 1927. N. 14) nella quale è precisamente riferito lo studio röntgenografico del sistema nitrato di piombo–nitrato di bario. I risultati sono diversi da quelli di Ambronn e Leblanc, infatti gli autori norvergesi hanno trovato per i due nitrati un isomorfismo perfetto con variazione lineare delle dimensioni della cella elementare al variare della percentuale dei due componenti.

Talassografia. — *Sulla circolazione dell'Adriatico meridionale.* Nota di B. Castiglioni, presentata [1] dal Socio L. De Marchi.

Nella presente Nota ed in una successiva espongo alcuni risultati preliminari cui sono giunto collo studio dei dati raccolti nelle Crociere italo-austriache in Adriatico, studio affidatomi dal prof. L. De Marchi (già Presidente italiano della Commissione Internazionale permanente per lo studio dell'Adriatico), e che formerà argomento di una Memoria del R. Comitato Talassografico Italiano.

All'analisi dei caratteri delle acque e della circolazione ho fatto precedere una revisione quanto possibile completa sui registri italiani di crociera dei dati pubblicati [2], il confronto con altri a mia disposizione, la ricostruzione e costruzione nuova di gran numero di cartine e profili verticali attraverso il nostro mare.

Prendo in esame la situazione della parte meridionale dell'Adriatico, cercando di chiarire specialmente lo scambio d'acque fra questo mare e l'Ionio attraverso il Canale d'Otranto.

Situazione superficiale.

Riassumo a grandi linee i movimenti delle acque superficiali, confermando in gran parte quanto era precedentemente noto, specie per l'analisi condotta in collaborazione dal dott. Feruglio e dal prof. De Marchi [3]. La copia assai più grande di dati a mia disposizione, e alcune rettifiche che ho potuto apportare a quelli già noti, mi hanno naturalmente condotto a precisare meglio taluni aspetti di questa circolazione.

Due correnti principali, con direzione opposta, si fiancheggiano nel Canale d'Otranto.

La corrente occidentale o pugliese si tiene per lo più aderente alla costa lungo tutte le Puglie e, uscita nell'Ionio, gira ancora a destra, in gran parte, attorno al promontorio salentino. Anche i lanci di bottiglie ne

(1) Nella seduta del 20 maggio 1928.

(2) Commissione Internazionale Permanente per lo studio dell'Adriatico: «Bollettino delle Crociere periodiche» (Venezia, 1912-1914); «Berichte über die Terminfahrten» (Wien 1912–1915).

(3) R. Comit. Talassografico Ital., Memoria LV: G. Feruglio, *Risultati di esperienze con galleggianti per lo studio delle correnti del Mare Adriatico negli anni 1910-1914*; G. Feruglio, L. De Marchi, *Le correnti dell'Adriatico secondo la distribuzione superficiale della salsedine e della temperatura.* (Venezia 1920).

hanno attestata la costanza e la notevole velocità, di parecchie miglia giornaliere [1].

Quasi altrettanto costante è la *Corrente orientale d'entrata*, caratterizzata da un'alta salsedine e in generale da più alta temperatura. In vari casi se ne dimostra la provenienza da Corfù. Ma spesso la continuità di questa corrente è occultata da temporanee sovrapposizioni di acque diverse, sia fuori del Canale, sia dentro, specie per acque dolci albanesi.

Ma, per il caso normale, si vede bene la corrente superficiale ionica entrare decisamente nell'Adriatico. Spesso essa continua distintamente verso nord, davanti alla costa albanese (tenuta però al largo dalle acque costiere più dolci e in generale più fredde, per apporti fluviali), e poi ancora spesso fino a Ragusa, rasente alla costa. Solo più oltre, in corrispondenza delle prime isole dalmate, incomincia il noto movimento trasversale verso ovest, che trasporta verso il lato abruzzese le acque più salse prevalenti sul lato orientale.

Altre volte le acque ioniche, entrate in Adriatico, si diffondono anche verso il centro del bacino meridionale di questo. Talora, anzi, questi espandimenti, assai variabili, si sostituiscono del tutto alla corrente normale, risalente lungo l'Albania.

Anche le acque pugliesi si diffondono talvolta largamente sul

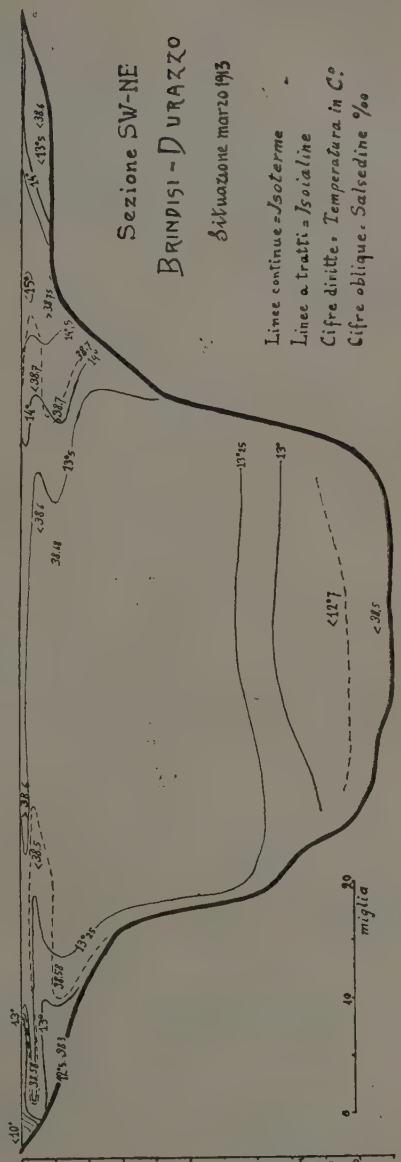


Fig. 1.

(1) Feruglio G., op. cit., *passim*.

bacino meridionale: in un caso (novembre 1911) esse ne occupano forse i tre quarti della superficie.

Ma, a prescindere da queste temporanee diffusioni d'acque estranee, e escluse le zone marginali con le correnti ivi dominanti – *il bacino meridionale resta per lo più uniformemente occupato in superficie da acque proprie* – a salsedine elevata, quasi indipendenti dalle correnti laterali. Al più, è la corrente salsa entrante che può avere qualche influenza sui caratteri delle acque centrali. Queste paiono partecipare ben poco alla circolazione complessiva, che, di massima, si manifesta bene solo nelle due correnti laterali opposte, che si avvicinano tra loro nel Canale d'Otranto. A nord, nella zona di Pelagosa, deve prevalere il movimento da E verso W [1], così da chiudere parzialmente la circolazione del bacino meridionale, con rotazione ciclonale.

Nel Canale, però, oltre alle due correnti laterali tipiche, più in generale si stabiliscono in varia guisa contatti tra l'acqua adriatica e quella ionica, con rimescolii e piccoli vortici, più o meno riconoscibili, più o meno connessi colle due correnti principali.

Che avvenga un certo scambio d'acqua fra le due correnti opposte, è anche stato accertato dal presumibile percorso di alcune bottiglie galleggianti [2].

In taluni casi, rari in verità, si hanno poi tracce di movimenti di più vasta portata, per cui si viene a chiudere anche a sud una circolazione ciclonica adriatica, come già aveva visto De Marchi [3]. Pare infatti che talvolta un ramo della corrente pugliese, senza entrare nel Canale d'Otranto, devii a sinistra piegando a E e poi a N, per farsi trovare, unito alla corrente ionica ascendente, al largo di Durazzo.

Situazione in profondità.

Il Bacino meridionale adriatico si abbassa a profondità fra 1000 e 1200 m., a forma di vasca a fondo piuttosto piatto fra due ripide scarpe laterali, le quali limitano esternamente due piattaforme continentali, dove le profondità sono sempre minori di 200 m.

Questo bacino è occupato da una *massa d'acqua notevolmente omogenea*, poco variabile, raramente soggetta a movimenti di qualche entità.

D'inverno, per convezione originata dal raffreddamento e dall'evaporazione superficiali [4], si determina una omotermia fino a grande profondità,

(1) De Marchi L., nell'op. cit., p. 119, ecc.

(2) N. 79 della serie I; n. 29, 101, 102 della serie III; n, 83 della serie IV (Feruglio, op. cit.).

(3) In: Feruglio–De Marchi, op. cit., pp. 118, 120.

(4) L. De Marchi, *La distribuzione verticale della salsedine e della temperatura e i movimenti convettivi verticali in mare.* R. Comit. Talass. Ital., Memoria VI. Venezia 1912.

e solo nelle ultime centinaia di metri verso il fondo la temperatura cade un po' più rapidamemte, da 13° o 13.2° C. fin verso i 12.5° C. Anche la salinità viene a distribuirsi molto uniformemente nelle singole verticali (valori sempre compresi fra 38.5 e 38.7), e analogamente quindi la densità (σ_t).

Già in marzo comincia il riscaldamento superficiale, pel quale fino ad autunno molto avanzato si mantiene presso la superficie uno strato uniforme di temperatura più elevata, separata nettamente (*strato di salto*) dalla sottostante acqua più fredda, secondo il ben noto processo [1]. Anche gli espandimenti superficiali delle correnti laterali, cui ho fatto cenno più sopra, sono per lo più limitati inferiormente da un brusco salto di temperatura o di salsedine.

Al di sotto dello strato di salto, comunque originatosi, nella distribuzione della temperatura e della salsedine si mantiene per lo più la stessa uniformità invernale, e piccole sono le variazioni da una stagione all'altra: a 100 m. di profondità l'escursione annua della temperatura è già inferiore a un grado, e va riducendosi verso il fondo a pochi decimi. Le irregolarità che si notano non di rado nell'andamento delle isoterme ed isoaline, in singole sezioni verticali rilevate nelle varie crociere, dipendono in generale da piccole variazioni dei valori di T e di S, e sono indizio di movimenti lenti, incostanti, non meglio definibili, o che solo in qualche caso accennerebbero a una lenta rotazione ciclonica della massa profonda.

Maggiore interesse presentano invece i casi di stratificazione orizzontale, che talvolta si verificano, specie nella parte meridionale (Trasversale VII, Brindisi-Durazzo), e che, come vedremo, sono il prolungamento delle più accentuate stratificazioni profonde del Canale d'Otranto. Queste variazioni ed inversioni di temperatura e di salsedine, così generate, non sono però tali da turbare sensibilmente l'omogeneità e la stabilità caratteristiche del bacino adriatico, a differenza di quanto avviene nel Canale d'Otranto.

Dove invece, di regola, nel nostro bacino, questa omogeneità sparisce, è sui lati, giacchè lungo i pendii della grande fossa si raccolgono di preferenza acque spiccatamente diverse da quelle centrali. Così, a una certa profondità, *rasente il pendio occidentale riscontriamo di frequente più basse temperature e anche minore salsedine*, ed è evidente qui la presenza di una corrente analoga a quella superficiale, e che dobbiamo ritenere egualmente diretta verso sud, ma più lenta. Non possiamo parlare senz'altro d'una corrente unica, chè spesso il sottile strato superficiale si trova separato dalle acque profonde d'ugual tipo per uno strato intermedio (sempre compreso nei primi 100 m. dalla superficie) di acqua avente i caratteri prevalenti nel bacino centrale, cioè relativamente più calda e più salsa. L'origine di tale separazione va ricercata con tutta probabilità nell'Adriatico medio, e qui basti l'aver accennato al fatto. Piuttosto è da rilevare che le acque profonde

(1) Vedi nota precedente.

di questo tipo pugliese frequentemente si espandono orizzontalmente molto al largo, in un livello oscillante intorno ai 100 m. di profondità.

Meglio decisa, più costante, è *sul pendio orientale una cospicua massa di acqua spiccatamente calda e salsa, povera di ossigeno*, raccolta specialmente intorno all'orlo della piattaforma continentale, e un poco lungo il pendio sottostante. Molte volte essa è collegata con la corrente orientale superficiale, di cui ho già detto. Questa di solito risulta essere dunque semplicemente l'emergenza delle acque profonde, e differisce quindi dalle correnti superficiali dolci (fredde o calde, secondo le stagioni), che invece si stendono solo in uno strato di poche decine di metri (corrente pugliese, acque fluviali albanesi).

L'annessa figura ci rappresenta una delle situazioni più tipiche.

Biologia. — *Il cancro e la impurità delle razze.* Nota di G. Brunelli, presentata [1] dal Corrisp. A. Dionisi.

Nell'esporre questa mia ipotesi io conosco gli svantaggi di una dottrina che deve essere approfondita, ma che d'altra parte deve essere resa nota per stimolare nuove indagini. Il lettore dovrà riconoscere che questa ipotesi di lavoro può indirizzare tanto nuove ricerche statistiche, colmando evidenti lacune, quanto stimolare nuovi esperimenti nel campo della patologia comparata.

La ipotesi si riassume in questa fondamentale supposizione: i caratteri delle razze impure non completamente fusi provocano, specialmente nell'età in cui decadono le difese interne equilibratrici dell'organizzazione, anomalie nel ritmo di crescenza e sdifferenziamento di alcuni elementi cellulari, mentre il potere di regolazione dell'accrescimento è turbato dai disquilibri chimici dei liquidi interni, gli antagonismi del patrimonio ereditario insorgono più violentemente e nella curva discendente dell'accrescimento regolare si interpola a spese di alcuni elementi cellulari una curva ascendente di accrescimento anomalo.

Il carattere anaplastico delle cellule cancerigene non è di origine embrionale, ma di sdifferenziamento per la lotta di tendenze ereditarie che risorgono nei plasmi cellulalari, sia pure sotto l'influenza di stimoli esterni od interni che diano impulso occasionale a questi latenti squilibri di crescenza.

È questo forse il motivo per cui nelle piante esistono tumori da infezioni parassitarie, ma non tumori da irregolarità di crescenza, essendo queste regolazioni nelle piante assai più elastiche che negli animali, e a causa dei meristemi, la capacità di crescere assicurata nel ritmo normale

(1) Nella seduta del 20 maggio 1928.

dell'accrescimento mal definito, e d'altra parte lo sdifferenziamento cellulare di elementi già definiti più difficile a causa della natura della membrana cellulare.

I tumori degli animali sono così considerati come un fenomeno biologico di eredità eteronoma e di malformazione dovuta a recente o lontano ibridismo, con fenomeni di latenza nella vita individuale e di recessività nelle generazioni, così che i tumori ci appariscono come la malattia delle impurità della razza. Se ciò venisse un giorno definitivamente dimostrato lo studio del cancro costituirebbe un capitolo fondamentale di patologia evoluzionistica.

Tale ipotesi riconduce il problema del cancro nell'ambito degli studi Mendeliani e genetici. Dal punto di vista citologico i fenomeni di repulsione dei plasmi e della sostanza cromatinica, lo squilibrio nucleo–plasmatico che esalta i fenomeni riproduttivi e le irregolarità delle mitosi, permettono di ricollegare la nostra ipotesi agli studi classici di Boveri circa le cariocinesi multipolari, nonchè dal punto di vista fisiologico–patologico alla ipotesi dello squilibrio oncolitico.

Infatti questa tendenza alla repulsione degli antichi protoplasmi e questa anorme proliferazione cellulare, coinciderebbe, come sopra si è accennato, col decadere delle resistenze organiche, e sarebbe più facile nei tessuti ad elementi labili.

Questa lotta dei plasmi porterebbe allo sdifferenziamento e all'anaplassia delle cellule cancerigene e inoltre la lotta delle tendenze ereditarie, opponendosi alla regolazione dell'accrescimento, porterebbe a un'esaltazione del medesimo, liberato da ogni inibizione direttiva. Ora è noto tra gli ibridatori che mentre negli ibridi decadono i poteri di riproduzione delle cellule sessuali, fino a provocare, in certi casi la sterilità, d'altra parte invece viene esaltato l'accrescimento degli elementi somatici lussureggianti, ciò che è designato come eterosi, e che indica come all'infuori dei tumori vi è negli ibridi una esaltazione delle funzioni vegetative dovuta alla natura eterologa dei protoplasmi, esaltazione che può assumere carattere degenerativo. Nel discutere l'influenza delle razze sulla maggiore o minore diffusione del cancro si è partiti da un punto di vista che non è precisamente il nostro, e che ci permettiamo di considerare inesatto, se non errato. Così si è voluto riferirsi alle condizioni di maggiore o minore benessere delle razze, accusando l'ipernutrizione o le conseguenze della vita civile rispetto alla nomade o selvaggia. Si è fatto appello all'eccesso di nutrizione carnea, ipotesi contraddetta dal verificarsi del cancro anche nei vegetariani, a meno che non si ricorra ad un'ipotetica vitamina da classificarsi con una lettera dell'alfabeto.

Si è parlato di regioni fredde, calde o temperate e tutto ciò mostra che si è deviato dal considerare la purità delle razze anche quando (per l'evidenza dei fatti) è balenata l'idea che tra le popolazioni selvaggie il can-

cro sia meno diffuso, riferendosi alle condizioni di vita ambientale e non come noi abbiamo supposto alle qualità genotipiche delle razze, si è sminuito il valore di questa osservazione che poteva essere fondamentale. Lo stesso Baimbridge [1] parla del « maggior consumo di carne, delle tendenze agli eccessi del regime, ciò che non si riscontra presso gli abitanti del Nord e gli indigeni del Sud, dalle abitudini semplici e frugali ».

Così il Baimbridge, il cui trattato è certamente classico, finisce col combattere l'opinione della minore diffusione del cancro nella razza gialla, facendo notare, come già il Celli aveva fatto per i Cinesi, che il cancro ha una certa diffusione nei Giapponesi. Ma dal nostro punto di vista l'obiezione può diventare una conferma, essendo assurdo considerare i Giapponesi come una razza pura.

Hovelaque (*Le Japon*, Flammarion éd., 1926), cito un autore recente, per esempio scrive che l'origine della razza Giapponese è altrettanto oscura di quella Cinese, e dopo aver notato che nessun documento istorico ed archeologico la rischiara, nota che si attribuisce generalmente il tipo popolare alla mescolanza di una razza aborigena (forse gli Ainos) con due razze conquistatrici venute l'una dal Sud (probabilmente malese) e l'altra dall'Ovest. Così l'Hovelacque suppone la provenienza Nord-asiatica dell'elemento dominatore che ha fornito la nobiltà militare e la casta dei Samourai. *Summa summarum* la razza giapponese non è una razza pura che debba risultare indenne da cancro.

Molto importanti invece per la nostra teoria sono i risultati della spedizione etnologica del Daniels nel 1914, pubblicati dal Seligmann nella terza relazione scientifica dell' « Imperial Cancer Research Fund. », e secondo la quale i tumori maligni sarebbero rari nelle isole sottoposte ad ispezione.

L'obiezione del Baimbridge che il soggiorno del Seligmann nella Nuova Guinea non fu abbastanza lungo per metterlo a contatto con gli abitanti di un'isola notoriamente difficile a esplorare, non ci sembra costituire un'obiezione sufficiente, perchè finora le ricerche del Seligmann sono tra le più esatte in questo ordine di studi. Del resto una volta si credeva, secondo la più diffusa opinione, che il cancro attaccasse solo le razze superiori dette civili, mentre le razze selvagge e primitive si ritenevano immuni. Ma questo dato, che certamente ha un fondamento di verità, è stato erroneamente interpretato, essendo stata supposta per analogia la progressione della mortalità cancerosa nelle classi ricche, ciò che non ha resistito alla critica.

Si è voluto d'altra parte, con poco fondamento di studi, parlare di immunità completa o parziale di alcune Nazioni e di alcune razze, ma non bisogna esagerare negli scetticismi. Per la razza negra, anche i più prudenti autori, come il Lustig, ammettono che il cancro sia più raro. In sostanza lo stesso Baimbridge, che si dichiara prudentemente scettico rispetto a

(1) Baimbridge, *Il problema del cancro*. L. Pozzi ed., Roma 1927.

queste credenze, deve a sua volta confessare che, in contraddizione colla estensione delle ricerche, la statistica è lontana dall'averci su questo punto illuminato.

Dopo aver scritto che nessuna malattia, salvo la tubercolosi, ha dato origine a tanti lavori di statistica come il cancro, dopo poche pagine, confessa: « non vi sono dati che ci permettano di paragonare con esattezza la frequenza del cancro nelle diverse parti del mondo abitate dalle medesime razze, per esempio le teutoniche e le latine nell'America e nell'Europa, la razza negra negli Stati Uniti e nell'Africa ».

Ora mi permetto osservare che questa confessione infirma tutto il valore delle ricerche statistiche sinora eseguite, ed indica chiaramente che dal punto di vista etnografico ed antropologico mancò un piano di orientamento, se malgrado tante statistiche non siamo in grado di rispondere a quesiti per noi ritenuti fondamentali. In favore della nostra ipotesi resta il fatto però che un'indice di mortalità minore per il cancro è generalmente accertato, salvo ulteriori conferme, in alcune razze selvaggie, rispetto ai bianchi e ai meticci (così avviene, per esempio, nell'America meridionale), in alcuni abitanti delle isole rispetto ai continenti, o a isole maggiori e con popolazioni meno pure, così è della Sardegna rispetto all'Italia continentale, dell'Irlanda rispetto all'Inghilterra. Non si è data inoltre abbastanza importanza, ma la acquista per la nostra ipotesi, alla constatazione che il cancro dà un alto indice di mortalità in alcune Nazioni o regioni nazionali dove le razze sono più promiscue (es. Svizzera e Normandia).

Qualcuno potrà domandarsi quale fondamento il nostro studio trovi nell'antropologia e allora ricorderò gli interessanti studi di Sergi, il quale precorrendo quelli dei neo–mendeliani dimostrò che nelle razze umane vi è un'imperfetta fusione dei caratteri.

Certamente i patologi sono stati deviati dalle incertezze degli antropologi circa il valore della specie e della razza in antropologia, dalle contrastanti dottrine relative al poligenismo e al monogenismo intorno alle quali non fu piccola eco la lotta tra due capi-scuola il Sergi e il Giuffrida. Ma quello che per noi più precisamente interessa non è il concetto della unità o pluralità delle specie umane, poichè anche i più intransigenti monogenisti devono ammettere la presenza di diversi biotipi nella specie umana, che al minimo sarebbe un Linneone. Perciò, non preoccupandoci delle dispute intorno al poligenismo, ci accontenteremo di dire per la nostra ipotesi che in certe razze selvaggie relativamente isolate il cancro è più scarso. È strano che il grande movimento creatosi nel nostro secolo intorno all'eugenica non abbia stimolato speciali ricerche relativamente all'influenza dell'ibridismo nella genesi dei tumori, che la stessa affinità dei teratomi nei mostri da ibridismo doveva promuovere per la loro stretta parentela coi tumori veri. Nella controversia tra biometrici e Mendelisti si perdette di vista nell'eugenica il problema del cancro.

I genetisti infine pare che siano stati deviati anche dallo studio di altri problemi che sembravano maggiormente impellenti ed evidenti per il problema del miglioramento della razza, come l'influenza degli incroci sulla sterilità, l'alcoolismo e l'epilessia, e in generale nei fenomeni della degenerazione dei caratteri somatici e psichici.

È così che ritorniamo in alcuni trattati, come quello abbastanza recente di Shull (« Heredity », 1926), interessanti tabelle sull'influenza del meticciamento sopra alcune forme morbose e degenerative, specialmente in rapporto ai problemi della immigrazione e della difesa della razza. Manca però in tali tabelle ogni accenno all'argomento che direttamente abbiamo trattato. Disgraziatamente non ho potuto consultare tutti gli atti degli ultimi Congressi mondiali di Eugenica, ma credo che poco potrei aggiungere al precedente giudizio, come si desume dallo sfoglio dell'interessante bibliografia eugenica pubblicata dall' Università di California (« A Bibliography of Eugenics, University ot California », 1924). Supposta la promiscuità della razza come un fattore preponderante nella genesi dei tumori, è evidente che debbono assumere una speciale importanza i risultati e le indagini nel campo della patologia comparata. Per quanto riguarda questa scienza, esistono incredibili lacune data la vastità, l'importanza e la complessità dell'argomento che si ricollega ai più profondi studi circa l'ereditarietà. È pertanto da augurarsi che uno dei numerosi istituti sorti per la risoluzione del più grande problema della patologia moderna si specializzi in tali ricerche.

A proposito del cancro del topo e della vacca il Bashford scrive che si è scoperto il cancro perchè lo si è cercato è trovato. È pur vero che per la patologia comparata, avrebbe dovuto aggiungere, si è cercato poco.

In primo luogo, il sospetto avvalorato da quel che si conosce, che il cancro sembra mancare in alcuni gruppi di animali e sembra altresì più comune nei domestici che nei selvatici, doveva promuovere sistematiche ricerche dalle quali siamo lontani. È vero, come osserva il Lustig, che gli animali che servono all' alimentazione dell' uomo non raggiungono un'età avanzata e vengono abbattuti in un'epoca della loro vita in cui i tumori si verificano raramente. Credo però che molti zoologi ritengano, come me, per quotidiana esperienza, che il cancro è più raro negli animali selvatici che nei domestici, ma tale studio deve essere certo approfondito.

Erroneamente per gli animali domestici si è poi voluto parlare di vita più favorevole all'insorgere dei tumori, presso a poco come erroneamente si è voluto mettere in relazione lo sviluppo del cancro umano colle mollezze della civiltà più progredita, ma vi è poco fondamento per tale deduzione. Lo stesso Baimbridge scrive: « Si è pensato che animali adatti perfettamente al loro ambiente nativo sono probabilmente poco soggetti alle affezioni neoplastiche. Trasportati in ambienti differenti, in giardino zoologico per esempio, ovvero ridotti allo stato domestico, la loro suscettibilità è aumentata. È difficile darne la prova in quanto le cifre sono insufficienti ».

Noi avremmo quindi un cancro da Zoo ad uso dei veterinari di Stellingen. Quello però che permetto aggiungere è che se il cancro è più comune negli animali domestici, la ragione può essere tutt'altra di quella di una mutata condizione di esistenza. Anzi assumerebbe per la mia tesi un particolare valore, dappoichè la teoria monofiletica dell'origine degli animali domestici già sostenuta da Darwin, oggi più non si ammette, come in una precedente Memoria sul valore delle razze, delle piante e degli animali domestici credo di aver dimostrato a sufficienza [1].

Un fatto interessante sul quale mi riserbo ulteriori indagini è questo: il cancro sembra più comune nei salmonidi, pesci soggetti ad ibridazione. Un caso di epidemia di cancro dei salmonidi a Torbole, dove, come io feci notare, si praticano ibridismi tra diverse specie, è stato citato e non il solo negli annali della patologia comparata. Ma tornando agli animali domestici superiori non vi è dubbio che la mescolanza del patrimonio ereditario sia grande nelle razze domestiche, e che l'insorgenza del cancro debba forse mettersi in rapporto con ciò.

Il cancro è altresì comune nei topi, dove per le classiche ricerche di Cuénot, che per fortunata coincidenza sono all'ordine del giorno negli studi mendeliani, sappiamo che i fenomeni di incrocio e di recessività sono assai comuni.

L'endemismo del cancro nei topi albini, esiste in Argentina e altrove. Debbo notare che le razze albine nei topi sono dei fenotipi genotipicamente impuri. Le esperienze da innesto nei tumori dei topi (tumore B dell'Istituto Pasteur, tumore Ehrlich II, tumore Jensen e tumore giapponese) mostrano come è il tumore iniziale che prolifera indefinitamente. Così ben dice il Guyenot che le variazioni della recettività delle diverse razze non provano nulla in favore della tesi parassitaria. In quanto a quella ereditaria credo che le esperienze da innesto dimostrano proprio che l'insorgenza del cancro è un fenomeno idiocinetico che non può essere che relativamente turbato dall'innesto, cosicchè più che sull'innesto, come oggi generalmente si pratica, le indagini future dovranno gravitare sui procedimenti da ibridazioni, al fine di studiarne tutte le influenze dirette o indirette sulla oncogenesi.

Non vi è capitolo della patologia che come quello del cancro si inquadri e si profili sul progresso delle conoscenze citologiche e genetiche. Perciò ci sentiremo appagati se col nostro studio verrà raggiunta una maggiore collaborazione dei medici e dei naturalisti.

Non mi posso dilungare, in una Nota preventiva, sui rapporti della ipotesi esposta con altre che più si avvicinano. Alludo alle teorie sull'eredità della genesi del cancro, che Lenz, per esempio, assimila a quella del patrimonio individuale ereditario, ritenendo inutile ricercare una causa speciale, invece l'idiocinesi spiegherebbe l'insorgere del cancro come un turbamento

(1) Brunelli G., *Il perfezionamento delle razze agrarie e zootecniche e la genetica medesima.* « Rassegna Internaz. di Agronomia », Roma 1924.

(2) Baur Fisher u. Lenz, *Menschlische Erblichkeitslehre.* Leehmanns, München, 1927.

di questo retaggio atavico. Questa teoria è simile a quella di Borst che ammette negli elementi cellulari, fin dall'origine, un difetto idioplastico di interna organizzazione.

Le teorie ereditarie del cancro sinora esposte sono perciò molto vaghe, e rispondono più ad una intuizione derivante dalla confutazione delle altre teorie per eliminazione delle medesime, che alla individuazione di un fenomeno.

Non possiamo tacere inoltre che però in questa strada di una spiegazione biologica si sono avviati eminenti patologi e il giudizio derivante da una limpida discussione che il compianto prof. Parodi ha lasciato scritto nel suo discorso pronunciato in una recente sessione della Società italiana per il progresso delle Scienze, dichiarando che la risoluzione del problema del cancro implica la scoperta di nuove e fondamentali e semplici leggi generali nel campo della biologia.

L'ipotesi esposta bene si accorda altresì coll'ammettere che l'immunità di razza sia preesistente e costituzionale secondo il Morpurgo. Non debbono inoltre essere taciuti gli studi per ricondurre il cancro nell'ambito delle teorie mendeliane, sebbene questa speciale forma di trasmissione di caratteri ereditari specialmente patologici, non ci rischiari la loro genesi prima, e tra questi studi meritano essere ricordati quelli di Miss Slye sui topi, sui quali opportunamente il prof. Dionisi ha richiamato la mia attenzione.
Miss Slye ha riassunto i suoi risultati nel numero di aprile '22 del « Journal of Cancer Research ». Queste conclusioni insieme a quelle analoghe di Loeb trovansi riportate nella Memoria interessante del dottor Lionell Strong venuta a mia conoscenza dopo che io avevo analogamente impostato il problema su base genetica (*Genetic studies on the nature of Cancer* in « The American Naturalist », n° 668, 1926), sebbene le conclusioni siano alquanto differenti.

Miss Slye osserva, come ricorda il Parodi, che il cancro segue le leggi dell'eredità, esso può a volontà essere riprodotto nell'ambito delle singole famiglie, può essere introdotto in una famiglia dove preventivamente non è esistito, e può essere eliminato da un altro che lo ha prodotto e che d'altra parte può passarlo ad altre famiglie con le quali la si ibridi. Faccio notare che si tratta di una spiegazione assai diversa da quella esposta nella mia ipotesi che pone l'ibridismo come punto di partenza, e tuttavia bisogna riconoscere a Miss Slye il merito di aver lasciato la solita via dei trapianti, per operare anche su quella degli incroci.

È in questa via che deve essere studiata la così detta immunità di razza di Apolant, e allora appariranno meno oscuri i presunti rapporti tra la razza e il cancro, per ora così difficile a discriminare, sui quali il Niceforo richiamava l'attenzione in una recente sessione della Società delle Nazioni [2].

(1) Parodi Umberto. *Lo stato attuale del problema del cancro.* Estratto dal « Bollettino della R. Accademia medica di Genova », 15 maggio 1926.

(2) Niceforo et Pittart. *Considérations sur les rapports présumés entre la race et le cancer.* Société des Nations, Genève 1926.

Biologia. — *Ghiandola esocrina, ovario impari ed ermafroditismo nella « Perca fluviatilis » L.* [1] Nota preliminare di G. Brunelli e Lina Rizzo, presentata [2] dal Corrisp. F. Raffaele.

Nel compiere ricerche sull'ermafroditismo dei teleostei, ricercandone, oltre i casi costanti (es. orate, serrani), anche quelli occasionali, abbiamo fermata l'attenzione sulla *Perca fluviatilis*, come un pesce avente nel sesso femminile una gonade impari; fatto del quale inutilmente si cerca nei trattati una qualsiasi spiegazione. Anche nelle opere più recenti si è perfino dimenticato ricordare, almeno, quello che menzionava Cuvier [3], cioè le poche altre forme dei teleostei, come i cobiti [4], nei quali la gonade femminile si presenta impari. Devesi tener presente che nei selaci l'ovario sinistro è non infrequentemente atrofico (*Scyllium*, *Pristiophorus*, *Carcharias*, *Galeus*, *Mustelus*, *Zygaena*): in tal caso l'asimmetria, come in quella tipica dell'ovario degli uccelli, devesi mettere in rapporto colla grandezza delle uova e la secrezione di involucri protettivi. Una ghiandola del guscio, infatti, esiste, differentemente sviluppata, negli elasmobranchi. Ora è molto interessante notare che, precisamente nella *Perca fluviatilis*, l'asimmetria dell'ovario si accompagna colla presenza di una ghiandola esocrina, e che in questo teleosteo si avrebbe pertanto un'analogia, tutt'altro che trascurabile, con quello che accade nei selaci [5]. Fa meraviglia come questa ghiandola sia sfuggita alle osservazioni dei precedenti autori, tanto più che, da antichissimo tempo, tutti gli ittiologi e piscicultori sanno che la perca depone le uova in nastrini mucillaginosi. Per citarne uno dei tanti, riportiamo il seguente brano del Raveret-Wattel: « .....elle dépose ses œuf qui sont adhérants les uns aux autres, agglutinés en ruban par un enduit mucillagineux qui les recouvre..... » [6].

Non risulta che tale ghiandola esocrina sia stata osservata in altri pesci; ma bisogna ricordare che, in alcuni teleostei, è stata descritta - come nel

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di idrobiologia.

(2) Nella seduta del 20 maggio 1928.

(3) Cuvier G., *Leçon d'anatomie comparée*, tom. 8, Paris 1846.

(4) Anche queste forme rientrano nel materiale delle nostre ricerche, potendo, per la rarità dei maschi, essere sospette di ermafroditismo.

(5) Daniel J. Frank, *The Elasmobranch Fishes*, California 1922.

(6) Ravaret-Wattel C., *Le repepleument des eaux et l'exploitation des étangs*, vol. II, 1907.

Blennius gattorugine – una ghiandola esocrina incorporata però nella gonade maschile [1]. Altro fatto importante è che, nella *Perca fluviatilis*, detta ghiandola si trova in ambo i sessi: dobbiamo quindi escludere la nostra primitiva interpretazione che essa potesse derivare dall'atrofia e dal cambiamento di funzione di uno degli ovari.

Il Kammerer e gli altri autori hanno studiato il comportamento dei due sessi della perca nella fecondazione; ma naturalmente ne andrebbe approfondito lo studio dopo il reperto di questa ghiandola, che fornirebbe – secondo le nostre vedute – l'involucro mucillaginoso alle uova. È molto probabile che, con questa maggiore protezione e difesa delle uova, siasi addivenuto ad una riduzione di una delle gonadi femminili, ciò che è conforme alla legge di Spencer. Dalle ricerche istologiche, inoltre, la gonade femminile mostrerebbe comportarsi in modo tutto particolare; e, cioè, in alcuni casi sembra esistere un'ermafroditismo innestato sul sesso femminile, mentre non si sono potute osservare uova nella gonade pari maschile, la quale presenta solo una leggera asimmetria, come ha osservato Turner [2].

Un caso di ermafroditismo sporadico nella perca è stato descritto come un'eccezione, da Chewey [3], in base ad osservazioni fatte in acquario sulla deposizione dei prodotti sessuali; ciò che potrebbe dar luogo a dubbi non essendo la ricerca accompagnata da sufficienti reperti istologici.

Fino a qual punto però l'ermafroditismo sia comune nella *Perca fluviatilis* è oggetto di nostre ulteriori ricerche; del resto sarebbe molto interessante stabilirlo, poichè si colpirebbe quasi in atto, il passaggio di una specie a sessi separati alla forma ermafrodita; di ciò potrebbe forse trovarsi una ragione nel fatto che la presenza della secrezione mucillaginosa, mentre da una parte, non sempre facilita la fecondazione esterna, dall'altra è tale elemento protettivo da portare alla riduzione del numero dei germi occorrenti ad assicurare la perennità della specie [4].

Finora è mancata una qualunque spiegazione etologica all'ermafroditismo dei serrani e delle orate, e possiamo ripetere ciò che scriveva Gegenbaur nel 1901: « Wir betrachten daher die Zwitterbildungen der Teleostei als eine noch der Erklärung harrende Erscheinung » [5].

Nessuna luce sull'argomento può gettare il preteso ermafroditismo giovanile delle anguille, il quale forse non esiste neppure, ma esiste soltanto

(1) Champy CH., *Sexualité et hormones*, Paris 1924.

(2) Turner C. L., *The seasonal cycle in the spermary of the Perch*, « Journal of Morphology », vol 32, p. 681, 1919.

(3) Chewey P., *Observation sur une Perche hermaphrodite (Perca fluviatilis)*, « Bull. Soc. Zool, de France », vol. 47, Paris 1922.

(4) Nella pratica di piscicultura, come aviene effettuata in Italia dal nostro Ufficio della Pesca, la diffusione della perca viene compiuta mediante la semina dei nastrini ovarici.

(5) Gegenbaur C., *Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere*, Bd. II, Leipzig, 1901.

la facoltà di scambiare i due sessi, da parte dell'osservatore, per la piccolezza degli elementi cellulari, nelle prime fasi della linea germinativa.

Se questo ermafroditismo della perca venisse dimostrato, ne risulterebbe un'interessante analogia colle recenti osservazioni dei citologi sulla gonade impari delle galline, le quali avrebbero una tendenza all'ermafroditismo, come indicano le numerose ricerche recenti sugli intersessi. [1]

Patologia vegetale. — *Azione di forti dosi di raggi* γ *sopra il « B. tumefaciens » Smith et Towsend.* Nota di V. Rivera, presentata [2] dal Corrisp. L. Petri.

Questo bacterio, che produce tumefazioni sopra numerose piante, si è addimostrato molto resistente a quelle dosi di raggi X, che risultano curative per i tumori da esso bacterio prodotti [3]. Le prove erano fatte esponendo colture pure di questo bacterio alla irradiazione e quindi inoculandolo sopra piante sane, sia subito dopo la irradiazione, sia a distanza di alcuni giorni. Queste colture pure irradiate si dimostravano virulente, così come quelle di controllo, che non avevano subito irradiazione alcuna.

Mi è parso interessante estendere la prova, sottoponendo questo bacterio ai raggi γ, emessi dal radio, onde cercare di precisare l'azione di queste radiazioni sopra lo stesso bacterio, tipicamente patogeno per i vegetali, e, possibilmente, ritrovare i limiti della resistenza di esso a quel tipo di radiazioni, fornite in questo caso in una *dose altissima*.

Ho potuto infatti disporre, per cortesissima concessione del prof. Trabacchi, direttore dell' « Ufficio del radio » (Ministero degli interni), che ha sede nell'Istituto fisico della R. Università di Roma [4], di una quantità di radio puro veramente notevole (per le prime prove 600 mgr. e per le seconde grammo 1 di radio), con cui ho potuto irradiare a brevissima distanza (cent. 6.20 e poi cent. 5) colture pure di questo bacterio allevate in provette con agar al brodo di carne.

Devesi rilevare che in tutte queste prove la colonia del bacterio era colpita esclusivamente dai raggi γ, e non dai raggi α e β, emessi dal radio, essendo questi arrestati dal vetro della provetta: ciò anche a giudizio del prof. Trabacchi.

Le prime prove furono fatte (18 febbraio 1928) esponendo provette con bacterio di fresco seminato su di esse (da dieci ore) alla irradiazione

(1) Le presenti ricerche sono state dirette da uno di noi (Brunelli).

(2) Nella seduta del 20 maggio 1928.

(3) Vedi « Rendiconti R. Accad. Lincei », vol. II, serie 6ª, Roma, agosto 1925.

(4) Al prof. Trabacchi, che, per queste ed altre prove, mi ha dimostrato la più disinteressata larghezza, devo qui esplicitamente offrire i miei ringraziamenti più vivi.

di mgr. 600 di radio per giorni sei ed alla distanza di cent. 6 e di cent. 20. Ad un giorno dalla prova si esaminarono le provette e si rilevò che tanto in quelle irradiate, quanto in quelle di controllo si era sviluppato il bacterio: tuttavia le colonie sviluppatesi sotto la irradiazione sembrarono più espanse e di colore più chiaro di quelle di controllo, carattere, questo, che è collegato con la *giovanilità* e la *freschezza* della coltura.

Si ripetè la prova al 1° aprile con risultato identico.

Successivamente il prof. Trabacchi potè disporre di una quantità ancora maggiore di radio (un grammo), che mise a mia disposizione per le prove.

Così il 22 aprile potei, nel Laboratorio di Patologia vegetale a Perugia, seminare dodici provette che, e distanza di ventiquattro ore venivano a Roma esposte alla irradiazione della quantità di radio sopradetta con questa disposizione:

a) tre provette alla distanza media di cent. 5 dalle 4 sorgenti di radio, costituite da quattro tubetti nei quali il radio era distribuito; la irradiazione fu continua per giorni 6;

b) tre provette alla distanza media di cent. 5 dalle 4 sorgenti di radio per giorni 2;

c) tre provette alla distanza media di cent. 5 dalle 4 sorgenti di radio per giorni 1;

d) tre provette non irradiate per controllo.

Le osservazioni fatte il 26 aprile, cioè a 4 giorni dalla semina, a 3 giorni dalla esposizione, a 2 giorni dal ritiro dalla irradiazione delle provette *c*, ad un giorno dal ritiro dalla irradiazione delle provette *b*, dànno questo risultato:

Provette *c* e *d*: la colonia bacterica è abbondantemente sviluppata;

Provette *a* e *b*: *nessuno* sviluppo del bacterio si nota sulla superficie dell'agar.

Il giorno 29 si osservò che anche nelle provette *b* si era sviluppato il bacterio, mentre nessuna traccia visibile di esso si vedeva nei tubetti della serie *a*; però il 1° maggio si osservava un principio di sviluppo della colonia bacterica nella parte alta del substrato, che durante l'esposizione era stata la parte più lontana dal radio: il 2 maggio in queste provette appariva alquanto più chiaramente lo sviluppo delle colonie bacteriche e questo momento è stato colto dalla fotografia qui riprodotta. Successivamente anche nelle provette così fortemente irradiate si sono sviluppate abbondanti colonie bacteriche, che hanno presto raggiunto lo sviluppo di quello delle altre provette. Da ciascuno dei tubetti si è poi ottenuto per inoculazione lo sviluppo di un tumore su *Ricinus*.

Da queste prove rileviamo:

1° Questa dose di raggi γ, così straordinariamente forte (un grammo agente alla distanza di cm. 5) non è capace di uccidere questo bacterio patogeno;

2° Essa tuttavia impedisce, fino a che dura l'esposizione, la moltiplicazione del bacterio stesso, il cui sviluppo, successivamente alla irradiazione, si presenta ritardato maggiormente nelle serie più a lungo irradiate;

3° Le colonie più fortemente irradiate, così come quelle meno irradiate, risultano spiccatamente patogene, fatto che si rileva da altrettante inoculazioni quanti erano i tubetti dell'esperimento fatte su piante vive di *Ricinus*, inoculazioni le quali dànno luogo ad altrettanti tumori, ora in pieno sviluppo.

Questi rilievi suggeriscono delle considerazioni:

Innanzi tutto, come si è messo in evidenza in altro lavoro (1), raramente accade di dover rilevare la *uccisione* di cellule vegetali da parte dei raggi γ: l'azione di queste altissime dosi, tanto in caso di vegetali superiori (*Vicia faba*), quanto di vegetali di più semplice costituzione (*Bacterium tumefaciens*) si esplica nel determinare un *arresto della moltiplicazione cellulare* e perciò di un arresto della crescita della colonia bacterica o del germoglio della pianta.

Però, mentre in *Vicia faba* una dose molto minore di raggi è capace di determinare la inibizione alla crescita per mesi (due–tre), in *Bacterium tumefaciens* una dose molto superiore di raggi determina solo l'arresto della divisione cellulare finchè dura l'azione dei raggi o per poche ore più tardi.

Questa differente *radium*-sensibilità di così diversi vegetali paragonata anche con la molto maggiore *radium*-sensibilità dei tessuti animali, e l'effetto inibitorio prodotto nella moltiplicazione cellulare, oltre a poter contribuire forse alla conoscenza di fatti interessanti anche problemi di patologia generale, possono forse, a mio giudizio, essere posti in relazione con la diversa costituzione nucleare (si ricordi che nei bacteri è discussa la presenza del nucleo) delle cellule dei varî organismi in esame.

(1) *Sulla radiosensibilità di « Vicia faba ». Forti dosi di raggi* γ. « Rivista di Biologia », vol. X, fasc. I, 1928.

N. P.

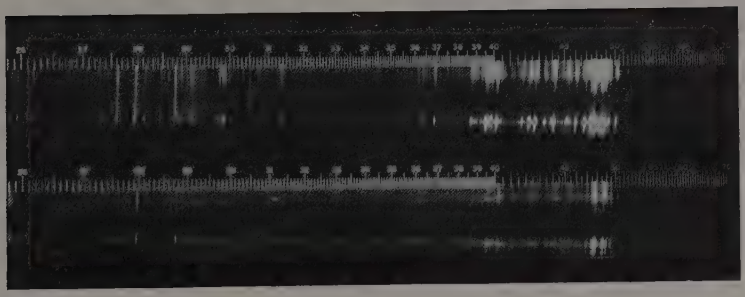


Fig. 1

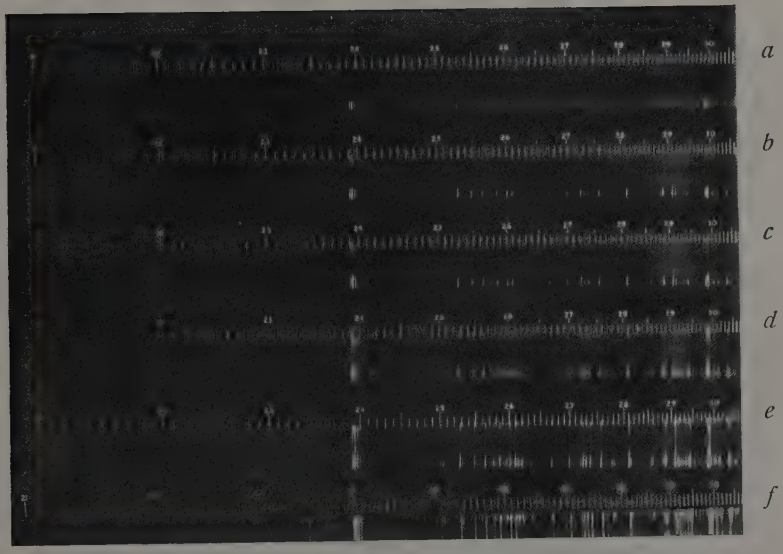


Fig. 2

GANESI - ROMA

Le tre prime provette a sinistra furono colpite con la massima dose di raggi (6 giorni): lo sviluppo del B. incomincia nella parte alta dopo due giorni dal ritiro dalla esposizione. Gli altri gruppi di provette sono successivamente da sinistra verso destra quelli colpiti per due giorni, per un giorno ed i controlli non irradiati.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° giugno 1928 (Anno VI)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Fattori e indici nei gruppi lineari e nei gruppi normali d'operazioni.* Nota [1] del Corrisp. G. GIORGI.

1. Seguendo la denominazione che ho introdotto in una Nota precedente [2], e con una deviazione che credo giustificata dall'uso che altre volte è stato seguito, mi valgo della dicitura *gruppo lineare* per denotare un insieme di enti, il quale simultaneamente formi *gruppo* nel senso di Sophus–Lie, e formi *sistema lineare* nel senso di Burali-Forti e Marcolongo [3]. Per precisare, come condizione principale affinchè un insieme di enti formi gruppo lineare, richiederò che le somme e i prodotti degli elementi fra loro siano definiti, e appartengano all'insieme, e che per queste operazioni valgano le regole dell'algebra ordinaria, salvo, al più, quelle che dipendono dalla proprietà commutativa della moltiplicazione. Come condizioni accessorie richiederò la continuità del gruppo, e che in esso si trovino compresi i numeri 0 ed 1, e quindi tutti i numeri reali, e che per questi ultimi il significato usuale e le proprietà delle operazioni siano conservati, inclusa anche la commutabilità dei prodotti fra numeri ed altri elementi; inoltre, in relazione alla continuità, sia definita entro l'insieme l'operazione di passaggio

(1) Presentata nella seduta del 1° aprile 1928.

(2) *Sulle funzioni delle matrici.* Questi «Rendiconti», vol. VII, serie 6ª (febbraio 1928), pp. 178–184.

(3) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, vol. I; *Transformations linéaires* (Pavia, 1912), introduzione al cap. I. Anche Pincherle ed altri autori hanno usato questa dicitura, in significato quasi equivalente.

al limite (pur non escludendo che possa riuscire convergente o divergente a seconda dei casi), e goda delle ordinarie proprietà di distributività rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.

L'altra condizione accessoria, comunemente richiesta pei gruppi continui, cioè l'invertibilità univoca della moltiplicazione, ovvero l'esistenza di un reciproco ben determinato per ogni elemento, potrà omettersi per non escludere i gruppi di quelle operazioni le cui inverse sono a determinazione multipla e di cui la trattazione del Pincherle ha dimostrato la grande importanza. Basterà richiedere che la divisione sia in generale definita, senza escludere che dia eventualmente risultati infiniti o contenenti costanti arbitrarie.

Così, i numeri reali, i numeri complessi, i quaternioni, gli operatori lineari vettoriali, formano altrettanti gruppi lineari; così anche tutte le matrici (quadrate) di un medesimo ordine. Molte volte, considerando un gruppo di trasformazioni come quello del Lie, si può aggiungere una definizione di addizione tale da poterlo riguardare come gruppo lineare. Per esempio, le omografie dello S_n sono state riguardate solamente come formanti gruppo nel senso ordinario, perchè di esse è definito il prodotto e non più; ma consideriamo i punti dello spazio come dotabili di *pesi* arbitrari, di guisa che le coordinate omogenee acquistino significato di effettive; si definisca (con estensione del procedimento del Möbius) come somma di due punti caricati quello che si ottiene addizionando le coordinate (del detto tipo) omologhe; ne segue immediatamente la definizione di somma di due omografie, e il gruppo diviene lineare. Facendo questa estensione, si ha un vantaggio rimarchevole, perchè si acquista la possibilità di un algoritmo di portata estesa. Nei gruppi considerati dal Lie si possono fare solo moltiplicazioni e divisioni dei singoli elementi; quindi coi simboli che li rappresentano si costruiscono solo monomii. Ma in quelli lineari possono combinare i simboli medesimi in espressioni di natura generale e assoggettarli a operazioni qualunque.

2. Segnalo qui l'interesse che si ha a considerare l'esponenziale nei gruppi lineari, e a definirlo così

$$e^{\mathrm{A}} = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n \tag{1}$$

invece che ricorrendo allo sviluppo in serie. Quest'ultimo sviluppo può perdere senso in casi estesissimi in cui la (1) lo conserva: così altrove [1] ho mostrato essere il caso per l'operatore lagrangiano $e^{h\frac{d}{dt}}$, nella sua applica-

(1) *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica*, « Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana », vol. IX (1905), pp. 651–699, parte I, art. 5.

zione alle funzioni non analitiche. E similmente è interessante considerare il logaritmo, definito sotto la forma

$$\log B = \lim_{n=\infty} \left(B^{\frac{1}{n}} - 1 \right) n \tag{2}$$

dove il simbolo $B^{\frac{1}{n}}$ denota quell'elemento del gruppo che elevato alla potenza n riproduce B; e può avere significato effettivo, univoco o multivoco, o acquistarlo con eventuale estensione del gruppo.

Nel caso di gruppi continui di trasformazioni, questi algoritmi si collegano con due formazioni peculiari che denoterò col nome di *fattori* e *indici* delle trasformazioni che compongono i gruppi. Per fissare le idee, mi riferirò a un gruppo di trasformazioni Φ dello spazio, le quali operino su enti A (p. es., vettori liberi o localizzati su rette, o insiemi di essi, o sistemi di forze); e di questi enti A sia definita l'addizione, e formino sistema lineare. L'addizione dei Φ venga definita in guisa che

$$(\Phi_1 + \Phi_2) A = \Phi_1 A + \Phi_2 A$$

e il gruppo delle Φ completato con questa definizione risulta lineare. Tale è per esempio il gruppo degli spostamenti rigidi, accompagnati de coefficienti che moltiplichino tutti i vettori dello spazio per un comune fattore.

Consideriamo una figura A_0 che per effetto di un'operazione generica Φ del gruppo assume una nuova configurazione $\Phi A_0 = A_1$. In virtù di teoremi noti sui gruppi continui, possiamo effettuare la trasformazione Φ per mezzo di un'operazione continuativa (sottogruppo a un parametro) di tipo analogo a quello dei moti permanenti; cioè tale che considerandola come funzione del tempo t, la velocità e le altre derivate delle quantità che determinano la configurazione di una figura siano a ogni istante funzione dei parametri geometrici e non di t. In linguaggio astratto, questo sottogruppo sarà composto di tutte le trasformazioni Φ^t, dove t può avere un valore reale qualunque. Se di questi sottogruppi ve n'è più d'uno, immaginiamo fissata l'attenzione su uno di essi in particolare, in modo che entro di esso ogni Φ^t resti definita univocamente, anche pei valori non interi di t. Nel gruppo additato come esempio, se Φ è uno spostamento rigido, un sottogruppo Φ^t si ha prendendo tutti i moti rototraslatori compiuti sulla elica privilegiata di quello spostamento.

Ora, la figura generica A dello spazio abbia per effetto del sottogruppo, una configurazione A_t all'epoca t. Trascorso un tempuscolo ulteriore δt, essa divenga

$$A_{t+\delta t} = A_t + \delta A_t \tag{3}$$

dove δA_t è una variazione infinitamente piccola.

Consideriamo l'operazione del gruppo generale (estranea al sottogruppo Φ^t) che applicata ad A_t permette di ottenere δA_t; sarà essa infinita-

mente vicina allo zero [1]; facendo comparire δt come fattore, la scriveremo sotto la forma $\varphi \cdot \delta t$, dove φ è un'operazione finita, di guisa che $\delta A_t = \varphi A_t \delta t$. Avremo allora

$$A_{t+\delta t} = A_t + \varphi A_t \delta t = (1 + \varphi \delta t) A_t . \tag{4}$$

Diremo allora che φ è l'*indice* del moto, o dell'operazione continuativa di altro genere, che costituisce il sottogruppo. Nella terminologia del Maggi, si può dire che φ, applicato alla figura generica A_t, permette di ottenere il suo atto di movimento φA_t.

Per contro, se confrontiamo la figura trasformata dopo un tempo T, con la figura A_t, abbiamo

$$A_{t+T} = \Phi^T A_t \tag{5}$$

mentre

$$A_{t+1} = \Phi A_t \tag{6}$$

conforme alla definizione da cui siamo partiti. Diremo che Φ è il *fattore* del sottogruppo. Di questi due operatori diversi, indice e fattore, possiamo valerci per caratterizzare la successione di trasformazioni che costituisce il moto o il sottogruppo. Quando il moto non esiste, cioè quando la configurazione finale coincide con l'iniziale, l'indice è nullo, ma il fattore è uguale ad uno.

3. Le definizioni algoritmiche date poco fa conducono a precisare il simbolo adatto per rappresentare la relazione tra φ e Φ.

Poniamo il tempuscolo δt sotto la forma $\delta t = \frac{T}{n}$, dove n è un numero che tende verso l'infinito. Allora scriviamo la (4) così

$$A_{t+\delta t} = \left(1 + \varphi \frac{T}{n}\right) A_t$$

relazione, che quando δt è finito, è vera a meno d'infinitesimi d'ordine superiore. Per trovare A_{t+T} si deve ripetere n volte l'operazione, e passare al limite per $n \rightarrowtail \infty$; quindi scrivere

$$A_{t+T} = \lim_{n=\infty} \left(1 + \varphi \frac{T}{n}\right)^n A_t$$

e tenendo conto della definizione (1):

$$A_{t+T} = e^{T\varphi} A_t . \tag{7}$$

(1) L'aggettivo « infinitesimo » applicato a operazioni, è stato, non felicemente, usato per denotare operazioni infinitamente vicine all'unità anzichè allo zero. Quindi il dire « infinitamente vicina allo zero » sembra necessario per evitare equivoci.

Il confronto con la (5) dà

$$\Phi = e^{\varphi} \tag{8}$$

cioe l'indice è il logaritmo del fattore. Questo è d'accordo con la circostanza che $\varphi = 0$ quando $\Phi = 1$.

Regole di calcolo effettivo che permettono di comporre i moti, e più in generale le trasformazioni continue, e dedurre gli effetti finiti da quelli infinitesimi, si ricavano volta per volta. Un caso frequente è che φ si presenti sotto forma di matrice; ogni trasformazione lineare si lascia porre sotto questa forma; allora anche Φ si ottiene come matrice [1], e viceversa.

4. Mostrerò ora come si possa completare una lacuna che R. S. Ball e Clifford avevano lasciato nel loro calcolo motoriale, e per causa della quale gli autori che successivamente hanno trattato dei moti rigidi hanno dovuto rinunciare a trarre partito esteso dal simbolismo geniale di esso calcolo.

I due autori inglesi, dopo aver considerato col nome di motore l'atto di moto più generale di un corpo rigido, e dopo averlo perspicuamente rappresentato come prodotto di una grandezza scalare m per un'elica (*screw*) cioè per un motore M di grandezza unitaria, avevano considerato col nome di *tensor-twist* l'operazione Θ che applicata a una certa figura (p. es., a un sistema di forze, o di vettori localizzati su rette, o così detti *rotori*), la trasporta con spostamento rototraslatorio a una posizione nuova, e contemporaneamente incrementa i suoi moduli scalari (p. es., le grandezze assolute dei detti rotori) secondo un moltiplicatore h.

Immaginando che lo spostamento che fa parte di detta operazione venga effettuato in un intervallo di tempo $T = 1$, in modo uniforme, esso è definito da un atto di moto che è un motore del tipo mM. Per ottenere ulteriormente l'ingrandimento dei moduli, occorre applicare lo scalare h come moltiplicatore. Ma se l'operazione risultante si rappresenta sotto la forma *scalare* $\times$ *motore*, il coefficiente h va a fondersi col modulo m del motore, il quale rappresenta un elemento geometrico ben distinto. Quindi R. S. Ball, dopo aver fatto un ragionamento come il precedente, in parole, ha dovuto rinunciare a rappresentare il *tensor-twist* simbolicamente, e a valersene in formola.

Ora, osserviamo che se θ è lo *twist*, cioè l'operatore che effettua il trasporto rigido senza alterare i moduli, si può legittimamente scrivere

$$\Theta = h\theta .$$

(1) Vedi la mia Nota, già citata, *Sulle funzioni delle matrici.*

Ma l'operatore θ è a sua volta ciò che abbiamo chiamato il fattore dello spostamento, e non va confuso col motore, che invece è l'indice dello spostamento stesso. Il nostro algoritmo conduce a scrivere

$$\theta = e^{mM}$$

e quindi

$$\Theta = h\, e^{mM} \tag{9}$$

e ora ben risulta che h, m non si confondono fra loro, e hanno ben diversa funzione. Questa notazione può introdursi in formola, per proseguire su di essa i calcoli e ricavare le formole di collegamento fra le varie componenti dei moti. L'algoritmo di calcolo motoriale che si ricava si ricollega con quello dei biquaternioni, ed è suscettibile di applicazioni molteplici.

In questo stesso algoritmo, pei medesimi principii, risulta

$$\begin{aligned} \text{fattore di rotazione} &= e^{rotore} \\ \text{fattore di traslazione} &= e^{vettore} \end{aligned}$$

e così gli esponenziali dei vettori, dei rotori e dei motori vengono utilizzati per esprimere operazioni delle quali nei sistemi conosciuti di calcolo vettoriale e motoriale mancava la rappresentazione [1].

5. Si osserverà che siccome nei gruppi lineari non soggetti a restrizione (così, p. es., in quello di tutte le operazioni Θ ora considerate) manca la proprietà commutativa della moltiplicazione, il prodotto degli esponenziali non si ottiene sommando gli indici; e si ha in generale:

$$e^{\alpha}\, e^{\beta} \neq e^{\alpha+\beta} \neq e^{\beta}\, e^{\alpha}.$$

Ma un caso segnatamente importante è quello dei sistemi che nell'altra mia Nota ho chiamato *gruppi normali*, cioè di quei gruppi lineari che soddisfano alla commutabilità nella moltiplicazione; p. es., l'insieme di tutti i quaternioni che hanno lo stesso asse, l'insieme di tutte le operazioni funzionali commutabili con la derivazione [2], quello di tutte le matrici che sono *funzioni aritmetiche* di una data [3]. Gruppi siffatti sono in una particolare relazione di isomorfismo col gruppo delle funzioni di una variabile scalare, perchè è un isomorfismo tanto rispetto alle moltiplicazioni quanto rispetto alle addizioni. In questi gruppi, si possono definire funzioni generiche di singoli elementi (ogni funzione essendo data da un'espressione analitica in cui figurano elementi del gruppo, insieme con parametri scalari) e assog-

(1) Solamente nel calcolo dei quaternioni Hamilton aveva potuto rappresentare con la nota combinazione $q(\ )q^{-1}$ il fattore di rotazione operante nella stella vettoriale, non nello spazio.

(2) Cfr. Pincherle e Amaldi, *Operazioni distributive*, Bologna, 1901, cap. VII.

(3) Nel significato di cui alla mia Nota precedente, già citata.

gettarne i simboli ai comuni algoritmi con le regole dell'algebra scalare, fatta però la debita avvertenza per la forma generalizzata con cui deve enunciarsi la regola per l'annullamento di un prodotto.

I sistemi di calcolo che ho dedotto in altri miei lavori per gli operatori funzionali $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ rientrano in questa teoria.

6. In altra Nota mostrerò come lo studio di moti deformatori tipici dello spazio si possa per questa via ridurre a un algoritmo molto semplice.

Ritengo che le considerazioni qui esposte possano avere un valore non solamente formale, ma conducano a dedurre metodi di calcolo utili per la risoluzione effettiva di problemi.

Matematica. — *Sui moti di deformazione nello spazio, rappresentati col calcolo delle matrici.* Nota del Corrisp. G. Giorgi e di Porcu Tortini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Chiusura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico.* Nota del Corrisp. L. Lombardi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Altre constatazioni concernenti il fenomeno fotoelettrico degli audion.* Nota [1] del Socio Q. Majorana.

In una Nota presentata nella seduta precedente, ho messo in rilievo un fenomeno fotoelettrico constatabile quando si fa cadere un raggio di luce piuttosto intensa e periodicamente interrotta, su di un sensibile audion, opportunamente scelto, connesso con un sistema amplificatore. Feci vedere inoltre, che anche abolendo il sistema amplificatore, basta un solo audion alla constatazione del fenomeno, quantunque in modo molto più debole.

Le esperienze già descritte mi permisero di concludere come la sostanza fotoelettrica attiva in tale fenomeno sia l'ossido di rame, o cuprite, ricoprente il filo di accesso della griglia. Mi è sembrato peraltro opportuno ricercare se altre sostanze all'infuori di tale ossido (che come è noto presenta altre caratteristiche fotoelettriche), possano provocare fenomeni analoghi.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1928.

E difatti, ho potuto constatare come l'effetto trovato non sia peculiare dell'ossido di rame, potendo un numero abbastanza notevole di altre sostanze sostituir questo. In tale studio, ho dovuto inoltre rilevare, che il fenomeno in parola è assai più complesso di quanto esso mi si era appalesato in principio: le modalità sue sono così varie da non lasciar adito, almeno per ora, ad un'utile e precisa ricerca quantitativa. Dato ciò, mi limiterò in questa Nota a descrivere i fatti osservati, riservandomi se ne sarà il caso, di fornire in seguito dei dati numerici.

La disposizione impiegata è ancora quella della fig. 1 della Nota precedente. Il primo audion può essere un A 409 od un A 425 della casa Philips. Per comodità di esperimento, monto tale primo audion, fermandolo ad un sostegno col bulbo di vetro verso il basso e lasciando rivolti verso l'alto i quattro attacchi, che emergono dalla guarnizione isolante. Tre di tali attacchi sono connessi col resto del circuito amplificatore e quello facente capo alla griglia, è lasciato libero. Su tale attacco si possono connettere direttamente, e senza aumentare eccessivamente la capacità elettrica della griglia, le varie sostanze da studiare. Frammenti di minerali, o di sostanze preparate in precedenza, sono così successivamente esaminate; e cioè si ascolta ogni volta l'effetto al telefono connesso con l'ultimo audion amplificatore, quando la sostanza in parola è colpita dalla luce, periodicamente interrotta. Questa luce ha in generale l'intensità indicata nella Nota precedente: solo quando l'effetto è molto forte la si indebolisce opportunamente. I frammenti in parola offrono alla luce una superficie utile dell'ordine del cm. q. Trovo così, che parecchi solfuri come galena, bismutina, antimonite, molibdenite, argentite, solfuro di tallio, presentano l'effetto, analogamente alla cuprite od al filo di rame circondato da vetro fuso. L'effetto è di intensità diversa, da caso a caso; ma mai esso è così intenso, come quando si fa cadere la luce direttamente nell'interno dell'audion.

Col solfuro di tallio di recente preparazione (ma che probabilmente è un ossisolfuro), il fenomeno è particolarmente sensibile. Buoni effetti danno anche la molibdenite, l'argentite ed anche il solfuro di argento preparato artificialmente.

L'effetto è altresì constatabile col selenio, preparato come nelle cellule sensibili alla luce per variazione di resistenza.

L'effetto aumenta di intensità, se nelle vicinanze della sostanza colpita dalla luce, si collocano dei corpi conduttori, in connessione col suolo. Così, spianando la superficie di una delle citate sostanze, ricoprendola con una sottile lastra di mica, e ponendo al disopra di questa una rete metallica a maglie fini in connessione col suolo, l'effetto si accresce di molto. Si tratta evidentemente di una favorevole conseguenza, della accresciuta capacità del sistema.

Ma l'effetto può anche constatarsi, ponendo la sostanza attiva in contatto promiscuo, a guisa di ponte, con il conduttore di griglia e con quello

del filamento, e cioè con la terra. In tale dispositivo la luce deve naturalmente battere nel tratto di sostanza che è compresa fra i due contatti. L'effetto, con tale dispositivo, è tanto maggiore quanto più sottile è lo strato della sostanza attiva. Con certe sostanze, come molibdenite o solfuro di argento artificiale, è possibile sperimentare con spessori di qualche decimo di millimetro. Inoltre, una particolarità interessante si può rilevare, così disponendo l'esperienza; e cioè, che non tutti i punti della sostanza sono egualmente attivi. Concentrando con una piccola lente il fascio luminoso su di un tratto di circa 1 mm.q., e spostando la lente, è facile rilevare un grandissimo rinforzo dell'effetto, per certe località di tutta la superficie.

Se nel circuito filamento, sostanza attiva, griglia, realizzato come ora si è detto, si inserisce una forza elettromotrice, si ha in generale un aumento di effetto. Ma quest'aumento dipende sia dal valore della f. e. m. impiegata, che dal suo senso. Il senso più opportuno può variare da sostanza a sostanza.

L'indicato dispositivo può subire un'interessante variante. Si può connettere con la griglia la sostanza, e toccare questa con l'estremità acuminata di un sottile filo metallico connesso col filamento. Il raggio di luce viene concentrato ancora con la piccola lente, proprio sul punto di contatto tra filo e sostanza. Perchè ciò sia possibile, si tiene la sostanza con la sua superficie utile esposta normalmente al fascio di luce, e si inclina a circa 45°, il filo in connessione col filamento. Per tentativi, come nei ricevitori per radiotelegrafia a cristallo, si riesce a trovare dei punti particolarmente e straordinariamente attivi. La galena sembra la sostanza meglio indicata per tale esperienza.

Si lasci ora la griglia completamente isolata; e al suo conduttore esterno all'audion, si avvicini una sostanza attiva colpita dalla solita luce periodicamente interrotta e in connessione col suolo. Quando la distanza tra conduttore e sostanza è di qualche millimetro, si incomincia di nuovo a sentire l'effetto. Questo cresce col crescer della vicinanza, ossia coll'aumentare della capacità elettrica fra sostanza e conduttore di griglia. Si comprende da tale constatazione, la possibilità di invertire la posizione del condensatore più sopra realizzato; ponendo cioè la rete metallica in connessione con la griglia, e la sostanza attiva al suolo. L'esperienza conferma tale previsione.

Tutte le descritte esperienze hanno di comune il fatto dell'arrivo di luce periodicamente interrotta, su sostanze chimicamente non semplici. Esperienze tentate con metalli presentanti il classico fenomeno fotoelettrico Hallwachs-Righi, non mi hanno dato sinora risultati positivi. Sembra dunque trattarsi di una perturbazione di carattere elettrico provocata dall'arrivo della luce, ma che non corrisponda a liberazione esterna di elettroni. Questi, invece, sono perturbati nell'interno della sostanza stessa, o per meglio dire sulla sua superficie, sino ad una profondità corrispondente a quella a cui la luce può penetrare. Si tratta in genere di sostanze opache o per lo meno fortemente assorbenti.

Non è a ritenersi che l'effetto sia dovuto al riscaldamento prodotto dalla luce. Infatti, mentre è facile constatare che esso è massimo per certe radiazioni che possono non essere le più calde (vedi Nota precedente), ricoprendo qualcuna delle sostanze citate di nerofumo, l'effetto quasi sparisce.

L'effetto è dunque, nelle sue varie manifestazioni, dipendente dalla natura delle materie impiegate, le quali tutte presentano il fenomeno della semiconducibilità; oppure, come nel caso del solfuro di argento, di una netta conducibilità elettrolitica. È noto infatti che questa sostanza, percorsa da corrente elettrica, si carica come un accumulatore.

Non sembra facile dare una teoria unica dei vari fatti constatati. E in vista di tale difficoltà ho in corso altre ricerche ed esperienze tendenti a chiarire per altra via, la natura intima di tali fatti.

Fisica. — *Tensione anodica e temperatura del filamento nelle valvole termoioniche.* Nota del Socio A. Lo Surdo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Elettronili simmetrici e molecole monoatomiche.* Nota [1] del Corrisp. P. Vinassa.

Compilando la tabella degli elettronili non potei fare a meno di rilevare che, oltre alla mancanza assoluta [2] degli aggruppamenti (E)·5 ed (E)·7 si aveva anche una rarità grande di rappresentanti dell'aggruppamento (E)·6. E difatti gli elettronili di questo tipo si riducono a ^{II}C , F^{I} , Cl^{I} , I^{I} e Br^{I} , valenze le quali sono più che discutibili e per taluni anzi assolutamente insussistenti. Non mancai di rilevare a suo tempo questo fatto [3].

A prima vista un aggruppamento con 6 non apparirebbe cristallograficamente asimmetrico. Ma se si analizza questo aggruppamento e si discute la disposizione delle coppie si può rilevare la sua asimmetria. Infatti esso va considerato come (E)·2·2·2 . Ora appare logico ammettere che le due prime coppie siano disposte lungo due assi, tra loro normali. Se anche la terza coppia si disponesse su uno di questi assi la simmetria non mancherebbe. Ma se invece si ammette che i 4 elettroni, esterni, finali, che portano all'equilibrio quaternario, sian disposti su due assi, tra loro perpendicolari, ma inclinati di 45° sull'asse delle coppie precedenti, subito apparisce come l'aggruppamento di una sola coppia a 45° dia un'asimmetria e per-

(1) Presentata nella seduta del 20 maggio 1928.

(2) *Elettroni e simmetria*, « Nuovo Cimento », IV, 10, p. 384.

(3) *Elettroni e simmetria*, loc. cit., p. 387. *La simmetria negli elettroni*, « Rend. R. Acc. Lincei », 6, VI, fasc. II, p. 457.

tanto, secondo la mia ipotesi, non possa sussistere. Ai due aggruppamenti (E)·5 ed (E)·7, già accennati, si deve dunque aggiungere, come simmetricamente impossibile, anche l'aggruppamento (E)·6 inteso come (E)·2·2·2. La figura schematica 1, degli aggruppamenti simmetricamente possibili nei gruppi a simmetria quaternaria, indica chiaramente quanto sopra ho accennato. Si ha cioè lo stadio monoelettronico (E)·1 rappresentato da un'orbita ellittica e indicato col circoletto tutto nero. Il primo stadio binario (E)·2 è indicato coi due circoletti bianchi, mentre il secondo stadio binario (E)·2·2 è indicato con due circoletti crociati. Lo stadio ternario (E)·2·1 è segnato da tre circoletti a metà neri, e finalmente lo stadio finale di equilibrio (E)·2·2·4 (indicato coi quattro circoletti punteggiati nel centro) dà l'equilibrio di gaz nobile. Dalla figura risulta chiaro che questi quattro elettroni

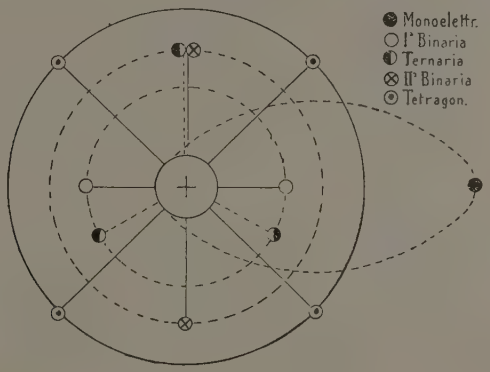


Fig. 1.

possono sussistere solo se sian *presenti tutti e quattro*: mentre, se ve ne fossero 1 o 2 o 3 solamente, si avrebbe asimmetria.

Se si vogliono indicare i corpi semplici, che corrispondono a tali stadî di equilibrio si può fare un aggruppamento degli elementi nei quali è ammissibile una molecola monoatomica. Comincio dal far notare che mantengo la indicazione di (E) per indicare un equilibrio in generale. Ma è forse opportuno anche distinguere il tipo di questo. Così si può segnare (E^4) un equilibrio quaternario di gaz nobile ed (E^6) un equilibrio senario. In tal modo si hanno immediatamente distinti i grandi ed i piccoli periodi di Mendelèjew. Potremmo intanto aggruppare alcuni corpi a molecola monoatomica nel modo seguente:

Stadio monoelettronico:	Tipo (2)·1	(E^4)·1	(E^6)·1
	Li	Na, K, Rb, Cs	Cu, Ag, Au
Primo stadio binario:	Tipo (2)·2	(E^4)·2	(E^6)·2
	Be	Mg, Ca, Sr, Ba	Zn, Cd, Hg

Stadio ternario:	Tipo (2)·2·1	$(E^4)\cdot 2\cdot 1$	$(E^6)\cdot 2\cdot 1$
	B	Al , Sc , Yt , La	Ge , Sn , Pb
Secondo stadio binario:	Tipo (2)·2·2	$(E^4)\cdot 2\cdot 2$	
	C	Si , Ti , Zr , Hf	

Ammettendo strutture di questo tipo ci si rende conto di un altro fatto importante, relativo alla valenza negativa dei corpi anfoteri. La regola da me già indicata circa la massima valenza positiva, vale anche per la valenza negativa e può esprimersi così: *La massima valenza negativa di un corpo è data dalla differenza tra il numero dell'equilibrio immediatamente susseguente e il numero atomico del corpo.*

Si tratta per le valenze negative di cosa ben nota e si può dire messa a punto dal Müller [1] di cui traduco letteralmente due frasi: « Anioni non si conoscono che con 2 o con 8 elettroni esterni. Altri stadi come nei cationi non si osservano, poichè presumibilmente sono troppo instabili per poter trattenere elettroni in soprannumero ». «Del pari sono ignoti atomanioni con vari gradi di valenza ». Senza ricorrere ad una gratuita *presumibile instabilità* il concetto di simmetria rende perfettamente conto di questo fatto.

Come ho già detto per la valenza positiva, così è per la negativa. Tutte le valenze comprese entro la valenza massima sarebbero possibili, ma si debbono escludere quelle che dànno un aggruppamento asimmetrico. Ecco dunque perchè in questi corpi mancano *tutte le valenze intermedie* e non è nota altro che una sola valenza negativa. Difatti si prenda ad esempio il Si. Di questo corpo la massima valenza negativa è 4, data dalla differenza tra 18, numero dell'equilibrio immediatamente susseguente, e il numero atomico 14 del corpo. Non sono possibili nè la mono– nè la bi– nè la trivalenza negativa del Si (^{I}Si , ^{II}Si e ^{III}Si) poichè esse corrisponderebbero ad aggruppamenti rispettivamente: (10)·2·2·1 ; (10)·2·2·2 e (10)·2·2·3 i quali sono tutti asimmetrici. Ciò che si dice per Si vale anche per O , N , C , S , P , Se , As , Te e Sb .

Ma questa ipotesi relativa alla disposizione degli elettroni nell'ultima orbita ha altresì valore perchè serve a darci una spiegazione di un altro fatto interessante, relativo alle eventuali combinazioni dei gaz nobili. Si sa che il lavoro necessario per distaccare un elettrone di Ne è inferiore a quello occorrente per Na , Mg ecc. Come avviene dunque che non si ottenga, ad esempio un NeCl? La questione è ripresa dal Müller [2], il quale riporta una complessa spiegazione di Grimm e Herzfeld, basata sull'energia del reticolato. Il concetto invece della impossibilità della esistenza di elettronili

(1) *Der Aufbau der chemischen Verbindungen*, « Samml. chem. und chem. techn. Vorträge », XXX, Stuttgart, Enke, p. 32

(2) Op. cit. p. 31.

asimmetrici dà una seconda e più semplice spiegazione del fatto. Un NeCl non può esistere, poichè in esso si avrebbe, per il ^{I}Ne, il numero asimmetrico 9 cioè (2·7). Anche il bicloruro e il tricloruro sono impossibili, poichè si avrebbero gli elettroni:li ^{II}Ne e ^{III}Ne con gli aggruppamenti asimmetrici (2)·2·2·2 e (2)·2·2·1. Una combinazione del Ne (e naturalmente degli altri successivi gaz nobili) non è dunque possibile se non vengano *spostati tutti e quattro gli elettroni dell'ultima orbita.* Pertanto Ne, e gli altri successivi gaz nobili, non potrebbero che essere *almeno tetravalenti.*

Quanto è stato detto sin qui, relativamente alla simmetria, si riferisce ai corpi dei gruppi quaternari. Qualche maggior difficoltà si nota per stabilire la posizione degli elettroni nei gruppi ad equilibrio finale senario

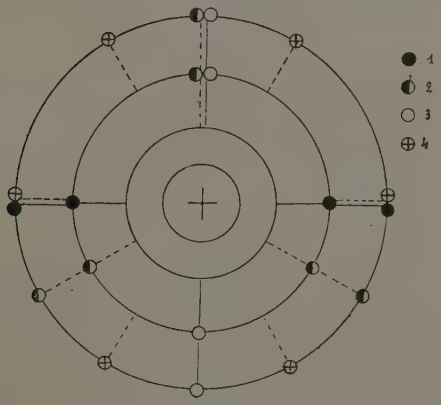


Fig. 2.
Spiegazione dei segni: 1. Binaria. – 2. Ternaria. – 3. Quaternaria. – 4. Senaria.

(E)·4·6. Tanto più che le nostre cognizioni di fatto sulla disposizione degli elettroni in questi gruppi è ancora molto arretrata.

Il Müller [1] effettivamente presenta una tabella della disposizione degli elettroni per quasi tutti i corpi, la quale lascerebbe supporre una cognizione assai ampia dell'argomento. Ma da una quantità di considerazioni, facili a farsi, è chiaro che detta tabella è piuttosto teorica. Ed infatti nelle tabelle americane [2] i dati certi sono assai più ridotti, ma in compenso assai più sicuri. Comunque da quanto si conosce dobbiamo ammettere che nella prima orbita dello stadio senario, immediatamente susseguente all'equilibrio quaternario *non si ha mai lo stadio monoelettronico*: non sussiste perciò l'orbita ellittica, che si può invece avere nella prima orbita dello stadio quaternario. Se difatti questa si ritrova, ad esempio, nel K (col quale corpo si inizia il

(1) Op. cit. p. 11.
(2) «Internat. critical tables», 1926, p. 49.

gruppo senario K — Ni) e che ha il numero 19, l'elettrone non è nell'orbita M_4, prima appartenente al gruppo senario, ma è nell'orbita N_1, appartenente invece al gruppo successivo, di simmetria quaternaria. Non si ha quindi 18·1 ma: 18·—·—·1. Dai dati di fatto cogniti risulta altresì che, mentre gli elettroni delle tre orbite quaternarie sono connessi tra loro per la simmetria, le orbite del gruppo senario non sono tra loro connesse, ma *ciascuna fa simmetria per proprio conto*; esclude cioè nel proprio interno solamente l'1, il 5 e il 7. Ma poichè il massimo numero di elettroni in tali orbite è 6, così sono esclusi solamente l'1 e il 5.

La figura schematica 2 indica le disposizioni simmetricamente possibili degli elettroni in questi gruppi senari. Nella figura il circolo maggiore centrale indica l'equilibrio quaternario precedente. Nella prima orbita possono sussistere solo 2, 3 o 4 elettroni, indicati rispettivamente con circoletti neri, mezzi neri e bianchi. Nella seconda orbita invece possono trovarsi 2, 3, 4 o 6 elettroni, indicati rispettivamente con circoletti neri, mezzi neri, bianchi o crociati. Tipicamente rispondenti a questi aggruppamenti sono i componenti le triadi. Se ci limitiamo alla prima triade avremo nella prima orbita (M_4) il gruppo 2 nel Fe, il gruppo 3 nel Co e il gruppo 4 nel Ni che chiude l'equilibrio col 4·6. Si spiegherebbero (1) così anche le valenze delle triadi secondo lo specchietto seguente:

(E)·2·6	(E)·2·5	(E)·2·4	(E)·2·3	(E)·2·2	(E)·2·1	(E)·2	(E)·1	(E)
Fe	—	Fe^{II}	Fe^{III}	(Fe^{IV})	—	(Fe^{VI})	—	—
Ru	—	(Ru^{II})	Ru^{III}	Ru^{IV}	—	Ru^{VI}	—	Ru^{VIII}
Os	—	Os^{II}	Os^{III}	Os^{IV}	—	Os^{VI}	—	Os^{VIII}
(E)·3·6	(E)·3·5	(E)·3·4	(E)·3·3	(E)·3·2	(E)·3·1	(E)·3		
Co	—	Co^{II}	Co^{III}	(Co^{IV})	—	—		
Rh	—	Rh^{II}	Rh^{III}	(Rh^{IV})	—	—		
Ir	—	(Ir^{II})	Ir^{III}	Ir^{IV}	—	(?Ir^{VI})		
(E)·4·6	(E)·4·5	(E)·4·4	(E)·4·3	(E)·4·2	(E)·4·1	(E)·4		
Ni	—	Ni^{II}	Ni^{III}	(Ni^{IV})	—	—		
Pd	—	Pd^{II}	—	Pd^{IV}	—	—		
Pt	—	Pt^{II}	—	Pt^{IV}	—	—		

(1) Con questo viene ad essere modificato quanto già ebbi ad esporre in una precedente Nota (*L'energia geochimica delle triadi*. - Questi «Rendiconti», vol. VII, n. 1, p. 24) circa l'inerzia di alcuni membri delle triadi. A spiegare l'inerzia relativa del Co (e dei suoi analoghi) non vi è più bisogno di considerare biatomica la molecola del Co, poichè l'equilibrio si ha con 3·6 come nel Fe si ha con 2·6. Però così resta sempre male esplicabile il salto di valenza da 8 a 4 nei secondi membri nelle triadi. Bisognerebbe ammettere che, per ragioni tuttora ignote, mentre nel Fe (ed analoghi) si possono perdere tutti gli elettroni dell'orbita terminale, ciò non possa avvenire nel Co e nel Ni (e loro analoghi).

Messi così a posto anche i nove componenti le triadi avremmo situati nelle loro simmetrie tutti i corpi semplici noti ad eccezione di quelli che non possono avere molecola monoatomica [1], e dei tre gruppi V, Nb, Ta; Cr, Mo, W e Mn e analoghi.

Da quanto oggi si sa o si suppone parrebbe che il gruppo del V dovesse rispondere ad un tipo (E)·3·—·(2); quello del Cr a (E)·4·—·(2), e cioè con una orbita interna libera. Questi corpi dovrebbero dunque presentare possibilità di salti di elettroni nelle varie valenze, analogamente a quanto già dissi circa Cu, Ag ed Aú in altra mia Nota [2].

Per il Mn parrebbe si dovesse avere un aggruppamento (E)·3·2·(2), che per varie ragioni, cui accennerò in seguito, mi pare molto discutibile. Ma date le nostre cognizioni ancora troppo arretrate non è possibile avanzare qualche ipotesi sufficientemente fondata.

Chimica. — *L'allumina Blanc* [3]. Nota [4] del Socio N. Parravano e di V. Montoro.

Quando si riscalda il cloruro di alluminio esaidrato si osservano due singolarità sulla curva di riscaldamento (fig. 1): a 180° si ha un arresto

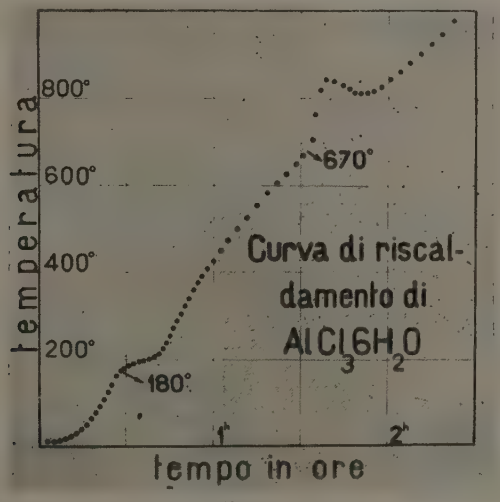


Fig. 1.

(1) Vedasi per questo la già citata Nota: *Elettroni e simmetria*, «Nuovo Cimento», loc. cit., p. 390.

(2) *Elettroni e simmetria*, loc. cit., pp. 391, 392.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(4) Presentata nella seduta del 1° aprile 1928.

che corrisponde alla scomposizione del cloruro con formazione dell'ossido, e verso i 650° una accelerazione nella velocità di salita della temperatura dovuta evidentemente a sviluppo di calore per una trasformazione che l'ossido subisce.

L'ossido che si ottiene a 180° ha forti proprietà adsorbenti le quali si esercitano anche sui prodotti di demolizione del cloruro, acqua e acido cloridrico, tanto che a questa temperatura occorre un tempo lunghissimo per avere un ossido privo di cloro.

Questo si deduce nettamente dallo specchietto che segue dove sono

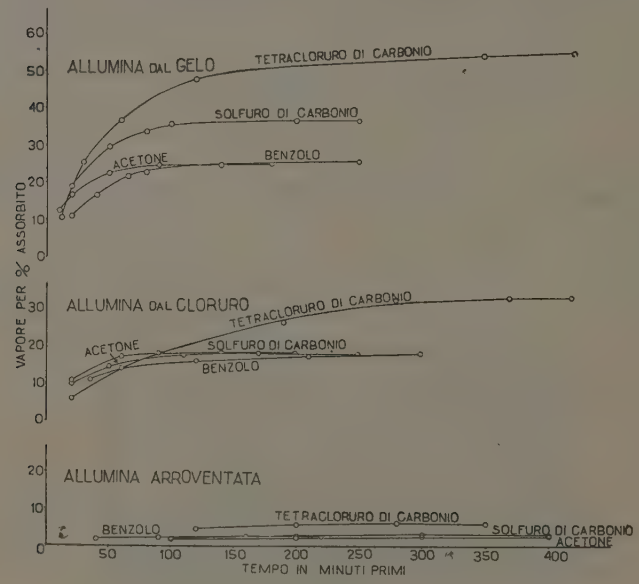


Fig. 2.

riportate le perdite alla calcinazione e i contenuti in cloro di un ossido mantenuto a 180°, per tempi successivamente crescenti:

	Perdita per arroventamento	Cl %
dopo 12 ore	33.8	15.5
dopo 36 ore	15.7	7.5
dopo 60 ore	5.3	2.8

Noi abbiamo voluto stabilire più esattamente il potere adsorbente di questa allumina rispetto a un certo numero di vapori, e lo abbiamo confrontato con quello di due altri prodotti: allumina arroventata a 1000°, e allumina ottenuta da un gelo precipitato a freddo da una soluzione di nitrato e seccato a lungo a 250° (con il 25 % di perdita all'arroventamento).

Abbiamo operato con un dispositivo del tipo descritto da Holmes, Sullivan e Metcalf [1], e nella fig. 2 sono riportate le quantità adsorbite dei diversi vapori in funzione del tempo, a 25°.

Cioè le tre allumine assorbono le proporzioni seguenti di:

	CCl_4	C_6H_6	CS_2	C_3H_6O
Allumina dal gelo	54.6	25.6	36.9	24.9
Allumina dal cloruro	32.5	17.8	18.2	17.9
Allumina calcinata	6.1	2.5	2.95	2.45

L'allumina dal cloruro ha pertanto un potere adsorbente un po' inferiore a quella dal gelo, ma di molto superiore a quella calcinata.

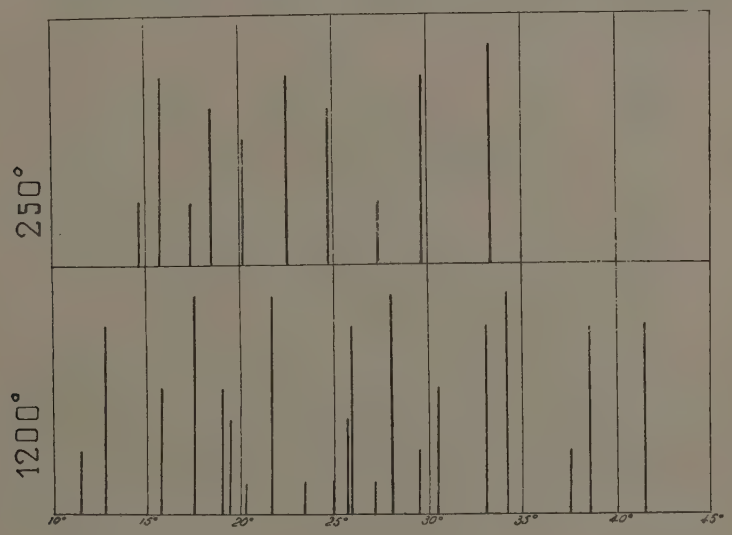


Fig. 3.

Per chiarire la natura della trasformazione che si verifica a 650° siamo ricorsi all' indagine röntgenografica.

Questa è stata eseguita col metodo delle polveri servendosi delle radiazioni $\lambda = 1.537$ Å e $\lambda = 1.388$ Å del rame. Il tubicino portapolvere era di vetro con parete sottilissima, ed era calibrato al diametro di 1 mm. Questo si è portato in conto nel calcolo dell'angolo di riflessione.

Nella fig. 3 è riprodotto lo schema dei röntgenogrammi ottenuti con due allumine, scaldate una a 250° per quindici giorni e una a 1200° per

(1) «Ind. Eng. Chem.», 18, 386 (1926).

circa un mese. Sull'ascissa sono riportati gli angoli ϑ complementari degli angoli di riflessione, e sull'ordinata le intensità delle righe.

Le caratteristiche delle righe osservate e le deduzioni che se ne traggono sono riassunte nelle tabelle che seguono.

Tabella I.

Allumina riscaldata a 1200°.

N.	D	ϑ	I	d	λ	Indici	a_0	
1	40	11°30′	d	3.48	β	(102)	4.74	
2	44.7	12 50	f	3.46	α			
3	55.0	15 48	m	2.55	β	(104)	4.76	
4	61.3	17 36	ff	2.542	α			
5	66.0	19	m	2.36	α	(110)	4.72	
6	67.8	19 28	md	2.082	β	(113)	3.737	
8	75.6	21 43	ff	2.077	α			
7	71.0	20 24	dd	2.20	α	(105)	4.78	
9	82.8	23 30	dd	1.74	β	(204)	4.778	
12	91.5	26	f	1.75	α			
10	87	25	dd	1.642	β	(205)	4.78	a_0=4.76
11	89.8	25 48	md	1.595				
14	56	28 9	ff	1.639	α			
13	95	27 18	dd	1.513	β	(122)	4.746	
16	106.4	30.34	m	1.51	α			
				1.365	β	(300)	4.727	
18	119.0	34 12	ff	1.367	α			
				1.235	β	(1010) (119)	4.756	
20	134.4	38 37	f	1.23	α			
19	129.8	37 41	d	1.257	α	(208)	4.70	
				1,13	β	(1011)	4.80	
21	144.5	41 30	f	1.16	α			
15	103.2	29 39	d	1.406	β	(124)	4.756	
17	115.8	33 14	f	1.402	α			

TABELLA II.

Allumina riscaldata a 250°.

N.	D	ϑ	I	d	λ	Indici	a_0	
1	49	14°24′	d	2.79	β	(110)	5.612	$a_0 = 5.66$
2	55	15 48	f	2.82	α			
				2.55	β	(001) (6)	5.682	
3	60	17 26	d	2.56	α			
4	64.4	18 29	mf	2.42	α	(201)	5.66	
5	70.5	20 16	m	2.03	β	(107)	5.68	
6	78.5	22 34	f	2.00	α			
7	85.5	24 34	mf	1.85	α	(121)	5.68	
				1.67	β	(124)	5.67	
8	95.5	27 26	d	1.67	α			
9	103.5	29 44	f	1.55	α	(303)	5.63	
				1.40	β	(220)	5.59	
10	116	33 19	ff	1.40	α			

I valori che si ricavano per l'allumina a 1200° corrispondono a quelli trovati da Bragg per il corindone [1].

L'allumina a 250° è birifrangente, e le righe del suo spettro si ordinano tutte sul diagramma di Hull relativo al sistema esagonale romboedrico, in corrispondenza del rapporto parametrico 2.72. Questo è doppio di quello misurato da Groth nel corindone [2] e porta a collocare nella cella elementare delle allumine dal cloruro due molecole di ossido.

Per i volumi delle celle elementari dei due ossidi si calcolano pertanto i valori:

a 250° 142.46 Å^3

a 1200° 85.00 Å^3.

Nei due reticoli, cioè, gli atomi sono collocati a distanza diversa, e precisamente molto maggiore nell'allumina ottenuta a bassa temperatura.

Dal volume della cella elementare si calcola per questa una densità di 2.38, e in buon accordo l'esperienza ci ha dato 2.40.

(1) *X Rays and Crystal structure*, p. 180 (1924).

(2) «Chem. Kryst.», I, p. 103 (1906).

Per l'allumina calcinata a lungo a 1200° si calcola invece $d = 3.989$ e si è sperimentalmente trovato 3.99.

L'indagine röntgenografica è stata estesa a una serie di campioni ottenuti a temperature intermedie, e in tutti i casi si sono trovate celle di volume compreso fra i due indicati, e densità corrispondenti.

Nella tabella che segue sono riportate le costanti reticolari trovate sperimentalmente.

TABELLA III.

	Costante reticolare	Densità	
		calcolata	sperimentale
Al_2O_3 dal Clor. a 250° p. 15 g. .	$a_0 = 5.66$	2.38	2.40
» » a 450° p. » .	$a_0 = 5.597$	2.45	2.52
» » a 700° p. » .	$a_0 = 4.997$	3.45	—
» » a 850° p. » .	$a_0 = 4.934$	3.58	3.60
» » a 960° p. » .	$a_0 = 4.896$	3.66	3.65
» » a 1200° p. » .	$a_0 = 4.79$	3.90	—
Corindone	$a_0 = 4.76$	3.989	3.99

I valori di densità sono riprodotti nella curva della fig. 4.

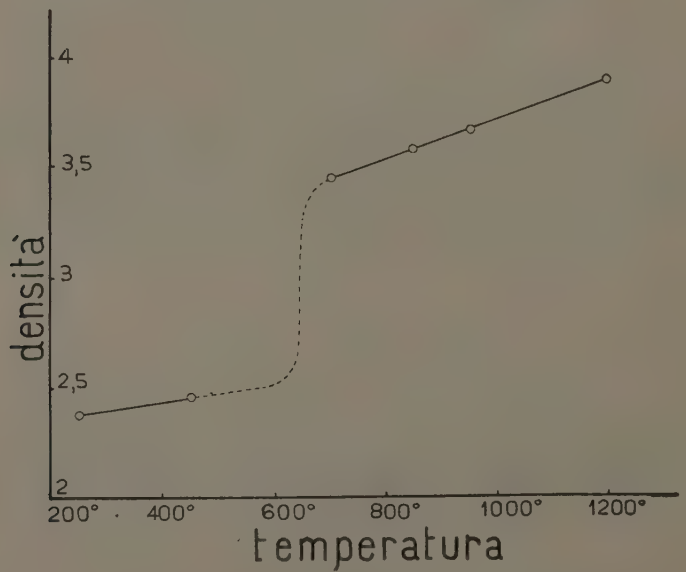


Fig. 4

Come si vede, la curva presenta una variazione brusca verso i 650°. Risulta pertanto logico attribuire lo sviluppo di calore che si osserva a quella temperatura a una diminuzione di volume della cella elementare con conseguente aumento dell'energia reticolare.

Gli atomi di ossigeno e di alluminio raggiungono il loro assetto stabile nel reticolo del corindone e questo assetto essi tendono pertanto ad assumere a tutte le temperature. Ed infatti la densità, e con essa le dimensioni della cella elementare, oltrechè con la temperatura, variano anche – sebbene lentamente – col tempo di permanenza a una data temperatura.

Così la densità del prodotto che si ottiene con un riscaldamento a 450° per quindici giorni è 2.45, mentre dopo due giorni essa è 2.43, e quella dell'allumina portata a 1120° e mantenutavi solo 5 minuti è 3.73 invece di 3.80, quanto si ricava dalla curva della fig. 4.

Riassumendo: l'allumina che si ha per scomposizione del cloruro a temperatura bassa è cristallina, trigonale, ha debole densità, possiede forti proprietà adsorbenti, e subisce verso i 650° una trasformazione esotermica dovuta alla contrazione di volume della cella elementare.

Tutte queste caratteristiche giustificano pertanto il nome che noi le assegniamo di allumina Blanc, in onore del prof. G. A. Blanc, il quale se ne serve per la fabbricazione dell'alluminio nel suo processo di utilizzazione integrale della leucite mediante attacco con acido cloridrico.

Fisiologia vegetale. — *Sopra le radiazioni mitogenetiche del Gurwitsch.* Nota[1] del Corrisp. L. Petri.

Sono note ai biologi le esperienze del Gurwitsch e dei suoi collaboratori[2] secondo le quali da organi vegetali od animali sarebbero emesse delle speciali radiazioni che provocherebbero a distanza la divisione indiretta del nucleo di cellule embrionali appartenenti ad altri organi simili. Schematicamente, e per quanto riguarda le piante, l'esperienza fondamentale consiste nel disporre due radici in accrescimento (di *Allium Cepa* e di *Vicia Faba* o di altre piante) sopra due piani, orizzontale e verticale, in modo che la porzione meristemale dell'una si trovi sottoposta in direzione normale all'apice dell'altra, alla distanza di 2–3 mm. La durata dell'esperienza può essere di mezz'ora come di due o tre ore. Sezionando longitudinalmente la radice indotta, il Gurwitsch ha trovato che il numero delle mitosi dal lato

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) A. Gurwitsch, *Das Problem der Zellteilung physiologisch betrachtet*, J. Springer, Berlin 1926 e altre pubblicazioni del Gurwitsch e della sua scuola contenute principalmente nell' « Arch. für Entwicklungsmech. », 1922–27.

esposto alle presunte radiazioni eccitatrici è maggiore di quello del lato opposto.

Gurwitsch e Franck [1] ammettono che l'emissione di radiazioni mitogenetiche, nelle loro esperienze con bulbi di cipolla, avvenga dalla base delle radici. Essi hanno triturato la porzione basale del bulbo in un mortaio con poca acqua e questa poltiglia ha emesso per circa mezz'ora delle radiazioni mitogenetiche.

Da un simile estratto di tessuti gli AA. hanno potuto separare due sostanze che, isolate, sono inattive, ma, mescolate insieme, danno origine a radiazioni attive, similmente a quanto avviene per la luciferina e la luciferasi secondo le ricerche del Dubois.

Gurwitsch e Franck propongono quindi di chiamare le due sostanze *mitotina* e *mitotasi*, quest'ultima forse della natura delle ossidasi.

Le esperienze estese nel regno animale hanno pure dato dei risultati positivi. Così il potere mitogenetico del sangue è stato riscontrato tanto nell'organismo vivo (attraverso la parete della vena addominale), come nel sangue emolizzato *in vitro*. Secondo Sorin si tratterebbe dell'azione ossidante dell'ossiemoglobina su sostanze ancora non determinate del siero del sangue. Le esperienze (Sousmanovitch) eseguite con l'encefalo di girini e gangli linfatici dei sorci avrebbero pure dimostrato l'emissione di radiazioni mitogenetiche. Secondo Anikin queste verrebbero emesse anche dalla testa del girino vivente.

L'induzione delle mitosi si fa attraverso l'aria e l'acqua sino a 38 mm. di distanza fra l'organo inducente e quello indotto, si propaga in linea retta, subisce una riflessione regolare, attraversa le lamine di quarzo cristallizzato e le pellicole molto sottili costituite da tessuti vegetali o animali. Il vetro e la gelatina sarebbero opachi per le radiazioni mitogenetiche.

Gurwitsch e Franck pensano che si tratti di radiazioni identiche a quelle ultraviolette di $\lambda = 2000$ Angströms circa.

Esperienze di controllo con raggi di $\lambda = 1860 - 2670$ Å hanno permesso di constatare che effettivamente questi raggi provocano un numero maggiore di mitosi nelle radici di cipolla dal lato esposto.

Muovendo dalle ricerche di radiochimica del Perrin, il Magrou [2] ha avuto l'idea che la divisione cariocinetica possa essere determinata dalle radiazioni di una certa frequenza, e si è domandato se un'azione di questa natura intervenga anche nella produzione dei tumori di origine parassitaria. Sperimentando con l'emulsione acquosa di colture giovani di *Bacterium tumefaciens*, ha ottenuto in radici di cipolla 11,5 % di mitosi in più nella

(1) A. Gurwitsch et G. Franck, *Sur les rayons mitogénétiques et leur identité avec les rayons ultraviolets*, « C. R. Acad. Sc. », to. 184, 1927, p. 903. Vedi anche « Arch. für Entwicklungsmech. », Bd. 109, 1927, p. 451.

(2) J. Magrou et M. Magrou, *Radiations mitogénétiques et genèse des tumeurs*. « C. R. Acad. Sc. », t. 184, 1927, p. 905.

parte indotta. Anche più recentemente i batteri sono stati considerati come capaci di emettere radiazioni mitogenetiche [1].

Il Dr. N. Wagner [2] dell'Istituto Botanico di Praga ultimamente ha ripetuto le esperienze del Gurwitsch per quanto riguarda l'azione mitogenetica fra radici e radici. L'A. ha sperimentato su radici di *Allium Cepa* e di *Vicia Faba* constatando che si ottiene un risultato positivo quando la radice indotta è lunga, a lento accrescimento, con poche mitosi, mentre nelle radici brevi, a rapido accrescimento e nelle quali il numero delle mitosi è elevatissimo, non si osservano a questo riguardo differenze fra le due metà della radice, quella indotta e quella non indotta. L'A. ritiene che i risultati ottenuti costituiscono una sicura conferma delle asserzioni del Gurwitsch. Una critica rigorosa delle esperienze sulla presunta esistenza delle radiazioni mitogenetiche ha fatto recentemente il Prof. H. von Guttenberg [3] il quale, riferendo sommariamente i risultati raggiunti dal Dr. B. Rossmann nel suo Istituto (Rostock), fa osservare giustamente come il metodo di contare le mitosi per trarne una prova positiva o negativa dell'azione delle radiazioni mitogenetiche, è un metodo che può dare origine a gravi errori. Infatti il numero delle mitosi in due metà longitudinali di uno stesso apice radicale non è mai il medesimo, e sopra tutto nelle radici a lento accrescimento, con poche mitosi, è facile che questa differenza, come ha osservato lo stesso Wagner, oscilli fra il 13 % e il 25 %. Questo fatto infirma naturalmente i risultati che si possono ottenere col metodo del conteggio delle mitosi e spiega in qual modo il Dr. Wagner abbia constatato in qualche caso un numero maggiore di mitosi dal lato opposto a quello indotto.

Il Von Guttenberg ha poi voluto sottoporre alla prova fotografica le presunte radiazioni mitogenetiche, usando lastre ordinarie sensibilizzate con olio di paraffina come anche quelle di Schumann preparate da A. Hilger di Londra.

Il risultato è stato negativo anche con due giorni di esposizione.

Esposto sommariamente lo stato attuale della questione per quanto riguarda le esperienze nel campo della botanica, desidero riferire brevemente sopra i tentativi da me fatti per stabilire la presenza o l'assenza delle presunte radiazioni mitogenetiche.

Ho eseguito le esperienze con bulbi di *Allium Cepa* e con cariossidi germinanti di *Zea Mays*. Una condizione necessaria è quella di poter orientare nel

(1) M. A. Baron, *Bakterien als Quellen mitogenetischer (ultravioletter) Strahlung*, «Centralbl. für Bakt.», II Abt., Bd. LXXIII, 1928, p. 373.

(2) N. Wagner, *Ueber den von A. Gurwitsch entdeckten spezifischen Erreger der Zellteilung (Mitogenetischen Strahlen)*, «Biol. Centralbl.», Bd. 47, 1927, p. 670. Vedi anche *Planta*, V, 1928, p. 70.

(3) H. von Guttenberg, *Die Theorie der mitogenetischen Strahlen*, «Biol. Central», Bd. 48, 1928, p. 31. Cfr. anche Schwarz, W., *Das Problem der mitogenetischen Strahlen*. Ibidem, p. 302.

modo voluto le radici nei loro rapporti reciproci di posizione e, durante l'esperienza, se la durata di questa debba esser prolungata, la radice inducente deve potersi spostare per conservare pressochè costante la distanza dalla radice indotta. Ho adoperato a un tale scopo un apparecchio appositamente costruito. Mentre la radice verticale è mantenuta nella direzione voluta mediante un breve tubo di vetro, la radice orizzontale è posta fra due ripari di vetro fissati sopra un portaoggetti. Della carta da filtro o del cotone idrofili bagnati mantengono in vicinanza delle due radici un grado di umidità sufficiente. Nella doccia dove si trova la radice orizzontale può esser posta una quantità di acqua sufficiente a sommergere interamente la radice stessa. Un altro dispositivo permette di mantenere egualmente perpendicolari fra loro i due apici radicali, in modo che la radice indotta sia quella verticale e la radice inducente sia disposta orizzontalmente. Tutto l'apparecchio è ricoperto da una campana. Le esperienze sono state eseguite nell'oscurità completa. La durata di ciascuna di esse ha oscillato fra 3 e 6 ore.

La porzione apicale delle radici indotte è stata poi contrassegnata con inchiostro, fissata col liquido di Juel, imparaffinata e tagliata al microtomo.

Le radici di granturco non hanno presentato un numero di mitosi costantemente maggiore dal lato indotto; nelle radici di cipolla la differenza è risultata più apprezzabile, ma non in tutte le esperienze.

Riconoscendo del tutto giustificate le critiche mosse da Von Guttenberg al valore che si può attribuire al conteggio delle mitosi, ho voluto piuttosto stabilire se nelle radici indotte, in seguito ad una più attiva divisione delle cellule, in corrispondenza del lato indotto della radice, si originasse o un incurvamento di questa o un'iperplasia visibili anche ad occhio nudo. Questo risultato può ammettersi come possibile nelle esperienze di lunga durata se realmente agissero delle radiazioni mitogenetiche. Sopra 10 esperienze eseguite con radici di cipolla, e prolungate, ciascuna, per 6 ore, due sole volte si è originata una visibile iperplasia del periblema dal lato rivolto verso la radice inducente. Data la posizione orizzontale della radice indotta, questo risultato potrebbe essere attribuito ad altre cause che agiscono inegualmente sulla metà dorsale e ventrale della radice, come la gravità, il contatto della prima con l'aria o l'acqua e il contatto della seconda col vetro del portaoggetti.

Senza dubbio ha una certa importanza il fatto che l'iperplasia non si è presentata su radici mantenute nelle stesse condizioni, ma senza la presunta induzione mitotica. Sono ora in corso delle esperienze nelle quali la radice indotta è in posizione verticale e quella inducente è disposta orizzontalmente. Indipendentemente dalle prove fatte da Von Guttenberg, sino dal principio del 1927 avevo intrapreso delle esperienze per stabilire, col metodo fotografico, se realmente dagli apici radicali emanassero delle radiazioni identiche ai raggi ultravioletti di breve lunghezza d'onda. Per un tale scopo ho adoperato una camera oscura che permette di disporre in due

cilindri di piombo, rivestiti di vetro, dei semi germinanti, in modo che gli apici radicali sieno rivolti verso una lastra fotografica disposta orizzontalmente e protetta da una lamina metallica portante due aperture in corrispondenza di ciascuna dei due cilindri portasemi.

Una delle aperture è chiusa da un coprioggetti di quarzo, l'altra da un *velo* di cipolla. In questo modo la lastra è protetta contro l'umidità che è necessaria per l'allungamento delle radici. In queste esperienze sono stati adoperati cariossidi di granturco e piccoli bulbi di cipolla. Il controllo era costituito da cariossidi o da bulbi, provvisti di radici ed uccisi col vapor d'acqua a 100° C.

Anche con un'esposizione protratta per 22-24 ore la lastra è rimasta immodificata. Un'esposizione più prolungata offre molte difficoltà a causa del rapido allungamento delle radici. Le lastre fotografiche adoperate erano lastre ordinarie rapide.

Dalle esperienze di Von Guttenberg sembra del resto che anche un'esposizione di 48 ore, e con lastre sensibilizzate per raggi ultravioletti, il risultato è stato pure negativo. Può questo esser ritenuto come definitivo? Altre esperienze che ho ora in preparazione e da eseguirsi con numerose radici riunite in fascio, in modo da ottenere una relativamente elevata intensità delle presunte radiazioni e l'impiego di lastre sensibilizzate in un modo particolare con sostanze fluorescenti estratte dalla stessa pianta a cui appartengono le radici sottoposte all'esperienza, potranno forse portare nuovi elementi per dare un giudizio più fondato sull'ipotesi del Gurwitsch.

D'altra parte, oltre al metodo fotografico, ho voluto esperimentare il metodo elettroscopico, per stabilire se in seguito all'eventuale emissione di radiazioni ultraviolette dalle radici in accrescimento, si verificasse un'ionizzazione dell'aria intorno a queste. L'esperienza, condotta usando ogni cautela per controllare l'errore originato dall'umidità dell'aria, ha dato un risultato negativo, mentre ho constatato una leggera ionizzazione dell'aria sperimentando con le stesse radici ridotte rapidamente in poltiglia [1].

L'idea che nei processi dell'attività vitale intervenga un'energia radiante originata dal citoplasma, o da particolari prodotti di questo, non è nuova: essa muove dalle nozioni acquisite nel campo della fisica in questi ultimi anni ed applicate a teorie della reazione e della reattività chimiche.

Già il Barendrecht [2] aveva ammesso sino dal 1904 che gli enzimi e tutti i catalisatori chimici esplichino la loro azione per irraggiamento. Per quanto dunque le asserzioni del Gurwitsch e dei seguaci della sua ipotesi si fondino principalmente sopra un presupposto teorico e l'attendibilità della

(1) Un risultato simile ottenni anche in precedenti esperienze (cfr. « Riv. di Biologia », vol. IV, 1922).

(2) H. P. Barendrecht, *L'uréase et la théorie de l'action des enzymes par rayonnement*, « Récueil des travaux chim. des Pays-Bas », ser. IV, to. 39, 1920, p. 2.

teoria delle radiazioni mitogenetiche sia ben lungi dall'essere dimostrata, tuttavia non si può affermare che la dimostrazione della inesistenza dei fatti sperimentali asseriti sia stata definitivamente raggiunta. È dunque necessario, nell'interesse della scienza, che le ricerche intorno alla questione sollevata dal Gurwitsch siano continuate.

Patologia. — *Sull'estirpazione del fegato (due nuovi metodi).* Nota [1] del Socio A. Perroncito.

I metodi proposti fin ora per l'estirpazione del fegato, hanno come base l'anastomosi operatoria della vena porta colla vena cava. Senza questa operazione preparatoria non si è mai supposto che si potesse estirpare il fegato.

Pawlow e la sua Scuola hanno praticato l'anastomosi latero-laterale della vena porta colla vena cava e la legatura successiva, a valle, della vena porta. Questa operazione, che a quei tempi presentava molte difficoltà, è stata perfezionata più tardi da parecchi sperimentatori e sopra tutto dal Fischler, che ha studiato nei suoi particolari i risultati della cosiddetta « Fistola di Eck » e di un'altra operazione che egli ha chiamato « Fistola di Eck rovesciata » e che consiste nella sutura latero-laterale della porta colla cava e nella legatura della vena cava tra l'anastomosi ed il fegato. In questo modo tutto il sangue della vena cava ascendente passa attraverso il fegato.

Io ho cominciato le mie esperienze sull'estirpazione del fegato nel 1914, e ho pubblicato i miei risultati nel 1920. Ho cambiato completamente il metodo di anastomosi della porta cava usando un apparecchio composto di due pezzi costituiti ciascuno di due anelli concentrici di diametro diverso, riuniti fra loro da 8 raggi; nel pezzo destinato ad essere fissato alla vena porta i due anelli si trovano su piani diversi, essendo riuniti da raggi disposti obliquamente ai piani dei due anelli che sono paralleli. Nel pezzo destinato ad esser fissato alla vena cava i due anelli si trovano sullo stesso piano. Gli anelli interni e gli anelli esterni dei due pezzi hanno rispettivamente lo stesso diametro.

Dopo aver isolato un tratto di vena porta fra una pinza emostatica ed una legatura, e un tratto di vena cava fra due pinze emostatiche, si taglia la vena porta e si pratica un foro nella parete ventrale della vena cava. Si fanno passare i margini della ferita della vena cava e l'estremo della vena porta rispettivamente attraverso agli anelli interni dei due pezzi dell'apparecchio e si fissano con dei punti di seta agli anelli esterni.

Si fa passare in seguito un filo di seta fra i raggi dei due pezzi per modo da poterli fare aderire solidamente l'uno all'altro, mediante un nodo.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno.

Così le intime delle due vene rimangono aderenti l'una all'altra senza che rimangano fili di seta o corpi estranei di sorta nel lume dei vasi. Se l'apparecchio è fabbricato in magnesio o magnalio si riassorbe rapidamente e come risultato si otttiene un'anastomosi che ha tutti i caratteri di un'anastomosi naturale.

Io facevo la seconda operazione tagliando fra due legature l'arteria epatica ed il coledoco; legavo in seguito alla loro base mediante lacci di seta fina e resistente ciascun lobo del fegato, dopo averli fatti scorrere in modo da tagliare il parenchima e arrivare colla legatura ai vasi centrali. A questo modo si poteva ridurre ad una quantità minima la porzione di organo che rimaneva aderente alla vena cava, e che si poteva poi togliere quasi completamente schiacciandolo ed allontanandolo colle dita e colle pinze emostatiche.

Nel 1922 Mann e Magath pubblicavano le loro prime ricerche e il loro primo metodo sull'estirpazione del fegato e nel 1924 facevano una critica molto particolareggiata dei metodi precedenti. Il loro metodo si compone di tre operazioni.

La prima è press'a poco la Fistola di Eck rovesciata, come l'ha descritta Fischler. Costringendo tutto il sangue dei circoli della cava inferiore e della porta a passare attraverso il fegato, essi ottengono nei circoli stessi un aumento di pressione che dà luogo allo sviluppo del circolo collaterale colla cava discendente.

Nella seconda operazione essi legano la vena porta.

Nella terza operazione essi legano l'arteria epatica e la vena cava al di sopra del fegato ed estirpano l'organo.

Mann e Magath sostengono che il loro metodo è superiore ai precedenti, perchè questi lasciavano una porzione d'organo aderente alla vena cava.

Questa critica di Mann e Magath poteva avere un valore aprioristico ma essa ha perduto ogni valore dopo che le loro esperienze hanno dimostrato che i risultati che si ottengono con questo metodo sono esattamente gli stessi che si erano ottenuti coi metodi precedenti.

Difatti, per quanto riguarda la sintomatologia della morte per estirpazione del fegato e il ricambio dell'azoto, essi hanno soltanto e pienamente confermato i dati che avevo pubblicati nel 1920.

Essi hanno poi ripetuto nel 1924 e nel 1925 le mie esperienze del 1923 sulla formaziona dell'urea e sulla distruzione ed eliminazione dell'acido urico in animali operati di estirpazione del fegato ed eliminazione dei reni, confermando (senza citarmi) tutti i risultati di tutte le esperienze.

Su un solo risultato le loro esperienze non sono d'accordo colle mie.

Nelle mie esperienze io non ho mai trovato presenza di bilirubina nè nel sangue nè nelle urine. Mann e Magath hanno notato un pigmento giallo che essi affermano essere bilirubina. Questa affermazione è stata confermata da Bikel e Makino e negata da Melchior, Rosenthal e Licht che hanno

trovato il pigmento giallo nei cani operati col metodo di Mann e Magath, ma hanno però negato che questo pigmento dia la reazione della bilirubina.

Essi hanno inoltre stabilito che gli agenti che ordinariamente danno luogo a formazione in eccesso di bilirubina non hanno alcuna influenza sulla formazione di questo pigmento giallo.

Io devo osservare a questo punto che le condizioni di esperimento di Mann e Magath e di tutti gli osservatori che hanno trovato il pigmento giallo sia esso o non sia bilirubina, non sono le stesse nelle quali io ho esperimentato. Infatti io ho fatto le mie osservazioni su cani ai quali si era semplicemente estirpato il fegato, mentre le osservazioni di tutti gli altri sono state fatte su animali in cui oltre all'estirpazione del fegato, erano state praticate iniezioni di considerevoli quantità di glucosio nelle vene. Si deve anche considerare che queste iniezioni di glucosio sono state fatte in animali privati dell'organo più importante per il ricambio degli idrati di carbonio. Ad ogni modo bisognerebbe dimostrare che questo pigmento giallo che si trova nel sangue è veramente bilirubina. Ma su questo punto tornerò più tardi.

Il metodo di Mann e Magath è, a mio modo di vedere, il più illogico che sia stato proposto ed eseguito per l'estirpazione del fegato. Non si capisce per qual ragione, per arrivare all'anemia ed alla estirpazione dell'organo, si debba cominciare nell'iperemizzarlo ed esaltarne la funzione (come l'ha dimostrato Fischler) per mezzo della Fistola di Eck rovesciata. Le modificazioni del ricambio che si ottengono in questa fase possono esercitare un'influenza perturbatrice sul risultato finale dell'esperienza. Non si comprende nemmeno perchè si debbano fare tre operazioni e aprire tre volte il peritoneo, quando due sono largamente sufficienti per arrivare al risultato.

Oggi io propongo due operazioni che ho eseguito con ottimi risultati e delle quali la prima non è soggetta alle obbiezioni fatte da Mann e Magath agli altri metodi (per quanto puramente teoriche), e alle obiezioni che si possono fare al metodo di Mann e Magath; l'altra, che è la più importante, prescinde da qualsiasi anastomosi venosa operatoria e rende molto più facile l'estirpazione del fegato.

I Metodo. – Questo metodo consta di due operazioni. La prima è l'anastomosi termino–laterale della porta colla cava secondo il mio precedente metodo, a cui aggiungo una legatura incompleta della cava fra l'anastomosi ed il fegato. Dopo 20 giorni o un mese le anastomosi col circolo della cava superiore sono sufficientemente sviluppate e si può procedere alla estirpazione completa dell'organo asportando anche il tratto corrispondente alla vena cava.

II Metodo. – Anche il secondo metodo consta di due operazioni.

La prima consta semplicemente di due legature incomplete della vena porta e della vena cava sotto il fegato. Si producono così due stenosi ve-

nose, per causa delle quali si aumenta la pressione nei rami afferenti delle due vene e si determina la formazione di un sufficiente circolo anastomotico colla cava superiore.

Dopo una ventina di giorni, formatosi questo circolo, si può procedere all'estirpazione dell'organo come per il metodo precedente.

*
* *

Con questi metodi (per quanto non rimanga nell'animale alcuna cellula epatica) io ho ottenuto gli stessi risultati già illustrati con gli antichi metodi e, praticando le iniezioni di glucosio, secondo le indicazioni di Mann e Magath, ho ottenuto una soppravvivenza abbastanza lunga.

Soltanto dopo le iniezioni di glucosio ho potuto constatare la presenza del pigmento giallo nel siero, ma nè nel siero nè nell'urina ho visto riuscire positiva una sola reazione della bilirubina. A questo proposito io ricordo che nel 1914 e negli anni seguenti io ho eseguito parecchie volte la legatura dell'arteria epatica dopo l'anastomosi termino-laterale della porta colla cava. In queste condizioni i cani possono vivere anche per tre giorni senza alcuna iniezione, e in questi animali io non ho mai visto nè un pigmento giallo nel siero nè una reazione positiva per la bilirubina sull'orina o sul sangue, anche provocando l'emolisi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle varietà* V_n *che contengono un campo vettoriale costante.* Nota di A. Palatini, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Sia V_n una varietà metrica definita dal quadrato dell'elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k , \qquad (1)$$

e v un vettore caratterizzato dalle sue componenti covarianti v_i.

Si vogliono determinare le varietà che contengono un campo vettoriale costante, ossia, ciò che è lo stesso, varietà tali che il vettore v possa trasportarsi per parallelismo (di Levi-Civita) lungo una linea qualsiasi [2].

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) Questo problema (che costituisce un caso particolare di quello di ricercare tutti i tensori costanti associati a una varietà qualunque e intorno al quale comunicherò prossimamente a questa Accademia qualche risultato) è formalmente coincidente con l'altro

Analiticamente ciò equivale a determinare i vettori e le varietà per cui si annullano le derivate covarianti di v_i e sono quindi soddisfatte le condizioni

$$v_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \sum_1^n {}_r \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\} v_r = 0 . \tag{2}$$

Attribuiamo alle v_i la forma canonica [1]

$$v_i = c\lambda_{n|i} ; \tag{3}$$

c rappresenta la lunghezza del vettore $\boldsymbol{v}$ e $\lambda_{n|i}$ i momenti della congruenza $[n]$ definita dal vettore medesimo.

Siccome il trasporto per parallelismo conserva la lunghezza dei vettori, c è una costante e le equazioni (2) equivalgono a

$$\lambda_{n|ik} = 0 . \tag{4}$$

Associamo ora alla congruenza $[n]$ altre $n-1$ congruenze, le quali formino con la prima un'ennupla ortogonale e siano γ_{jik} i corrispondenti coefficienti di rotazione di Ricci, definiti, com'è noto dalle posizioni

$$\gamma_{jik} = \sum_1^n {}_{rs} \lambda_{j|rs} \lambda_i^r \lambda_k^s .$$

Le (4) sono allora equivalenti alle

$$\gamma_{nik} = 0 , \qquad (i , k = 1 , 2 , \cdots , n) \tag{5}$$

perciò l'esistenza di un campo vettoriale costante equivale a quella di una ennupla di congruenze tali, che per una di esse, l'n^{ma} p. es., valgano le (5) [2].

Queste condizioni esprimono che il ds^2 della varietà è **riducibile** alla forma [3]

$$ds^2 = d\sigma^2 + dx_n^2 , \tag{6}$$

dove ds^2 è una forma differenziale quadratica nelle sole $n-1$ variabili $x_1 , x_2 , \cdots , x_{n-1}$. La ipersuperficie V_{n-1} (totalmente geodetica) di elemento lineare $d\sigma^2$ viene tagliata ortogonalmente dalla congruenza $[n]$, la

problema di ricercare le varietà contenenti una congruenza di curve parallele rispetto a qualsivoglia trasversale, già risoluto dal Levi-Civita, nel § 14 della sua Memoria: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, ecc., «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XLII, 1917, pp. 173-205.

(1) G. Ricci et T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, «Mathematische Annalen», B. 54, 1901, pp. 125-201. V. p. 158.

(2) È quasi superfluo rilevare che la congruenza $[n]$ è geodetica, il che è espresso dalle (5) per $k = n$ ($\gamma_{nin} = 0$); nonchè normale, il che è espresso da $\gamma_{nik} = \gamma_{nki}$ ($i \neq k$, essendo $i , k \neq n$).

(3) Vedi H. Levy, *Forma canonica dei ds^2 per i quali si annullano i simboli di Riemann a cinque indici*, «Rend. della R. Acc. dei Lincei», vol. III, Serie 6ª, 1926, pp. 65-69.

quale risulta inoltre una delle congruenze principali della varietà [1]. Con riferimento alla forma (6) le componenti covarianti del vettore v risultano

$$v_i = c\,\varepsilon_{ni}\,, \tag{7}$$

denotando con ε_{ni} l'unità o lo zero secondochè i coincide o no con n.

È manifesto che soddisfatte le (6) e (7), anche le (2) risultano verificate, quindi: *condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà contenga un campo vettoriale costante è che il suo* ds^2 *sia riducibile alla forma* (6) – *con* $d\sigma^2$ *dipendente dalle sole variabili* $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$; *soddisfatta questa condizione, la direzione del campo è quella delle linee (principali)* n [2].

Matematica. — *Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili.* Nota di R. Caccioppoli, presentata [3] dal Corrispondente G. Scorza.

Un'estesa classe, studiata a fondo [4], di superficie quadrabili, è costituita da quelle che Lebesgue ha chiamate *rettificabili*. Rademacher ha dimostrato che l'area di una superficie rettificabile è espressa dall'integrale classico $\iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$, e di più che una siffatta superficie è dotata

(1) G. Ricci, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, « Atti del R. Istituto Veneto », to. LXIII, 1904, pp. 1233-1239.

(2) Il dott. A. Masotti mi comunica che egli aveva rilevato la seguente proprietà (non caratteristica) per le varietà che contengono un campo vettoriale costante e cioè che, in ogni loro punto P, risulta nulla la curvatura riemanniana delle ∞^{n-2} giaciture contenenti il vettore. Infatti se assieme a $\mathbf{v}$ si considera un altro vettore $\mathbf{w}$ formante con il primo l'angolo α, la curvatura della giacitura individuata dai due vettori è

$$K = -\frac{D\alpha}{D\Gamma}$$

(cfr. T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Stock, Roma, 1925, p. 223), dove $D\alpha$ è la variazione dell'angolo fra le direzioni di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, prodotta dal trasporto per parallelismo di $\mathbf{v}$ lungo un ciclo infinitesimo di area $D\Gamma$, appartenente alla giacitura individuata in P da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Ma se il parallelismo è assoluto la determinazione del vettore $\mathbf{v}$ in arrivo coincide con quella del vettore $\mathbf{v}$ in partenza e si ha perciò $D\alpha = 0$. Ne segue $K = 0$, c. v. d. Naturalmente questa proprietà è contenuta nelle formule del testo. Infatti se si fanno intervenire le γ a 4 indici di Ricci, dalle (5) si ha $\gamma_{ni,\,jk} = 0$. D'altra parte la curvatura k della giacitura individuata da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è pure fornita dalla formula

$$K = \frac{1}{\sin^2\alpha} \sum_{i}^{n} {}_{jhk}\,(ij\,,hk)\,v^i\,w^j\,v^h\,w^k$$

(cfr. Levi-Civita, loc. cit.). Introducendo in questa formula le condizioni $\gamma_{ni\,,\,jk} = 0$ e le (7) si trova effettivamente $K = 0$.

(3) Nella seduta del 20 maggio 1928.

(4) Vedi Rademacher, *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln*, II, « Math. Ann. », 81.

di piano tangente in quasi ogni punto. Questo secondo risultato si estende a classi di superficie quadrabili per cui il primo può mancare: p. es., si potrebbe far vedere come tutte le superficie che ho definite nella Nota *Una classe di superficie quadrabili* (1) ammettano quasi ovunque un piano tangente. È però tuttavia insoluto il problema del comportamento « in piccolo » della superficie quadrabile più generale, problema che può formularsi nelle due questioni seguenti:

Il teorema generale sulle tangenti di una linea rettificabile si estende tal quale alle superficie quadrabili?

In caso contrario, il teorema può essere conservato modificando la definizione di piano tangente, sostituendovi, p. es., quella di un piano che possa considerarsi come *quasi* tangente?

Rispondo qui negativamente alla prima domanda, adducendo l'esempio di una superficie quadrabile che *non* possiede quasi ovunque un piano tangente; e suggerisco una risposta alla seconda.

1. Sia ω un numero reale compreso fra 0 e 1, assegnato mediante lo sviluppo decimale, e sia p_n il massimo numero di zeri consecutivi che presentano le sue prime n cifre; poniamo $\varphi_n(\omega) = \frac{p_n}{n}$. Indicheremo con Ω l'insieme dei numeri ω tali che $\varphi_n(\omega) < \frac{1}{2}$ per ogni valore dell'indice; quest'insieme è chiuso ed ha manifestamente misura positiva.

Sia poi α_m un numero razionale compreso fra 0 e 1, avente uno sviluppo decimale finito di cui sia $l'm^{ma}$ l'ultima cifra non nulla.

Diremo A l'insieme dei numeri α_m tali che $\varphi_n(\alpha_m) < \frac{1}{2}$ per $n < m$.

Fissiamo ora nello spazio un piano xy, di cui diremo Q il quadrato fondamentale. Tutti i punti di questo piano, le cui coordinate appartengono entrambe all'insieme A, costituiscono un insieme numerabile I interno a Q; siano essi, disposti in un ordine qualunque, $M_1, M_2, M_3, \cdots$. Le coordinate x_n e y_n di M_n avranno entrambe sviluppi decimali finiti: se questi constano l'uno di μ_n, l'altro di ν_n cifre, diremo m_n il maggiore dei due numeri μ_n e ν_n. Chiameremo poi J l'insieme dei punti di Q le cui coordinate appartengono entrambe all'insieme Ω; la misura di J sarà il quadrato della misura di Ω.

Associamo ad ogni punto M_n un quadrato Q_n avente i lati, di lunghezza l_n, paralleli agli assi x, y, e di cui sia M_n il vertice sinistro inferiore. Supporremo le lunghezze l_n scelte in modo che la serie $\sum \frac{l_n}{10^{m_n}}$ converga, e che di più Q_n non contenga punti di I all'infuori di M_n, sicchè i quadrati $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ siano a due a due privi di punti comuni (ciò

(1) Questi « Rendiconti », novembre 1927.

è sempre possibile, per essere ogni punto di A isolato a destra). Ogni punto di J sarà esterno a tutti i quadrati Q_n.

Sia Π_n uno dei due prismi retti aventi Q_n come base e per altezza $\frac{1}{10^{m_n}}$; ne indicheremo con M'_n il vertice che si proietta su Q in M_n. Sopprimendo ognuno dei quadrati Q_n, e sostituendovi le altre cinque facce del corrispondente prisma Π_n, otteniamo da Q una superficie quadrabile S, la cui area è $1 + 4\sum \frac{l_n}{10^{m_n}}$.

S manca di piano tangente in tutti i punti di J. Sia infatti $P(x, y)$ uno di questi punti: sopprimendo negli sviluppi decimali di x e di y tutte le cifre che seguono la k^{ma}, ne otterremo gli sviluppi di due numeri x_k e y_k appartenenti entrambi all'insieme A, e che saranno pertanto coordinate di uno de punti M, p. es. dell'n^{mo}. Essendo $x - x_k < \frac{1}{10^k}$, $y - y_k < \frac{1}{10^k}$, $m_n \leq k$, la retta congiungente P con M'_n si inclinerà sul piano xy per un angolo non inferiore ad $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$; d'altra parte la congiungente di P e di un qualunque altro punto P′ di J ha sul medesimo piano inclinazione nulla. Ma tanto P′ quanto M_n, e quindi M'_n, possono supporsi arbitrariamente prossimi a P; non può dunque aversi da S in questo punto un piano tangente, almeno nell'accezione consueta del termine.

La superficie che abbiamo costruita, sebbene quadrabile, manca di piano tangente in tutti i punti di un insieme avente area positiva.

2. Da quest'esempio è facile dedurne altri, di superficie dotate della rappresentazione cartesiana $z = f(x, y)$. La funzione f risulterà allora non differenziabile in tutti i punti di un'aliquota positiva del suo dominio di definizione. In ogni caso però, essendo la superficie $z = f(x, y)$ quadrabile, esisteranno quasi ovunque le derivate parziali di f.

Ora ogni funzione quasi ovunque parzialmente derivabile è anche quasi ovunque *asintoticamente* differenziabile; dicendo *asintoticamente* o *approssimativamente* differenziabile la funzione f nel punto (x, y) se la relazione di limite che definisce la differenziabilità secondo Stolz

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) - a\Delta x - b\Delta y] = 0$$

ha luogo quando il punto $(\Delta x, \Delta y)$ non abbandoni un insieme avente la densità 1 nel punto $(0, 0)$ [1].

(1) Questo teorema, assieme ad altri riguardanti la differenziabilità *totale* di una funzione di più variabili è dimostrato in una mia Nota di prossima pubblicazione nei «Rend. dell'Acc. di Napoli».

Questa definizione è analoga ad altre ben note, introdotte da Khintchine e da Denjoy. Essa suggerisce ancora la seguente:

Siano P un punto fisso, P′ un punto variabile sulla superficie quadrabile S; se la retta PP′ tende a diventare parallela ad una giacitura fissa g, quando P′ si approssima a P senza abbandonare un insieme avente (su S) la densità 1 in P, il piano di giacitura g passante per P si dirà *approssimativamente*, o *asintoticamente* tangente, o anche *quasi-tangente* ad S in P.

Dalla proposizione precedente si deduce allora che i punti in cui una superficie quadrabile S di equazione $z = f(x, y)$ non ammette piano approssimativamente tangente si proiettano sul piano xy in un insieme di misura nulla.

Ma si può affermare di più: che *il piano approssimativamente tangente esiste quasi ovunque su* S, *cioè in tutti i punti di un insieme avente area eguale all'area di* S.

Della dimostrazione di questo risultato accenneremo qui solo quanto basti ad intendere i principî su cui essa riposa.

L'equazione (ove adottiamo le notazioni di Monge)

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(X-x)+\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(Y-y)-\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(Z-z)=0$$

rappresenta per quasi ogni punto (x, y) del dominio base D di S il piano approssimativamente tangente ad S nel punto corrispondente. Ma non si può asserire in generale che i coefficienti di questa equazione siano definiti *quasi ovunque su* S; si pone allora il problema di *prolungarne* la definizione.

Ad ogni porzione Σ di S si associano due numeri, positivi o negativi, che misurano le aree (*in valore e segno*) delle sue proiezioni sui piani coordinati yz e zx; indicheremo questi numeri, se E è l'insieme base di Σ, con $A_1(E)$ e $A_2(E)$, e porremo ancora $A_3(E) = \text{mis}\, E$ (area della proiezione di Σ su xy), e $A(E) = \text{area}\ \Sigma$. Avremo così definite quattro funzioni additive degli insiemi di D: in quasi tutti i punti di S esisteranno le derivate delle prime tre rispetto alla quarta, ed avrà luogo la relazione

$$\left(\frac{dA_1}{dA}\right)^2+\left(\frac{dA_2}{dA}\right)^2+\left(\frac{dA_3}{dA}\right)^2=1.$$

Una definizione analitica precisa delle funzioni d'insieme A_1 e A_2 è la seguente:

$$A_1(E) = -\iint_E dx\, f(x, y)\, dy \quad , \quad A_2(E) = -\iint_E dy\, f(x, y)\, dx,$$

ove è chiaro senz'altro il significato dei simboli.

Tutti questi risultati si riconnettono immediatamente alla definizione generale dell'area di una superficie che ho data nella Nota *Sulla quadratura*

delle superficie piane e curve [1] e ad un complemento essenziale che a questa apporto in un'altra in corso di stampa [2]; peraltro, essi sono già parzialmente contenuti in un lavoro recentissimo di Tonelli [3]. Ritornerò fra breve su quest'argomento.

Le tre funzioni $\frac{dA_1}{dA}, \frac{dA_2}{dA}, \frac{dA_3}{dA}$, definite, come abbiamo detto, per quasi tutti i punti di S, sono quindi in particolare definite quasi ovunque su D, ove coincidono ancora quasi ovunque con le funzioni

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

rispettivamente, che *estendono* a quasi tutta la superficie. E di qui si deduce che l'equazione

$$\frac{dA_1}{dA}(X-x)+\frac{dA_2}{dA}(Y-y)+\frac{dA_3}{dA}(Z-z)=0$$

estende l'altra a tutti i punti di un insieme avente l'area di S, in ognuno dei quali rappresenta il piano asintoticamente tangente.

S'intravede ora la via per estendere il nostro teorema ad una superficie quadrabile di equazioni $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$. L'equazione del piano approssimativamente tangente sarà

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(X-x)+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(Y-y)+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(Z-z)=0$$

ove i simboli di determinante funzionale dinotano le *derivate* delle coppie (x,y) , (y,z) e (z,x), quali le ho definite nella seconda delle mie Note ora citate.

Matematica. — *Sul problema della risoluzione apiristica delle congruenze di grado qualunque rispetto ad un modulo primo e la risoluzione apiristica delle congruenze di quarto grado.* Memoria di G. Sansone, presentata dal Socio L. Bianchi.

Sarà pubblicata nel volume delle Memorie.

Matematica. — *Sui tensori costanti associati a varietà binarie e ternarie.* Due Note di A. Palatini, presentate dal Socio T. Levi-Civita.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

(1) Questi «Rendiconti», settembre 1927.
(2) Nei «Rendiconti dell'Accademia di Napoli».
(3) Questi «Rendiconti», marzo 1928.

Matematica. — *Sulla definizione dell'area di una superficie.* Nota di R. Caccioppoli, presentata dal Socio M. Marcolongo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Une interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif de l'hypersurface.* Nota di Joyo Kanitani, presentata dal Corrispondente G. Fubini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur une forme quadratique intrinsèque par rapport à l'hypersurface dans l'espace projectif à plusieurs dimensions.* Nota di Joyo Kanitani, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle condizioni del Saint-Venant relative alle deformazioni dei mezzi naturali.* (Estratto da una lettera al prof. Cisotti). Nota di U. Crudeli, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

Nel fascicolo del 4 marzo corrente anno (pp. 364–367) leggo una sua Nota, intitolata: *Una interpretazione espressiva delle condizioni di Saint-Venant sulle deformazioni infinitesime,* nella quale ella conclude osservando che le condizioni in discorso sono equivalenti alla circostanza *di essere euclidea* la metrica del mezzo deformato. Tengo, pertanto, a farle presente una mia Nota dei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » del 1911 (2° semestre), nella quale fu da me stabilita codesta equivalenza per il caso più generale delle deformazioni finite, nel pervenire ad una elegante forma delle corrispondenti condizioni di Saint-Venant [condizioni che per le deformazioni finite, furono date la prima volta dal sig. Manville [2]; successivamente dal Marcolongo [3], da me e dal Burgatti [4]].

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.
(2) « Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux », 1904.
(3) « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », 1905.
(4) « Memorie della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 1914.

Meccanica. — *Espressione asintotica di una formula del Levi-Civita.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Corrisp. C. Guidi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Gli eclissi di sole totale non centrali.* Nota di P. Emanuelli, presentata dal Corrisp. A. Bemporad.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Stazione astronomico-geodetica eseguita sul Monte Colma di Mombarone nell' agosto 1927.* Nota di U. Barbieri, presentata [1] dal Corrisp. E. Soler.

La prossimità del vertice di 1° ordine, Monte Colma di Mombarone ad Andrate, e le particolari circostanze della regione, per le quali con breve tratto allontanandosi dal piano, ci si avvicina ai più imponenti massicci delle nostre Alpi, Monte Rosa, Monte Cervino, Monte Bianco e Gran Paradiso, mi indussero a porre nel programma del mio lavoro, dopo la stazione di Andrate, compiuta nel 1926, quella del Mombarone.

L'altitudine della vetta (2370^{m}) e, nell'ultimo tratto, l'assoluta impraticabilità dei sentieri che portano ad essa, per qualunque bestia da carico, rendevano aspra l'impresa, tanto più che, avendo intenzione di aggiungere alle consuete determinazioni di latitudine, azimut e gravimetriche, anche quelle di longitudine a mezzo della ricezione radiotelegrafica dei segnali orarî trasmessi dalle stazioni internazionali di tempo, il solo bagaglio scientifico veniva ad avere un peso complessivo di oltre diciotto quintali.

Dopo ricerche non prive di stenti, mi fu possibile raccogliere in Andrate una carovana di quarantacinque portatori, mercè i quali gli strumenti tutti e il necessario al soggiorno sulla vetta di cinque persone, poterono, non senza rischi e disagi, raggiungere sulla fine di luglio, la vetta del segnale.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

In un rifugio prossimo al vertice trigonometrico, riattato per soggiornarvi, furono collocati gli apparati radiotelegrafici, e in fondo, separato a mezzo di una paratia di legno preventivamente costruita, che veniva a staccare all'estremità del rifugio medesimo, un corridoio largo un metro, l'apparato bipendolare per le determinazioni gravimetriche. Sul piazzaletto del vertice fu eretto *ex-centro*, il pilastro per le osservazioni astronomiche, e, attorno a questo, montato il casotto necessario al riparo per quelle. L'antenna radiotelegrafica, lunga circa 100 metri, fu distesa sulla cresta del monte, protendentesi dalla vetta verso nord-est, e assicurata da una estremità ad un'asta smontabile lunga 8 metri, ancorata con opportuni venti, e dall'altra alla colonna in pietra che, sul monte, è eretta a sostegno di una statua del Redentore.

Fecero parte della spedizione il cav. Augusto Guidano, direttore della Radio Italia per Genova, che, dopo aver compiuto nel mio Istituto l'impianto radiotelegrafico, accettava volenterosamente di curarne il funzionamento sul Mombarone; due studenti di matematica dell'Università di Genova, Carlo Federici e Franco Berta, da me fatti esercitare durante l'anno nella osservazione delle coincidenze per le misure gravimetriche; infine il custode del mio Istituto, Rogolino Gregorio.

Il soggiorno sul vertice si protrasse dal 25 luglio al 12 agosto: il materiale d'osservazione raccolto fu sufficiente allo scopo prefisso, pur non costituendo larga messe di dati, poichè, ad onta che la sosta sul Mombarone fosse stata di quasi venti giorni, il tempo molestò fortemente lo svolgimento del programma, riducendo il numero dei giorni d'osservazione. La vetta della Colma è, per detto degli abitanti della regione, sempre avvolta nella nebbia, e a noi, oltre la nebbia, il tempo fu generoso di furiosi temporali: due volte andò fuso il cordone del parafulmine eretto a nostro riparo; il vento, l'acqua e la grandine violentissima, si aggiunsero alle scariche elettriche, per rendere il soggiorno disagiato e sconfortevole.

Prima di chiudere questa breve relazione mi sia concesso esprimere qui alla Presidenza della nostra R. Commissione Geodetica i sensi di gratitudine vivissima per l'appoggio finanziario che essa mi dà di continuo, e senza del quale non mi sarebbe possibile condurre a buon fine lo svolgimento del programma del mio lavoro.

Determinazione della latitudine.

Il segnale trigonometrico di 1° ordine di Monte Colma di Mombarone, è individuato da una piccola croce incisa su di un blocco di pietra, incastrata sul ripiano roccioso con cui termina la vetta del monte. Retrostante, verso nord, a quattro metri circa dal segnale, è costruita una piccola cappella, sulla quale si eleva un'alta colonna sostenente una statua del Redentore.

Essendo necessario per le determinazioni di tempo e di azimut avere libera la visuale diretta alla Polare, ed essendo essa ostacolata dalla colonna suddetta, fu mestieri disporre il pilastro *ex-centro*.

Gli elementi di riduzione, direttamente misurati, risultarono i seguenti

$$e = 3^m.670 \qquad \varepsilon = 120^\circ\,42'\,29''$$

essendo ε l'angolo fra la direzione al centro, e la direzione al vertice di 4° ordine costituito dall'asse del campanile ben individuabile, del paese di Donato.

Lo strumento impiegato per le determinazioni, fu il consueto Universale Bamberg, già usato nelle stazioni precedenti, e il metodo quello di Sterneck, e cioè osservazione dei passaggi al meridiano di 48 stelle fondamentali, scelte nel B. A. J. divise in sei gruppi di otto ciascuno, puntate in successione alterna, ad est e ad ovest del meridiano, avendole scelte in guisa che in ogni gruppo quattro stelle culminassero a nord, e quattro a sud, e tali che la somma delle distanze zenitali per ogni gruppo, risultasse contenuta entro limiti ristretti.

Le osservazioni occuparono le notti del 4 e 5 agosto; nelle poche giornate di bel tempo che precedettero e che seguirono, nella notte le nebbie ostacolarono ogni osservazione; negli altri giorni, fino alla partenza, furiosi temporali sferzarono con insistenza la vetta del monte.

Stante la bassa pressione riscontrata di 580^{mm}, la rifrazione astronomica si dedusse mediante le note tavole di W. Bowie, nelle quali la rifrazione stessa è data dal prodotto $r = r_M\, c_B\, c_T$, essendo r_M la rifrazione a 760^{mm} e 10° centigradi, e c_B, c_T due coefficienti dipendenti dalla pressione e dalla temperatura effettiva d'osservazione.

Nello specchio seguente si riportano i risultati complessivi delle osservazioni eseguite

1927	GRUPPO					
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
4 agosto	45° 34′ 46″.2	45° 34′ 47″.9	45° 34′ 45″.4	45° 34′ 46″.9	45° 34′ 46″.0	45° 34′ 41″.4
5 agosto	48.8	50.5	47.6	44.9	45.0	49.6
Medie	47.5	49.2	46.5	45.9	45.9	47.0

La media generale dei 96 valori osservati dà, come risultato finale,

$$\varphi = 45^\circ\,34'\,47''.0$$

La riduzione in centro di questo valore, dedotta con la formola

$$\Delta\varphi'' = -\frac{e\cos\alpha}{R\,\mathrm{arc}\,1''},$$

dove è α l'angolo di direzione della visuale al centro trigonometrico, dedotto con l'aiuto dell'angolo noto di direzione della visuale a Donato, risultò

$$\Delta\varphi = +0''.1,$$

onde in definitiva si ebbe, quale latitudine astronomica del vertice di Mombarone

$$\varphi = 45° 34' 47''.1 \pm 0''.4$$
(Epoca 1927, 6)

Nella stazione compiuta ad Andrate nel 1926 trovammo (vedi questi « Rendiconti ») una deviazione locale in latitudine di — 29'.'0: tenuto conto per il Mombarone del valore $\varphi_g = 45° 35' 08''.2$ fornito dall'Istituto Geografico M^re. ne consegue quindi nel detto vertice una deviazione in latitudine di — 21''.1; onde fra Andrate e Mombarone una variazione nella deviazione stessa di ben 8'' d'arco, pur essendo i due vertici fra loro distanti di appena 5400^m circa.

Daremo conto, in altre due Note, delle determinazioni di azimut e di quelle radiotelegrafiche di longitudine.

Geofisica. — *Per la spiegazione delle onde sismiche superficiali.* Nota di E. Oddone, presentata dal Socio L. Palazzo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sui termini accentati del Calcio.* Nota di G. Gentile, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

Scopo del presente lavoro è il calcolo, in base alla teoria di Schrödinger, di alcuni speciali termini degli atomi alcalino-terrosi, e in particolare del calcio.

Dalla nuova teoria dei quanti si sa che ad un elettrone s si deve attribuire una distribuzione d'elettricità con simmetria sferica.

Essendo essi atomi bivalenti, gli alcalino-terrosi hanno due elettroni esterni, che normalmente si trovano in uno stato s; e mentre uno di essi rimane nello stato fondamentale, l'altro può venire eccitato. Infatti il termine fondamentale del Ca^+, p. e., è un termine S.

Nella sua nuova orbita l'elettrone si può considerare in un campo centrale, poichè nel resto atomico la distribuzione d'elettricità ha simmetria sferica, e quindi è indifferente l'orientazione dell'orbita rispetto a tutto l'atomo. Ma vi sono altri termini, conosciuti col nome di *termini accentati*,

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

per i quali si deve pensare, come fece per primo Bohr, che ambedue gli elettroni esterni si trovano spostati, fuori dell'orbita fondamentale s; poichè il limite di questi nuovi termini non coincide con il limite dei termini normali. Anzi Wentzel [1] ha osservato che questi due limiti, nel calcio, differiscono precisamente dalla differenza che esiste fra il termine ^2D e il termine S del Ca^+.

Quindi quello che si può chiamare elettrone luminoso, non si viene più a trovare in un campo centrale, essendo l'altro elettrone in un'orbita d, che non ha simmetria sferica. E si vengono perciò a distinguere nuovi livelli energetici con le varie possibilità d'orientazione dell'orbita dei due elettroni.

D'altra parte si sa dalla teoria dei quanti che le diverse orbite s, p, d si caratterizzano dal valore $0, 1, 2$ $\left(\text{in unità } \frac{h}{2\pi}\right)$ che può assumere il vettore l, quantità di moto areale. Quindi considerare le orientazioni delle due orbite equivale a studiare la posizione nello spazio dei due vettori l_1, l_2 delle due orbite e la loro risultante l.

Russel e Saunders [2] hanno così spiegato questi nuovi termini, dandone questo modello:

$$^3P' \quad l_1 = 2 \quad l_2 = 2 \quad l = 1 \qquad ^3D' \quad l_1 = 2 \quad l_2 = 1 \quad l = 2$$
$$^3D'' \quad l_1 = 2 \quad l_2 = 2 \quad l = 2 \qquad ^3P'' \quad l_1 = 2 \quad l_2 = 1 \quad l = 1$$
$$^3F'' \quad l_1 = 2 \quad l_2 = 1 \quad l = 3$$

2. Di qui si vede subito quale quanto azimutale bisogna dare ai due elettroni e, con la tabella del sistema periodico, si può ancora determinare i loro quanti totali.

Noi abbiamo scelto il caso più caratteristico in cui $l_2 = 2$; $l_1 = 1$ e facendo il caso concreto del calcio, abbiano facilmente visto che vi corrispondono rispettivamente un elettrone $3d$ e un elettrone $4p$. L'autofunzione scritta in coordinate polari da attribuire all'elettrone $3d$ è:

$$\psi = X_{3,2}(r) \cdot Y_{2,m}(\theta) \cdot Z_m(\varphi)$$

con

$$X_{3,2}(r) = \sqrt{\left(\frac{2\xi}{3a}\right)^3 \frac{1}{5!\,6}} \quad e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^2 \qquad \left(\text{con } a = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \quad \xi = \frac{2\xi}{3a} r\right)$$

$$Y_{2,m}(\theta) = \sqrt{\frac{5}{2} \frac{(2-m)!}{(2+m)!}} P_{2,m}(\cos\theta) \qquad \text{(indicando con } P_{2,m} \text{ la corrispondente funzione sferica)}$$

$$Z_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad m = \begin{cases} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

(1) Wentzel, «Phys. Zeit.», vol. 24, p. 104 (1923); vol. 25, p. 182 (1924).
(2) Russel e Saunders, «Astrophysical Journal» (1925), vol. 61.

Per l'elettrone $4p$ invece si ha:

$$\psi = X_{4,1} \cdot Y_{1,m} \cdot Z_m$$

con

$$X_{4,1}(r) = \sqrt{\left(\frac{Z}{2a}\right)^3 \frac{2!}{5!\,8}} \qquad e^{-\frac{\xi'}{2}} \xi' (\xi'^2 - 5\xi' + 10) \qquad \text{con } \xi' = \frac{Z}{2a} \cdot r$$

$$Y_{1,m}(\theta) = \sqrt{\frac{3(1-m)!}{2(1+m)!}} P_{1,m}(\cos\theta) \qquad Z_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(m = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}\right)$$

Il nostro problema posto in questi termini si presenta formalmente molto simile a quello dell'elio; e si sa [1] come si deve condurre il calcolo secondo la meccanica dei quanti. Il sistema nucleo e due elettroni, oltre l'energia corrispondente alle orbite balmeriane dei due elettroni (avendo noi preso per essi in prima approssimazione le autofunzioni dell'atomo d'idrogeno, però con un certo Z efficace) possiede ancora l'energia che proviene dalla loro mutua azione. Questa energia si calcola con il metodo delle perturbazioni, dove indicando con r_1 e r_2 le distanze dal nucleo, come nella meccanica classica, la funzione di perturbazione è:

$$H = e^2 (r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)])^{-\frac{1}{2}}$$

Un'autofunzione del sistema non perturbato è il prodotto $\psi_i(r_1)\psi_k(r_2)$ di un'autofunzione $\psi_i(r_1)$ del primo elettrone per una $\psi_k(r_2)$ del secondo; di più siccome il sistema rimane identico scambiando i due elettroni il prodotto $\psi_k(r_1)\psi_i(r_2)$ sarà ancora un'autofunzione del sistema. Il sistema quindi è un sistema degenere e precisamente è 30 volte degenerato.

Se si applicasse senz'altro a questo sistema i metodi del calcolo delle perturbazioni si andrebbe incontro a inutili complicazioni, che si possono eliminare guardando al lato fisico della questione.

Infatti se si pensa al significato fisico del numero quantico m detto anche numero magnetico, corrispondente cioè al valore che può assumere la proiezione del vettore l sull'asse d'un campo magnetico, si pone la questione quali sono le posizioni che rimangono inalterate con l'annullarsi del campo magnetico. Evidentemente queste sono le posizioni: parallela e antiparallela alla direzione del campo. Otteniamo, quindi, queste combinazioni:

$m_1 = 1 \quad m_2 = 2 \quad l = l_1 + l_2 = 3$ (termini F'') $\qquad m_1 = -1 \quad m_2 = +2 \quad l = 1$. (termini P'')

Invece perchè $l_1\, l_2$ avessero come risultante $l = 2$ bisognerebbe che l_2 e l fossero i lati d'un triangolo isoscele; ma in questo caso non si sarebbe più sicuri del risultato. Per queste ragioni ci siamo limitati a studiare

(1) Heisenberg, «Zeit. für Physik», *38*, 411; *39*, 499 (1926).

i termini P ed F, isolatamente; scrivendo per ciascuno di essi una matrice di questa forma:

$$\begin{Vmatrix} H_{11} - \varepsilon & H_{21} \\ H_{12} & H_{22} - \varepsilon \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{con } H_{12} = \int \varphi_1 \tilde{\varphi}_2 \, H \, d\tau \text{ ecc.}$$

Per la simmetria della funzione H di perturbazione $H_{12} = H_{21}$ ed $H_{11} = H_{22}$; quindi le due radici sono $\varepsilon_1 = H_{11} + H_{12}$; $\varepsilon_2 = H_{11} - H_{12}$ di cui occorre prendere, essendo questi termini tripli, l'antisimmetrica ε_2, che obbedisce al principio di Pauli (1).

Calcoliamo adesso gli elementi della matrice di perturbazione per i termini F'' e P'' di cui possiamo scrivere le autofunzioni:

$$\varphi_1 = \Psi^{(1)}_{4,1,1} \Psi^{(2)}_{3,2,2} \qquad \varphi_2 = \Psi^{(1)}_{3,2,2} \Psi^{(2)}_{4,1,1} \qquad \text{(per F'')}$$

$$\varphi^*_1 = \Psi^{(1)}_{4,1,1} \Psi^{(2)}_{3,2,-2} \qquad \varphi^*_2 = \Psi^{(1)}_{3,2,-2} \Psi^{(2)}_{4,1,1} \qquad \text{(per P'')}$$

Intanto possiamo subito osservare che:

$$H_{11} = H^*_{11} = e^2 \int \frac{\varphi_1 \tilde{\varphi}_1}{r_{12}} \, d\tau = e^2 \int \frac{\varphi^*_1 \tilde{\varphi}^*_1}{r_{12}} \, d\tau$$

ma occorrendoci solo la differenza fra i livelli P'' ed F'' possiamo trascurare di determinare questo elemento. Per calcolare ora H_{12}, cioè

$$H_{12} = e^2 \iiint\iiint \frac{\varphi_1 \tilde{\varphi}_2 \, r_1^2 r_2^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \, dr_1 dr_2 \, d\theta_1 d\theta_2 \, d\varphi_1 d\varphi_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}}$$

ricordiamo queste proprietà delle funzioni sferiche:

$$\{r^2 + r'^2 - 2 r r' [\cos\theta \cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos(\varphi - \varphi')]\}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_0^\infty {}_k \frac{r'^k}{r^{k+1}} \frac{2\pi}{2k+1} \sum_{-k}^{+k} {}_i \, Y_{ki}(\cos\theta) \, Y_{ki}(\cos\theta') \, Z_i(\varphi) \, \tilde{Z}_i(\varphi')$$

dove $r' < r$. Così, per l'ortogonalità delle funzioni sferiche, si può fare immediatamente l'integrazione rispetto agli angoli θ e φ, e si ottiene

$$H_{12} = e^2 \iiint\iiint \varphi_1 \tilde{\varphi}_2 \times$$

$$\times \frac{2\pi}{3} \frac{r'}{r^2} \, Y_{11}(\cos\theta_1) \, Y_{11}(\cos\theta_2) \, Z_1(\varphi_1) \, \tilde{Z}_1(\varphi_2) \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \, r_1^2 r_1^2 \, dr_1 dr_2 \, d\theta_1 d\theta_2 \, d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$= \frac{e^2}{5} \int_0^\infty \int_0^\infty X_{4,1}(r_1) \, X_{3,2}(r_1) \, X_{4,1}(r_2) \, X_{3,2}(r_2) \, \frac{r'}{r^2} \, r_1^2 r_2^2 \, dr_1 dr_2 \, .$$

(1) Dirac, *Theory of Quantum Mechanichs*. «Proc. of Royal Society», vol. CXII, p. 669.

Analogamente per H^*_{12} si ottiene:

$$H^*_{12} = \frac{9}{98} e^2 \iint X_{4,1}(r_1)\, X_{3,2}(r_1)\, X_{4,1}(r_2)\, X_{3,2}(r_2)\, \frac{r'^3}{r^4}\, r_1^2 r_2^2\, dr_1\, dr_2 .$$

4. Andando adesso ad integrare rispetto ad r_1 e r_2 si ha:

$$H_{12} = \frac{e^2}{5}\left(\frac{Z^2}{3a^2}\right)^3 \frac{1}{5!^2\, 3.8} \int_0^\infty e^{-\frac{x+x'}{2}} x^2 x' \left(\frac{x'}{2} - 5x' + 10\right) r_1^2\, dr_1 \left\{ \frac{1}{r_1^2} \int_0^{y_1} e^{-\frac{y+y_1}{2}} y^2 y' \left\{ \frac{y'^2}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 5y' + 10 \right\} r_2^2\, dr_2 + r_1 \int_{y_1}^\infty e^{-\frac{y+y'}{2}} \times y^2 \times y' \left\{ \frac{y'^2}{2} - 5y' + 10 \right\} dr_2 \right\} .$$

E introducendo come nuove variabili $u = \gamma r_1 ; u' = \gamma r_2$ con

$$\gamma r = \frac{x+y}{2} = x\frac{1+\varepsilon}{2} = y\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \quad \text{ed} \quad \varepsilon = \frac{y}{x} = \frac{3}{4},$$

si ha ancora per H_{12} l'espressione seguente (nella quale è $C = \frac{3^3\, 2^{24}}{5 \cdot 7^{11} \cdot 5!^2}$):

$$H_{12} = ZR \cdot h \cdot C \cdot \int_0^\infty e^{-u} \left(u^7 \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} - 5\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u^6 + 5u^5 \right) \left\{ \frac{1}{u^2} \int_0^u e^{-u'} u'^6 \left(u'^2 \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{5\varepsilon}{1+\varepsilon} u + 5 \right) du' + u \int_u^\infty e^{-u'} u'^3 \left(\frac{u'^2 \varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{5\varepsilon}{(1+\varepsilon)} u' + 5 \right) du' \right\} du .$$

Eseguite tutte le integrazioni si ottiene, dopo calcoli un po' laboriosi, il risultato seguente:

$$H_{12} = -C \cdot Z \cdot Rh \cdot 8500 = -RZ \cdot h\ 0{,}0270 .$$

Analogamente per H^*_{12} si ha l'altra espressione:

$$H^*_{12} = ZRh\frac{45}{98} \cdot C \int_0^\infty e^u \left(\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} u^7 - \frac{5\varepsilon}{1+\varepsilon} u^6 + 5u^5 \right) \left(\frac{1}{u^4} \int_0^u e^{-u'} \left\{ u'^{10} \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{5\varepsilon}{1+\varepsilon} u^9 + 5u' \right\} du' + u^3 \int_u^\infty e^{-u'} \left\{ u'^3 - 5u'^2 + u'^2 \right\} du' \right) du .$$

Fatte le integrazioni si trova:

$$H^*_{12} = -ZRh \cdot \frac{C\,45}{98} \cdot 5130 = -ZRh\ 0{,}0075 .$$

L'energia totale di perturbazione è dunque per P'':

$$H_{11} - H_{12} = H_{11} + ZRh\ 0{,}00270 ;$$

per P'' invece è:

$$H^*_{11} - H^*_{12} = H_{11} + ZRh\ 0{,}0075 .$$

Espressi quindi i termini P'' ed F'' in numeri d'onda si ottiene il risultato: $F'' - P'' = R Z \cdot 0{,}0195$.

E se si pone adesso per Z efficace il valore 1,8 suggerito dalla esperienza si ricava:

$$F'' - P'' = 3730 \ (cm^{-1})$$

valore prossimo al valore effettivo 3550 (cm^{-1}), se si pensa alle approssimazioni fatte.

Fisica. — *Sopra il calcolo dei termini* M *per mezzo del potenziale statistico dell'atomo.* Nota di F. Rasetti, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

In alcuni recenti lavori, E. Fermi [2] ha mostrato come molte proprietà dell'atomo possano essere dedotte considerando l'insieme degli elettroni che circondano il nucleo come un gas nello stato di completa degenerazione, al quale deve essere applicata la nuova statistica [3].

Uno dei resultati di questa teoria è il calcolo fatto da Fermi del potenziale elettrico nell'interno dell'atomo, come funzione della distanza dal nucleo. Questo potenziale assume precisamente il valore

$$\frac{Ze}{r} \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right) \tag{1}$$

doye Z è il numero atomico, $\varphi(x)$ è una funzione della quale Fermi dà una tabella numerica, ed è posto

$$\mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{13/3} \pi^{4/3} me^2 Z^{1/3}}.$$

Naturalmente questo potenziale, per il modo con cui è dedotto, dà solamente un valore medio approssimato attraverso al sistema periodico degli elementi; nella realtà, passando da un elemento al successivo, si sovrapporranno delle oscillazioni dovute ai particolari della struttura elettronica, dei quali nella statistica non si può tener conto.

Le proprietà dell'atomo per le quali c'è da attendersi che la teoria statistica di Fermi dia buoni resultati saranno pertanto quelle che sono funzioni regolari del numero atomico. Fra queste, si trovano in prima linea i livelli energetici X; in questa Nota vogliamo svolgere precisamente il

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) E. Fermi, «Rend. Line.», *6*, 602, 1927; *7*, 342, 1928; «ZS. f. Phys.», *48*, 73, 1928.

(3) E. Fermi, «Rend. Linc.», *3*, 145, 1926; «ZS. f. Phys.», *36*, 902, 1926.

calcolo dei termini M_3, cioè di quanto totale 3 e azimutale 2 (nel senso della meccanica quantistica), per mostrare il completo accordo fra la teoria e i valori sperimentali.

Il problema, nella meccanica ondulatoria, è il seguente: in un campo in cui l'energia potenziale, conformemente alla (1), e tenendo conto che va tolto l'elettrone che si considera, è espressa da

$$V = -\frac{e^2}{r}\left[1 + (Z-1)\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right)\right] \tag{2}$$

si devono determinare le energie degli stati quantici di un elettrone, cioè gli autovalori della equazione di Schroedinger:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\psi = 0 \tag{3}$$

e, nel nostro caso particolare, quelli corrispondenti a $n = 3$, $k = 2$.

Essendo V funzione soltanto di r, le autofunzioni della (3), per quanto riguarda ϑ e φ, saranno le solite dell'idrogeno; sarà soltanto diversa la dipendenza da r. Naturalmente, il problema non potrà risolversi esattamente, mancando anche l'espressione analitica della funzione $\varphi(x)$; si dovrà procedere a un calcolo numerico, per successive approssimazioni.

Il procedimento che ho seguito è questo. Osserviamo che l'autofunzione che corrisponde allo stato 3_3, per un atomo idrogenoide, dipende da r con la legge $r^2 e^{-Ar}$; ψ dunque è zero nel centro, raggiunge un massimo abbastanza acuto, e poi tende rapidamente a zero. Questo andamento si conserverà sostanzialmente anche nel caso nostro; e allora avremo un valore abbastanza esatto di E sostituendo alla vera espressione (2) del potenziale una espressione analitica semplice che lo approssimi bene nella zona in cui ψ è sensibilmente diversa da zero.

Prendiamo allora una energia potenziale della forma:

$$V' = -\frac{Z^* e^2}{r} - \frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\lambda}{r^2} - V_0 \tag{4}$$

che dà rispettivamente come autovalore [1] e come autofunzione (per la parte dipendente da r) corrispondenti allo stato 3_3:

$$E = -\frac{RhZ^{*2}}{\frac{13}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{25 - 4\lambda} - \lambda} - V_0 \tag{5}$$

$$\psi(r) = r^{\frac{\sqrt{25-4\lambda}-1}{2}} e^{-\omega r/2} \quad ; \quad \omega = \frac{8\pi^2 mZ^* e^2}{h^2\left(\frac{13}{2} + \frac{\sqrt{25-4\lambda}}{2} - \lambda\right)} \tag{6}$$

(1) F. Rasetti, «Rend. Linc.».

e cerchiamo di determinare le tre costanti λ, Z^* e V_0 in modo che nel punto r_0 in cui $r^2\psi^2$ ha il massimo, V e V′ coincidano, e così pure le loro derivate prima e seconda.

Posto $r = \mu x$ (dove μ naturalmente contiene $Z - 1$) queste condizioni sono espresse dal sistema di equazioni:

$$x_0 = \left(\frac{128}{9\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(Z-1)^{\frac{1}{3}}}{Z^*} \left(\frac{13 + \sqrt{25 - 4\lambda}}{2} - \lambda\right)$$

$$\lambda = \left(\frac{9\pi^2}{128}\right)^{\frac{1}{3}} (Z-1)^{\frac{2}{3}} x_0^3 \varphi''(x_0)$$

$$\frac{Z^*}{Z-1} = \varphi(x_0) - x_0\varphi'(x_0) - x_0^2\varphi''(x_0)$$

$$\frac{Z^* - (Z-1)\varphi(x_0)}{x_0} + \left(\frac{16}{9\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} (Z-1)^{\frac{1}{3}} \frac{\lambda}{x_0^2} + \left(\frac{9\pi^2}{1024}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(Z-1)^{\frac{1}{3}}} \frac{V_0}{Rh} = 0$$

dal quale vanno determinati λ, Z^*, V_0 e x_0. Avendo disegnato un grafico delle funzioni $x^3\varphi''$ e $\varphi - x\varphi' - x^2\varphi''$, la risoluzione del sistema, per ciascun valore di Z, si trovava abbastanza rapidamente per tentativi.

Ottenuti i valori delle costanti è determinata l'energia per mezzo della (5). Questo valore dà una prima approssimazione del termine cercato.

Una seconda approssimazione si otterrà dalla teoria delle perturbazioni [1]. Osservando che nel nostro caso va introdotta come energia di perturbazione la differenza fra il potenziale vero V e quello V′ che gli abbiamo sostituito, avremo una correzione ΔE all'energia espressa dalla formula:

$$\Delta E = \frac{\int_0^\infty (V - V')\psi^2(x)\,x^2\,dx}{\int_0^\infty \psi^2(x)\,x^2\,dx}.$$

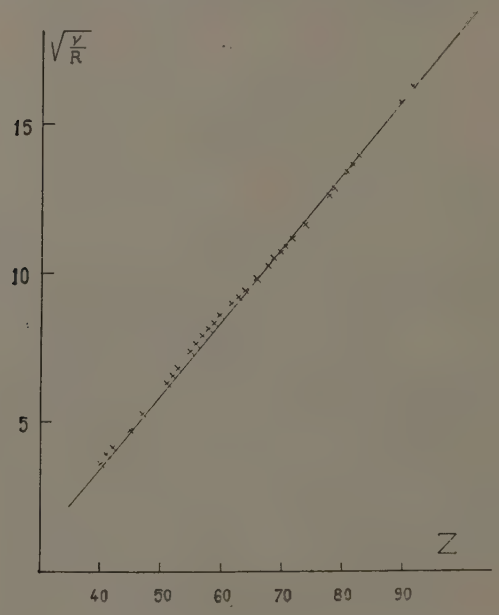
Infine il valore del termine ottenuto va aumentato di una piccola correzione, e precisamente della metà della separazione fra i termini M_{32} e M_{33} (nelle notazioni di Sommerfeld [2]) per tener conto della relatività e del momento intrinseco dell'elettrone; con ciò otteniamo il termine M_{33}.

Ho eseguito il calcolo numerico per l'argento ($Z = 47$), il gadolinio ($Z = 64$) e l'uranio ($Z = 92$). Già la prima approssimazione espressa dalla (5) ha dato valori molto vicini a quelli sperimentali; tuttavia è stato anche eseguito il calcolo con la teoria delle perturbazioni, il che ha migliorato ancora l'accordo.

(1) E. Schroedinger, « Ann. d. Phys. », *80*, 437, 1926.
(2) A. Sommerfeld, *Atombau*, 4ª ediz., cap. 4.

Questo appare meglio di tutto dall'annesso grafico; in esso sono riportati in ascisse i numeri atomici, in ordinate le radici quadrate dei termini M_{33}. I punti indicano i valori sperimentali; i tre punti trovati teoricamente sono risultati esattamente allineati, e li abbiamo riuniti con la retta che appare nel diagramma.

Come si vede, i valori sperimentali se ne scostano pochissimo; e si deve rilevare che l'azione di schermo per questi termini è assai grande;



per es. per l'uranio, se non vi fosse questa azione, avremmo un termine M espresso da $-\frac{E}{Rh} = \frac{92^2}{3^2} = 940$, mentre il valore sperimentale è 261, quello da noi trovato 259.

Da tutto ciò appare evidente una nuova brillante conferma dell'espressione del potenziale elettrico nell'interno dell'atomo, dedotta da Fermi mediante la statistica del gas degenere.

Fisica. — *Sulla dispersione anomala del Mercurio e del Litio* [1]. Nota di E. Segrè e di E. Amaldi, presentata [2] dal Socio O. M. Corbino.

In questa Nota esponiamo alcuni risultati di ricerche sull'intensità di alcune righe di assorbimento del Litio e del Mercurio; e precisamente ci siamo proposti di determinare il rapporto tra le intensità delle due righe del Li 2S — 2P (6708 Å) e 2S — 3P (3232 Å) ed il rapporto tra le intensità delle due righe del Hg $6^1S_0 - 6^3P_1$ (2537 Å) e $6^1S_0 - 6^1P_1$ (1849 Å).

A tale scopo abbiamo eseguito delle misure di dispersione anomala. Ci siamo serviti del metodo del Puccianti usando un apparecchio con tutto il dispositivo ottico di quarzo già descritto in questi « Rendiconti » [3].

Per le misure relative al Li abbiamo dovuto introdurre entro la stufa di quarzo un sottile tubo di ferro perchè il Li ad alta temperatura attaccava il quarzo. In tali misure abbiamo operato ad una temperatura di circa 1200° alla quale la tensione del vapore del Li era sufficiente per dare una dispersione misurabile.

Come sorgente luminosa ci siamo serviti di un comune arco a carbone che dava spettro continuo. Per fotografare il rosso abbiamo usato lastre Cappelli pancromatiche; per l'ultravioletto lastre Cappelli extra rapide. Le fotografie erano fatte contemporaneamente.

Abbiamo eseguito varie fotografie che abbiamo misurato in prossimità della riga 2S — 2P col metodo dei passaggi delle frange [4].

In prossimità della 2S — 3P abbiamo osservato che la minima distanza fra i due rami di iperbole costituenti una frangia era eguale alla distanza fra due frangie successive. Con facili calcoli si vede che in tal caso i passaggi delle frange avvengono a distanze $\frac{d}{8}$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{8}$; $\frac{1}{3}\cdot\frac{d}{8}$ ecc., dove d è la distanza di due frange successive.

Dalle misure fatte possiamo concludere che il rapporto fra il numero degli elettroni di dispersione della 6708 Å e della 3232 Å del Li è di 135 con un errore che valutiamo del 20 %.

Per le misure relative al Hg abbiamo incontrato gravi difficoltà: la principale consisteva in ciò che in prossimità dei 2000 Å da un lato la

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.
(3) Rasetti, « R. L. », 6; 503; 1927.
(4) Fermi e Rasetti, « R. L. », 6; 566; 1927.

sensibilità delle lastre diminuiva notevolmente e dall'altro i grossi spessori di quarzo dell'interferometro, delle lenti, e dello spettrografo divenivano assai assorbenti. Tutto ciò impediva di fotografare in vicinanza della 1849 Å. Come sorgente ci siamo serviti di un arco a ferro che ci dava molte righe in tutto lo spettro. Abbiamo sperimentato vari tipi di lastre principalmente Cappelli e Wellington.

Abbiamo eseguito un numero notevole di fotografie che abbiamo misurato col metodo seguente: servendoci di un microscopio munito di micrometro abbiamo misurato le ordinate dei singoli punti di una frangia che abbiamo poi disegnato portando in ascisse i numeri d'onda. Poi abbiamo costruito due curve teoriche a mezzo della formula classica che rappresentavano la dispersione data da un solo elettrone della 2537 e della 1849. Ora, indicando con y_1 e y_2 le ordinate delle due curve teoriche e con y le ordinate della curva sperimentale, abbiamo determinato N_1 e N_2 in modo che fosse

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2$$

evidentemente N_1 e N_2 sono proporzionali al numero di elettroni di dispersione delle due righe.

Da tali misure a causa delle gravi difficoltà a cui abbiamo già accennato, possiamo dedurre solo l'ordine di grandezza del rapporto cercato che valutiamo del centesimo.

Abbiamo poi eseguito delle misure assolute del numero di elettroni di dispersione della 2537. In tali misure le cause principali di errore erano l'incertezza se il vapore di Hg nella stufa fosse saturo, in secondo luogo non conoscevamo esattamente lo spessore dello strato di vapore. Servendoci di una pinza termoelettrica platino-platino rodio, abbiamo costruito una curva rappresentante l'andamento della temperatura alle varie profondità della stufa. In base a tale curva ci è parsa abbastanza plausibile l'ipotesi che si avesse vapore saturo per uno spessore eguale alla lunghezza dell'avvolgimento della stufa, poichè tale curva era molto simile a un rettangolo con base eguale alla lunghezza dell'avvolgimento e perciò la temperatura entro la stufa per il tratto riscaldato era pressochè costante.

In base alle nostre misure possiamo dire che il numero di elettroni di dispersione della 2537 è qualche centesimo del numero di atomi, il che si accorda anche abbastanza con i risultati circa le misure del rapporto $\frac{N_2}{N_1}$.

Vogliamo infine rilevare una discordanza notevole che ci si è presentata fra la teoria e i risultati sperimentali nei riguardi del rapporto delle intensità delle righe della serie principale del Li. In una recente Nota il prof. Rasetti ha calcolato i termini del Li valendosi della meccanica ondulatoria. Il potenziale introdotto riproduceva bene i termini; ci siamo allora proposti di valutare l'intensità delle due righe del Li $2S - 2P$ e $2S - 3P$

partendo dalle autofunzioni del prof. Rasetti. In seguito a semplici sviluppi abbiamo trovato un valore del rapporto delle intensità di circa 2 in completo disaccordo con l'esperienza; il che, del resto, non ci ha meravigliato poichè anche per gli altri alcalini il rapporto fra le intensità delle prime righe della serie di assorbimento è dell'ordine del centinaio, mentre il valore calcolato avrebbe costituito una singolare anomalia nel comportamento del Li.

Fisica. — *Sulla larghezza di alcune righe dello spettro del* Hg. Nota di A. Carrelli, presentata dal Socio M. Cantone.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *La risonanza ottica secondo la meccanica ondulatoria.* Nota II di E. Persico, presentata dal Socio A. Garbasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il carbonato doppio di rame e sodio* [1]. Nota di F. de Carli e P. Agostini, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

I carbonati doppi del rame con i metalli alcalini cristallizzano dalle soluzioni concentrate di carbonato e bicarbonato alcalino alle quali sia stata aggiunta una soluzione di $Cu(NO_3)_2$ [3]. Il composto con il potassio si forma anche dalle soluzioni concentrate di K_2CO_3 cui sia stato aggiunto $Cu(C_2H_3O_2)_2$ finemente polverizzato [4]. In entrambi i casi si ottengono liquidi colorati intensamente in azzurro dai quali si separano in 24-30 ore i sali doppi: $K_2CO_3 \cdot CuCO_3 \cdot 4H_2O$ e $Na_2CO_3 \cdot CuCO_3 \cdot 3H_2O$.

Il sale sodico è il più facile ad ottenersi. Quello potassico cristallizza difficilmente ed è sempre accompagnato da sale basico. Per questa ragione ci siamo limitati per ora allo studio del solo sale sodico che si è potuto ottenere molto puro, come risulta dall'analisi seguente:

	Na_2O	CuO	CO_2	H_2O
trov. %	21.92	28.07	31.01	18.90
calc. per $Na_2CO_3 \cdot CuCO_3 \cdot 3H_2O$	21.86	28.06	31.04	19.04

Il composto anidro corrispondente finora non era conosciuto. L'eliminazione dell'acqua di cristallizzazione da questo sale, e da altri analoghi di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1924.

(3) Sainte-Claire Deville, « Ann. Chim. Phys. », [3], **33**, 9 (1851).

(4) Reygnolds, « J. Chem. Soc. », **73**, 262 (1898); Applebey e Lane, « J. Chem. Soc. », **113**, 609 (1918); Beurath, « Z. f. anorg. allgem. Chem. », **151**, 38 (1926).

cui parleremo in seguito, presenta infatti delle difficoltà perchè l'azione disidratante dell'anidride fosforica a temperatnra ordinaria non è sufficiente; ed il riscaldamento diretto all'aria o nel vuoto provoca la perdita contemporanea dell'acqua e dell'anidride carbonica.

Se si esegue la curva di riscaldamento del sale idrato si osserva a 160° una notevole reazione endotermica nella quale si ha perdita contemporanea di acqua e di CO_2, e proseguendo il riscaldamento fino a 500° non si nota nessun altro assorbimento di calore. Il prodotto che si ottiene ha tutta l'apparenza di un miscuglio di ossido di rame e carbonato sodico. Esso contiene 23.55 % di CO_2; per $CuO + Na_2CO_3$ si calcola 23.74.

Siamo riusciti ad ottenere il composto anidro riscaldando il sale idrato in corrente di anidride carbonica. A questo modo è possibile portar via completamente l'acqua senza che intervenga decomposizione nel carbonato.

Riportiamo nella tabella e nei diagrammi che seguono i risultati ottenuti effettuando la disidratazione a 80° e a 120°.

Tabella I.

Isoterma di disidratazione a 80°.

Peso sostanza gr. 1.3740.

Ore di riscaldamento	Perdita in peso	CO_2 % calcolato	CO_2 % trovato
8.00	0.0627	31.85	—
26.00	0.0858	32.80	—
38.45	0.0976	33.08	—
63.45	0.0976	33.08	33.03

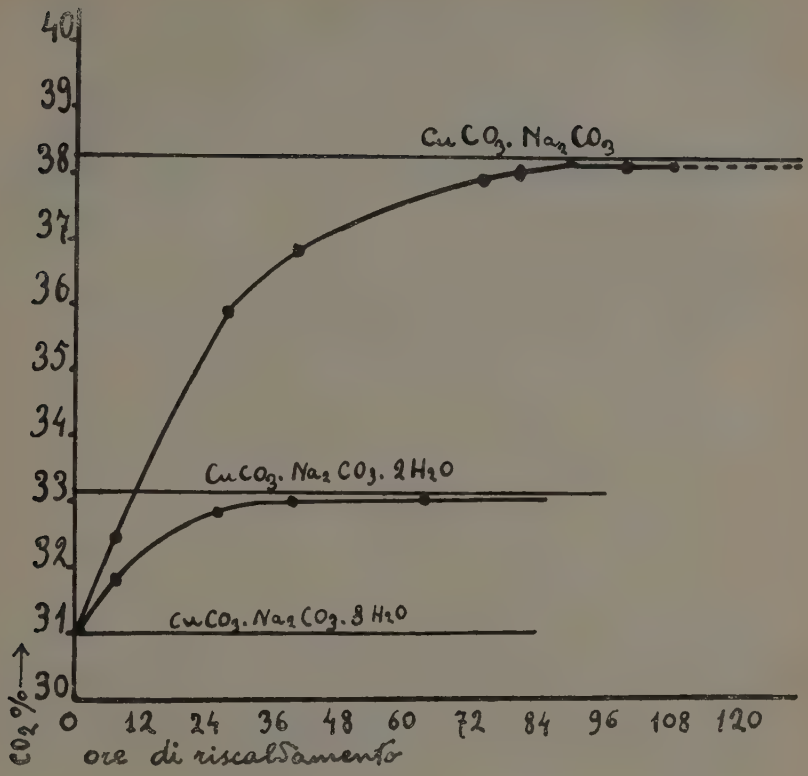
Tabella II.

Isoterma di disidratazione a 120°.

Peso sostanza gr. 1.9152.

Ore di riscaldamento	Perdita in peso	CO_2 % calcolato	CO_2 % trovato
8.00	0.1005	32.38	—
26.00	0.2767	35.92	—
38 30	0.3023	36.88	—
63 30	0.3374	37.51	—
73.30	0.3516	37.93	—
78.30	0.3584	38 16	—
81.30	0.3604	38.21	—
91.30	0.3619	38.26	38.33

CO_2 teorico nel sale anidro gr. 38.35 %



Nel primo caso si riesce ad eliminare solo una parte dell'acqua, e precisamente la disidratazione si arresta ad un prodotto che molto probabilmente corrisponde alla formula $Na_2CO_3 \cdot CuCO_3 \cdot 2H_2O$; l'analisi infatti dà 33.03 % di CO_2 mentre si calcola 33.13. Nel secondo caso invece la disidratazione è completa.

Il sale anidro è colorato in azzurro chiaro, non è stabile all'aria ed assorbe facilmente acqua riformando i cristalli azzurro-verdi del sale idrato. Fu anche eseguita la curva di riscaldamento di questo prodotto e si è trovato che l'assorbimento di calore corrispondente alla perdita di CO_2 si manifesta tra 220° e 230°.

*
* *

Quando si riscalda il sale esso si scompone secondo l'equazione:

$$Na_2CO_3 \cdot CuCO_3 \rightleftarrows Na_2 \cdot CO_3 + CuO + CO_2.$$

Ad ogni temperatura corrisponde una tensione fissa di CO_2, ed essa è stata misurata direttamente impiegando il metodo statico.

L'apparecchio era costituito da un tubo piegato due volte a squadra. La branca più lunga funzionava da manometro. A quella più corta era saldata una pallina di vetro contenente la sostanza. Tra le due branche era compresa una diramazione portante un rubinetto che permetteva di far comunicare l'apparecchio con l'esterno o con la pompa a mercurio. Il riscaldamento veniva eseguito per mezzo di un piccolo forno elettrico a resistenza.

La reversibilità del sistema venne verificata sperimentalmente. Dopo aver raggiunto l'equilibrio a 477° si riportò il forno a 443° e si notò che la tensione diminuiva lentamente fino a ridursi, dopo alcuni giorni, a 161 mm.

Nella tabella sono riportati i valori di p a quattro temperature.

T°	p in mm Hg	log p
363°	12.10	1.08
443°	163.50	2.21
477°	380.20	2.58
512°	1175.60	3.07

(T° indica temperatura assoluta).

Applicando la formula approssimata di Nernst si calcolano per Q valori seguenti:

T°	Q
363°	10950
443°	11380
477°	11570
512°	11400
	Media 11325 cal.

Q rappresenta la somma delle tonalità termiche delle due reazioni:

1. $Na_2 \cdot CO_3 \cdot CuCO_3$ sol. = Na_2CO_3 sol. + $CuCO_3$ sol. + Q'
2. $CuCO_3$ sol. = CuO sol. + CO_2 gas + Q''

Q' è stato determinato sperimentalmente ed è risultato eguale a 10.330 Cal. (1). Per modo che Q'' verrebbe a risultare eguale a 0.995 Cal.

Questo valore naturalmente non può avere nessuna pretesa di precisione, ma il suo ordine di grandezza è in accordo con la instabilità del sale.

(1) Vedi questi «Rendiconti».

Volendo servirsene, si può calcolare mediante esso il calore di formazione di $CuCO_3$ sol. a partire dagli elementi, e allora si ottiene:

$$Cu + C + 1\,^1/_2\,O_2 = CuCO_3 \text{ sol.} + 138.345 \text{ Cal.}$$

Per il sale precipitato da soluzioni acquose di sale rameico e carbonati alcalini si è trovato invece 143.06 [1] in buon arcordo con Berthelot il quale dà 142.80.

Chimica. — *Costituzione chimica e potere rotatorio* [2]. Nota III di S. Berlingozzi, presentata [3] dal Socio N. Parravano.

In una recente pubblicazione [4] è stato iniziato lo studio di alcuni derivati acilici della l. asparagina

$$H_2N\cdot CO - CH_2 - \underset{\displaystyle NH - CO\cdot R}{\overset{\displaystyle H}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}} - COOH$$

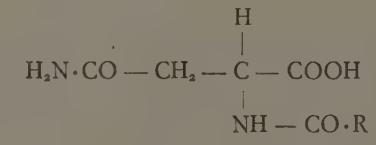
con l'intento di stabilire fino a qual punto l'influenza del carattere più o meno elettronegativo del residuo acilico possa ritenersi preponderante su altre influenze nei riguardi del potere rotatorio. Per indagare sopra tale influenza fu presa, al solito, in considerazione la variazione del potere rotatorio molecolare, e parallelamente la successione delle costanti di dissociazione degli acidi corrispondenti ai varî residui legati al gruppo basico della l. asparagina. Già in queste prime ricerche fu constatata, pel suddetto gruppo di sostanze, una certa corrispondenza nell'andamento dei due ordini di fenomeni; ciò che invitava a continuare in tal senso lo studio delle acil-asparagine, fino allora limitato ai pochi composti ottenuti. Nella Nota sopracitata fu accennato alla opportunità di estendere ai più disparati tipi di composti otticamente attivi le indagini sui rapporti fra potere rotatorio e carattere elettronegativo dei sostituenti. Tale opportunità è tanto più sentita oggi in quanto che la cosiddetta « influenza polare » dei sostituenti viene studiata con molta cura anche nei riguardi della dispersione rotatoria dei composti organici [5]. Nè mancano, inoltre, accenni alla tendenza a sostituire

(1) Questi « Rendiconti », [6], VII, p. 1033, 1928.
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(3) Nella seduta del 1° giugno 1928.
(4) S. Berlingozzi, « Gazz. Chim. Ital. », *57*, 814 (1927).
(5) V. specialmente Rule e Smith, « J. Chem. Soc. », *127*, 2188 (1925).

(per ciò che si riferisce alla causa dell'attività ottica) il classico concetto di asimmetria per distribuzione asimmetrica degli atomi nella molecola, con quello di asimmetria per distribuzione asimmetrica nello spazio degli elettroni combinatori degli atomi stessi [1]. Principale conseguenza di questo nuovo modo di vedere sarebbe la necessità di considerare come secondarie quelle cause che abitualmente si considerano come primarie, tenendo presente che fra le une e le altre esiste un parallelismo generale. Da qualunque punto di vista si voglia osservare la questione, rimane tuttavia interessante ogni indagine fra potere rotatorio e carattere chimico dei sostituenti; non escludendo, naturalmente, che a quest'ultimo possa attribuirsi una influenza strettamente legata ad altra causa principale. La opportunità di riferirsi per ora semplicemente al carattere chimico ne viene dal fatto che non possiamo ancora disporre di mezzi sperimentali per determinare in ogni caso l'orientamento degli elettroni combinatori nella molecola.

Nella presente Nota sono descritte parecchie acil-asparagine ottenute e studiate con procedimento identico a quello già esposto nella citata precedente pubblicazione. La variazione del potere rotatorio col variare della sostituzione è esposta nella seguente tabella, ove sono riportate pure le costanti di dissociazione degli acidi relativi ai sostituenti. I composti sono raggruppati secondo l'analogia di struttura dei sostituenti medesimi:

Acil-asparagine:



— CO·R	$[M]_D^{20°}$	k
Anisoilico	40°.2	0.0032
Cuminoilico	43°.9	0.0050
p. Toloilico	43°.2	0.0051
p. Clorobenzoilico	41°.2	0.0093
p. Nitrobenzoilico	30°.8	0.0400
m. Toloilico	49°.0	0.0051
m. Nitrobenzoilico	35°.3	0.0345
o. Clorobenzoilico	20°.5	0.1320
o. Bromobenzoilico	13°.4	0.1450

(1) Cfr. JAEGER, « I. Cons. Inst. Solvay ». (Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1925, p. 160).

$-SO_2 \cdot R$

p. Toluen-solfonilico	19°.5	2.1000
1 • Nitro–2 • toluen-4 • solfonilico	- 85°.6	—

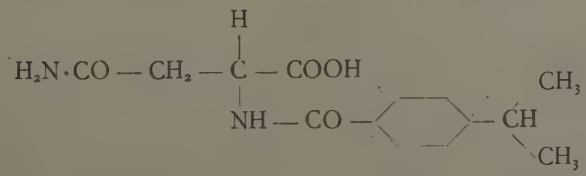
La concordanza che in linea generale si nota fra la diminuzione di $[M]_D$ e l'aumento di k, acquista una singolare evidenza nei gruppi di composti in cui fra i vari sostituenti acilici esiste analogia di struttura. La concordanza è perfetta nei composti *orto* e *meta*; nella serie più numerosa dei composti *para* l'unica eccezione è offerta dalla anisoil–asparagina il cui potere rotatorio molecolare è risultato più basso di quanto si sarebbe aspettato considerando la costante di dissociazione dell'acido anisico.

La preparazione delle acil-asparagine è stata effettuata sciogliendo a freddo l'asparagina nella quantità calcolata di NaOH/N, e trattando questa soluzione, a poco per volta e alternativamente, con altrettanta NaOH/N e con la corrispondente quantità di cloruro acido in soluzione eterea; avendo cura di agitare energicamente il miscuglio durante il trattamento e successivamente per circa 15'. In tal modo si ottengono i sali alcalini delle acil-asparagine, dai quali queste vengono spostate per lieve acidificazione con acido cloridrico. La loro separazione avviene più o meno rapidamente a seconda della solubilità, ma in ogni caso si ottengono composti cristallini e quasi del tutto puri. Si completa la purificazione asciugando i prodotti e lavandoli con etere che asporta le ultime tracce di acidi provenienti da piccole quantità di cloruri acidi rimasti indietro, mentre non scioglie apprezzabilmente le acil–asparagine. Infine si ripete la salificazione con NaOH/N e la separazione per aggiunta di acido cloridrico in piccolo eccesso.

I risultati analitici sono stati concordanti con le formule previste. L'acqua scioglie poco a freddo le acil-asparagine, che si sciolgono ancora in più piccola proporzione nel benzene e in genere in tutti i solventi organici; non è stato perciò possibile evitare l'impiego delle soluzioni acquose dei sali alcalini per le misure polarimetriche.

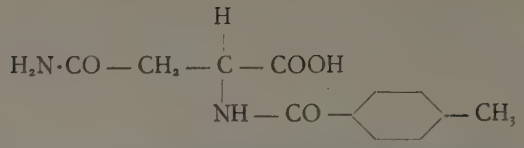
I caratteri delle sostanze ottenute sono i seguenti:

Cuminoil–l. asparagina:



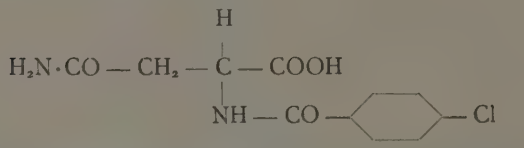
Aggregati microcristallini di forma globulare, bianchi, fusibili a 158°–159° con decomposizione. $[M]_D^{20} = + 43°.9$.

p. Toloil-l. asparagina:



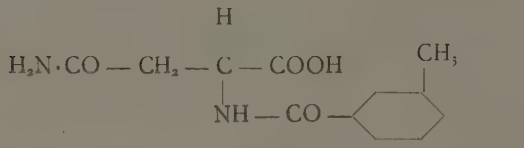
Ciuffi di aghetti bianchi, fusibili a 192° con decomp. $[M]_D^{20} = + 43°.2$.

p. Clorobenzoil-l. asparagina:



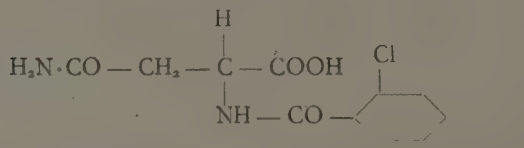
Piccoli aghi bianchi sottili, fusibili a 181° con decomp. $[M]_D^{20} = + 41°.2$.

m. Toloil-l. asparagina:



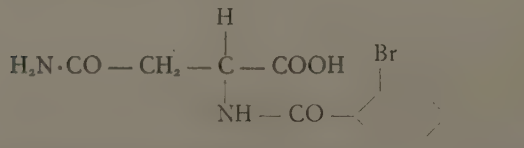
Mammilloncini bianchi setacei formati da sottili aghetti, fusibili a 162° con decomp. $[M]_D^{20} = + 49°$.

o. Clorobenzoil-l. asparagina:



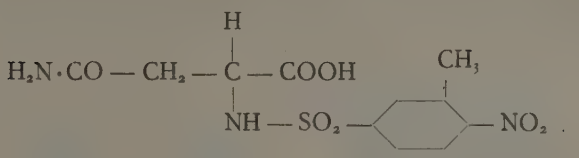
Ciuffi di scagliette bianche, fusibili a 171° con decomp. $[M]_D^{20} = + 20°.5$.

o. Bromobenzoil-l. asparagina:



Rosette formate da aghi bianchi fusibili a 163° con decomposizione. $[M]_D^{20} = + 13°.4$.

1-Nitro-2-toluen-4-solfonil-l. asparagina:



Ciuffi di lunghi aghi bianchi fusibili a 174° con decomp. $[M]_D^{20} = -85°.6$.

Chimica. — *Analisi di una piromorfite radioattiva di Gennammari (Sardegna)* [1]. Nota di P. Misciattelli presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Nel 1905 Danne [3], studiando alcuni minerali radioattivi d'Issy Levèque, fece notare come un'eccezione assai curiosa ed interessante il fatto di avere incontrato una piromorfite che, pur non contenendo uranio, presentava traccie di attività dovute alla presenza di radio. Avendo fra varî minerali radioattivi italiani incontrato una piromorfite di debole attività ho creduto opportuno di esaminarla per vedere se presentava la stessa anomalia di quella studiata dal Danne a Issy Levèque.

La piromorfite presa in esame si trova come minerale di cappello dei giacimenti piombiferi di Gennammari Arbus (Sardegna).

Il nostro campione si presentava in cristalli prismatici, esagonali, poveri di forme, talvolta a facce curve, rigonfie nel mezzo, a bariletto.

Proveniva da Gennammari ed era stato fornito dall'Istituto di Mineralogia della R. Università di Roma.

Un esame preventivo al microscopio mostrò lo stato cristallino della piromorfite accompagnata da ganga.

Essendo la separazione completa del minerale dalla ganga molto difficile ad effettuarsi, furono fatte ripetute analisi su diversi campioni, in maniera che i costituenti assenti in un campione del minerale più puro vennero senz'altro attribuiti alla ganga.

*
* *

Il minerale finemente triturato venne attaccato con acido cloridrico seguendo le solite norme per insolubilizzare la silice.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.
(3) « Comptes-rendus », vol. CXL (1905), p. 241.

Nel liquido di attacco furono dosati: il piombo come solfato e l'acido fosforico precipitandolo allo stato di fosfato ammonico magnesiaco.

Il cloro fu determinato col metodo di Volhard nella soluzione del minerale disgregato con soda.

Si sono avuti i valori seguenti:

PbO	80,243
P_2O_5	14,640
Cl	2,4
As_2O_5	traccie
SiO_2	1,06

Nel minerale furono pure riscontrate traccie di stagno e di antimonio e terre rare.

*
* *

Per la separazione e l'esame spettroscopico delle terre rare, si eliminò il piombo come $PbSO_4$, ed i metalli del secondo gruppo con H_2S; quindi il liquido fu neutralizzato con ammoniaca, acidificato debolmente con acido cloridrico e poi addizionato di una soluzione satura e bollente di acido ossalico. Dopo 36 ore si osservò un piccolo precipitato.

Separato questo dal liquido ed asciugato con carta da filtro si trovò che era insolubile in acido acetico, pochissimo solubile in acido cloridrico concentrato e freddo, solubile in acido cloridrico concentrato e caldo. Al tubicino lasciò un residuo terroso che fece sospettare la presenza di terre rare. La perla al borace presentava le caratteristiche colorazioni della miscela di praseodimio e neodimio: bruna alla fiamma riducente, rosa a quella ossidante.

Per procedere ad un accertamento della presenza di queste ed a una prima identificazione, furono esaminati gli spettri di assorbimento delle soluzioni cloridriche. Furono disciolti circa 0,4 grammi di ossalati ottenuti da circa 100 grammi di minerale, portandoli in soluzione con 4 cmc. di acido cloridrico. Gli spettri di assorbimento furono osservati attraverso a uno spessore di 2 cm. di soluzione. Come spettri di confronto si usarono quelli dell'elio e del neon.

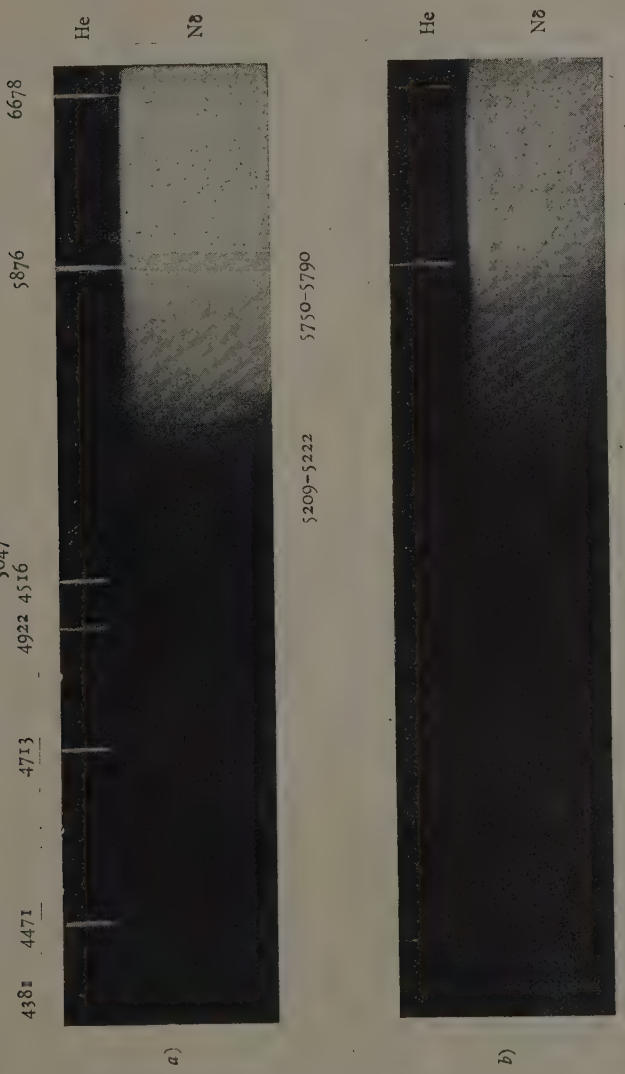
Nelle figure sono riprodotte due fotografie dello spettro di assorbimento ottenuto con due esposizioni di differente lunghezza.

Si è trovato così che le bande di assorbimento coincidono con quelle note per il neodimio [1].

Infatti le due bande più facilmente visibili si trovano nelle posizioni corrispondenti alle lunghezze d'onda 520-522 A° per l'una, e 575-579 A°

(1) H. Jones e W. Strong, *The absorption spectra of solutions*; Formanek, *Die qualitative spektranalyse*; H. Kayser, *Handbuch der Spectroscopie*.

per l'altra corrispondendo perfettamente alle due principali bande di assorbimento dello spettro del neodimio.



Per l'esame radioattivo, un po' del minerale finemente polverizzato e posto in un piattino di rame venne messo in un elettroscopio a raggi α e la sua attività fu paragonata con quella di un campione di confronto di uguali dimensioni di U_3O_8.

Il minerale risultò debolmente radioattivo: cioè dava all'elettroscopio 0,150 divisioni per minuto secondo. Il rapporto all'attività dell'ossido nero di uranio era di 0,0028.

Basandosi sul coefficiente di Boltwod, si può calcolare che per ottenere un'attività così piccola basterebbe che fosse presente il 0,54 % di uranio, quantità che sarebbe stata facilmente identificata dai mezzi di ricerca dell'uranio da me impiegati.

D'altra parte è da escludere che questa attività fosse dovuta al torio, dato che esso risultò assente. Non vi è quindi dubbio che siamo pure in questo caso nelle condizioni della piromorfite di Issy Levèque studiata dal Danne, nel senso che l'attività deve considerarsi dovuta a piccole quantità di radio portato dalle acque che lo estraggono da qualche minerale di uranio, situato in profondità.

Chimica. — *Alcuni derivati solfonici di composti non saturi.* Nota di A. Quilico e Fleischner, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Spinelli del cobalto trivalente. Cobaltito cobaltoso e cobaltito di zinco.* Nota di G. Natta e M. Strada, presentata dal Socio B. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* — II. *Analisi termica del sistema di* $LiCl - CdCl_2$. Nota di A. Ferrari e A. Baroni, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Calori di formazione e di idratazione dei carbonati doppi di cobalto e potassio e di rame e sodio.* Nota di F. de Carli, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Derivati della asparagina.* Nota di S. Berlingozzi, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Calore di formazione dei cloruri doppî di rame e potassio.* Nota di P. Agostini, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla separazione con l'etere del torio dall'uranio.* Nota di P. Misciattelli, presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *I fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione.* Memoria di G. Bozza, presentata dal Corrisp. L. Cambi.

Sarà pubblicata nel volume delle Memorie.

Chimica agraria. — *La cultura fisiologica.* Nota di N. A. Barbieri, presentata dal Socio E. Paternò.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *La durata del periodo cinetico ed intercinetico in embrioni di pollo incubati a varia temperatura* [1]. Nota di L. Bucciante, presentata [2] dal Socio G. Levi.

Precedenti ricerche [3] su cellule del miocardio di embrioni di pollo coltivate *in vitro* mi hanno permesso di stabilire che la velocità della mitosi di quegli elementi è varia, a seconda della temperatura ambiente, avendosi un massimo di durata a 21° ed un minimo a 41°. È d'altra parte supponibile che l'influenza della temperatura sull'accrescimento non sia limitata all'azione svolta sulla mitosi, ma si esplichi anche sul periodo di tempo che separa l'una mitosi dall'altra (intercinesi); sarebbe perciò desiderabile compiere una ricerca in tal senso sullo stesso materiale usato per lo studio della velocità della mitosi, ma è noto quanta difficoltà presenti il seguire alla normale temperatura le cellule nate da una divisione mitotica per sorprenderne in esse una seconda: tale ricerca sarebbe praticamente ineffettuabile, osservando le culture a bassa temperatura, per il lungo intervallo di tempo, che presumibilmente separa una mitosi dalla successiva.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto anatomico della R. Università di Torino, diretto dal prof. G. Levi.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) Bucciante L., 1927. *Ulteriori ricerche sulla velocità della mitosi nelle cellule coltivate «in vitro» in funzione della temperatura*, «Arch. f. exp. Zellforsch.», 5.

Io mi sono allora proposto di determinare l'influenza della temperatura in pari tempo sulla mitosi e sulla intercinesi con un metodo indiretto, cioè mediante il conteggio delle mitosi dell'abbozzo del sistema nervoso centrale in embrioni di pollo allo stesso stadio di sviluppo, ma incubati a diverse temperature. È noto come un tal materiale sia molto adatto per un' esatta ricerca quantitativa del numero delle mitosi, poichè esse sono limitate allo strato cellulare profondo dell'organo.

Ho scelto due temperature di incubazione fra loro separate da un intervallo di 10°, e cioè quella di 41°–42° (che, come già ho detto, rappresenta la temperatura *optimum* per la velocità della mitosi *in vitro*) e quella di 31°–32°. Sarebbe stato desiderabile potersi servire di temperature anche più basse, ma è noto che al disotto di 28° (Dareste) lo sviluppo dell'uovo non si effettua.

Fra le molte uova incubate ed i molti blastodermi raccolti ho scelto per le mie ricerche otto embrioni, di cui quattro sviluppati a 41°-42° e quattro a 31°-32°; gli uni e gli altri coincidevano a due a due per lo stadio raggiunto.

Gli stadii esaminati furono i seguenti: 12 somiti, 12–13 somiti, 14-15 somiti, 18 somiti. I blastodermi furono fissati in liquido di Zenker e colorati in massa con carmallume.

Il conteggio fu eseguito su tutte le sezioni (di 10 micron) e per tutta la lunghezza del sistema nervoso centrale; non ho tenuto conto delle mitosi assai parzialmente colpite dal taglio, nella sicurezza di numerarle nella sezione precedente o successiva. Ad ogni modo, e ciò è importante notare, ho seguito sempre esattamente lo stesso criterio nell'interpretazione delle singole figure mitotiche, sì che gli errori eventuali si sono ripetuti per tutti gli embrioni e non possono perciò aver influito sui risultati complessivi.

Prima di dar riferimento di essi mi sembra utile prospettare quali eventuali risultati potrebbero dare i conteggi negli embrioni ad uguale stadio, incubati alle due diverse temperature e quali sarebbero le deduzioni da trarne. Tre possibilità sono evidentemente da attendersi:

1° Un numero maggiore di mitosi negli embrioni incubati a più alta temperatura.

2° Un numero minore di mitosi negli embrioni incubati a più alta temperatura.

3° Un numero di mitosi approssimativamente uguale sia per l'uno che per l'altro embrione di ciascuna delle quattro coppie.

Verificandosi il primo caso, e cioè ritrovando un numero di mitosi maggiore nell'embrione incubato a 41°-42° in confronto a quello dello stesso stadio incubato a 31°–32°, mi sembra poterne inferire che soprattutto, od addirittura esclusivamente, a seconda che la differenza nel numero delle mitosi è più o meno forte, la durata della intercinesi subisce l' influenza della temperatura, mentre la velocità della mitosi non ne risente affatto o

solo in grado minore. Infatti tanto è più rapida l'intercinesi, e tanto maggiore, a velocità della mitosi invariata o quasi, è il numero delle mitosi, che si trovano in atto e che perciò è possibile colpire. Per converso il minor numero di mitosi a bassa temperatura ci è spiegato, secondo la suddetta ipotesi, perchèla lunga durata dell'intercinesi, a velocità uguale o quasi della mitosi, ci fa sorprendere un numero di mitosi tanto minore, quanto più forte è il rallentamento che quel periodo subisce.

Nel secondo caso, cioè ritrovando un minor numero di mitosi alla temperatura più alta di incubazione, potremmo arguirne che la temperatura influisce soprattutto sulla mitosi, lasciando invariata la intercinesi od esplicando su di essa un'azione di grado tanto minore quanto è più basso il numero delle mitosi. Infatti la rapidità delle mitosi ci spiega come difficile, ad intercinesi invariata o quasi, sia il ritrovarle in atto. Alla bassa temperatura, per converso, la maggior durata delle mitosi, ad intermitosi invariata o quasi, ci permette di sorprenderne e di registrarne un numero più grande.

Se infine il numero delle mitosi è approssimativamente uguale per l'uno e per l'altro embrione, possono farsi due ipotesi: in primo luogo che la mitosi e l'intermitosi non siano in alcun modo influenzate dalla temperatura; ciò però va escluso, poichè il tempo impiegato per raggiungere lo stesso stadio, epperò la velocità di accrescimento, è stata nettamente diversa per gli embrioni di ogni coppia (circa doppia a 31°–32° in confronto a 41°–42°); in secondo luogo che sia la cinesi che l'intercinesi risentano in egual misura dell'influenza della temperatura. In tal caso, evidentemente, prolungato per l'embrione incubato a bassa temperatura in egual proporzione il tempo impiegato dall'uno e dall'altro dei due periodi, il numero delle mitosi ritrovabile ad un dato stadio non potrà che essere approssimativamente uguale a quello di un embrione di pari stadio, incubato alla temperatura più alta.

Orbene, dai conteggi da me eseguiti sulle quattro coppie di embrioni suddetti, è risultato che il numero delle mitosi è con grande approssimazione uguale per l'uno e per l'altro embrione di un dato stadio e perciò, in base al criterio suesposto, mi sembra poter ritenere che l'influenza esercitata dalla temperatura sul loro accrescimento si è esplicata in grado pressochè uguale sia sulla cinesi, che sulla intercinesi.

Riporto le cifre assolute del numero delle mitosi per ogni coppia di embrioni, il loro stadio, il numero di ore di incubazione a ciascuna temperatura, ed il numero di sezioni ottenute da ogni embrione.

Embrioni a 12 somiti:	66	ore a	31°–32°:	mitosi	8709:	sezioni	457
»	»	: 34	»	41°–42°:	»	7351:	»	386
»	12-13 somiti:	72	»	31°-32°:	»	7342:	»	395
»	»	: 34	»	41°-42°:	»	8779:	»	480

Embrioni	14–15	somiti:	64 1/2	ore a	31°-32°:	mitosi	10192:	sezioni 509
»	»	:	37	»	41°-42°;	»	8320:	» 371
»	18	somiti:	76	»	31°-32°:	»	10624:	» 505
»	»	:	36	»	41°-42°:	»	10753:	» 448

Come risulta dalle suddette cifre ho notato qualche differenza nel numero delle mitosi fra l'uno e l'altro degli embrioni allo stesso stadio; ma l'embrione con maggior numero di mitosi era di lunghezza alquanto maggiore, sì che il valore medio che si può dedurre da un semplice rapporto fra il numero totale delle mitosi e quello delle sezioni di un dato embrione è sempre assai vicino al valore medio dell'embrione corrispondente dello stesso stadio; soltanto per gli embrioni a 18 somiti esiste una piccola differenza a favore dell'embrione a minor numero di sezioni.

Mi riservo del resto di completare e di rendere più esatte queste ricerche col misurare la superficie di sezione di ciascun embrione ed in pari tempo di calcolare anche il numero relativo di mitosi per unità di superficie.

Posso però fin da ora concludere che l'accelerazione, che l'accrescimento degli embrioni di pollo subisce in funzione della temperatura di incubazione, è il risultato di un'influenza esercitata sia sulla cinesi che sulla intercinesi, e che tale influenza si esplica in grado sensibilmente eguale per l'una e per l'altra.

Mi sembra infine utile notare come il metodo da me seguito si sia prestato ottimamente per le mie ricerche, come del resto esso era già servito perfettamente per lo studio compiuto da Milone [1] sulla frequenza delle mitosi nel midollo spinale di animali di differente mole.

Biologia. — *Sulla durata dell'intercinesi nelle cellule coltivate « in vitro »* [2]. Nota di O. M. Olivo e di E. de Lorenzi, presentata [3] dal Socio G. Levi.

Allo scopo di stabilire l'importanza dei vari fattori che intervengono nel determinismo della mitosi, abbiamo iniziato una serie di osservazioni sulle colture « in vitro » proponendoci di stabilire, oltre ad altri quesiti, se la durata dell'intercinesi per le varie cellule di una coltura, la quale si possa ritenere costituita da elementi omogenei, ha un valore costante o meno; in secondo luogo per stabilire se la seconda cinesi in due cellule gemelle si presenta sincrona o meno.

(1) Milone, S. 1923. *La frequenza delle divisioni mitotiche negli elementi del midollo spinale embrionale di animali di differente mole corporea.* « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 20.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Anatomico della R. Università di Torino, diretto dal prof. G. Levi.

(3) Nella seduta del 1° giugno 1928.

Abbiamo usato per queste osservazioni delle colture provenienti dal ceppo che Carrel coltiva dal 1914, e che egli considera di fibroblasti. Il ceppo fu fornito cortesemente a questo Istituto nel dicembre 1927 dal dottor A. Fischer di Copenaghen, del Kaiser Wilhelm Institut di Berlino. Iniziammo le osservazioni 12–18 ore dopo fatto l'ultimo trapianto; come mezzo nutritivo impiegammo lo stesso di Carrel, plasma e succo embrionale di embrioni al settimo giorno di sviluppo. Le nostre osservazioni furono fatte a temperatura costante di 37–38 gradi, ininterrottamente per 48 e più ore, usando un oculare con reticolo per facilitare il riconoscimento delle cellule seguite. Si segnò sempre come avvenuta la mitosi al momento iniziale dello strozzamento equatoriale, perchè è la fase più facilmente identificabile e determinabile cronologicamente con la maggiore precisione.

Prescindendo dalle osservazioni fatte sulle uova in segmentazione nella letteratura non c'è che un'unica osservazione diretta sulla durata dell'intercinesi, fatta su una coltura «in vitro» da T. S. R. Strangeways. Questo Autore trovò che l'intercinesi dura 11–12 ore.

I dati ottenuti sono i seguenti: Coltura 11891, al 2592° trapianto; scelto un campo microspico alla periferia della zona di cellule migranti, osserviamo alle ore 9.48 (24ª ora dopo l'ultimo trapianto) la mitosi della cellula B, da cui si ottengono le cellule *b* 1 e *b* 2, dopo alcune ore si perde la cellula *b* 2 che non viene più seguita. Alle ore 2.25 del giorno dopo entra in mitosi la cellula *b* 1. L'intercinesi è durata quindi ore 16.37. Durante l'intercinesi di questa cellula, nello stesso campo microscopico, si è avuta la mitosi della cellula E alle ore 13.11 (28ª ora di coltura). Anche delle cellule figlie di questa *e* 1 ed *e* 2 se ne può seguire soltanto una, che entra nuovamente in mitosi alle ore 20.47. La durata della sua intercinesi è stata di ore 7.36. Per le cellule E–*e* tanto la prima che la seconda divisione sono avvenute durante l'Intercinesi della cellula B-*b*. Quando la cellula *e* è entrata in mitosi distava dalla cellula *b*, che possiamo dire più vecchia di ore 3.23, di 50 μ. La cellula più vecchia *b* entrò in mitosi soltanto ore 5.38 più tardi.

Coltura 13093. 2634° trapianto. Campo microscopico alla periferia della zona di migrazione. La prima divisione della cellula A si osserva alle ore 0.33 (14ª ora dopo l'ultimo trapianto). Le due cellule figlie *a* 1 ed *a* 2 entrano in mitosi (2ª divisione) rispettivamente alle ore 21.50 e alle ore 22.02, cioè col breve intervallo una dall'altra di 12 minuti. I rispettivi periodi intercinetici furono di ore 21.17 e 21.29. Al momento della 2ª divisione *a* 1 distava da *a* 2 circa 140 μ, e tra le due cellule non esisteva sicuramente alcuna connessione. Durante l'intercinesi di queste cellule si osservò una prima mitosi della cellula B alle 7.12 (21ª ora dopo il trapianto) e una seconda mitosi delle due cellule che ne nacquero *b* 1 e *b* 2, rispettivamente alle ore 14.35 e 14.45. I rispettivi periodi intercinetici furono di

ore 7.23 e 7.33. Anche in questo caso l'intercinesi delle due cellule gemelle differì di soli 10 minuti. Al momento della 2ª mitosi *b* 1 distava da *b* 2 di circa 10 μ, ma tra le due cellule non esisteva alcuna connessione o contatto protoplasmatico. Anche in questo caso come nella coltura precedente le due mitosi successive delle cellule B e *b* 1 e 2 furono intercalate alle due mitosi delle cellule A ed *a* 1 e 2. Le cellule *b* 1 *b* 2 distavano al momento della 2ª mitosi dalle cellule *a* 1 ed *a* 2 di circa 15-20 μ; le cellule *b* 1 e *b* 2 entrano in mitosi 7 ore e mezzo dopo la loro nascita, e la loro mitosi non influisce per nulla sulle vicine cellule *a* 1 *a* 2 più vecchie di circa 7 ore (età di 14 ore) le quali si dividono per la seconda volta 7 ore più tardi (dopo un'intercinesi di 21 ore). Nello stesso campo microscopico in cui furono osservate le mitosi surriferite si osservarono pure altre mitosi di cellule estranee, di cui non si tenne conto per l'impossibilità di seguire contemporaneamente troppe cellule.

Riassumendo le osservazioni fatte, le mitosi si susseguirono cronologicamente così:

Coltura 11891

Ore	9.48	1ª divisione di B
»	13.11	1ª divisione di E
»	20.47	2ª » » *e* 1
»	2.25	2ª divisione di *b* 1

Coltura 13093

Ore	0.33	1ª divisione di A
»	7.12	1ª divisione di B
»	14.35	2ª » » *b* 1
»	14.45	2ª » » *b* 2
»	21.50	2ª divisione di *a* 1
»	22.02	2ª » » *a* 2

Le conclusioni che si possono trarre già da queste poche osservazioni sono:

1°. Il periodo intercinetico per le differenti cellule di una stessa coltura omogenea è molto variabile anche quando esse si trovino in immediata vicinanza. Da un tempo minimo di ore 7.23 si arriva a un massimo di ore 21.29.

2°. L'intercinesi di cellule gemelle, completamente indipendenti, anche quando esse siano notevolmente distanti (140 μ) presentano una durata della loro intercinesi che si può considerare pressochè eguale, se si tien conto della grande variabilità constatata nelle altre cellule. Ulteriori ricerche ci diranno se questo fatto è generale e costante, e se si verifica anche per le cellule nipoti.

Quello che ci sembra poter dedurre già da queste prime osservazioni è la grande importanza che hanno nel determinismo della mitosi i fattori endogeni delle cellule, che necessariamente bisogna ammettere per renderci conto del come si sono succedute, per fortunata contingenza, le varie mitosi delle nostre osservazioni.

Se nella coltura *in vitro* dovessero avere l'importanza che è stata data in altri casi la diffusione di sostanze ormoniche (Haberland) o l'emissione di radiazioni mitogenetiche (Gurwitsch) o le connessioni citoplasmatiche (A. Fischer) nel determinismo della mitosi nei nostri esperimenti, in cui si ha a che fare con elementi tutti della stessa natura e tenuti tutti nelle identiche condizioni di ambiente si dovrebbe aspettarsi che in un determinato momento questi fattori esogeni generali fossero egualmente efficaci se non più efficaci, sulle cellule più vecchie che non su quelle più giovani (nel nostro caso p. es. della coltura 13093, alle ore 14.35 sulle cellule *a* 1 e *a* 2 anzichè su *b* 1 e *b* 2). Si constata invece che anche se vicine, cellule non parenti prossime hanno ritmo mitotico molto differente, mentre cellule gemelle, anche se lontane presentano un ritmo quasi identico.

Nei tessuti animali e vegetali si conoscono numerosi esempi di sincronia delle mitosi (primi blastomeri degli Echinodermi, spermatogoni, apici vegetativi di molte piante). I fattori necessari a determinare questa sincronia sono certamente molteplici, ma le nostre osservazioni ci sembra dimostrino che uno dei fattori principali e indispensabili è certamente la parentela tra le cellule.

Biologia. — *Studi cirripedologici.* – II. *Anabiosi nei Ctamalini.* Nota di B. Monterosso, presentata [1] dal Socio A. Russo.

In un precedente lavoro [2] ho reso nota la facoltà, presentata da *Chthamalus stellatus,* di cadere per qualche tempo in uno stato di vita latente, qualora venga sottratto al mezzo liquido in cui si svolge naturalmente la sua esistenza.

Le mie ricerche in questione furono eseguite su diverse varietà della specie, ma particolarmente in *Chth. stellatus fistulosus* e in *Chth. stellatus communis,* nè ebbi occasione di registrare vere differenze tra l'una e l'altra.

Risultò dai miei studi, che gli organismi citati sopportano periodi di emersione relativamente lunghi, dopo di che, rimessi in acqua marina, riprendono lo stato di vita attiva. Ogni periodo può distinguersi in due

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) *Studi cirripedologici,* in « Atti Acc. Gioenia Sc. Nat. », Serie V, vol. XV, Memoria, XIV, 1927.

fasi, di cui la prima è caratterizzata dal fatto che l'animale presenta ancora riflessi neuro-muscolari; la seconda fase si inizia quando l'organismo non risponde più agli stimoli meccanici, ma, appena immerso nel suo ambiente liquido normale, riacquista tutti i segni di attiva vitalità. La prima fase sarà da ora in poi indicata come *vita ridotta*; la seconda come *vita latente*, senza però volere dare a questi vocaboli un significato rigoroso.

Lo stato di vita latente, nelle ricerche già pubblicate, si protraeva per un lasso di tempo, tanto variabile, in ragione di diversi fattori intrinseci ed estrinseci, che non mi fu possibile fornire dei dati tassativi al riguardo. La morte reale dei componenti il lotto studiato seguiva però dopo un periodo relativamente non molto lungo.

Dalle osservazioni riportate in quel lavoro (p. 4) ma più, da altre ricerche ancora inedite, emerge un fatto, che mi pare degno di considerazione: a parte i fattori estrinseci, quali la temperatura degli ambienti, in cui gli animali vengono posti a secco, e lo spessore del pezzo di scoglio, sul quale sono attaccati, gli individui, portati in laboratorio, mostrano un comportamento che varia da un blocco all'altro, tanto più accentuatamente, per quanto più differenti sono i luoghi della costa marina, da cui i blocchi stessi vengono prelevati.

Ho bisogno qui di insistere sul significato del mio pensiero: non è differente il comportamento dei singoli individui di uno stesso scoglio, che anzi essi mostrano di sopportare le condizioni sperimentali con grande uniformità, specie per ciò che riguarda il tempo massimo di esistenza nell'ambiente secco. È notevole anzi il fatto che, morti i primi esemplari, gli altri soccombono in un tempo molto breve; talora si può dire che la morte di tutti i Cirripedi costituenti un blocco è perfettamente contemporanea.

Ciò che varia dunque è la resistenza dei diversi blocchi, la quale è, in linea di massima, relativa, dirò così, alla storia precedente di ciascun gruppo di individui; difatti la morte reale colpisce gli esemplari, posti in esperimento, tanto più presto, per quanto più frequentemente, nell'ambiente naturale da cui furono prelevati, essi erano beneficati dall'arrivo di acqua; in altri termini, se preleviamo due blocchi, coperti di Ctamalini, da due punti diversi della spiaggia, uno più alto e l'altro notevolmente più basso, vedremo che, posti all'asciutto, a parità di ogni altra condizione, gli esemplari del primo mostreranno una resistenza maggiore; cioè soccomberanno dopo gli esemplari del secondo.

La causa prima di simili comportamenti deve senza dubbio cercarsi in uno speciale « adattamento » all'ambiente, di cui già gode l'individuo e che imprime ad esso un carattere, il cui significato biologico è tanto evidente, per quanto oscuri sono i mezzi organici sui quali si fonda.

Partendo da siffatte constatazioni, ho voluto sperimentare il comportamento di altre forme di Opercolati, le quali di norma si trovano fisse in posizioni tali, da essere poco frequentemente irrorate dalle onde del mare.

La mia aspettativa fu soddisfatta in modo notevole da *Chthmalus stellatus depressus* (Poli), il cui comportamento parmi degno di attirare l'attenzione dei Biologi.

Bisogna premettere che questa forma vive in estese e fittissime associazioni [1] sulle coste del nostro mare (Catania).

Gli individui si trovano fissi quasi soltanto sugli scogli, che restano, può dirsi costantemente, fuori il liquido; però non sono presenti in tutti, ma esclusivamente sulle superfici interne di quelli, che formano la volta o le pareti di anfratti, aventi l'aspetto di grotticine. Perenne umidità e luce moderata essi trovano in cotali rifugi che pur essendo emersi, sono di frequente percorsi dai frangenti o lavati dagli spruzzi.

Non di rado, però, questi Ctamalini rivestono superfici, distanti dal livello medio del mare parecchie diecine di centimetri, financo un metro, sicchè può affermarsi con sicurezza, che essi vengono irrorati dagli spruzzi dell'onda, solo quando il mare è fortemente mosso, o addirittura tempestoso. Per conseguenza, durante i periodi, sovente molto lunghi, in cui il mare non presenta le dette condizioni, gli animali rimangono quasi completamente a secco anche ad alta marea.

Com'è logico pensare, allora, la mancanza di acqua, che venga direttamente a contatto di questi Cirripedi, produce due effetti principali: anzitutto tende a porli in uno stato di secchezza, che non può assumersi come normale, in animali marini, quali sono, in fin dei conti tali Opercolati; in secondo luogo, li priva del loro naturale alimento, che è costituito in linea generale, di microscopici planktonti.

Il primo inconveniente mi è sembrato più apparente che reale. Difatti, data l'ubicazione dei Cirripedi in parola, che, come si è visto, sono riparati dalle forti correnti atmosferiche e dal sole, anzi per lo più possono considerarsi chiusi come in una vera e propria « camera umida », tanto più in quanto le incrostazioni saline sono igroscopiche; il loro corpo non deve raggiungere mai un alto grado di secchezza.

Trattasi per vero di un'esile lamina di liquido, che ricopre i gusci e penetra nella cavità palleale; ma a questa evidentemente deve aggiungersi « l'acqua di cava », di cui son sempre permeati gli scogli, anche molto compatti; essa raggiunge il corpo del Cirripede, la cui base calcarea è più virtuale che reale [2], e contribuisce a mantenere uno stato di vita, che, se pure non molto attiva, certo non può dirsi latente, anche dopo molti giorni, durante cui sian mancati gli spruzzi diretti, poichè l'animale, tentato con uno stimolo meccanico, esegue dei movimenti più o meno energici.

(1) G. S. Poli, che descrisse per primo questo Opercolato (sotto il nome di *Lepas depressa*) in *Testacea utriusque Siciliae* (Parma 1791), così scrive a p. 29 del vol. I: « Catervatim ipsae vivunt, atque adeo confertae, ut aliae aliis partim insistant ».

(2) Vedere il mio precedente lavoro, p. 4 nota (2). Il Poli (op. cit.) in proposito scrive: « Basis nulla » (p. 29).

Piuttosto le condizioni ora accennate confermano la veduta svolta nel lavoro precedente e dimostrano che essa non è valida solo in condizioni sperimentali: questi organismi, cioè, possono per un certo tempo vivere fuori dell'acqua, respirando ossigeno atmosferico, che viene continuamente a sciogliersi nella lamina liquida, che resta a contatto del loro corpo. Con ciò si dà anche una prova, ritengo, del seguente modo di vedere, espresso già in quello scritto: l'*habitat* degli Opercolati, contrariamente a quanto di solito affermano gli autori, non è in relazione col fatto che l'acqua superficiale, più mossa, è maggiormente ricca di Ossigeno; difatti quest'Ossigeno, quando viene portato da spruzzi non molto frequenti, può bastare al Cirripede per poco tempo, dopo ogni spruzzo; in attesa dell'altra ondata l'animale evidentemente è costretto a respirare quello, che preleva dall'atmosfera, per mezzo della lamina liquida, che ricopre il suo corpo.

La seconda conseguenza, che emerge dalla rarità con cui l'acqua viene a toccare il Cirripede, è la intermittenza nel rifornimento di cibo, giacchè, per quanto fino ad ora mi risulta, i Ctamalini si nutrono di plankton. Ebbene, questo Opercolato può sopportare lunghissime privazioni di alimento in condizioni sperimentali.

Un pezzo di scoglio ricoperto da un centinaio circa di *Chthamalus stellatus depressus*, tolto all'ambiente naturale il 12 aprile 1927, è vivente tuttora (maggio 1928) in questo laboratorio. Esso non è rimasto costantemente all'asciutto, ma ha subito alterne fasi di sommersione nell'acqua marina di una vaschetta e di emersione in ambiente a temperatura e umidità normali (un corridoio dell'Istituto, su un tavolo).

Lo specchietto qui intercalato indica esattamente la storia di questo lotto di Ctamalini, dal 12 aprile 1927 al 27 maggio 1928, cioè per oltre 13 mesi.

Il blocco ormai è ridotto a poco più di 50 individui, ma solo perchè durante l'anno ne ho staccato - viventi - molti per ragioni di studio, sicchè posso calcolare a non più di una dozzina quelli che sono morti durante l'esperimento, protratto per ben tredici mesi.

Data in cui si iniziano i periodi		Durata dei periodi	
di Emersione	di Sommersione	di Emersione	di Sommersione
12 aprile 1927 h. 7	15 aprile 1927 h. 9	3 g. 2 h.	—
16 » » » 16	20 » » » 9	3 » 17 »	1 g. 7 h.
23 » » » 16	28 » » » 17	5 » 1 »	3 » 7 »
30 » » » 10	4 maggio » » 11	4 » 1 »	1 » 17 »
5 maggio » » 10	17 » » » 10	12 » — »	— » 23 »
23 » » » 17	7 giugno » » 11	14 » 18 »	6 » 7 »
13 giugno » » 9	27 » » » 17	14 » 8 »	5 » 22 »
29 » » » 10	6 agosto » » 17	38 » 7 »	1 » 17 »
9 agosto » » 11	3 settembre » » 10	24 » 23 »	2 » 18 »
5 settembre » » 9	25 ottobre » » 10	50 » 1 »	1 » 23 »
31 ottobre » » 10	16 gennaio 1928 » 16	77 » 6 »	6 » — »
20 gennaio 1928 » 10	13 marzo » » 10	53 » — »	3 » 18 »
16 marzo » » 10	27 maggio » » 11	72 » 1 »	3 » — »
Tempo complessivo di EMERSIONE . . .		372 g. 13 h.	
Tempo complessivo di SOMMERSIONE . . .			38 g. 15 h.
Durata totale dell'ESPERIMENTO . . .		411 g. 4 h.	

La tabella qui riprodotta darebbe legittimamente lo spunto a varie osservazioni di natura biologica, su cui non intendo fermarmi per ora.

Richiamo l'attenzione sul fatto che gli organismi hanno subito *tredici* periodi di emersione di durata varia, con un minimo di *tre* giorni e con un massimo di *settantasette* giorni ininterrotti. Interessante sembrami anche il fatto che *questi animali marini son rimasti in ambiente subaereo (secco) complessivamente per trecentosettantadue giorni e tredici ore su quattrocentoundici giorni e quattro ore;* val quanto dire che, *in tutto, son restati in acqua per soli trentotto giorni e quindici ore sui quattrocentoundici giorni e quattro ore,* durante cui si è prolungato il trattamento sperimentale.

Il rapporto medio dunque è di un giorno di vita in acqua, per nove di permanenza all'asciutto. Ma qui deve notarsi, che questo rapporto, se ha un significato matematico, può non avere alcun valore dal lato biologico,

perchè, di fatto, interporre, per esempio, 77 giorni (31 ottobre 1927 - 16 gennaio 1928) di esistenza in ambiente secco, tra sei (25-31 ottobre 1927) e meno di quattro (16-20 gennaio 1928), trascorsi in stato di sommersione, è cosa ben diversa che far passare ritmicamente un giorno di vita e nove di asciutto.

Si tenga presente che in questi esperimenti di solito, per rimettere in acqua marina gli animali, io non ho atteso che essi avessero raggiunto le condizioni di vera e propria vita latente [1]; gli individui, insomma, avanti l'immersione, rispondevano ancora agli stimoli meccanici, ciò che dimostra come i processi vitali erano in atto, non essendo incominciato lo stato di reale anabiosi.

Aggiungo che le reimmersioni si sono fatte in una vaschetta di cm. 25 circa di diametro e 7 di profondità, che si riempiva con acqua di mare, presa sul momento, ma priva di organismi planktonici, almeno visibili ad occhio nudo, e di alghe; l'alimento, in essa contenuto, deve essere stato notevolmente scarso. Ma anche ammettendo che i Cirripedi, su cui ho sperimentato, vi trovassero abbondante pascolo, non posso supporre che in trentotto giorni (complessivamente) essi abbiano potuto introdurre nel corpo, e mettere in serbo, provviste alimentari sufficienti per quattrocentoundici giorni; certo si è che nei trecentosettantadue giorni passati all'asciutto, non hanno avuto mezzo di assumere dall'esterno la benchè minima quantità di nutrimento liquido o solido. Bisogna dunque pensare che, ogni qual volta il blocco venga riportato nell'ambiente secco, gli organismi dei Cirripedi, poco tempo dopo, subiscano un certo grado di rallentamento del loro metabolismo, ancora prima di entrare in stato di vera vita latente.

In conclusione, mi pare che i dati forniti nella presente Nota, indipendentemente da altri, che saranno esposti in successivi scritti, siano i migliori possibili, per affermare che il fenomeno, osservato in *Chthamalus stellatus depressus*, deve considerarsi come un caso di vera e propria vita ridotta.

Questa poi dipende dall'adattamento all'ambiente naturale, in cui vive tale organismo, come si rileva nettamente dalle notizie ecologiche, qui stesso comunicate [2].

Biologia. — *Frequenza delle Mitosi nel cuore embrionale di pollo a vari stadi di sviluppo e nelle culture 'in vitro' dello stesso materiale.* Nota di O. M. Olivo e E. Slavich, presentata dal Socio G. Levi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) In genere, dopo 30-40 giorni di permanenza a secco, gli individui reagiscono ancora agli stimoli meccanici, cioè non sono entrati in anabiosi.

(2) Evidentemente per questi organismi si tratta di un vasto « campo di oscillazioni », inteso nel modo così lucidamente definito dal Mazzarelli, « Riv. di Biol. »; vol. IX fasc. I, 1927.

Zoologia. — *Sulla esistenza di reti nervose diffuse con significato espansionale nei rettili* [1]. Nota di A. STEFANELLI, presentata [2] dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Forse pochi argomenti hanno tanto affaticato i ricercatori quanto i mutui rapporti fra gli elementi nervosi al centro ed alla periferia: e ciò in conseguenza di idee preconcette più che per difetto di tecnica, per la tirannia del principio di autorità più che per mancanza di fatti obbiettivi comprovanti la *continuità* di tali elementi. Ad ogni modo mancava ancora nei vertebrati la figurazione di ampie reti diffuse periferiche come quelle riscontrate negli irudinei, le quali soltanto avrebbero potuto dare il colpo di grazia, se non al neurone, alla ormai scossa ipotesi della *contiguità*.

Anch'io da molti anni sono riuscito a dare a più riprese esempi di continuità alla periferia fra le espansioni nervose più varie; e in ciò servendomi proprio degli stessi metodi tecnici adoperati da coloro, che, per essere conseguenti alla ipotesi del neurone, ostinatamente tali rapporti negano. In seguito a quelle mie ricerche ho anche tentata una spiegazione delle *ultra-espansionali* considerandole come fili residuali di antiche reti nervose diffuse, le quali, con l'individuarsi delle attuali forme espansionali, si agglomerarono nei loro punti nodali. Tale interpretazione basavo specialmente sulla struttura reticolata di molte espansioni, sul loro intimo collegamento per mezzo delle fibrille ultra-espansionali, sulla presenza nelle papille cutanee dei rettili di reti terminali e nella sotto-mucosa degli stessi di alberelli gradatamente passanti a lassi reticolati. Ma non ancora ero riuscito a figurare una rete nervosa diffusa a significato espansionale come quella descritta negli invertebrati dall'Apathy: una rete cioè non circoscritta in singoli tratti, ma ampia e continua ed uniforme, per quanto vi avessi accennato scrivendo della distribuzione dei nervi nella cute e nella sotto-mucosa del cavo orale [3].

Il che finalmente, dopo insistenti ricerche, posso fare con assoluta sicurezza nella presente breve nota.

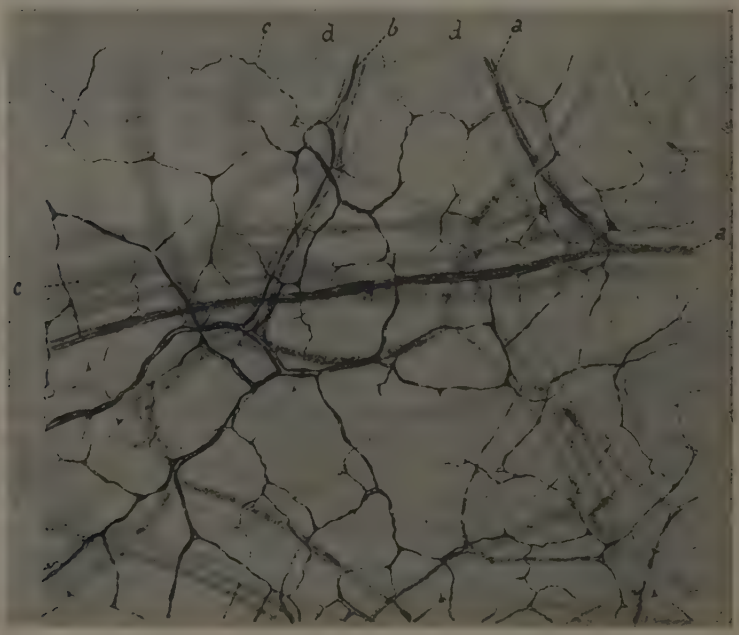
Osservando l'annessa figura, disegnata da un preparato di sotto-mucosa orale di *Zamenis viridiflavus* al cloruro d'oro, si notano grossi rami ner-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) STEFANELLI A., *Sui dispositivi microscopici della sensibilità cutanea e nella mucosa orale dei rettili.* « Intern. Monats. Anat. Phys. », 1914, 31 Bd., p. 8; *Nuovo contributo alla conoscenza delle espansioni sensitive dei rettili e considerazioni sulla tessitura del sistema nervoso periferico.* « Annali di Nevrologia », 1915, fasc. 1 e 2.

vosi midollati di un plesso profondo (*a*), che si accompagna ad una ricca rete di capillari sanguigni (*c*). Detto plesso va gradatamente sfioccandosi nelle singole fibre midollate (*b*), ancora fiancheggiate da più sottili capillari (*b*), finchè, attraverso agli strozzamenti del Ranvier (*a*) di queste, finisce col risolversi negli strati più superficiali in una ricca, complessa, continua rete di esili fili. Riesce evidente come questi non si addensano mai a formare cespuglietti o altre limitate espansioni, ma che si ramificano, anastomizzandosi a rete, tutt' all' intorno in una sola unità espansionale a larghe maglie. Nessun addensamento dunque o interruzione rompe la uniformità



di essa, e così pure nessun filamento si continua al di là, per togliere la certezza che si tratti davvero di una formazione nervosa espansionale diffusa, come quelle osservate negli invertebrati.

Tale constatazione anche nei vertebrati convalida, io credo, la opinione che mi ero formata delle fibrille ultra-espansionali e della origine delle espansioni nervose. Non credo però affatto che possa comunque servire prò o contro la individualità del neurone, perchè non è detto che unità, embriologicamente indipendenti, non possano a completo sviluppo fondersi insieme in una continuità che, essendo secondaria, non annulla affatto la originaria loro individualità. Del resto non si è ciò dimostrato coltivando

sperimentalmente gli elementi nervosi? Reputo solo che la esistenza della su descritta rete valga contro coloro i quali, schiavi di una teorica e credendo di meglio servirla, rinunziano alla evidenza dei fatti, rinnegando in tutti i casi la continuità di detti elementi. Non è più possibile, dopo il cumulo dei fatti dacchè il Ruffini scoprì le ultra-espansionali nei vertebrati, trincerarsi ancora dietro la contiguità per salvare il neurone. E ciò perchè son convinto che questo, nato più che altro per volontà di fisiologi, può continuare a vivacchiare anche con la continuità; ma più che altro perchè i fatti finiscono sempre nella loro semplicità ed evidenza coll'imporsi e trionfare.

Concludendo, da questa noticina risulta che *anche nei vertebrati, e propriamente nei rettili*, esistono estese *reti nervose diffuse espansionali*, le quali, secondo me, possono ricondursi dal punto di vista teorico a quelle riscontrate negli invertebrati, e dare una conferma di più alla *teoria del circuito chiuso* così come la concepì e definì il Ruffini [1].

Fisiologia. — *Sul potere equilibratore reciproco di due soluzioni regolatrici di fosfati.* Nota del dott. M. Comel, presentata [2] dal Corrisp. A. Herlitzka.

Allo scopo di chiarire i risultati emersi dalle ricerche elettrometriche pubblicate in una Nota precedente, e di ricercarne il meccanismo, avevo eseguito, con lo stesso metodo, alcuni controlli, mescolando tra loro due soluzioni Jarisch a diverso *p*H nelle proporzioni di 1 : 5. Avevo così constatato, come si può vedere dalla tabellina che segue, che il *p*H risultante dalla miscela di due soluzioni Jarisch non è quello che si ricaverebbe dalla media aritmetica dei due *p*H (y_1).

*p*H *risultante dalla miscela di due soluzioni Jarisch a vario p*H.

FEM	*p*H	FEM	*p*H	FEM	*p*H(y)	y_1	$y - y_1$
della prima soluzione		della seconda soluzione		della misc. delle soluz.			
0.287	3.66	0.222	4.78	0.267	4.00	3.85	0.15
0.287	3.66	0.164	5.79	0.277	3.83	4.02	0.19
0.287	3.66	0.061	7.57	0.176	5.58	4.31	1.27

(1) Ruefini A., *La fibrilla nervosa ultraterminale nelle terminazioni nervose di senso e la teoria del neurone.* «Riv. di Pat. nervosa e mentale», 1900, p. 77.

(2) Nella seduta del 6 maggio 1928.

Inoltre, dalla tabellina precedente si nota che, mescolando una soluzione a *p*H = 7.57 con un volume quintuplo di una soluzione a *p*H = 3.66, ne risulta un *p*H spostato notevolmente verso l'alcalinità, come avviene mescolando nelle stesse proporzioni una poltiglia di tessuto con una soluzione a basso *p*H.

Non essendomi stato possibile, per ragioni indipendenti dalla mia volontà, di continuare a usare il metodo elettrometrico, ho usato per queste ricerche di confronto il metodo degli indicatori seguendo le prescrizioni e usando i colori di Clark. Per poter fare un confronto rigoroso tra le ricerche precedenti e quelle che seguono, ho voluto anzitutto ripetere una serie di determinazioni con il metodo degli indicatori, già eseguita con il metodo elettrometrico, per avere un *tertium comparationis*. Questa serie l'ho eseguita mescolando poltiglie di muscolo con soluzioni Jarisch nelle proporzioni 1 : 10.

Tabella I.

Influenza del potere regolatore delle poltiglie muscolari sul pH *delle soluzioni Jarisch. Proporzione tra poltiglia e soluzione:* 1 g : 10 cc.

*p*H della soluz. Jarisch	*p*H della soluz. + succo muscol.	Differenza tra i due *p*H	Indicatore usato
6.5	6.6	+ 0.1	Bleu di bromotimolo
5.9	6.3	+ 0.4	» »
5.3	6.1	+ 0.8	Porpora di bromocresolo
4.1	5.7	+ 1.6	» »
3.2	5.2	+ 2.0	» »

Confrontando questa serie di determinazioni con la prima delle serie precedenti, si vede che i risultati sono all'incirca eguali, nell'ambito della precisione consentita dal metodo colorimetrico. Ne risulta, che i risultati ottenuti coi due metodi sono confrontabili tra di loro.

Posto ciò, ho eseguito alcune serie di determinazioni sostituendo, nella miscela, al tessuto, un ugual volume di soluzioni di fosfati a *p*H = 7.4. Nella tabella che segue sono riportati, nella seconda colonna, i *p*H risultanti dalla miscela di una soluzione Jarisch a *p*H = 7.4 con una soluzione al *p*H indicato nella prima colonna nella proporzione di 1 : 9. Nella terza colonna sono dati i valori della media aritmetica dei due *p*H; e nella quarta, la differenza tra i valori della seconda e quelli della terza colonna.

TABELLA II.

pH risultante dalla miscela di una soluzione Jarisch a pH = 7.4 con soluzioni Jarisch a pH = x nelle proporzioni 1 : 9.

x	y	y_1	$y - y_1$	Indicatore usato
6.5	6 58	6.59	— 0.01	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
5.9	6.25	6.05	+ 0.20	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
5.3	5.85	5.51	+ 0.34	Porpora di bromocresolo
4.1	5.53	4.43	+ 1.10	» »
3.2	5.2	3.62	+ 1.58	» »

Si vede subito che in queste determinazioni, l'andamento è analogo a quello degli esperimenti con poltiglie di tessuto (si confrontino i risultati della tabella qui sopra con quella precedente e con la prima tabella del lavoro della precedente).

Risultati analoghi ottenni mescolando una parte di soluzione di fosfati a *p*H = 7.4 con quattro parti di soluzione a *p*H vario; essi sono raccolti, nel modo or ora citato, nella tabella seguente:

TABELLA III.

pH risultante dalla miscela di una soluzione Jarisch a pH = 7.4 con soluzioni Jarisch a pH = x, nelle proporzioni 1 : 4.

x	y	y_1	$y - y_1$	Indicatore usato
6.5	6.63	6.68	— 0.05	Bleu di bromotimolo
5.9	6.35	6.2	+ 0.15	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
5.3	6.16	5.72	+ 0.44	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
4.1	5.95	4.76	+ 1.19	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
3.2	5.35	4.04	+ 1.51	(Bleu di bromofenolo) Porpora di bromocresolo

Esiste dunque, costantemente, uno spostamento del *p*H della miscela, esercitato per modo che esso s'avvicina al *p*H della soluzione a *p*H = 7.4; e lo spostamento, mentre è irrilevante quando i valori di *p*H delle due soluzioni mescolate tra di loro sono poco differenti, è rilevante assai quando il *p*H della seconda soluzione è molto più acido di quello della prima.

La costanza di questo fenomeno, per cui, mescolando tra loro due soluzioni di fosfati, ne risulta un *p*H notevolmente più vicino a quello della soluzione alcalina di quanto non fosse dato dalla media aritmetica dei due *p*H, è dimostrata anche da una ulteriore serie di determinazioni, eseguite mescolando in parti uguali una soluzione a *p*H = 7.4 con una a *p*H vario.

I risultati sono raccolti, nel solito modo, ossia indicando con y il *p*H risultante e con y_1 quello calcolato dalla media aritmetica, nella tabella seguente.

TABELLA IV.

*p*H *risultante dalla miscela di una soluzione Jarisch a* *p*H = 7.4 *con soluzioni Jarisch a* *p*H = x, *nelle proporzioni* 1 : 1.

x	y	y_1	$y - y_1$	Indicatore usato
6.5	7.0	6.95	+ 0.05	Bleu di bromotimolo
5.9	6.7	6.65	+ 0.05	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
5.3	6.6	6.35	+ 0.25	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
4.1	6.47	5.75	+ 0.72	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo
3.2	6.3	5.3	+ 1.00	Bleu di bromotimolo Porpora di bromocresolo

Portando su un sistema di coordinate, sull'asse delle ascisse, i valori di *p*H delle soluzioni di fosfati cui si aggiungeva quello a *p*H = 7.4, e sull'asse delle ordinate i valori del *p*H risultante dalla miscela, si ottiene un tracciato che approssimativamente corrisponde a una linea retta. I risultati delle ricerche succitate si possono quindi esprimere con la formula $y = a + bx$, dove con y si esprime il *p*H risultante dalla miscela, con x quello della soluzione cui veniva aggiunta quella a *p*H = 7.4. Con la stessa formula si erano espressi, nelle ricerche precedenti, i risultati delle determinazioni eseguite sulle miscele di soluzioni Jarisch e di poltiglie di tessuto. Analogo pure è il significato dei parametri a e b.

La soluzione pH = 7.4, dunque, possiede un potere "regolatore" maggiore di quello delle soluzioni più acide; poco notevole di fronte a soluzioni poco acide, notevole invece di fronte a soluzioni con pH molto più basso. Per mezzo di questo potere regolatore essa sposta il pH della soluzione più acida, avvicinandolo al proprio.

Ciò è appunto quanto succcede mescolando a una soluzione regolatrice di fosfati una poltiglia di tessuto. Quanto avviene nella miscela di due soluzioni regolatrici è uno specchio di quanto avviene usando, al posto della soluzione a pH = 7.4, il succo delle poltiglie. V'è anzi una certa concordanza quantitativa tra i due fenomeni, sempre tenendo condo che le ricerche colorimetriche sono di gran lunga meno precise di quelle eseguite col metodo elettrometrico.

I fatti osservati dimostrano quindi, che la resistenza dei muscoli di fronte allo spostamento della reazione indotta da una soluzione equilibratrice, è dovuta essenzialmente alla presenza nel muscolo di un sistema acido–sali, equilibrato intorno alla neutralità. Nei muscoli e nel fegato si può ammettere senz'altro l'esistenza dei sistemi regolatori fosfati–acido fosforico, e carbonati-acido carbonico; cioè, di due sistemi a costante di dissociazione sufficientemente bassa per poter funzionare efficacemente da sistemi equilibratori della reazione. Ma, come non ho dati nelle mie ricerche per ammettere l'entrata in funzione di un sistema equilibratore a preferenza di un altro, così non posso escludere che altri fattori possano, al caso, entrare in giuoco. Anzi, probabilmente anche alle proteine è riservata una parte in questo importante meccanismo di regolazione della reazione da parte dei tessuti; in quanto che la concentrazione dell'anione proteico, deve variare parallelamente alla variazione della reazione del mezzo, con aumento o diminuzione, consecutiva, dei proteinati (di Na, di K).

Comunque, mi limito a concludere, quale risultato di queste ricerche, affermando l'esistenza di un notevole potere di regolazione della reazione chimica da parte dei tessuti, i quali, probabilmente per opera di sistemi equilibratori dati da complessi acido–sali poco dissociati, sono in grado di mantenere la loro reazione sensibilmente vicina alla neutralità, almeno di fronte alle soluzioni acide.

Fisiologia. — *L'energia di crescenza della sterigmatocistiscugra.* Nota di L. De Caro, presentata dal Socio F. Bottazzi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica.* – II. *Calcio e farmaci convulsivanti.* Nota di L. Scremin, presentata dal Socio L. Sabbatani.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Esperienze sulla fissazione di colloidi provocata dal cloroformio.* Nota di A. Spagnol, presentata dal Socio L. Sabbatani.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Patologia. — *Il cancro e le impurità delle razze.* Nota di G. Brunelli, presentata dal Corrisp. A. Dionisi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Istogenesi. — *Ricerche sulla istogenesi delle isole del Langerhans* [1]. Nota di G. Lentati, presentata [2] dal Socio E. Giacomini.

I primi contributi fondamentali alle conoscenze sulle isole del Langerhans furono apportati dagli studi del Diamare e del Laguesse.

Spetta sopratutto al Diamare il merito di avere affermata e dimostrata la natura endocrina di tali formazioni. Il Laguesse per primo ne studiò dettagliatamente la genesi, e formulò una teoria sull' istofisiologia del pancreas che ebbe molti sostenitori, e che diede origine ad una lunga serie di ricerche e di dibattiti non ancora risolti.

Secondo il Laguesse si avrebbero due tipi di formazioni insulari: primarie e secondarie. Le prime, note anche col nome di isole del Laguesse, differenziate dai cordoni pancreatici primitivi, degenererebbero nel corso dello sviluppo; mentre, contemporaneamente a questa degenerazione, si avrebbe l' insorgenza delle formazioni secondarie o definitive o del Langerhans, a costituire la parte endocrina del pancreas adulto. Le isole secondarie non avrebbero alcuna dipendenza dalle primarie, ma sarebbero geneticamente in stretti rapporti cogli acini esocrini. Questi rapporti, oltrechè dalla prima origine, sarebbero poi caratterizzati da una ben peculiare continua reversibilità, per la quale, per tutta la durata della vita, in connessione a momenti funzionali differenti, porzioni del parenchima pancreatico avrebbero la potenzialità, anzi la facilità, di trasformare la struttura e naturalmente la funzione, da quelle acinose zimogeniche in quelle insulari, e da queste ritornare alle prime in un' alterna continua vicenda; concezione teorica conosciuta con la ormai ben nota denominazione del « balancement » del pancreas.

Tale asserita origine acinosa dell' isola del Langerhans, tale concezione teorica del « balancement » furono argomento di numerose discussioni; in

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia Comparata della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

quanto numerosi studiosi (Diamare, Giannelli, von Ebner...) affermarono innanzi tutto la invariabilità dell'isola definitiva; mentre, non tenendo in considerazione le formazioni primarie, e basandosi unicamente su stretti rapporti topografici, presenti nel feto e nel giovane, fra dotti ed isole, messi già in evidenza dal Laguesse, dal Giannelli, dal Giacomini e da altri, sorse l'idea che l'isola si originasse dai dotti medesimi (Pearce, Küster, Weichselbaum e Kyrle, Nakamura.....).

Ulteriori ricerche sulle formazioni primarie, e precisamente sui rapporti, che esse presentano con quelle del Langerhans, furono compiute da Aron, che nello studio di quattro specie di mammiferi e nel pollo ha considerata differente per le diverse specie l'origine delle isole del Langerhans; e precisamente, per due (cavia e uomo) esse deriverebbero dalle isole del Laguesse, mentre per altre (montone, maiale, pollo) queste ultime in parte degenererebbero ed in parte darebbero origine ad ammassi eritroformatori, mentre le isole del Langerhans deriverebbero dagli acini.

In due più recenti lavori sui mammiferi, il Campenhout afferma la persistenza delle formazioni primarie per tutta la vita, non sotto forma di semplici isole, sebbene come complessi simpatici-insulari, in quanto nel corso dell'istogenesi, i costituenti insulari primari verrebbero ad accollarsi agli elementi nervosi per formare con questi un unico ammasso. Nel pancreas definitivamente sviluppato verrebbero quindi ad esistere due varietà di formazioni endocrine, caratterizzate le une dalla detta unione col simpatico, prive di qualsiasi rapporto col tessuto esocrino, mentre le altre si troverebbero sempre circondate dagli acini e sarebbero le vere isole del Langerhans, per le quali varrebbe senza eccezione la teoria del Laguesse.

Io ho voluto riprendere in dettagliato esame il problema dell'origine e della differenziazione del tessuto endocrino del pancreas, con ricerche metodiche su numerose forme delle varie classi dei vertebrati. In questa nota riferisco sommariamente i risultati già ottenuti dallo studio di alcuni mammiferi (Cavia cobaja, Mus musculus e M. decumanus) che illustrerò ampiamente in un prossimo lavoro, nel quale pure esporrò le ricerche ora iniziate su altri mammiferi e sui sauropsidi.

I reperti ottenuti nello studio della cavia e dei topi concordano nelle linee generali e mi permettono pertanto un'unica sommaria esposizione dei risultati ottenuti.

Nulla è da aggiungere a quanto fu scritto dal Laguesse sulla differenziazione dei costituenti delle isole primarie, vale a dire delle cellule torbide. Le isole primarie si differenziano prime dal tubo primario e dalle sue ramificazioni: nei fondi ciechi delle quali si stabiliscono gli abbozzi degli acini esocrini; in seguito, nelle porzioni della zona assile dello stesso tubo primario si originano i dotti escretori. Questi ultimi sono tosto delle entità completamente differenziate, incapaci di originare nuovi elementi; ai soli legami topografici, che costantemente in individui giovani i dotti presentano

con le isole, si possono riferire le credute dipendenze genetiche che ebbi sopra a ricordare.

Le isole prendono origine lungo il percorso del tubo primario e delle sue ramificazioni, fin nelle più immediate vicinanze degli abbozzi acinosi dei fondi ciechi; la loro differenziazione ed il loro accrescimento mi paiono indipendenti dal sistema nervoso simpatico. Infatti i gangli sparsi sul percorso di grossi fasci nervosi si mettono solo secondariamente in rapporto con le isole, quando cioè (e questo reperto appare specialmente evidente nella cavia) in seguito ad un notevole accrescimento, queste estendendosi nel connettivo, raggiungono l'elemento nervoso vicino; mentre l'esistenza di numerose isole primarie, che non contraggono mai rapporti cogli elementi nervosi, mi sembra concorrere ad una maggior dimostrazione di questo mio asserto.

Ad un certo periodo dello sviluppo, quando l'isola del Laguesse presenta già i suoi caratteri definitivi, il tessuto esocrino incomincia a proliferare rigogliosamente, estendendosi dalla regione dei fondi ciechi periferici verso le zone centrali, ed inglobando successivamente le isole, in modo da lasciare solo più libere nel connettivo quelle nate nelle regioni più vicine al tubo primario.

Il tessuto nervoso (gangli e fasci di fibre) appare specialmente localizzato appunto presso al cordone primario od agli inizi delle sue ramificazioni; per cui, quasi sempre, le isole libere nel connettivo vi sono addossate, mentre quelle circondate dagli acini ed in specie le più periferiche non contraggono quasi mai rapporti con esso. Campenhout però ritiene che le isole che non presentano rapporti col simpatico e che si trovano sparse nel tessuto esocrino, siano le sole vere isole del Langerhans, presentanti quindi fin dal loro inizio la nota struttura, sorgenti quando i complessi simpatici-insulari sono già stabilmente formati e senza alcun rapporto con essi. Io non ho trovato differenze genetiche e pur strutturali fra le diverse isole, che sono tutte costituite da elementi specifici di identica struttura, di notevoli dimensioni, dal citoplasma fortemente cosinofilo: le tipiche isole del Laguesse. Secondo questi miei reperti, quindi, le isole che esistono nel pancreas di detti roditori sarebbero tutte uguali per genesi e per l'intima struttura degli elementi specifici, e si differenzierebbero solo pei rapporti topografici, essendo le une circondate dagli acini e le altre libere nel connettivo, vicine ai dotti escretori di maggiori dimensioni, e contraenti inoltre col simpatico dei rapporti che si mantengono per tutta la vita; su uno speciale valore di questi ultimi, dato lo stato attuale delle mie ricerche, non sono in grado di esprimere alcuna opinione.

La presenza delle formazioni primarie e dei complessi simpatici insulari, coi particolari caratteri morfologici sopra accennati, è solo temporanea, perchè in un certo periodo dello sviluppo, che varia nelle diverse specie, si nota in tutte le isole, indipendentemente dai loro rapporti topografici,

una profonda trasformazione degli elementi; e precisamente un forte indebolimento del potere eosinofilo, una diminuzione delle dimensioni cellulari ed una modificazione nei costituenti morfologici del nucleo. Nella cavia la trasformazione non è contemporanea per tutti i costituenti insulari, come già aveva visto Aron, in modo che una medesima isola presenta cellule del tipo primitivo e cellule già trasformate; e la medesima osservazione sebbene con minor frequenza si può fare nel topo, nel quale però si verifica una più graduale contemporanea metamorfosi di tutti i componenti insulari.

Quando questa evoluzione citologica è terminata, nel pancreas esistono solo isole del Langerhans, che conservano i medesimi rapporti topografici che avevano contratto le isole del Laguesse, dalle quali derivano. Questo processo evolutivo rappresenta dunque un passaggio fra la struttura primitiva dell' isola del Langerhans, vale a dire fra l' isola del Laguesse e la struttura definitiva dell' isola del Langerhans. La trasformazione si compie, nella cavia, nella seconda metà della vita fetale e la si vede completarsi in molti neonati; mentre nei topi è assai più tardiva, non effettuandosi che dopo i primi 10 o 15 giorni di vita post-natale (anche Campenhout aveva osservato l' insorgenza di isole secondarie nell'animale adulto).

Queste apparenti discordanze di epoca corrispondono ad una condizione generale dello sviluppo somatico: nella cavia, che nasce in condizione di sviluppo ben avanzato, la trasformazione si attua infatti quasi totalmente durante la vita fetale; mentre nel topo, che nasce in condizioni di sviluppo ben più arretrato, la trasformazione avviene dopo la nascita, contemporaneamente all'evoluzione strutturale di tutto l'organismo. E questo fatto bene si inquadra con altri già studiati ed in via di illustrazione in questo Laboratorio: dal Benazzi, che ha rilevato stretti rapporti fra la struttura della tiroide e dell'ovaia e le condizioni di sviluppo, anatomiche e funzionali, dell' organismo nei periodi pre-natali e post-natali di mammiferi e ultimamente anche di uccelli; dal Pennacchietti, che ha descritta la sistemazione strutturale del surrene di mammiferi, mettendo anche qui in evidenza uno stretto rapporto fra detto processo e le stesse condizioni di prole atta od inetta, che le differenti specie presentano.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio T. Levi-Civita presenta in omaggio il suo volume « Fondamenti di meccanica relativistica » e ne espone brevemente il contenuto.

Il Socio L. Sabbatani presenta il volume XXII delle « Ricerche sperimentali fatte nel 1927-1928 » nell'Istituto di Farmacologia della R. Università di Padova da lui diretto.

Il Socio A. Perroncito presenta il volume contenente le « Ricerche eseguite negli anni 1926 e 1927 » nell'Istituto Camillo Golgi della R. Università di Pavia da lui diretto.

Il Socio O. Mattirolo presenta a nome dell'autore prof. Luigi Messedaglia « Il mais e la vita rurale italiana » e ne pone in evidenza l'importanza.

Il Socio C. Somigliana presenta il volume VI della edizione nazionale delle « Opere di Alessandro Volta » e riferisce sullo stato della stampa degli altri volumi.

Il Socio M. Canavari presenta il suo « Manuale di Geologia tecnica » e ne espone il contenuto e gli intenti.

L'Accademico Segretario prof. N. Parravano presenta i libri giunti in omaggio all'Accademia segnalando i quattro fascicoli dell'« Inventaire des périodiques scientifiques des Bibliothèques de Paris » pubblicati dall'Académie des Sciences; gli opuscoli del Corrisp. C. Guidi « Etudes expérimentales sur des constructions en béton armé », « Esperienze termiche su di una diga a volta », « Sulle dighe ad arco » e « La cerealicultura dal punto di vista economico nel mondo » di A. Brisi.

PRESENTAZIONE DI MEMORIE

Il Socio L. Bianchi presenta la Memoria di Sansone G. « Sul problema della risoluzione apiristica delle congruenze di grado qualunque rispetto ad un modulo primo e la risoluzione apiristica delle congruenze di quarto grado ».

Il Corrisp. L. Cambi presenta la Memoria di Bozza G. « I fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° giugno 1928

ADAMS C. E. — Interpolation (Observatory Bulletin, N. 68, pp. 261-262). Kelburn, 1928. 8°.

BRIZI A. — La cerealicoltura dal punto di vista economico nel mondo. Relazione al XIII Congresso di Agricoltura. Roma, 1927. 8°, pp. 1-92.

BULTINGAIRE L. — Inventaire des périodiques scientifiques des Bibliothèques de Paris. Fasc. I-IV. Paris, 1924-25. 8°, pp. I-VIII, 1-1102.

CANAVARI M. — Manuale di geologia tecnica. Pisa, 1928. 4°, pp. I-XX, 1-971.

FAVARO G. A., RAUSI CL. — L'attività del Sole nell'anno 1927. R. Osservatorio Astrofisico di Catania. Catania, 1928. 8°, pp. 1-16.

GUIDI C. — Esperienze termiche su di una diga a volta. (Estr. dagli « Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ». Vol. LXII, pp. 457-462). Torino, 1927. 8°.

GUIDI C. — Etudes expérimentales sur des constructions en béton armé. (Extr. du « Bulletin technique de la Suisse romande ». Ns. 15, 17 et 18). Lausanne, 92-117. 8°, pp. 39.

GUIDI C. — Sulle dighe ad arco. (Estr. da « l'Ingegnere ». Vol. I). Roma, 1927. 4°, pp. 1-4.

LEVI-CIVITA T. — Fondamenti di meccanica relativistica, redatti dal prof. A. Persico. Bologna, 1928. 8°, pp. I-VII, 1-183.

MESSEDAGLIA L. — Il mais e la vita rurale italiana. Piacenza, 1927. 8°, pp. 1-446.

Ricerche eseguite nel laboratorio di patologia generale e d'istologia della R. Università di Pavia negli anni, 1926-27. Pavia, 1928. 8°.

Ricerche sperimentali dell'Istituto di farmacologia della R. Università di Padova fatte nel 1927-28. Vol. XXII. Padova, 1928. 8°.

SÖLCH J. — Die Landformung der Steiermark. Graz, 1928. 8°, pp. 1-221.

VIDONI G. — L'esame biotipologico degli scolari. (Estr. da « Note e Riviste di Psichiatria ». Vol. XVI). Pesaro, 1928. 8°, pp. 1-6.

VOLTA A. — Le opere di Alessandro Volta. Vol. VI. Milano, 1928. 4°, pp. I-XIX, 1-439.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 giugno 1928 (anno VI).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Variazioni del diametro del Sole dal 1901 al 1911, secondo le osservazioni del R. Osservatorio del Campidoglio.* Nota [1] del Corrisp. G. ARMELLINI.

1. In una mia Nota sopra questo argomento [2] ho esposto i risultati ottenuti dal 1876 al 1900, nelle misure eseguite ogni giorno all'Osservatorio del Campidoglio sul diametro orizzontale del Sole. Queste misure sono continuate, senza interruzione, col metodo già descritto [3], benchè gli astronomi osservatori si siano necessariamente scambiati per dar luogo ad altri. E precisamente:

a) Dal 1876 al 1914 le misure furono eseguite dai professori A. Di Legge, F. Giacomelli ed A. Prosperi. Il prof. Di Legge cessò di osservare il Sole nell'estate del 1914.

b) Nell'anno 1915 le osservazioni furono eseguite soltanto dai Professori F. Giacomelli ed A. Prosperi.

(1) Presentata nella seduta del 17 giugno 1928.

(2) Cfr. «Rend. Lincei», 1925, II sem., fasc. 9. Cfr. anche «Astr. Nachr.», Bd. 226, Nr. 5419 e «Scientia», gennaio 1926.

(3) Ricordiamo che il metodo consiste nel proiettare, per mezzo del cannocchiale dei passaggi di Ertel, il disco solare insieme con i fili del micrometro sopra uno schermo bianco nel momento del passaggio del Sole al meridiano. Gli osservatori seduti presso lo schermo, prendono gli appulsi dei due bordi solari a sette fili del micrometro «ad occhio e orecchio», servendosi di un cronometro siderale che batte i mezzi secondi. Il disco solare proiettato ha il diametro ai circa un metro e l'andamento del cronometro viene accuratamente sorvegliato.

c) Nel 1916, al posto del prof. Di Legge, subentrò P. Mignucci e, da allora fino all'estate del 1921, il personale osservante il diametro solare restò composto di Giacomelli, Prosperi e Mignucci.

d) L'abate prof. Antonio Prosperi moriva nell'estate 1921, ancora robusto non ostante l'età avanzata, e, poco dopo, anche il prof. Francesco Giacomelli lasciava la Specola Capitolina per raggiunti limiti di età. Onde, da allora alla fine del successivo anno 1923, il personale osservante il diametro solare risultò composto di P. Mignucci a cui si aggiunsero, dalla primavera 1922, la dott.ssa Gabriella Conti e il prof. Enrico Persico.

e) Col 1° gennaio 1923, lo scrivente assumeva la direzione dell'Osservatorio del Campidoglio e da allora - essendo il prof. Persico passato ad altro istituto - il personale osservante risulta composto della dottoressa Gabriella Conti, del prof. G. Armellini e di P. Mignucci. Col 1926 ad essi si aggiungeva, come quarto osservatore, il nuovo assistente dottore N. Squillace.

2. I risultati, dal 1923 in poi, sono stati pubblicati nei « Rendiconti » di questa Accademia [1], onde resta solo a pubblicare i risultati relativi al periodo 1901-1922.

Tale lavoro, a cui ora attendiamo, presenta però notevoli difficoltà non solo per la lunghezza dei calcoli di riduzione, ma anche perchè esige uno studio assai accurato delle differenze degli errori personali, onde poter collegare e confrontare tra loro misure eseguite da osservatori diversi.

Nell'attesa, crediamo utile di far conoscere al pubblico i risultati preliminari ottenuti dal 1901 al 1911, che in gran parte erano già stati ridotti dal compianto abate A. Prosperi.

3. A tale scopo abbiamo accuratamente riesaminato i registri di osservazione ed anzi, con l'occasione, abbiamo potuto rettificare una lieve svista sfuggita al Prosperi nella riduzione delle osservazioni del 1910. L'anno 1911 è stato ridotto interamente da noi.

Inoltre abbiamo modificato, secondo le nostre vedute, il metodo di riduzione del Prosperi. E cioè abbiamo preso la metà dell'anno (p. es. 1901, 5) come epoca a cui riferiamo la media dei valori dei diametri solari osservati durante l'anno e ridotti sempre alla distanza media dalla Terra al Sole. Ottenuti questi risultati, per correggere eventuali errori dovuti a variazioni dell'irradiazione per differenti condizioni metereologiche, abbiamo compensato di due in due anni i valori ottenuti. In altre parole abbiamo preso, p. es., come valore del diametro solare per il 1902,0, la media dei valori corrispondenti al 1901, 5 e al 1902, 5, vale a dire la media di tutti i valori ottenuti negli anni 1901 e 1902.

4. Procedendo in tal modo si sono avuti i seguenti risultati per il raggio orizzontale R del Sole, ridotto alla distanza media della Terra:

(1) Cfr. « Rend. Lincei », 1924, I, fasc. 9; 1925, II, fasc. 9; 1927, I, fasc. 3.

Data	Di Legge	Giacomelli	Prosperi	Media
1900, 5	960".50	961".08	961".25	960.94
1901, 5	960 .53	960 .80	961 .05	960.79
1902, 5	960 .92	961 .12	961 .02	961.02
1903, 5	961 .17	961 .31	961 .25	961.24
1904, 5	961 .54	961 .91	961 .33	961.59
1905, 5	961 .31	961 .47	961 .32	961.37
1906, 5	961 .55	961 .60	961 .56	961.57
1907, 5	961 .69	961 .91	961 .59	962.06
1908, 5	961 .73	961 .97	961 .39	961.70
1909, 5	961 .82	962 .25	961 .25	961.77
1910, 5	961 .46	962 .79	961 .69	961.98
1911, 5	961 .01	961 .69	961 .39	961.36

Da questo prospetto, compensando due a due i valori ottenuti, abbiamo per il raggio R del Sole alla distanza media dalla Terra:

Data	R	Data	R
1901, 0	**960".87**	**1907, 0**	**961".82**
1902, 0	**960 .90**	**1908, 0**	**961 .88**
1903, 0	**961 .13**	**1909, 0**	**961 .73**
1904, 0	**961 .41**	**1910, 0**	**961 ,87**
1905, 0	**961 .48**	**1911, 0**	**961 ,67**
1906, 0	**961 .47**		

Se ricordiamo i valori ottenuti nella precedente Nota [1], possiamo constatare come la tabella mostri *un regolare accrescimento del raggio solare, da un minimo di 960".70 avvenuto nel 1897, fino ad un massimo di 961.88 avvenuto nel 1908. Dopo di che, con qualche oscillazione, s'inizia la decrescenza.*

(1) «Rend. Lincei», 1925, II sem., fasc. 9. I valori ottenuti per il 1897, 0 – 1898, 0 - 1899, 0 - 1900, 0, furono rispettivamente 960".70 – 960".73 - 960".80 – 960".86.

Per brevità non riportiamo la tabella del numero delle osservazioni. Diciamo soltanto che, nel periodo 1901-1911, Di Legge fece 1631 osservazioni, Giacomelli 1761 e Prosperi 1889; in generale ciascun osservatore ha eseguito dalle 150 alle 200 osservazioni all'anno.

Elettrotecnica. — *Misura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico.* Nota [1] del Corrisp. L. Lombardi.

Il prof. W. Rogowski, della Scuola Politecnica di Aachen, ha pubblicato nel primo volume della Rivista « Archiv. für Elektrotechnik », da lui diretta [2], due interessanti lavori su la *Misura della tensione magnetica*, intesa come integrale di linea della forza magnetica. La misura venne da lui eseguita mediante un apparecchio molto semplice, composto di una spirale uniformemente distribuita sopra una striscia flessibile di materiale isolante, le cui estremità si facevano coincidere con le regioni dello spazio, tra le quali si voleva determinare la caduta di potenziale magnetico. Se tutte le spire abbracciano la medesima superficie e sono ortogonali alla linea d'asse della spirale, il flusso totale di induzione, con questa concatenato, e facile a misurarsi per inversione mediante un galvanometro balistico, risulta semplicemente proporzionale all'integrale di linea della induzione lungo l'asse medesimo, essendo il coefficiente di proporzionalità k rappresentato dall'area complessiva delle spire distribuite per ogni unità di lunghezza; quell'integrale si confonde numericamente con quello della forza magnetica, se il mezzo isolante, entro a cui sono distribuite le spire, ha permeabilità unitaria.

In un terzo lavoro del medesimo Autore, pubblicato nel quarto volume della Rivista predetta [3], è descritta la prima applicazione di quell'apparecchio per la misura della potenza perduta entro una porzione circoscritta di materiale soggetta a magnetizzazione alternata, e facente parte di un circuito magnetico comunque complesso, le cui porzioni rimanenti, pur ricevendo il lavoro di polarizzazione dalla medesima sorgente, restavano completamente estranee alla misura.

Determinazioni analoghe offrono un grande interesse nella elettrotecnica moderna, ove sovente si impiegano membrature magnetiche composte di materiali diversi, o per lo meno soggette a magnetizzazione diversamente intensa, in ognuna delle quali importa determinare la perdita locale per commisurare ad essa la superficie refrigerante, trarne elemento nella previsione della temperatura finale, e nel calcolo dei coefficienti di rendimento.

Ora il metodo seguito dal Rogowski, assai pregevole per la sua originalità, si presenta in pratica eccessivamente laborioso, in quanto richiede

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1928.
(2) Anni 1912 e 1913, fasc. 4 e 12, p. 141 e 511.
(3) Anno 1916, fasc. 9, p. 279.

l'impiego di due sorgenti indipendenti di forza elettromotrice alternativa, suscettibili di uno spostamento relativo di fase, ed una delicata compensazione fra la forza elettromotrice indotta entro alla spirale dell'apparecchio, che misura la caduta di potenziale magnetico, e quella di un altro apparecchio ausiliario separatamente eccitato.

Avendo in animo di eseguire una serie sistematica di misure di potenza dissipata entro alle diverse membrature magnetiche di trasformatori di tipo moderno, ove si presentano relazioni complicate tra flussi di induzione e gradi diversi di saturazione, ho cercato di eliminare le principali difficoltà inerenti al metodo del Rogowski, utilizzando ancora il suo misuratore di tensione magnetica, ma con un dispositivo wattometrico notevolmente più semplice.

Questo consta propriamente di un elettrodinamometro a riflessione, i cui due circuiti, fisso e mobile, sono rispettivamente collegati alla spirale del misuratore di tensione, che ha gli estremi appoggiati ai limiti della membratura magnetica ove si vuol determinare la perdita, e ad una spirale secondaria, che si avvolge su la membratura predetta, e può servire per la valutazione del flusso concatenato di induzione.

La teoria della misura è estremamente semplice.

Cominciando dal caso in cui le sole perdite di energia sono dovute all'isteresi, nell'unità di volume della sostanza il lavoro di polarizzazione durante l'intervallo elementare di tempo dt, nel quale lo spostamento magnetico varia di db e la induzione di $d\mathrm{B}$ sotto l'azione della forza magnetica H, subisce una variazione, espressa in unità assolute da

$$dw_1 = \mathrm{H} \cdot db = \frac{1}{4\pi} \mathrm{H} \cdot d\mathrm{B} .$$

Entro ad un prisma o cilindro elementare, di sezione S e lunghezza dl, il lavoro corrispondente assume la grandezza:

$$d^2\omega = \frac{1}{4\pi} \mathrm{H} dl \cdot \mathrm{S} d\mathrm{B}$$

che può anche scriversi:

$$d^2\omega = \frac{1}{4\pi} \mathrm{H} dl \cdot \mathrm{S} \frac{d\mathrm{B}}{dt} \cdot dt .$$

Qui $\mathrm{S} \frac{d\mathrm{B}}{dt}$ non è altro che la variazione per unità di tempo del flusso concatenato con ognuna delle spire secondarie, ed equivale perciò in unità assolute alla f. e. m. in essa indotta, e può trasformarsi in unità pratiche dividendola per 10^8; questa risulta indipendente da l, se il flusso si conserva inalterato in tutta la lunghezza del tronco magnetico, e può ragguagliarsi alla f. e. m. secondaria totale e'' divisa per il numero delle spire N''. Divi-

dendo per dt ed eseguendo la integrazione rispetto ad l, si ottiene la potenza istantanea assorbita dal tronco magnetico in esame espressa in erg per 1'':

$$\frac{dw}{dt} = \frac{10^8}{4\pi} \frac{e''}{N''} \int_0^l H \cdot dl .$$

Ricordando che il flusso concatenato con la spirale del misuratore di tensione può scriversi:

$$\varphi' = k \int_0^l H \, dl$$

si ottiene definitivamente

$$\frac{dw}{dt} = \frac{10^8}{4\pi k} \frac{e''}{N''} \varphi' \text{ erg/1''} = \frac{10\, e''}{4\pi k N''} \varphi' \text{ watt} .$$

Per eseguire col wattometro elettrodinamico la misura della potenza media dissipata, occorre inviare nelle due spirali di esso due correnti, di intensità e di fase corrispondenti ad e'' ed a φ', ovvero di intensità proporzionali a queste due grandezze, e di fasi spostate rispetto ad esse di un medesimo angolo.

Se si impiega la f. e. m. e'' a produrre una corrente $i'' = \frac{e''}{v''}$ della stessa fase attraverso un circuito di grande resistenza ohmica e di reattanza trascurabile, il quale comprenda ad es. la spirale fissa dell'elettrodinamometro, occorrerà ricavare dal misuratore di tensione magnetica una corrente i' proporzionale a φ' ed in fase con esso, ovvero spostata rispetto ad esso di 180°. Questa può facilmente ottenersi, includendo nel circuito un condensatore di capacità C, affetto da un angolo di perdita trascurabile, di fronte alla cui reattanza $\frac{1}{\omega C}$ risultino trascurabili la resistenza ohmica e la reattanza di selfinduzione del circuito stesso. La f. e. m. utilizzata a caricarlo risulterà invero in unità pratiche:

$$e' = -\frac{d\varphi'}{dt} 10^{-8} ,$$

e la intensità di corrente, trascurando le cadute ohmiche e reattive lungo il circuito, sarà:

$$i' = C \frac{de'}{dt} = -C \frac{d^2\varphi'}{dt^2} 10^{-8} .$$

Supposte le grandezze sinusoidali, questa equivale a:

$$i' = \omega^2 C \varphi' \cdot 10^{-8} .$$

La potenza istantanea di polarizzazione assume pertanto in watt il valore:

$$\frac{aw}{dt} = \frac{r'' \, i'' \, i'}{4 \pi k \, N'' \, \omega^2 \, C} \, 10^9 ,$$

e la potenza media dissipata diventa, se T è la durata del periodo:

$$P = \frac{r'' \, 10^9}{4 \pi k \, \omega^2 \, N'' \, C} \frac{1}{T} \int_0^T i' \, i'' \, dt .$$

Poichè l'elettrodinamometro fornisce una deviazione:

$$\theta = A \frac{1}{T} \int_0^T i' \, i'' \, dt ,$$

a questa risulta proporzionale la potenza cercata:

$$P = \frac{r'' \, \theta}{4 \pi \, A k \, \omega^2 \, N'' \, C} \, 10^9 .$$

Un ragionamento analogo varrebbe naturalmente se, invece di portare in quadratura, mediante la inclusione del condensatore, la corrente indotta nel misuratore di tensione, si ricavasse da questo una corrente in fase con la f. e. m., ossia in quadratura con la tensione magnetica, includendovi una resistenza adeguata, e si portasse invece in quadratura con la f. e. m. e'', ossia in fase col flusso principale, la corrente da esso indotta mediante un condensatore di adeguata capacità.

La convenienza dell'una piuttosto che dell'altra soluzione dipende unicamente dall'ordine di grandezza delle capacità e resistenze di cui si dispone, in relazione alle resistenze e induttanze dei due circuiti dell'elettrodinamometro, ed alla rispettiva portata amperometrica, che in molti apparecchi di questo genere, destinati a eccitazione separata soprattutto per misure coi metodi di riduzione allo zero, può essere eminentemente diversa. In ogni caso l'esattezza del metodo presuppone di fronte alla reattanza del condensatore trascurabili la resistenza e la induttanza del circuito corrispondente, e di fronte alla resistenza complessiva dell'altro circuito trascurabile la induttanza delle spirali con esso collegate.

Se si genera il flusso principale mediante una tensione sinusoidale, quale è facile a ottenersi da buoni alternatori moderni, regolandone opportunamente la eccitazione, la f. e. m. ricavata dal circuito flussometrico risulta a sua volta sensibilmente sinusoidale, e può giovare che si alimenti con essa il condensatore, in quanto questo tende adesaltare le armoniche superiori, le quali si manifestano in prevalenza nel circuito della forza magnetomotrice. L'intervento di armoniche non ha d'altronde influenza nella mi-

sura wattometrica, se uno dei circuiti porta corrente sinusoidale, nel qual caso le perdite magnetiche vengono determinate in relazione all'onda fondamentale.

Se nel ferro hanno luogo altre perdite accessorie, dovute alle correnti parassite, queste reagiscono contro le variazioni del flusso, al mantenimento del quale rendono necessaria una maggiore forza magnetomotrice, che il misuratore di tensione integra per parte sua, onde il risultato è ancora valido come già dimostrò Rogowski; questi perciò giustamente considerò il suo dispositivo come atto a misurare tutto il flusso trasversale di energia, comunicato elettromagneticamente al nucleo in esame, secondo la precisa indicazione del teorema di Poynting.

La principale difficoltà, che si può prevedere praticamente nell'applicazione del nuovo dispositivo, è di avere un elettrodinamometro di sensibilità adeguata, senza che assumano valori esagerati la resistenza di uno degli avvolgimenti in relazione alla reattanza di capacità del condensatore che con esso deve collegarsi; e la reattanza di selfinduzione dell'altro avvolgimento, in relazione alla resistenza ohmica del circuito che deve formarsi con esso e con la spirale del misuratore di tensione.

Nell'Istituto Elettrotecnico della R. Scuola d'Ingegneria di Roma sono attualmente in corso le esperienze per la verifica del nuovo metodo di misura, ed i risultati formeranno oggetto di una comunicazione successiva.

Chimica. — *Sopra la mobilità di alcuni atomi di alogeno* [1]. Nota [2] del Socio A. Angeli e di R. Poggi.

In questi ultimi anni venne ripetutamente posta in rilievo l'analogia di comportamento che si riscontra fra i derivati aromatici della forma [3]:

$$(CH_3O)C_6H_4 \cdot CH_2Cl$$

e quelli alifatici nei quali gli stessi sostituenti dell'anello benzolico sono direttamente riuniti fra di loro:

$$CH_3O \cdot CH_2 \cdot Cl\ .$$

Entrambe queste sostanze per azione dell'acqua e dell'alcool perdono con la massima facilità l'atomo di alogeno, sotto forma di acido cloridrico:

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Università di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 17 giugno 1928.

(3) « Memorie Lincei », vol. 14 (1924), fasc. 12, p. 2; « Rend. Lincei », III (1926), 1° sem., p. 450.

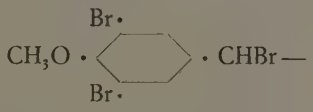
viceversa entrambi i composti non reagiscono col magnesio, in soluzione eterea, per fornire il corrispondente reattivo di Grignard.

Questo comportamento è stato attribuito al fatto che molto probabilmente l'atomo di alogeno è impegnato al residuo alcossilico, in modo da formare un derivato dell'ossonio. D'altra parte che l'anomalia sia da attribuirsi ad un fatto di questo genere è dimostrato dal comportamento di alcuni derivati aromatici analogamente costituiti che contengono nell'anello benzolico anche altri sostituenti.

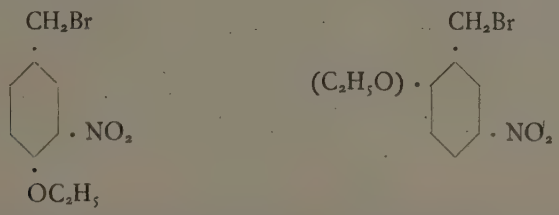
Così mentre nel prodotto:

$$(CH_3O)C_6H_4 \cdot CHBr \cdot CHBr \cdot CH_3$$

l'atomo di bromo prossimo all'anello aromatico viene facilmente eliminato per semplice azione dell'alcool, il composto ortobisostituito rispetto al metossile:

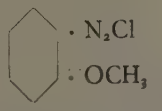


ricristallizza inalterato dallo stesso solvente. Tale comportamento è senza dubbio dovuto al fatto che i due atomi di bromo contigui al metossile non permettono la formazione di un composto ossonico (impedimento sterico). Anche i due derivati [1]:



ricristallizzano inalterati dall'alcool, ma in questo caso la ragione è da attribuirsi ai gruppi nitrici situati in orto e para che indeboliscono talmente le proprietà basiche dell'alcossile in modo da non permettergli di formare derivati dell'ossonio.

Con tutta probabilità si spiega nello stesso modo anche la grande resistenza al calore che manifestano alcuni sali di diazonio. Così è noto che i sali:



(1) A. Kliegl e W. Hölle, «Berichte», *59* (1926), 901.

possono venire riscaldati a 100° senza alterarsi [1]; nella stessa guisa i sali:

possono venire ricristallizzati dall'acqua bollente [2] e solamente per riscaldamento con acqua in tubo chiuso a 140° forniscono idrochinone [3].

Questo per quanto riguarda l'eliminazione dell'alogeno sotto forma di acido e il comportamento dei derivati in genere.

Nel corso delle sue classiche ricerche sopra i derivati del trifenilmetano Adolfo von Baeyer ha osservato che il clorotrianisilmetano [4]:

$$\begin{matrix}(CH_3O)\cdot C_6H_4 \\ (CH_3O)\cdot C_6H_4—C\cdot Cl \\ (CH_3O)\cdot C_6H_4\end{matrix}$$

perde spontaneamente cloruro di metile per trasformarsi in un prodotto amorfo colorato in rosso.

Se noi scriviamo in altro modo il clorotrianisilmetano, si vede subito che anche questa sostanza entra nel gruppo di quelle precedentemente considerate:

$$(CH_3O)\cdot C_6H_4\cdot C\,\{C_6H_4\cdot OCH_3\}_2\cdot Cl$$

e perciò era da aspettarsi che anche il termine più semplice da cui deriva:

$$(CH_3O)\cdot C_6H_4\cdot CH_2\cdot Cl$$

fosse in grado di perdere, non solo acido cloridrico, ma anche cloruro di metile.

Ciò abbiamo potuto verificare sperimentalmente. L'ultimo prodotto considerato, conservato in un vasetto a tappo smerigliato, da liquido mobile che era si trasforma lentamente in una massa vetrosa colorata in rosso. Nello stesso tempo si nota una certa pressione nel recipiente e sviluppo di acido cloridrico. Il prodotto solido è insolubile in tutti i solventi e perciò abbiamo dovuto limitarci a lavarlo con acqua e successivamente con alcool,

(1) Gattermann, «Ber.», *32* (1899), 1136.
(2) Hantzsch, «Ber.», *33* (1900), 2517.
(3) Salkowski, «Ber.», *7* (1874), 1010.
(4) Baeyer e Villiger, «Ber.» *35* (1902), 3031.

benzolo ed infine con etere. All'analisi la sostanza, che brucia con somma difficoltà, ha fornito i seguenti numeri:

gr. 0.1920 hanno dato gr. 0.5568 di CO_2 e gr. 0.1153 di H_2O;

trovato:	C	79.1
	H	6.7

i quali concordano sufficientemente con quelli:

C	79.6
H	6.2

richiesti dalla formola:

$$(C_{15}H_{14}O_2)_n .$$

Siccome il prodotto è insolubile in tutti i solventi e non è volatile, non ci fu possibile determinare la sua grandezza molecolare; ad ogni modo la sua composizione lascia comprendere che alla sua formazione hanno preso parte due molecole del composto di partenza con eliminazione di una molecola di acido cloridrico ed una di cloruro di metile:

$$2(CH_3O)\cdot C_6H_4\cdot CH_2Cl = C_{15}H_{14}O_2 + HCl + CH_3Cl;$$

il prodotto che si ottiene ha tutti i caratteri delle resine artificiali.

Questi fatti inducono a certe considerazioni di indole generale sopra il comportamento di alcune sostanze analogamente costituite, e principalmente sulla loro facoltà di dare dei polimeri. È noto che la formaldeide ha una grande tendenza a fornire molecole complesse (poliossimetileni ed idrati di carbonio). Se noi scriviamo la formaldeide nella sua forma di idrato:

$$HO \cdot CH_2 \cdot OH$$

si vede subito che essa presenta una certa rassomiglianza con l'alcool salicilico, affine ai composti prima considerati:

$$HO \cdot \{C_6H_4\} CH_2 \cdot OH$$

e nel quale gli stessi residui sono separati dall'anello aromatico; ed anche l'alcool salicilico, come è noto, per azione degli acidi fornisce composti resinosi, chiamati *saliretine*. Senza dubbio alla formazione di composti intermedi di analoga struttura è dovuta anche la formazione delle bacheliti, in modo che riassumendo ne risulta la seguente rimarchevole analogia:

$HO \cdot CH_2 \cdot OH \longrightarrow$ poliossimetileni ed idrati di carbonio,
$HO\{C_6H_4\}CH_2\cdot OH \longrightarrow$ resine artificiali.

Continueremo lo studio di queste reazioni.

Chimica. — *La decomposizione termica dell'allumina Bayer* [1]. Nota [2] del Socio N. PARRAVANO e di G. MALQUORI.

Il prodotto che oggi si impiega nella fabbricazione dell'alluminio è l'ossido risultante dalla calcinazione a temperatura elevata dell'allumina Bayer, $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$. Nel processo Blanc di utilizzazione integrale della leucite mediante attacco con acido cloridrico viene invece adoperato nei forni di elettrolisi l'ossido derivante dalla scomposizione a bassa temperatura del cloruro esaidrato.

In una Nota precedente [3] uno di noi assieme con V. Montoro ha descritto i fenomeni che si verificano nella decomposizione del cloruro, ed ha illustrato le proprietà del prodotto che si forma. Per chiarire in modo preciso i rapporti che intercedono fra l'allumina Blanc e l'ossido che deriva dalla Bayer abbiamo voluto perciò studiare anche la demolizione termica di questa.

Houldsworth [4] ha determinato la curva di riscaldamento di un idrato cristallino esistente in natura, la idrargillite, che ha una composizione corrispondente ad $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$, ed ha osservato sulla curva di riscaldamento un solo effetto termico a 240°. Un'altra piccola reazione endotermica, riscontrata a 500°, egli l'ha attribuita a impurezze argillose contenute nella idrargillite.

Louis Blanc [5] invece, il quale ha ripetuto l'esperienza, ha riscontrato tre arresti a circa 50°, 250°, 500°, e, solo basandosi sulle ricerche di Guichard [6] sulla disidratazione dell'allumina ottenuta per precipitazione in condizioni diverse, li ha attribuiti alla scomposizione degli idrati con $3\text{-}2\text{-}1\text{-}H_2O$.

Già qualche anno fa noi stessi avevamo eseguito delle prove di disidratazione col calore dell'allumina Bayer e di esse avevamo dato notizia sommaria [7]. Abbiamo in seguito ripetuto con ogni accuratezza esperienze di riscaldamento con un prodotto che, dopo essiccamento a 100°, aveva il 34.9 % di acqua (calcolato per $Al_2O_3 \cdot 3H_2O = 34.57$ %).

Le esperienze sono state eseguite con un apparecchio Saladin di cui avevamo regolato la sensibilità in modo che tutta la larghezza della lastra

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Presentata nella seduta del 6 maggio 1928.
(3) Questi «Rendiconti», vol. VII, fasc. 11, p. 885.
(4) «Trans. Cer. Soc.», *23*, 279 (1924).
(5) «Ann. Chim.» [10] *6*, 182 (1926).
(6) «Bull. Soc. Chim.», *38*, 251, 385 (1925).
(7) «Atti del 2° Congr. Naz. Chimica, in Palermo», 1131 (1926).

fotografica (18 cm.) corrispondesse a soli 300°. Come sostanza inerte si è adoperata la stessa allumina Bayer calcinata a lungo.

La curva della fig. 1 è stata pertanto tracciata ricavandola da due lastre che comprendevano le temperature fino a 700°.

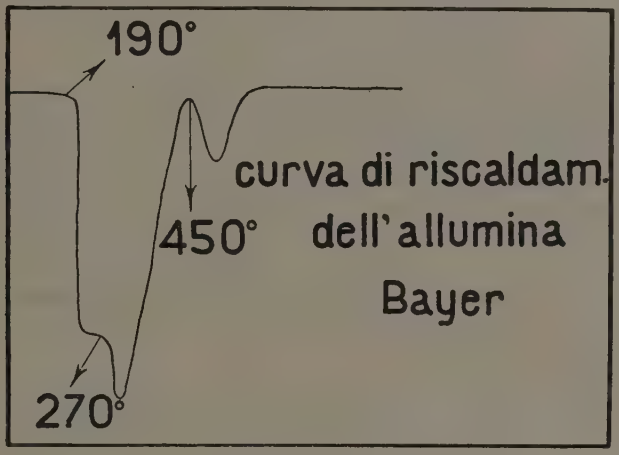


Fig. 1.

Nella fig. 2 è riprodotto invece il primo tratto della curva fino a 300° nella registrazione fotografica originale. È questa la parte che più interessa per la discussione che segue, e che si differenzia nettamente dal tratto cor-

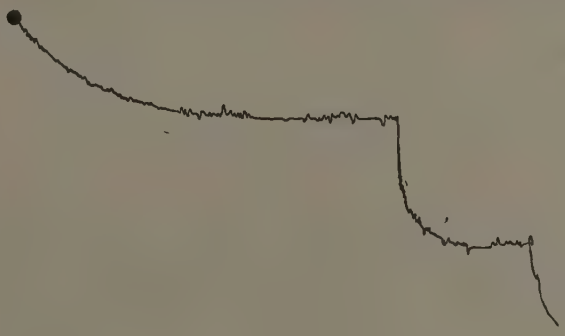


Fig. 2.

rispondente nelle curve pubblicate da Houldsworth e da L. Blanc, in quanto non vi è nessun accenno della scomposizione a 50° ammessa da questo autore e vi appare scisso nettamente in due, a 190° e a 270°, l'effetto endotermico che entrambi trovano a 250°.

Le nostre esperienze mostrano quindi che nella disidratazione dell'allumina Bayer seccata a 100° si possono distinguere tre stadi in corrispondenza delle temperature di 190°, 270°, 450°.

Per chiarire a che corrispondono questi tre stadi non è possibile affidarsi all' analisi dei prodotti che si formano alle tre temperature, a causa delle proprietà adsorbenti che essi hanno, e bisogna cercare di servirsi di altri mezzi.

— Houldworth (loc. cit.) ha studiato anche la disadratazione del diasporo ($Al_2O_3 \cdot H_2O$) e di una bauxite rossa ($Al_2O_3 \cdot H_2O$), ed ha trovato in entrambi un solo effetto endotermico, a 470° nel primo, a 490° nella seconda. Queste temperature si avvicinano molto a quella di 450° da noi osservata per l'ultimo stadio di disidratazione della allumina Bayer, per modo che, se – data la complicazione dei processi di disidratazione di cui si tratta – si attribuissero le differenze a diverse condizioni di esperienza [1], si potrebbe ritenere l'ultimo effetto endotermico, osservato da Houldsworth e da L. Blanc nella idrargillite e da noi nella Bayer, come dovuto alla scissione del monoidrato $Al_2O_3 \cdot H_2O$.

A questo modo si potrebbe quindi spiegare la natura dell' arresto a 470°, ma rimarrebbero sempre da interpretare i fenomeni che si compiono alle altre due temperature, 190° e 270°.

Per chiarire la questione abbiamo pertanto cercato di aiutarci col confronto dei röntgenogrammi dei prodotti che si ottengono nei tre stadi con quelli degli idrati naturali noti: idrargillite, diasporo, bauxite.

Haber [2] afferma che con l'esame degli spettri ottenuti con i raggi X si arriverebbe a stabilire che l'idrargillite quando viene riscaldata si trasforma in bauxite, e questa successivamente in γ Al_2O_3.

— Le figure 3 e 4 riproducono gli schemi degli spettrogrammi della idrargillite e dell'allumina Bayer, e le 6 e 7 quelli dell'allumina Bayer scaldata a 530° (al di sopra cioè della terza discontinuità nella curva di riscaldamento) e dell'allumina dal cloruro scaldata a 850°.

Sull' ascissa sono riportati gli angoli ϑ e sull' ordinata le intensità delle righe.

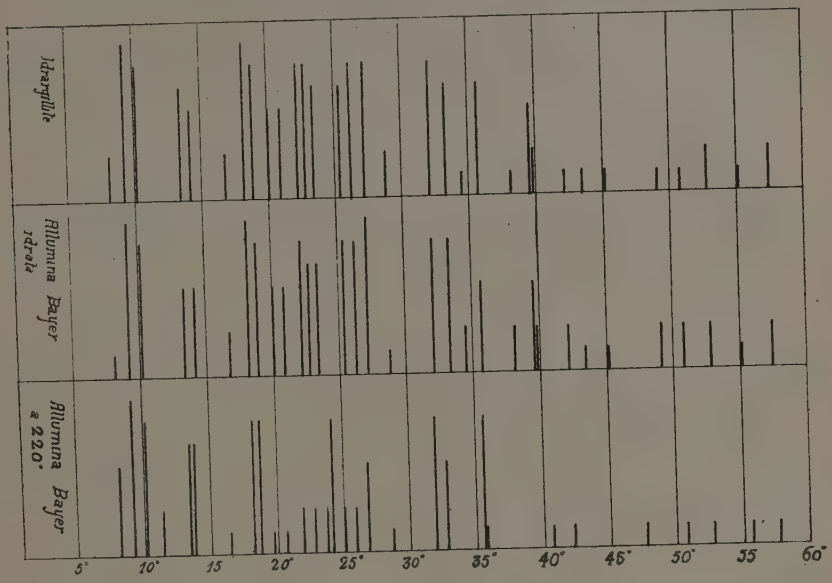
Gli spettri della idrargillite e della allumina Bayer sono in tutto identici. Böhn [3] ha riscontrato la stessa identità tra gli spettri della idrargillite e della allumina di Bronnsdorff ottenuta dalle soluzioni di alluminati alcalini. La curva di riscaldamento riportata da L. Blanc per la idrargillite risulta pertanto poco spiegabile in confronto a quella da noi ottenuta per l' allumina Bayer.

(1) Hagiwara, [« Koll. Zeit. », *32*, 154 (1923)] ha trovato che le temperature alle quali l'acqua abbandona l' idrato $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$ variano a seconda del grado di suddivisione del prodotto.

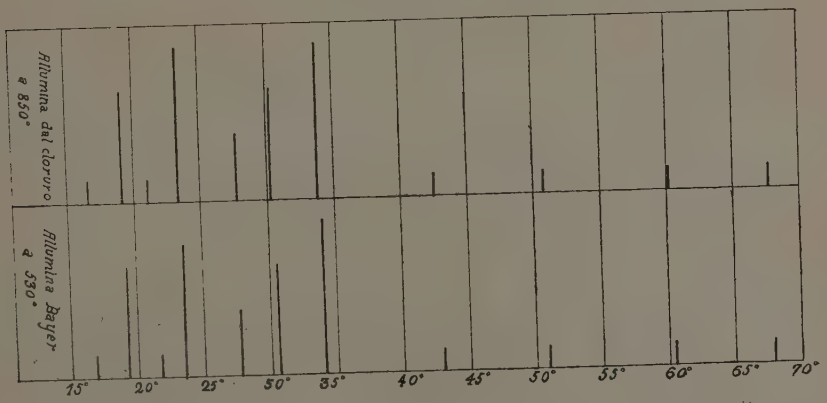
(2) « Naturwissenschaften », *13*, 1007 (1925).

(3) « Zeit. anorg. allg. Chem. », *149*, 217 (1925).

Gli spettri dell'allumina dal cloruro arroventata a 850° e della Bayer scaldata a 520–530° presentano solo qualche piccolo scarto negli angoli di



Figg. 3, 4 e 5.



Figg. 6 e 7.

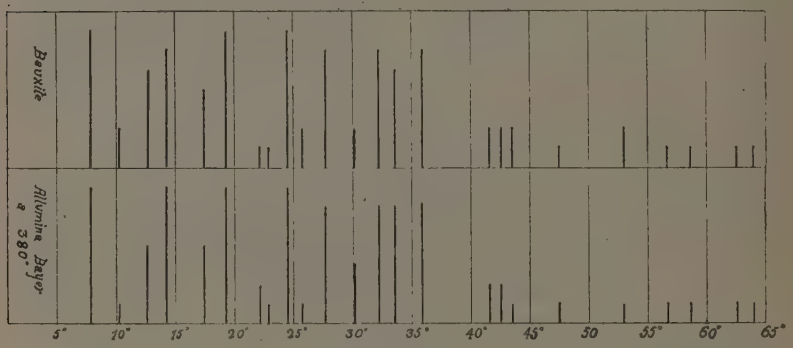
riflessione, dovuto evidentemente a piccole differenze di densità nei due prodotti. Entrambi gli ossidi sono anisotropi.

Questi risultati dimostrano che l'idrargillite e l'allumina Bayer sono identiche e che l'ossido che si ottiene dal cloruro a 850° è dello stesso tipo

di quello che si ha dalla Bayer a 530°. Cioè a 530° la Bayer perde tutta l'acqua e dà un ossido birifrangente e a densità elevata come quello che si ha dal cloruro dopo che esso ha subìto la trasformazione esotermica a 650°.

Le figg. 8 e 9 riproducono gli schemi degli spettrogrammi dell'allumina Bayer scaldata a 380° – temperatura superiore a quella della seconda discontinuità rivelata dalla curva di riscaldamento – e di un campione molto puro di bauxite. Essi sono in tutto identici.

La fig. 5 riproduce invece lo spettro della Bayer scaldata a 220° – dopo cioè la prima discontinuità. Esso si distingue nettamente da quello della bauxite, e presenta pure alcune caratteristiche che lo differenziano da quello della idrargillite. Come media del contenuto in acqua di questo prodotto si è avuto in due prove 27.97.



Figg. 8 e 9.

Per le ragioni avanti indicate, non è possibile attribuire eccessivo valore alla composizione risultante dall'analisi; tuttavia non si può non rilevare che il tenore trovato concorda abbastanza con quello del biidrato $Al_2O_3 \cdot 2H_2O$ per il quale si calcola 26.11 %.

Sembra pertanto probabile che la disidratazione dell'allumina Bayer a mezzo del calore si compia per gradi, formandosi prima il biidrato, poi il monoidrato, e in ultimo, a 450°, l'ossido.

— A ritenere composti definiti i prodotti della demolizione termica del triidrato di alluminio portano anche i valori dei volumi molecolari che si possono calcolare per l'acqua, utilizzando lo stesso metodo che ha permesso a E. Moles [1] di provare l'esistenza di idrati dei cationi e degli anioni.

Questo autore infatti ha trovato che il volume dell'acqua di idratazione che si combina alle anidridi e agli ossidi per formare acidi e basi

(1) « Anales de la Sociedad Española de Física y Química », *23*, 557 (1925).

è sempre molto vicino a 10; e noi abbiamo trovato per l'allumina Bayer seccata a 100° 11.72, per la stessa scaldata a 220° 10.75, e a 380° 10.11.

— Riassumendo quindi: nella demolizione termica dell'allumina Bayer si formano prima prodotti meno idrati - forse $Al_2O_3 \cdot 2H_2O$ e certo $Al_2O_3 \cdot H_2O$ - e infine si ottiene Al_2O_3. Quest'ossido è a densità elevata, e perciò differente dall'allumina Blanc.

Chimica-fisica. — *Elettronili simmetrici e molecole pluriatomiche.* Nota[1] del Corrisp. P. Vinassa.

Nella Nota precedente ho trattato degli elementi a molecola monoatomica; resta ora da trattare dei corpi che non possono avere molecola monoatomica e cioè il gruppo dell'N, quello degli alogeni e quello dell'O. Trattandosi di molecole atomiche occorre riprendere in esame quanto si sa relativamente ai collegamenti non polari, atomici. Non entro in particolari che del resto si possono trovare ampiamente trattati nel già citato lavoro del Müller[2]. Si ammette dunque, ad esempio, che nei collegamenti biatomici una coppia di elettroni sia comune ai due nuclei e si trovi disposta tra di essi. Il Müller cita, come esempio, F_2, Cl_2 e li indica schematicamente in questo modo:

$$:\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{F}}}:\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{F}}}: \quad ; \quad :\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{Cl}}}:\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{Cl}}}:$$

con cui si ottiene un perfetto equilibrio con 8, a tipo di gaz nobile. Mi permetto di non essere di questa opinione così comunemente accettata[3]. Pensiamo ad esempio come dovremmo indicare N_2. Esso sarebbe:

$$\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{N}}}:\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{N}}}$$

cioè ben diverso da quell'8 finale cui tutte le molecole *tendono*, come si dice con espressione non molto felice. L'O_2 sarebbe pure un molto asimmetrico:

$$:\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{O}}}:\dot{\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{O}}}$$

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1928.

(2) Op. cit., p. 48.

(3) Vedasi: Nasini A. G., *Architetture elettroniche nella Chimica*, « Atti Soc. it. Progresso Scienze », XV, Roma, 1927, p. 261.

Ma vi è anche di più. Mentre F_2 Cl_2 ecc., che, secondo le idee comunemente correnti, dovrebbe corrispondere ad un « ideale di gaz nobile » (Edelgasideal) sono attivissimi, N_2 è invece perfettamente inerte. Ad N_2 assai

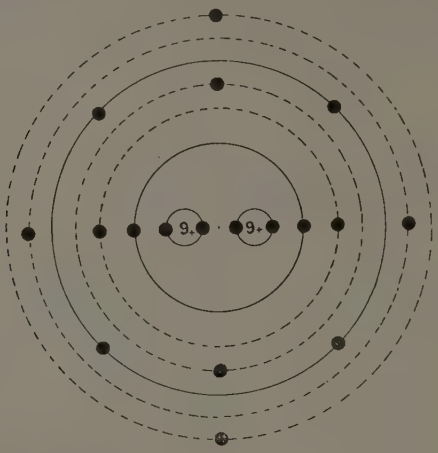


Fig. 1.

più che a F_2 si addice dunque una struttura simmetrica quaternaria a tipo di gaz nobile. L'ipotesi pertanto contradice al fatto.

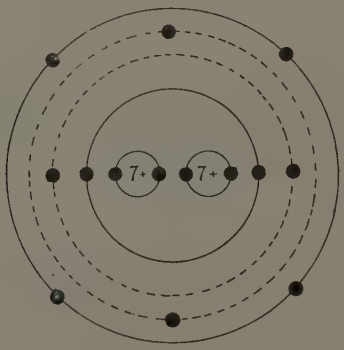


Fig. 2.

Mi sembra assai più logico ammettere una ben diversa struttura. Non deve esistere cioè una coppia interna di elettroni a comune tra i due nuclei; ma questi devono ritenersi come due equilibri stabili in immediata vicinanza, attorno a cui stanno i rimanenti elettroni in orbite quantiche. Vediamo dunque che F_2 dovrà avere la struttura indicata nella figura 1. Esso potrebbe

scriversi: $(2 + 2)\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 2$, con cui si ha una molecola perfettamente simmetrica, ma non nello stadio di gaz nobile, poichè l'orbita esterna finale non è occupata; una tal molecola deve pertanto essere in equilibrio relativo ed attiva. Analogamente potremmo dire del Cl_2 che sarà $(10 + 10)\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 2$, ecc. Per l'$O_2$ avremmo al solito: $(2 + 2)\cdot 2\cdot 8\cdot 2$, molecola pure simmetrica, ma non a tipo di gaz nobile, e quindi attiva. Invece per N_2 abbiamo la disposizione indicata nella fig. 2, che può scriversi: $(2 + 2)\cdot 2\cdot 8$. I due nuclei, con equilibrio di He, sono circondati da un equilibrio di Ne. E perciò N_2 dovrà essere, come effettivamente è, una molecola inerte.

Concludendo: le molecole biatomiche corrispondenti al tipo: $(E)\cdot 2\cdot 2$ sono dunque quelle degli alogeni. Molecola invece a tipo binario: $(E)\cdot 2$ è quella dell'O, e molecola a tipo di gaz nobile è quella dell'N.

I corpi analoghi ad O e ad N sono interessanti perchè presentano l'allotropicità: la quale così sembra *limitata ai corpi la cui molecola non sia monoatomica*. L'allotropria si deve quindi considerare come un diverso aggruppamento elettronico periferico nella molecola pluriatomica.

Vediamo come possano interpretarsi simili allotropie col concetto della simmetria.

Tratto subito dell'Ozono. Questo però non è, secondo me, come comunemente si ritiene, un caso di allotropia, ma una vera e propria combinazione. Se si trattasse di una molecola triatomica, nella quale tutti e tre gli elettronili fossero identici, avremmo per essa (numero molecolare = 24) un tipico aggruppamento di gaz nobile cioè: $(2 + 2 + 2)\cdot 2\cdot 8\cdot 8$. Ma il comportamento dell'Ozono è ben diverso da quello di una molecola inerte. Si deve quindi avere un elettronile di O, diverso dai due della molecola O_2. Questi due del gruppo molecolare sono equilibrati, come si è visto, con 16 elettroni, ma nell'Ozono dovrebbero agire come jone metallico, il terzo deve essere l'elettronile ^{II}O, negativo, cioè con due elettroni in più della carica e pertanto diverso dagli altri due. I fatti sembrano confermare questa ipotesi, poichè si sa che l'Ozono è sempre, ed esclusivamente, negativamente attivo. Appare quindi inesatto scrivere per l'Ozono la formula O_3, poichè sembra invece meglio rispondere ai fatti la formula: O_2O.

Se l'ozono non deve considerarsi una vera e propria allotropia dell'O, tipiche sono invece le allotropie del S. Stabile nelle condizioni normali è, come si sa, il S rombico. Esso deve quindi avere una molecola equilibrata e a tipo nobile. Da varie ricerche eseguite si suppongono presenti le molecole S_2, S_4, S_6, S_8. Ora tutte queste molecole sono possibili perchè tutte sono simmetriche. Ma stabile non può essere che la molecola S_3 (o anche S_6). Infatti S_3 può indicarsi così: $(10 + 10 + 10)\cdot 2\cdot 8\cdot 8$ con equilibrio nobile di A.

Il S monoclino parrebbe invece risultare da una molecola S_8 (numero molecolare = 128). Questa potrebbe forse essere indicata così: $(8 \times 10)\cdot \cdot 2\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 8\cdot — \cdot — \cdot (8)\cdot (4)$. Vi sarebbero cioè orbite intermedie libere.

Risulta effettivamente che nel passaggio da S monoclino a S rombico, (che, come si è visto, è con tutta probabilità un S_3) si ha, come comunemente si dice, sviluppo *spontaneo* di calore. Ora questa *spontaneità* potrebbe essere semplicemente dovuta a salti di elettroni dalle orbite esterne alle orbite libere più interne. Una conferma ci viene da un altro fatto. Scaldando il S rombico si ha una dilatazione regolare sino alla temperatura di circa 95°, quando si è raggiunta questa temperatura e comincia la trasformazione in S monoclino la dilatazione ad un tratto si fa maggiore; ciò che può essere spiegato ammettendo che avvengano salti di elettroni ad orbite più esterne. Si avrebbe dunque una riprova di quanto sopra si è ammesso.

Considerazioni analoghe possono svolgersi anche per il Se, nel quale pure si nota uno *spontaneo* innalzamento di temperatura durante la trasformazione. Anche il Se dovrebbe avere la sua molecola stabile con Se_3. Lo stesso va detto per il Te_3.

Quanto ai corpi analoghi all'N si possono fare altre interessanti constatazioni. Sono noti gli stati allotropici del P. Anche qui abbiamo, ad esempio, la modificazione metallica monoclina, stabile e quella gialla attiva. È lecito ammettere che il P stabile, inerte, sia un P_2 (numero molecolare = 30) che risulta, $(10 + 10)\cdot 2\cdot 8$ con struttura di gaz nobile come l'N. Una molecola P_3 asimmetrica risulta impossibile come quella monoatomica. Invece è possibile una molecola P_4 (numero molecolare = 60) la quale dovrebbe avere una struttura analoga a quella del Ca, cioè con due orbite interne libere: $(4 \times 10)\cdot 2\cdot 8\cdot 8\cdot — \cdot — \cdot 2$. Ora questo è confermato dal fatto che per passare al fosforo giallo, che sembra essere effettivamente P_4, occorre calore, cioè energia per il salto degli elettroni.

È molto probabile che i fenomeni di luminescenza e di fosforescenza del P e di altri corpi analoghi possano riportarsi a fatti di questo tipo.

Quanto si è detto per la molecola di P può ripetersi per As, per Sb e per Bi, la cui modificazione stabile dovrà essere rispettivamente: As_2, Sb_2 e Bi_2.

Due parole merita il comportamento dell'As. Si sa, ad esempio, che As giallo è attivo e sempre con deciso tipo di metalloide. La molecola si suppone essere As_4. Essa avrebbe, analogamente a quella del P_4, la struttura: $(4 \times 28)\cdot 2\cdot 8\cdot 8\cdot — \cdot — \cdot 2$, nella quale i due elettroni, fuori dell'orbita normale, sembrano avere possibilità di liberarsi facilmente (lontani come sono dal nucleo positivo) e da ciò il carattere esclusivamente negativo, metalloide di questo tipo.

Quanto ai corpi ad architettura elettronica ignota, ho già accennato al Mn nella Nota precedente [1].

(1) È noto come la presenza del Mn influisca sui fatti di luminescenza e fosforescenza. Questo starebbe a dimostrare che il Mn, o almeno alcuni dei suoi elettronili, debbono avere costituzione tale da presentare orbite interne libere, e quindi possibilità di salti degli elettroni.

I due gruppi del V e del Cr sono conosciuti per il comportamento più o meno nobile dello stato metallico, che è, nelle condizioni normali, più o meno difficilmente attaccabile. Ciò lascia supporre che la disposizione degli elettroni, oltre ad essere simmetrica, sia altresì, se non proprio a tipo di gaz nobile, almeno molto prossima.

Anche di un certo interesse appare questa via per lo studio della costituzione di altri corpi, ad esempio lo Sn, il quale nella sua modificazione stabile a 20° (peste dello stagno) sembra avere molecola con architettura per lo meno prossima alla nobile. Ma non è il caso di parlarne con cognizione sufficiente. Per il momento mi sembra di aver potuto dimostrare come la concezione della simmetria possa servire a darci indicazioni di qualche valore sia per stabilire il numero di atomi nelle molecole sia anche a spiegare alcuni fatti fisici e chimici di una certa importanza.

Fisiologia. — *Massa sanguigna, globuli rossi ed emoglobina in individui acclimatati in montagna ed al piano.* Nota del Corrisp. A. Herlitzka.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Complementi alla Nota « Sopra l'interpolazione a mezzo di funzioni olomorfe in un semipiano ».* Nota di Vladimiro Bernstein, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Rivedendo poco fa la mia Nota dal titolo sopraindicato, pubblicata in questi « Rendiconti » [2], notai due errori di calcolo che si compensano reciprocamente, cosicchè il risultato rimane giusto, e che mi sfuggirono appunto a causa di questa compensazione.

Ecco le correzioni che si devono fare in quella Nota:

1° a p. 732, ultima riga, devesi leggere

$$I(s) = e^{i\psi} \int_0^\infty F_n(r e^{i\psi}) \cdot (-r e^{i\psi})^{-s-1} dr;$$

2° a p. 733, 3ª e 4ª riga, devesi leggere

$$I(s) = -\int_\rho^\infty F_n(-z) z^{-s-1} dz + \sum_{\nu=n}^{\infty} (-1)^{\nu+1} c_\nu \int_n^\rho z^{\nu-s-1} dz;$$

(1) Nella seduta del 17 giugno 1928.

(2) Vol. III, serie 6ª, 1° sem., fasc. 12, p. 732.

3° nel 1° integrale della formola (5) devesi leggere z^{-s_0-1} invece di $(-z)^{-s_0-1}$;

4° a p. 734, 4ª riga, devesi leggere

$$-e^{\pi i\beta}\,F_n(re^{i\psi})\,(re^{i\psi})^{-\beta} = A(u+iv);$$

5° nel secondo membro della formola (7) manca il coefficiente $\frac{1}{2\pi}$.

6° il 2° integrale della formola (10) deve essere sostituito dal seguente

$$-\int_0^\infty F_n(-r)\,r^{-\beta-ti-1}\,dr\,.$$

7° a p. 734, penultima riga, devesi leggege $e^{(ui-v_0)t}$ invece di $e^{-(ui+v_0)t}$.

Meccanica. — *Transport isoclines et dimention associées.* Nota di A. De Mira Fernandez, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur la composition de seconde espèce.* Nota di J. Delsarte, presentata dal Socio V. Volterra.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul profilo dei corpi ruotanti la cui deformazione non resta turbata quando si decompongano in tronchi mediante piani normali all'asse.* Nota di E. Gugino, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

In generale per risolvere un problema di elasticità si cerca dapprima di determinare, a meno di costanti o di funzioni arbitrarie, le componenti u, v, w del vettore spostamento S in maniera da soddisfare le tre equazioni indefinite dell'equilibrio; poscia si scelgono, quando ciò sia possibile, le costanti e le funzioni arbitrarie in modo da verificare le condizioni ai limiti che esprimono la continuità degli sforzi. Qualche volta però queste ultime condizioni, data la natura del problema, si traducono in relazioni che debbono aver luogo non soltanto in superficie, ma in qualunque punto del

(1) Nella seduta del 20 maggio 1928.

mezzo; conviene in tale caso fare intervenire tali relazioni nella ricerca degli integrali delle equazioni della statica elastica. Così, per esempio, volendo studiare i profili dei corpi ruotanti cimentati dalla sola forza centrifuga, limitati da superfici di rotazione, la cui deformazione non resta turbata quando si decompongano in tronchi mediante piani normali all'asse, sarà più agevole trattare il problema considerando nel loro complesso le equazioni indefinite non disgiunte dalle equazioni in superficie; queste ultime debbono innanzi tutto tradurre la condizione, che la tensione applicata su un qualunque elemento normale all'asse di rotazione dovrà risultare nulla; inoltre la superficie laterale non dovrà essere sollecitata da forze esterne.

Secondo il Lecornu, assunto l'asse di rotazione, come asse delle z, supponendo che Ox , Oy ruotino col solido, lo spostamento elastico S di un generico punto è contenuto per ragioni di simmetria nel piano meridiano e le sue componenti sono della forma:

$$(1) \qquad u = h\frac{x}{r} \quad , \quad v = h\frac{y}{r} \quad , \quad w = w(r\,,z)$$

essendo h e w funzioni di r , z ed $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Nelle nostre ipotesi, dovendo risultare nulle le componenti dello sforzo unitario che si esercita su di un qualunque elemento normale all'asse delle z, dovranno in conseguenza annullarsi, in qualunque punto, le componenti di tensione

$$(2) \qquad T_2 = T_1 = N_3 = 0$$

che equivalgono, in base alle (1) e per le note relazioni tra le componenti di tensione e di deformazione, alle due equazioni distinte

$$(I) \qquad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2\mu}\theta$$

che debbono aver luogo in qualunque punto del corpo omogeneo ed isotropo che si considera. Inoltre l'assenza di forze esterne sulla superficie laterale di rotazione, tenuto conto delle (2) si traduce nelle relazioni

$$N_1\frac{x}{r} + T_3\frac{y}{r} = 0$$

$$T_3\frac{x}{r} + N_2\frac{y}{r} = 0$$

che equivalgono all'unica relazione

$$(2') \qquad \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial h}{\partial r} = 0$$

che dovrà aver luogo solo in corrispondenza ai punti della superficie laterale. Le equazioni indefinite, per le (1) possono scriversi

$$(3)\qquad \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial r} - \mu\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + \rho\omega^2 r = 0 \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\psi}{r} + \dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0 \end{cases}$$

essendo

$$(A)\qquad \theta = \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{h}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \psi = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial z}$$

ove ω è la velocità angolare [1]

Faremo vedere che le (3) possono mettersi sotto diversa forma separando le due funzioni ψ e θ.

Derivando la seconda rispetto ad r, la prima rispetto a z e sottraendo si ottiene:

$$(II)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r}\right) = 0.$$

Derivando la prima rispetto ad r la seconda rispetto a z e sommando, tenuto conto della prima stessa si ottiene:

$$(III)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} = K$$

ove

$$K = -\frac{2\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}.$$

Allo stesso risultato si poteva pervenire osservando che la forza di massa, nel problema in esame, essendo la forza centrifuga, ammette il potenziale

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)$$

quindi il vettore spostamento S per le equazioni dell'equilibrio elastico, nella ipotesi che esista un potenziale delle forze di massa, dovrà soddisfare la relazione vettoriale

$$\Delta_2 S = -\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\left[(\lambda + \mu)\operatorname{div} S + \rho U\right]$$

quindi nella detta ipotesi, il vettore $\Delta_2 S$ dovrà risultare irrotazionale; tale condizione inoltre, essendo soddisfatta, basta a caratterizzare una deformazione dovuta a forze di massa dipendenti da un potenziale.

(1) Vedere *Cours de Mécanique*, Léon Lecornu, to. II, p. 377.

Posto le (1) per le componenti del vettore S, traducendo analiticamente la condizione:

$$\text{rot}\,\Delta_2 S = \Delta_2\,\text{rot}\,S = 0$$

si ottiene la (II).

Inoltre l'equazione della dilatazione cubica, sempre nella detta ipotesi diventa:

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta\theta + \rho\Delta U = 0.$$

Per l'ammessa simmetria attorno all'asse delle z, tenuto conto della espressione di U, essa equivale alla (III).

Per risolvere il problema proposto sono da integrare le equazioni (II) (III) risalendo poi alle (3), e alle h, w date dalle (A), che noi cerchiamo di determinare in modo da rendere soddisfatte anche le (I). Ecco come si può procedere per tener conto di tutto.

A norma della prima delle (I) dovrà risultare:

$$(a) \qquad h\,dr - w\,dz = d\Phi$$

quindi

$$(b) \qquad \begin{cases} h = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \\ w = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases}$$

essendo Φ funzione da determinarsi. In idrodinamica nel movimento di un liquido incompressibile parallelamente ad un piano fisso, assumendo il piano di riferimento zr parallelo al piano fisso, se h e w indicano le componenti della velocità di un elemento secondo gli assi z ed r rispettivamente, la prima delle (I) è l'equazione di continuità e la funzione Φ che soddisfa la (a) è la funzione di corrente; l'equazione:

$$\Phi = \text{costante}$$

è l'equazione delle linee di corrente.

Dalla prima delle (A) e dalla seconda delle (I), tenuto conto delle (b) si ottiene

$$(c) \qquad \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

quindi

$$(d) \qquad \Delta_2 \Phi = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

essendo Δ_2 il parametro differenziale del secondo ordine. Per la seconda

delle (A) sempre tenuto conto delle (*b*) e della seconda delle (I), le (II) e (III) possono mettersi nella forma:

$$\Delta_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}$$

$$\Delta_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\lambda}{2\mu} K.$$

L'operazione Δ_2 e la derivazione parziale di qualunque ordine rispetto alle coordinate cartesiane, sono operazioni invertibili; inoltre

$$\Delta_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Delta_2 \Phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}.$$

Le precedenti equazioni tenuto conto della (*d*) e posto

(*e*) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \chi$$

diventano

(II′) $$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} = 0$$

(III′) $$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \frac{\lambda^2 K}{4\mu(\lambda + \mu)}.$$

Indicando con D l'operatore

$$D = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

la (*c*) può scriversi

(*f*) $$D\Phi = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \chi.$$

Dalla (III′) integrando si ottiene

(*g*) $$\chi = \frac{\lambda^2 K}{8\mu(\lambda + \mu)} z^2 + c_1 z + \rho(r)$$

dove c_1 per la (II′) è una costante arbitraria da determinarsi e $\rho(r)$ è una funzione della sola r pure da determinarsi.

Derivando la (*f*) due volte rispetto a z e tenuto conto delle (*e*) e (III′) si ottiene

$$D\chi = \frac{\lambda(\lambda + 2\mu) K}{4\mu(\lambda + \mu)}$$

ed integrando

(*g*′) $$\chi = \frac{\lambda(\lambda + 2\mu) K}{16\mu(\lambda + \mu)} r^2 + \log r \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$$

essendo φ_1 e φ_2 funzioni arbitrarie della sola z; le (g), (g') coincidono ove si scelga

$$\rho(r) = \frac{\lambda(\lambda+2\mu)K}{16\mu(\lambda+\mu)} r^2 \quad ; \quad \varphi_1(z) = 0 \quad ; \quad \varphi_2(z) = \frac{\lambda^2 K}{8\mu(\lambda+\mu)} z^2 + c_1 z.$$

In definitiva

$$\chi = \frac{\lambda(\lambda+2\mu)K}{16\mu(\lambda+\mu)} r^2 + \frac{\lambda^2 K}{8\mu(\lambda+\mu)} z^2 + c_1 z.$$

Per la (e) integrando si ottiene

$$(h) \quad \Phi = \frac{\lambda(\lambda+2\mu)K}{32\mu(\lambda+\mu)} r^2 z^2 + \frac{\lambda^2 K}{96\mu(\lambda+\mu)} z^4 + \frac{c_1 z^3}{6} + f_1(r) z + f_2(r)$$

con $f_1(r)$, $f_2(r)$ funzioni della sola r da determinarsi.

Dovendo infine verificarsi la (d) le due funzioni $f_1(r)$ ed $f_2(r)$ dovranno soddisfare le due equazioni:

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_1}{dr} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda} c_1$$

$$\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_2}{dr} = \frac{(\lambda+2\mu)^2}{16\mu(\lambda+\mu)} K r^2$$

onde integrando

$$f_1 = \frac{\lambda+2\mu}{4\lambda} c_1 r^2 + c_2 \log r + c'$$

$$f_2 = \frac{(\lambda+2\mu)^2 K}{256\mu(\lambda+\mu)} r^4 + c_3 \log r + c''$$

con c_2 , c_3 , c' e c'' costanti arbitrarie.

La (h) assume la forma definitiva

$$\Phi = \frac{\lambda(\lambda+2\mu)K}{32\mu(\lambda+\mu)} r^2 z^2 + \frac{\lambda^2 K}{96\mu(\lambda+\mu)} z^4 + \frac{c_1 z^3}{6} +$$

$$+ \left(\frac{\lambda+2\mu}{4\lambda} c_1 r^2 + c_2 \log r + c'\right) z + \frac{(\lambda+2\mu)^2 K}{256\mu(\lambda+\mu)} r^4 + c_3 \log r + c''.$$

Onde per le (b)

$$(l) \quad \begin{cases} h = \dfrac{\lambda(\lambda+2\mu)K}{16\mu(\lambda+\mu)} r z^2 + \left(\dfrac{\lambda+2\mu}{2\lambda} c_1 r + \dfrac{c_2}{r}\right) z + \dfrac{(\lambda+2\mu)^2 K}{64\mu(\lambda+\mu)} r^3 + \dfrac{c_3}{r} \\ w = -\dfrac{\lambda(\lambda+2\mu)K}{16\mu(\lambda+\mu)} r^2 z - \dfrac{\lambda^2 K}{24\mu(\lambda+\mu)} z^3 - \dfrac{c_1 z^2}{2} - \dfrac{\lambda+2\mu}{4\lambda} c_1 r^2 - c_2 \log r - c' \\ \theta = \dfrac{(\lambda+2\mu)K}{8(\lambda+\mu)} r^2 + \dfrac{\lambda K}{4(\lambda+\mu)} z^2 + \dfrac{2\mu}{\lambda} c_1 z. \end{cases}$$

Seguono per le componenti di tensione le espressioni:

$$N_1 = \frac{5\lambda^2 + 4\mu(3\lambda+\mu)}{32(\lambda+\mu)} K r^2 + \frac{(3\lambda+2\mu)\lambda}{8(\lambda+\mu)} K\zeta^2 + 4\mu\left(\frac{\lambda^2+4\mu(\lambda+\mu)}{64\mu(\lambda+\mu)} K - \right.$$
$$\left. - \frac{c_2}{r^4}\zeta - \frac{c_3}{r^4}\right) x^2 + \left(\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda} c_1 + 2\mu\frac{c_2}{r^2}\right)\zeta + 2\mu\frac{c_3}{r^2}$$

$$N_2 = \frac{5\lambda^2 + 4\mu(3\lambda+\mu)}{32(\lambda+\mu)} K r^2 + \frac{(3\lambda+2\mu)\lambda K}{8(\lambda+\mu)}\zeta^2 + 4\mu\left(\frac{\lambda^2+4\mu(\lambda+\mu)}{64\mu(\lambda+\mu)} K - \right.$$
$$\left. - \frac{c_2}{r^4}\zeta - \frac{c_3}{r^4}\right) y^2 + \left(\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda} c_1 + 2\mu\frac{c_2}{r^2}\right)\zeta + 2\mu\frac{c_3}{r^2}$$

$$N_3 = 0 \qquad T_1 = T_2 = 0 \qquad T_3 = 4\mu\left(\frac{\lambda^2+4\mu(\lambda+\mu)}{64\mu(\lambda+\mu)} K - \frac{c_2}{r^4}\zeta - \frac{c_3}{r}\right) xy.$$

L'equazione (2') per i punti della superficie laterale assume la forma:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{(\lambda+2\mu)(7\lambda+6\mu)}{32(\lambda+\mu)} K r^4 + \frac{(3\lambda+2\mu)\lambda}{8(\lambda+\mu)} K r^2\zeta^2 +$$
$$+ \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda} c_1 r^2\zeta - 2\mu c_2\zeta - 2\mu c_3 = 0$$

che si poteva altresì dedurre dalla $N_1 = 0$ ponendo $x = r$. Infatti considerando un elemento superficiale normale al piano ζx, detto χ l'angolo che la normale all'elemento forma con l'asse delle ζ, lo sforzo unitario che tale elemento sopporta ha le componenti:

$$X = N_1 \operatorname{sen}\chi \qquad Y = 0 \qquad Z = 0.$$

La superficie per la quale $N_1 = 0$ potrà quindi assumersi come superficie libera; l'equazione della linea meridiana nel piano ζx si deduce dalla (IV) ponendo $r = x$. Si ottiene in tal modo l'equazione di una *triplice infinità di quartiche* dipendenti dalla scelta arbitraria delle costanti c_1, c_2, c_3.

Ponendo $c_2 = c_3 = 0$ la quartica si spezza in una retta doppia coincidente con l'asse delle ζ ed in una ellisse dipendente dal valore della costante c_1. Operando una opportuna traslazione dell'asse delle x mediante le formule di trasformazione

$$x = X \qquad \zeta = Z - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda^2 K} c_1$$

l'equazione della corrispondente ellisse si riduce a forma canonica:

$$\frac{(\lambda+2\mu)(7\lambda+6\mu)}{32(\lambda+\mu)} K X^2 + \frac{(3\lambda+2\mu)\lambda K}{8(\lambda+\mu)} Z^2 = \frac{2\mu^2(3\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}{\lambda^3 K} c_1^2.$$

Il solido è allora lo stesso ellissoide studiato da Lecornu [1], tale che il rapporto tra il quadrato del diametro equatoriale ed il quadrato del dia-

(1) « Comptes Rendus », M. L. Lecornu, I sem., 1896, p. 96.

metro polare è uguale a $\frac{4\lambda(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)(7\lambda+6\mu)}$, rapporto pressochè uguale a $\frac{1}{2}$ nell'ipotesi $\lambda = \mu$.

Ponendo invece $c_2 = 0$ e scegliendo opportunamente c_1 e c_3 si ottiene la soluzione proposta da Lecornu [1] per le macine forate.

Ponendo infine $K = 0$ si ottengono integrali delle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico, quando le forze di massa sono nulle:

$$u = \left[\left(\frac{\lambda+2\mu}{2\lambda} c_1 r + \frac{c_2}{r}\right)\zeta + \frac{c_3}{r}\right]\frac{x}{r}$$

$$v = \left[\left(\frac{\lambda+2\mu}{2\lambda} c_1 r + \frac{c_2}{r}\right)\zeta + \frac{c_3}{r}\right]\frac{y}{r}$$

$$w = -\left(\frac{c_1\zeta^2}{2} + \frac{\lambda+2\mu}{4\lambda} c_1 r^2 + c_2 \log r + c'\right)$$

$$\theta = \frac{2\mu}{\lambda} c_1 \zeta.$$

L'equazione della superficie libera non sollecitata da forze esterne diventa:

$$\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda} c_1 r^2 \zeta - 2\mu c_2 \zeta - 2\mu c_3 = 0.$$

Il solido può allora pensarsi limitato da due superfici di cui l'una di rotazione è data dalla precedente equazione, mentre l'altra può avere forma qualunque purchè risulti in ogni punto sollecitata da forze opportunamente distribuite. Ponendo $c_3 = 0$ la precedente equazione ammette le radici:

$$(\alpha) \qquad \zeta = 0 \qquad r_1^2 = \frac{2\lambda}{3\lambda+2\mu}\frac{c_2}{c_1}$$

la superficie non soggetta a forze risulta cilindrica, di raggio r_1, che si può fissare ad arbitrio, purchè si scelga opportunamente il rapporto $\frac{c_2}{c_1}$; se si considera in tale ipotesi un punto situato nel piano ζx, x è uguale ad r, $y = 0$. Le componenti di tensione, esclusi i punti dell'asse ζ, diventano:

$$N_1 = \left[\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda} c_1 - 2\mu \frac{c_2}{r^2}\right]\zeta$$

$$N_2 = \left[\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda} c_1 + 2\mu \frac{c_2}{r^2}\right]\zeta$$

$$N_3 = 0 \qquad T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

(1) «Comptes Rendus», M. L. Lecornu, I sem., 1926, p. 1253.

Ogni elemento superficiale normale al piano zx e parallelo al piano yz, risulta sollecitato *normalmente* dallo sforzo $\pm N_1$. Se si assume, come altra superficie che limiti il solido, una seconda superficie cilindrica di raggio $r_0 < r_1$, ogni suo elemento risulta sollecitato normalmente da uno sforzo proporzionale a z; se trattasi in particolare di sforzo di compressione, il coefficiente di z nella espressione di N_1 dovrà risultare essenzialmente negativo. Ponendo:

$$\frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda} c_1 - 2\mu \frac{c_2}{r_0^2} = -\pi$$

si ottiene una relazione, che insieme alla seconda delle (α), permette di calcolare le due costanti:

$$c_1 = \frac{\lambda \pi r_0^2}{\mu(3\lambda + 2\mu)(r_1^2 - r_0^2)} \qquad c_2 = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu) r_1^2}{2\mu\lambda} c_1$$

entrambe essenzialmente positive, onde il valore di r_1 risulta sempre reale. Si ottiene in tale modo lo stato di equilibrio di un recipiente cilindrico, sollecitato soltanto dalla pressione idrostatica interna esercitata da un liquido pesante, di peso specifico π, purchè si scelga il piano xy coincidente con la superficie libera del liquido e l'asse delle z rivolto in basso.

Meccanica. — *Sulle onde progressive di tipo permanente nelle vasche circolari*. Nota di H. Geppert, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Il problema delle onde progressive di tipo permanente nei canali rettilinei è stato trattato dall'Airy [2], ripreso poi e risoluto rigorosamente dal prof. Levi-Civita [3]. In pratica però si è costretti, per poter verificare i risultati ottenuti, di prendere delle vasche circolari con grande raggio di curvatura. Perciò il prof. Levi-Civita mi propose di stendere la teoria al caso di canali circolari; sono così pervenuto a riconoscere che anche in questo caso esistono delle onde sinusoidali corrispondenti a quelle dell'Airy e che fra la loro lunghezza d'onda e la velocità di propagazione passa una relazione (ved. (17)) che generalizza quella ben nota di Airy e permette di apprezzare l'influenza locale della curvatura sulla velocità di propagazione.

Consideriamo una vasca circolare di raggio esterno R_1 e raggio interno R_2, empita fino all'altezza h di liquido incomprimibile di densità 1,

(1) Nella seduta del 20 maggio 1928.

(2) Airy, « Enc. Metrop. », *Tides and Waves*, 1845.

(3) « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XVI, 2 (1907), pp. 776–790. *Questions de mécanica clásica i relativista*, Barcelona, 1922, « Mathem. Annalen », 93, 1925, pp. 264–314.

e proponiamoci di studiare le onde irrotazionali di tipo permanente che possono propagarsi in questa vasca. Sia ω la velocità angolare colla quale sembra spostarsi la superficie libera. Introdurremo allora due sistemi di coordinate cilindriche: uno fisso nello spazio, r, ϑ, z, col piano $z = 0$ che corrisponde alla superficie del liquido in riposo e col centro O nel centro della vasca, ed un altro r, ϑ_1, z rotante attorno O colla velocità angolare ω di modo che sia

$$\vartheta_1 = \vartheta - \omega t .$$

Rispetto a questo sistema rotante la superficie libera e il moto saranno stazionari e quindi si può supporre che il potenziale di velocità dipenda da t soltanto per mezzo di ϑ_1,

$$\varphi(r, \vartheta, z, t) = \varphi(r, \vartheta_1, z) .$$

Le condizioni di irrotazionalità e di incomprimibilità rimangono compendiate nell'equazione di Laplace

$$(1) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 ,$$

e le condizioni alle pareti e sul fondo richiedono che sia

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \qquad \text{per } r = R_2 \text{ e } r = R_1 ,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{per } z = h .$$

L'espressione più generale di φ che soddisfa alle equazioni enunciate si trova sviluppando in una serie di Fourier:

$$(4) \qquad \varphi(r, \vartheta_1, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C_n^{(j)}(r)\left\{e^{-\nu_n^{(j)} z} + e^{-\nu_n^{(j)}(2h - z)}\right\}\left\{\alpha_n^{(j)} \cos n\vartheta_1 + \beta_n^{(j)} \operatorname{sen} n\vartheta_1\right\},$$

dove le $\alpha_n^{(j)}, \beta_n^{(j)}$ sono costanti arbitrarie ed abbiamo posto introducendo le funzioni di Bessel

$$(5) \qquad C_n^{(j)}(r) = I_n(\nu_n^{(j)} r)\, Y_n'(\nu_n^{(j)} R_2) - Y_n(\nu_n^{(j)} r)\, I_n'(\nu_n^{(j)} R_2) ;$$

le $\nu_n^{(j)}$ si determinano in base all'equazione

$$(6) \qquad I_n'(\nu_n R_2)\, Y_n'(\nu_n R_1) - I_n'(\nu_n R_1)\, Y_n'(\nu_n R_2) = 0 ,$$

e si dimostra facilmente che ad ogni n corrisponde un'infinità di radici reali e positive ν_n di quest'equazione. Le costanti $\alpha_\nu^{(j)}, \beta_\nu^{(j)}$ si possono calcolare conoscendo la determinazione iniziale di $\varphi(r, \vartheta, z)$.

Ora sulla superficie libera σ si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\zeta + \frac{1}{2} v^2 = \text{costante},$$

dove con v si indica la velocità assoluta delle particelle in moto. Assumendo l'ipotesi che v sia piccola in confronto alla velocità $c = \omega r$, con cui alla distanza r del centro della vasca sembrano propagarsi le onde permanenti, si ha sulla σ

$$g\zeta + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1} = \text{costante}, \tag{7}$$

la costante risultando determinata dal fatto che deve essere

$$\int_{R_2}^{R_1} \int_{0}^{2\pi} \zeta \, d\vartheta \, dr = 0 .$$

Limitiamoci al caso più comune di onde basse in confronto all'altezza h del liquido non perturbato. Si ricava allora dalle (7) e (4) l'equazione seguente

$$\zeta = \frac{\omega}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n C_n^{(j)}(r) \left(1 + e^{-2\nu_n^{(j)} h}\right) \left(\alpha_n^{(j)} \operatorname{sen} n\vartheta_1 - \beta_n^{(j)} \cos n\vartheta_1\right) \tag{8}$$

e quindi si vede che non interviene affatto il primo termine della $\varphi(r, \vartheta_1, \zeta)$, cioè quello corrispondente a $n = 0$ e indipendente dalla ϑ_1.

Dobbiamo ancora esprimere la condizione fisica che σ sia una superficie sostanziale (di flusso rispetto agli assi rotanti), cioè che una particella trovandosi all'istante t su σ vi si trovi anche nell'istante successivo $t + dt$. Si è così condotti, derivando la (7) rispetto a t, alla

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \omega^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta_1^2} = 0 \qquad \text{su } \sigma , \tag{9}$$

o, introducendo la (4) e la (8):

$$g \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_0^{(j)} \nu_0^{(j)} C_0^{(j)}(r) \left\{1 - e^{-2\nu_0^{(j)} h}\right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_n^{(j)}(r) \left(g\nu_n^{(j)} - \omega^2 n^2\right) \left(1 - e^{-2\nu_n^{(j)} h}\right) \left(\alpha_n^{(j)} \cos n\vartheta_1 + \beta_n^{(j)} \operatorname{sen} n\vartheta_1\right) = 0$$

donde segue che si ha

$$\begin{cases} \alpha_0^{(j)} = \beta_0^{(j)} = 0 \quad , \quad (j = 1 \cdots \infty), \\ \alpha_k^{(j)} = \beta_k^{(j)} = 0 \quad , \quad (k = n, j = i), \\ g\nu_n^{(i)} = \omega^2 n^2 \quad , \end{cases} \tag{10}$$

dimodo che l'espressione più generale del potenziale di velocità e della superficie libera sono della forma seguente (n designando un intero *a priori* arbitrario):

$$(11)\quad \varphi(r,\vartheta_1,z) = C_n^{(i)}(r)\left(e^{-\nu_n^{(i)}z} + e^{-\nu_n^{(i)}(2h-z)}\right)\left(\alpha_n^{(i)}\cos n\vartheta_1 + \beta_n^{(i)}\operatorname{sen} n\vartheta_1\right),$$

$$(12)\quad \zeta = \frac{\omega n}{g} C_n^{(i)}(r)\left(1 + e^{-2\nu_n^{(i)}h}\right)\left(\alpha_n^{(i)}\operatorname{sen} n\vartheta_1 - \beta_n^{(i)}\cos n\vartheta_1\right)$$

con

$$\vartheta_1 = \vartheta - \frac{n}{\sqrt{g\nu_n^{(i)}}}\,t\,.$$

Si osservi che la (10) rappresenta una restrizione per i valori possibili di ω.

Passiamo ora allo studio delle radici ν_n. Si può interpretare la (6) cercando sulla curva

$$I = f(x) = \frac{Y_n'(x)}{I_n'(x)}$$

due punti alla medesima altezza y, le cui ascisse stiano nella relazione costante $R_2 : R_1$. Si ricava dallo studio di questa curva che, almeno quando $R_2 : R_1$ sia abbastanza vicino a 1, esistono due specie di radici ν_n, una nella vicinanza del valore $\frac{n}{R_2}$ e le altre, in ϑ numero infinito, che contengono $R_1 - R_2$ a denominatore. Infatti poniamo

$$R_2 = R \quad , \quad R_1 - R_2 = l\,,$$

e sviluppiamo l'espressione (6) secondo Taylor; troveremo, risolvendo rispetto a ν_n, il valore

$$(13)\quad \nu_n^{(1)} = \frac{n}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l}{R} + \frac{7}{24}\frac{l^2}{R^2} + \cdots\right),$$

mentre dall'espressione asintotica delle $I_n(x)$ e $Y_n(x)$ si ha

$$(14)\quad \nu_n = \frac{k\pi}{l}\left(1 + \frac{4n^2+3}{8k^2\pi^2}\cdot\frac{l^2}{R^2} + \cdots\right),$$

dove k designa un numero intero sottoposto all'unica condizione che il rapporto $\frac{kR}{l}$ sia abbastanza grande per poter applicare gli sviluppi asintotici.

È particolarmente interessante il caso che il rapporto fra la larghezza l della vasca e il raggio interno di curvatura R sia piccolo. Ponendo allora

$$r = R + \rho \quad , \quad 0 \leqq \rho \leqq l$$

si trova, badando alla (13) e ricorrendo ad uno sviluppo di Taylor

$$(15) \qquad C_n^{(1)}(r) = -\frac{2}{\pi R}\frac{1}{\nu_n^{(1)}}\left\{1 + \frac{n^2}{6}\cdot\frac{\rho^2(3l-2\rho)}{R^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{n^2}{12}\cdot\frac{\rho^2(5l^2 + 2l\rho - 4\rho^2)}{R^4} + \cdots\right\},$$

dimodo che in prima approssimazione $C_n^{(1)}(r)$ risulti sensibilmente costante. Per le altre radici (14), avuto riguardo alle formule asintotiche, si trova invece

$$(16) \qquad C_n(r) = \frac{-2}{k\pi^2}\cdot\frac{l}{R}\left\{\cos\left(k\pi\frac{\rho}{l}\right) + \frac{1}{2k\pi}\cdot\frac{l}{R}\left(\cos\left(k\pi\frac{\rho}{l}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - k\pi\frac{\rho}{l}\operatorname{sen}\left(k\pi\frac{\rho}{l}\right)\right) + \cdots\right\}$$

Conviene ora introdurre la velocità di propagazione delle onde permanenti sulla linea mediana della vasca,

$$c = \left(R + \frac{l}{2}\right)\omega$$

e la corrispondente lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{n}\left(R + \frac{l}{2}\right).$$

Si trova allora per le onde che provengono dalla prima radice $\nu_n^{(1)}$

$$(17) \qquad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{24}\frac{l^2}{R^2} + \cdots\right),$$

generalizzazione dell'equazione ben nota di Airy. Si trova pure

$$(18) \qquad C_n^{(1)}(r) = \text{costante}\cdot\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{\rho^2(3l-2\rho)}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{\rho^2(l^2 - 6\rho l + 4\rho^2)}{R^2} + \cdots\right\}$$

e se ne inferisce che l'altezza massima delle onde varia con ρ; ha il suo valor minimo sulla parete interna ed il suo valore massimo sulla parete esterna. Il rapporto di tali due altezze è dato da

$$1 + \frac{\pi^2}{3}\frac{l^3}{\lambda^2 R}\left(2 - \frac{l}{R}\right).$$

Queste onde di tipo sinusoidale rappresentano manifestamente l'analogo delle onde di Airy nei canali rettilinei.

Vediamo ora che cosa si ricava dalle altre radici ν_n. Si vede che la (16) costituisce una soluzione dell'equazione di Bessel soltanto quando si sup-

pone che $\frac{n}{R}$ sia piccolo di primo ordine. Dunque per $R \to \infty$ c e λ tendono all'infinito e perdono il loro senso. Limitiamoci invece alla considerazione di un pezzo finito della vasca, allora troveremo in prima approssimazione

$$\zeta = \text{costante} \cdot \left\{ \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} \left(\rho + \sqrt{\frac{gl}{k\pi}}\, t \right) - \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} \left(\rho - \sqrt{\frac{gl}{k\pi}}\, t \right) \right\}.$$

Si tratta quindi di un moto ondulatorio nella direzione di r con nodi fissi, e le due onde che si soprappongono sono delle onde trasversali di Airy, in quanto fra la lunghezza d'onda

$$\Lambda = \frac{2l}{k}$$

e la velocità di propagazione

$$C = \sqrt{\frac{gl}{k\pi}}$$

esiste la relazione

$$C^2 = \frac{g\Lambda}{2\pi}.$$

Siamo ora in grado di calcolare anche il trasporto di massa che corrisponde alle nostre onde permanenti. Fissiamo una generica sezione meridiana, cioè un valore di ϑ; allora la quantità di liquido che passa fra l'istante o e l'istante t per questa sezione verticale sarà data dall'espressione

$$M = \int_0^t dt \int_{R_2}^{R_1} \int_{\zeta(\sigma)}^{h} v_\vartheta \cdot dr\, d\zeta = - \int_{\vartheta}^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{\omega} \int_{R_2}^{R_1} \int_{\zeta(\sigma)}^{h} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1}\, dr\, d\zeta .$$

Chiameremo quindi flusso medio la media asintotica di M

$$Q = \lim_{t \to \infty} \frac{M}{t} = \lim_{\vartheta_1 \to \infty} \frac{1}{\vartheta_1 - \vartheta} \int_{\vartheta}^{\vartheta_1} d\vartheta_1 \int_{R_2}^{R_1} \int_{\zeta(\sigma)}^{h} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1}\, dr\, d\zeta .$$

Evidentemente calcolando quest'integrale si possono trascurare tutti i termini periodici rispetto all'argomento $\vartheta_1 - \vartheta$. Si ha allora

$$(19) \qquad Q = \lim_{\vartheta_1 \to \infty} \frac{1}{\vartheta_1 - \vartheta} \int_{\vartheta}^{\vartheta_1} d\vartheta_1 \int_{\zeta(\sigma)}^{0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_1}\, d\zeta\, dr .$$

In base alle (11) e (12) e ricorrendo al teorema della media risulta in prima approssimazione

$$Q = \frac{\omega n^2}{g} \left(\alpha_n^{(i)2} + \beta_n^{(i)2} \right) \left(1 + e^{-2\nu_n^{(i)} h} \right)^2 \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} C_n^{(i)}(r)^2\, dr .$$

Si vede quindi che il flusso medio è di secondo ordine nelle $\alpha_n^{(i)}$, $\beta_n^{(i)}$ e che converrà introdurre l'elevazione massima (della cresta) sulla superficie $z(\sigma)$. Prendiamo questa altezza massima delle onde sulla linea mediana della vasca e denotiamola con a. Segue allora dalla (12) che è

$$a = \frac{\omega n}{g} C_n^{(i)} \left(R + \frac{l}{2}\right) \sqrt{\alpha_n^{(i)2} + \beta_n^{(i)2}} \left(1 + e^{-2\nu_n^{(i)} h}\right)^2$$

e quindi

$$(20) \qquad Q = \frac{g a^2}{2\omega} \cdot \frac{1}{C_n^{(i)}\left(R + \frac{2}{2}\right)^2} \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} C_n^{(i)}(r)^2 \, dr .$$

Per le onde generalizzate di Airy abbiamo da sostituire in quest'espressione la (18) con che, mediante il teorema della media si ha in prima approssimazione

$$(21) \qquad Q = \frac{g a^2 l}{2\omega\left(R + \frac{l}{2}\right)} = \frac{g a^2}{2c} \cdot l ,$$

cioè proprio la relazione trovata dal Levi-Civita per le onde classiche di Airy.

Facendo il calcolo anche per i termini di second'ordine troviamo

$$Q = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{g l}{c} \left\{ 1 + \frac{l^2}{R^2}\left[\frac{1}{12} - \frac{19}{90}\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} + \frac{17}{315}\pi^4 \frac{l^4}{\lambda^4}\right] + \cdots \right\},$$

formula che permette di apprezzare l'influenza della curvatura sul flusso medio. Va infine osservato che, come nei canali rettilinei, questo trasporto di massa ha luogo soltanto nella vicinanza della superficie, risultando rigorosamente nullo per tutti gli elementi $dr\,dz$ di sezione verticale che restano sempre immersi nel liquido.

Meccanica. — *Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci.* Nota di T. Baggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sugli invarianti adialitici di un generico sistema differenziale.* — Note di H. Geppert, presentate dal Socio T. Levi-Civita.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Sur le problème fondamental d'Hydrodynamique à deux dimensions.* Nota del prof. N. MOUSKHELICHVILI, presentata [1] dal Corrisp. U. CISOTTI.

Envisageons le mouvement irrotationnel à deux dimensions d'un liquide parfait qui remplit une portion S du plan Oxy, limitée par un seul contour donné fermé simple C, fixe ou variable. Nous aurons à considérer deux cas: celui, où le domaine S est fini, étant formé de points à l'intérieur de C (liquide renfermé dans une paroi fermée), et celui, où S est infini (profil donné, plongé dans un liquide indéfini). Nous supposerons toujours que les composantes u, v de la vitesse soient des fonctions régulières dans S; si S est infini, nous supposerons en outre que u et v s'annulent à l'infini.

Le problème fondamental, relatif au mouvement envisagé, est le suivant: *trouver les fonctions* u, v, *étant donnée la suite de valeurs que prend la composante normale de la vitesse le long du contour* C. Dans le cas de S infini on suppose en outre donnée la circulation, c'est-à-dire la valeur de l'intégrale:

$$k = \int u dx + v dy \tag{1}$$

prise dans le sens direct le long d'un contour fermé simple quelconque entourant C.

Dans un travail antérieur [2] j'ai donné quelques formules générales relatives à ce problème, qui sont souvent très commodes pour les applications. Je me permets dans cette note de reproduire, en indiquant brièvement leurs démonstrations, quelques-unes de ces formules, sous forme plus simple et propre aux calculs effectifs. J'applique ensuite ces formules aux quelques cas particuliers qui me semblent nouvaux et non sans intérêt pratique.

1. Soit $U(x, y)$ le potentiel des vitesses et soit $F(\zeta)$ la fonction de la variable complexe $\zeta = x + iy$, dont la partie réelle est U. La vitesse sera donnée par la formule connue [3]:

$$u - iv = F'(\zeta). \tag{2}$$

(1) Nella seduta del 20 maggio 1928.

(2) *Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathématique.* Tiflis, Édition de l'Université, 1922.

(3) Cfr. pour ce qui suit dans ce n°: CISOTTI, *Idromeccanica piana*, p. I, Milano, 1921 et RIEMANN-WEBER, *Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik u. Physik*, II Teil, 7 Aufl., Kap. XX (par Th. v. Kármán).

Si le domaine S est fini, alors $F(z)$ sera holomorphe dans tout ce domaine. Si S est infini alors, comme on s'assure aisément, la fonction $F(z)$ sera régulière partout dans S, sauf au point $z = \infty$; dans le domaine de ce point elle aura la forme

$$F(z) = (\alpha + i\beta)\log z + \text{fonction régulière}, \tag{3}$$

α, β désignant des constantes réelles. En particulier, β est liée à la circulation (1) par la formule :

$$\beta = -\frac{k}{2\pi}. \tag{4}$$

Soit à présent $z = \omega(\zeta)$ la relation qui effectue la représentation conforme (et biunivoque) de l'aire S sur le cercle $|\zeta| \leq 1$, que nous désignerons par σ. Cela étant, la fonction $\omega'(\zeta)$ ne s'annulera jamais dans σ ; nous supposerons aussi qu'elle soit continue et $\neq 0$ partout sur la circonférence du cercle σ [1].

Si S est fini, $\omega(\zeta)$ sera holomorphe dans σ. Si S est infini, nous supposerons que le point $z = \infty$ correspond au point $\zeta = 0$; cela étant, nous aurons dans ce dernier cas

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \text{fonction holomorphe dans } \sigma, \tag{5}$$

c étant une constante. Tout cela est bien connu d'après la théorie de la représentation conforme.

Posons ensuite $F(z) = F(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta)$. Lorsque S est fini, $\varphi(\zeta)$ est holomorphe dans σ. Pour S infini cette fonction aura une singularité unique en $\zeta = 0$; à savoir dans le voisinage de ce point $\varphi(\zeta) = (\alpha + i\beta)\log\omega(\zeta) + \text{fonct. régulière} = -(\alpha + i\beta)\log\zeta + \text{fonction régulière}$, de sorte que dans σ on aura

$$\varphi'(\zeta) = -\frac{\alpha + i\beta}{\zeta} + \text{fonct. holomorphe} = -\frac{\alpha + i\beta}{\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k + i\beta_k)\zeta^k. \tag{6}$$

U étant la partie réelle de $F(z) = \varphi(\zeta)$, on peut écrire :

$$2U = \varphi(\zeta) + \overline{\varphi}(\overline{\zeta}), \tag{7}$$

en désignant, d'une façon générale, par $\overline{\varphi}(\overline{\zeta})$ l'expression conjuguée de $\varphi(\zeta)$ (en particulier, $\overline{\zeta}$ désigne la quantité conjuguée de ζ).

(1) Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, de supposer que les coordonnées des points de C admettent des dérivées deuxièmes continues par rapport à l'arc. Cfr. LICHTENSTEIN, « Enc. d. Math. Wiss. », Bd. II_3, S. 254.

Le problème fondamental, posé dès le début, se réduit donc à la recherche de la fonction $\varphi(\zeta)$ d'après la condition au contour:

$$\frac{dU}{dn} = f \qquad \text{(sur C)}, \tag{8}$$

f désignant la fonction donnée de l'arc s de C, et n étant la normale à C, dirigée vers l'extérieur du *domaine* S.

Pour exprimer la condition (8) en termes de la variable ζ, procédons comme il suit. Soit dz l'accroissement qui exprime le déplacement de z dans le sens de n. Le point correspondant ζ subira un déplacement $d\zeta$ dans le sens de la normale extérieure à la circonférence γ de σ. On aura:

$$dn = |dz| = |\omega'(\zeta')|\,|d\zeta|,$$

$\zeta' = e^{i\vartheta}$ désignant le point de γ; et puisque $d\zeta = |d\zeta|\,e^{i\vartheta} = \zeta'\,|d\zeta|$, il viendra:

$$\frac{d}{dn} = \frac{\zeta'}{|\omega'(\zeta')|}\frac{d}{d\zeta} = \frac{\overline{\zeta'}}{|\omega'(\zeta')|}\frac{d}{d\zeta}. \tag{9}$$

En appliquant cette formule à l'expression (7) on donne à la condition (8) la forme suivante

$$\zeta'\varphi'(\zeta') + \overline{\zeta'}\,\overline{\varphi'}(\overline{\zeta'}) = 2f\cdot|\omega'(\zeta')|,$$

ou bien, puisque $\overline{\zeta'} = e^{-i\vartheta} = 1 : \zeta'$,

$$\zeta'\varphi'(\zeta') + \frac{1}{\zeta'}\,\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = 2f\cdot|\omega'(\zeta')|. \tag{10}$$

L'expression $\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ est définie à l'*extérieur* de σ et a la signification suivante. Si l'on présente $\varphi'(\zeta)$ sous la forme (6) (avec $\alpha = \beta = 0$ pour le cas de S fini), alors

$$\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -(\alpha - i\beta)\zeta + \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k - i\beta_k)\zeta^{-k}; \tag{11}$$

la série infinie converge à l'extérieur de σ, car la série de la formule (6) converge dans σ.

Quant aux expressions $\varphi'(\zeta')$ et $\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$, elles désignent les limites, vers lesquelles tendent $\varphi'(\zeta)$ et $\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ lorsque le point ζ tend vers le point ζ' du contour (en restant dans le premier cas intérieur à σ, et dans l'autre extérieur à σ). Nous supposons donc que ces limites existent[1].

(1) Il est aisé de démontrer que ces limites existent toutefois que la fonction donnée f soit continue avec sa dérivée par rapport à ϑ. Cfr. mon travail cité.

Multiplions les deux membres de (10) par $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$, ζ désignant un *point arbitraire à l'intérieur de* σ et intégrons le long de γ, il viendra [1]:

$$(12)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left\{\zeta'\varphi'(\zeta') + \frac{1}{\zeta'}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right\}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2f\,|\,\omega'\,|\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}\,.$$

Or, la fonction $\zeta\varphi'(\zeta)$ étant holomorphe dans σ, on aura d'après la formule de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\zeta'\varphi'(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta} = \zeta\varphi(\zeta)\,.$$

En second lieu on aura, en se rapportant à la formule (11),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta'}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta} = -(\alpha - i\beta)$$

(avec $\alpha = \beta = 0$ pour S fini) car on a pour n entier positif

$$(12a)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta'}{\zeta'^n(\zeta'-\zeta)} = 0\,,$$

comme on voit immédiatement en remplaçant γ par une circonférence du rayon infini. On aura donc en définitif [2]:

$$(13)\qquad \zeta\varphi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2f\,|\,\omega'\,|\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta} + \alpha - i\beta\,.$$

Il nous reste à déterminer les constantes α et β. Posons à cet effet $\zeta = 0$ dans la relation précédente; il vient

$$(14)\qquad \alpha = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,|\,\omega'\,|\,\frac{d\zeta'}{\zeta'} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,|\,\omega'\,|\,d\vartheta = -\frac{1}{2\pi}\int_C f ds\,.$$

(1) D'après un théorème de Harnack, la condition (12), qui doit être remplie pour tout point ζ à l'intérieur de σ, est entièrement équivalente à la condition (10). Cfr. A. Harnack, *Beiträge zur Theorie des Cauchyschen Integrals*. « Mat. Annalen », Bd. XXXV, 1889, pp. 1–18. Cfr. aussi mon travail cité.

(2) La formule (13) pourrait être déduite d'une formule analogue de M. Boggio (« Atti della R. Acc. di Torino », vol. 47, 1911-12, p. 22), rélative à l'aire circulaire. Mais nous avons préféré le procédé du texte, car des procédés analogues s'appliquent à bien d'autres problèmes de la physique mathématique et conduisent souvent aux résultats très commodes pour les calculs effectifs. Cfr. par ex., outre mon travail cité un autre article: *Sur l'intégration de l'équation biharmonique*, « Bull. de l'Académie de Russie », 1919, p. 663.

Quant à β, elle est donnée par la formule (4). Pour le cas du domaine fini on doit avoir $\alpha = \beta = 0$; donc, pour la possibilité du problème dans ce cas il faut supposer que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f\,|\omega'|\,\frac{d\zeta'}{\zeta'} = \frac{1}{2\pi}\int_{C} f\,ds = 0\,. \tag{15}$$

Cette condition, bien connue, exprime que le flux total à travers C doit être nul. En particulier, lorsque la paroi se meut sans se déformer, on aura $\alpha = 0$ aussi dans le cas du domaine infini.

2. La fonction $\varphi'(\zeta)$ étant donnée par la formule (13), il suffit d'une quadrature pour calculer $\varphi(\zeta)$ et, par suite U. Or, pour le calcul de vitesses il suffit d'avoir trouvé $\varphi'(\zeta)$.

Il est très commode d'introduire dans le plan Oxy les coordonnées curvilignes spéciales qui sont les coordonnées polaires ρ, ϑ des points correspondants du plan des ζ ($\zeta = \rho e^{i\vartheta}$). Les coordonnées cartésiennes (x, y) du point du plan Oxy s'expriment en fonction de cordonnées ρ, ϑ d'après la formule : $x + iy = \omega(\rho e^{i\vartheta})$.

Désignons par v_ρ, v_ϑ les composantes de la vitesse suivant les tangentes aux lignes $\vartheta = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, tracées sur le plan Oxy (on suppose que ces tangentes ont le sens de ρ croissant et de ϑ croissant). On a évidemment : $v_\rho - iv_\vartheta = (u - iv)e^{i\alpha}$, α désignant l'angle de la tangente à la courbe $\vartheta = \text{const.}$, avec l'axe Ox. Si par dz on désigne le déplacement de z suivant cette tangente, alors le déplacement correspondant $d\zeta$ sera dans le sens du rayon $\vartheta = \text{const.}$ du cercle σ. On aura donc

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta)\,d\zeta}{|\omega'(\zeta)|\,|d\zeta|} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}e^{i\vartheta} = \frac{\zeta}{\rho}\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}, \tag{16}$$

d'où on déduit

$$v_\rho - iv_\vartheta = (u - iv)\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,\frac{\zeta}{\rho}\,. \tag{17}$$

Mais puisque $u - iv = dF(z) : dz = d\varphi(\zeta) : dz = \varphi'(\zeta) : \omega'(\zeta)$, on aura en définitif la formule extrêmement simple pour les vitesses :

$$v_\rho - iv_\vartheta = \frac{\zeta}{\rho}\,\frac{\varphi'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,. \tag{18}$$

3. Appliquons nos formules au cas où C est une *paroi rigide* en mouvement. Le mouvement instantané de C peut être considéré comme produit par une translation et une rotation autour de O. On obtient la solution générale en faisant la somme de solutions pour les cas de translation et de rotation [1].

(1) On pourrait réunir ces deux cas dans un seul en prenant pour O le centre instantané de rotation.

Nous commencerons par le cas de rotation autour de O. Dans ce cas la vitesse (u', v') du point (x', y') du contour rigide C sera donné par la formule: $u' - iv' = -i\Omega(x' - iy')$, Ω étant la vitesse angulaire, d'où, d'après la formule (17) (avec $\rho = 1$):

$$(19) \qquad v'_\rho - iv'_\sigma = -\frac{i\Omega}{|\omega'(\zeta')|}\bar{\omega}(\zeta')\omega'(\zeta')\zeta' .$$

La composante normale v'_ρ de cette vitesse sera donc

$$v'_\rho = \frac{1}{2}(v'_\rho - iv'_\sigma) + \frac{1}{2}(v'_\rho + iv'_\sigma) = -\frac{i\Omega}{2|\omega'(\zeta')|}\{\zeta'\bar{\omega}(\zeta')\omega'(\zeta') - \zeta'\omega(\zeta')\bar{\omega}'(\bar{\zeta}')\}.$$

En substituant cette valeur au lieu de f dans (13) nous aurons [1]

$$(20) \qquad \zeta\varphi'(\zeta) = -\frac{i\Omega}{2\pi i}\int_\gamma \left\{\zeta'\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\omega'(\zeta') - \frac{1}{\zeta'}\omega(\zeta')\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right\}\frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta} + \frac{ki}{2\pi}.$$

En remarquant que

$$\zeta'\omega\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\omega'(\zeta') - \frac{1}{\zeta'}\omega(\zeta')\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = \zeta'\frac{d}{d\zeta'}\left[\omega(\zeta')\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right],$$

on peut transformer le second membre de la formule (20) en intégrant par parties. En divisant ensuite l'expression obtenue par ζ et en intégrant par rapport à ζ sous le signe d'intégrale curviligne, on obtient en définitif, en supprimant la constante additive arbitraire [2]:

$$(21) \qquad \varphi(\zeta) = -\frac{i\Omega}{2\pi i}\int_\gamma \omega(\zeta')\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta} + \frac{ki}{2\pi}\log\zeta .$$

On obtient la formule encore plus simple dans le cas de translation [3]. Un calcul élémentaire montre que lorsque S est fini, le liquide se meut en bloc avec la paroi, et lorsque S est infini, alors

$$(22) \qquad \varphi(\zeta) = (u_0 - iv_0)\omega(\zeta) - (u_0 - iv_0)\frac{c}{\zeta} - (u_0 + iv_0)\bar{c}\zeta + \frac{ki}{2\pi}\log\zeta ,$$

(1) Avec $k = 0$ pour le cas où S est fini.

(2) On pourrait obtenir la formule (21) en partant de la formule de Schwarz qui sert à déterminer la fonction de la variable complexe $\psi(\zeta)$ holomorphe dans σ d'après la suite de valeurs que sa partie réelle prend sur γ. Remarquons que la formule de Schwarz peut être déduite immédiatement par un procédé analogue à celui qui a servi à déduire la formule (13); il suffit de multiplier la relation $\psi(\zeta') + \bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = 2V$ (V étant la valeur de la partie réelle de ψ sur γ) par $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}$ et intégrer le long de γ.

(3) D'ailleurs, la solution pour ce cas est bien connue. Cfr. par ex., Cisotti, loc. cit., p. 113.

c désignant la constante définie par la formule (5) et (u_0, v_0) étant la vitesse de C.

Reprenons le cas général et signalons le fait remarquable que voici : *lorsque la fonction* $\omega(\zeta)$ *est rationnelle, la solution s'obtient en termes de fonctions élémentaires.* En effet, dans ce cas, l'application des règles élémentaires du calcul des résidus montre que l'intégrale dans (21) est une fonction rationnelle de ζ.

4. Appliquons la formule (21) aux quelques cas simples. Nous supposerons, pour simplifier l'écriture $k = 0$.

1° Soit, m étant un entier positif,

$$\omega(\zeta) = b\left(\zeta^m + \frac{a}{\zeta}\right) \qquad (a > 0, b > 0, a > m).$$

Le contour C est une *hypotrochoïde sans points doubles*, et S est l'aire, extérieure à C. La formule (21) donne

$$\varphi(\zeta) = -\frac{i\Omega}{2\pi i}\int_{\gamma} b^2\left(\zeta'^m + \frac{a}{\zeta'}\right)\left(\frac{1}{\zeta'^m} + a\zeta'\right)\frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}$$

d'où, d'après la formule de Cauchy et la formule (12 *a*), $\varphi(\zeta) = -i\Omega a b^2 \zeta^{m+1}$ (à une constante près). Les vitesses sont, d'après la formule (18)

$$v_\rho = \frac{\Omega a b (m+1)\rho^{m+2}\sin(m+1)\vartheta}{\sqrt{m^2\rho^{2m+2} - 2am\rho^{m+1}\cos(m+1)\vartheta + a^2}},$$

$$v_z = \frac{\Omega a b (m+1)\rho^{m+2}\cos(m+1)\vartheta}{\sqrt{m^2\rho^{2m+2} - 2am\rho^{m+1}\cos(m+1)\vartheta + a^2}}.$$

En posant $m = 1$ on obtient la solution pour le cas connu du *contour elliptique* [1].

2° En posant $\omega(\zeta) = b(\zeta^m + a\zeta)$ $(a > 0, b > 0, a > m > 1, m$ entier), on obtient le cas du liquide renfermé dans une paroi *épitrochoïdale* sans points doubles. La formule (21) donne ici : $\varphi(\zeta) = -i\Omega a b^2 \zeta^{m-1}$. Pour les vitesses on obtiendra des formules analogues aux précédentes.

3° Soit en dernier lieu

$$\omega(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{\zeta(\zeta + c)} \qquad (|c| > 1) \tag{23}$$

a, b, c désignant des constantes (en général complexes). En donnant à ces constantes des valeurs convenables, on obtient le cas du liquide indéfini entourant un *profil voisin de celui de l'aile d'aéroplane*. Le mouvement de

(1) Ce dernier cas fut traité avec une méthode différente par H. Lamb. Cfr. *Hydrodynamics*, Cambridge, 1924, p. 84.

translation de ces profils a été étudié par Joukowski [1]. Pour le cas de rotation la formule (21) donne

$$\varphi(\zeta) = -\frac{i\Omega}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(a\zeta'+b)(\bar{a}+\bar{b}\zeta')}{(\zeta'+c)(1+\bar{c}\zeta')}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}.$$

En remarquant que la fonction sous l'intégrale, considérée comme fonction de ζ', admet à l'extérieur de γ un pôle unique $\zeta' = -c$, on obtient immédiatement (en supprimant une constante additive):

$$\varphi(\zeta) = -i\Omega\frac{(b-ac)(\bar{a}-\bar{b}c)}{1-c\bar{c}}\frac{1}{\zeta+c}.$$

Astronomia. — *Ricerca del passo della vite micrometrica del meridiano Ertel del R. Osservatorio del Campidoglio.* Nota di L. Masciotti, presentata [2] dal Corrisp. G. Armellini.

In occasione della prossima serie di osservazioni sul pianetino Eros che il prof. Armellini ha deciso di eseguire al Campidoglio, ebbi da lui l'incarico di studiare il passo della vite delle ascensioni rette e della vite della declinazione annesse al micrometro dell'oculare del meridiano di Ertel ed ho condotto il lavoro come passerò ad esporre:

1. - *Passo della vite dell'ascensione retta.*

Il micrometro dell'oculare contiene diciassette fili verticali di cui quindici disposti in cinque gruppi, ciascuno di tre fili, e due posti uno prima ed uno dopo tali gruppi. Io ho considerato i due fili estremi ed i cinque che dimezzano i gruppi di tre ed ho misurate le distanze tra essi intercedenti in due modi, prima con il passaggio di stelle fondamentali (valendomi del cronografo), poi sovrapponendo consecutivamente ad essi il filo mobile verticale regolato dalla vite di cui dovevo misurare il passo e leggendo i corrispondenti valori sulla testa della vite; facendo quindi i quozienti tra valori corrispondenti nei due metodi ho ottenuto il passo della vite nei sei intervalli tra i fili considerati.

Ecco la tabella delle osservazioni eseguite, ritenendo che la numerazione dei fili parte dalla vite:

(1) Cfr. par ex., Riemann-Weber, loc. cit., p. 770 et suiv. La formule (23) se déduit aisément des formules qu'on trouvera dans le lieu cité.

(2) Nella seduta del 20 maggio 1928.

Tabella I.

N. d'ordine	Stella	Declinazione	Distanze tra i fili misurate con le stelle					
			II–I	III–II	IV–III	V–IV	VI–V	VII–VI
1	α Lyrae	38°43′ 5″	25ˢ.4	25ˢ.2	24ˢ.6	24ˢ.6	25ˢ.2	25ˢ.4
2	ψ Cygni	52 14 56	31 .8	32 .2	31 .4	31 .5	32 .1	32 .5
3	β Cygni	27 48 33	22 .0	22 .7	21 .5	21 .8	22 .2	22 .8
4	o Cygni sq	46 31 25	28 .8	28 .9	28 .4	28 .3	29 .2	29 .1
5	ε Delphini	11 3 28	19 .7	20 .2	19 .6	19 .6	20 .2	19 .9
6	ν Cygni	40 53 25	25 .7	26 .3	25 .3	25 .3	26 .5	25 .9
7	ζ Cygni	29 55 53	22 .7	22 .6	22 .1	22 .1	22 .8	22 .9
8	24 Vulpeculae	24 26 59	21 .3	21 .7	21 .1	20 .9	22 .2	21 .1
9	γ Cygni	40 1 38	25 .7	25 .8	24 .8	25 .2	25 .6	25 .8
10	ε Delphini	11 3 29	20 .1	20 .2	19 .7	19 .3	20 .4	19 .8
11	β Delphini	14 20 39	19 .7	20 .8	19 .7	19 .9	20 .3	20 .5
12	α Cygni	45 1 26	28 .1	27 .4	27 .2	27 .1	28 .3	27 .5
13	ν Cygni	40 53 25	26 .1	25 .9	25 .5	25 .1	26 .5	25 .9
14	ζ Cygni	29 55 53	22 .6	22 .2	22 .3	22 .1	23 .1	22 .4
15	74 Cygni	40 5 23	25 .5	25 .8	24 .7	25 .4	25 .6	25 .9
16	24 Vulpeculae	24 26 59	21 .3	21 .5	21 .2	20 .9	21 .9	21 .7
17	γ Cygni	40 1 38	25 .5	25 .6	25 .2	25 .0	25 .9	25 .7
18	α Cygni	45 1 26	27 .9	27 .7	27 .2	27 .2	28 .1	27 .6
19	λ Cygni	36 13 36	23 .9	24 .9	23 .7	23 .5	24 .4	24 .8
20	ν Cygni	40 53 25	25 .7	25 .9	25 .3	25 .7	26 .1	25 .9
21	ζ Cygni	29 55 53	22 .5	22 .5	22 .3	22 .1	22 .9	22 .7
22	I Pegasi	19 29 45	20 .6	21 .0	20 .3	20 .2	21 .4	20 .8
23	74 Cygni	40 5 23	25 .6	25 .6	25 .3	25 .0	25 .6	26 .0
24	16 Pegasi	25 35 11	21 .5	22 .1	21 .1	21 .2	22 .2	21 .8
25	ν Persei	48 15 58	28 .8	30 .3	28 .6	29 .0	29 .8	29 .2
26	o Piscium	8 47 43	19 .8	20 .3	19 .2	19 .4	19 .9	19 .7
27	ϑ Arietis	19 27 20	20 .6	21 .1	20 .4	20 .1	21 .4	20 .4
28	f Tauri	12 41 26	20 .0	20 .0	19 .9	19 .7	20 .2	20 .3
29	η Tauri	23 53 3	21 .4	21 .7	20 .9	21 .1	21 .3	21 .6
30	ϑ Tauri	17 22 30	20 .6	20 .8	20 .1	20 .2	20 .6	20 .6

Questa tabella dà i tempi impiegati da ciascuna stella a passare da un filo all'altro; per avere allora le distanze equatoriali in secondi, tra questi fili, occorrerà moltiplicare - come è noto - i tempi della precedente tabella per i coseni della declinazione della stella corrispondente; facendo tale calcolo e prendendo le medie dei valori si hanno le seguenti distanze:

	$19^s.526 \pm 0^s.04470$	tra il	I	ed il	II filo
	19 .756 ± 0 .03942	»	II	»	III »
(1)	19 .193 ± 0 .02555	»	III	»	IV »
	19 .184 ± 0 .02551	»	IV	»	V »
	19 .836 ± 0 .03679	»	V	»	VI »
	19 .705 ± 0 .04111	»	VI	»	VII »

La misura delle stesse distanze eseguita mediante il filo mobile dell'oculare e letta sulla testa della vite delle ascensioni mi ha dato come media di 25 prove i seguenti valori:

	293.380 ± 0.1181	tra il	I	ed il	II filo
	297.464 ± 0.1764	»	II	»	III »
(2)	286.648 ± 0.1687	»	III	»	IV »
	288.444 ± 0.1867	»	IV	»	V »
	298.340 ± 0.1816	»	V	»	VI »
	294.696 ± 0.1712	»	VI	»	VII »

ove le unità corrispondono alle divisioni sessagesimali della testa della vite.

Il passo della vite non è rigorosamente costante e quindi è evidente che il suo valore varii, sia anche assai leggermente, misurandolo nei sei diversi intervalli tra filo e filo sopra considerati; tali suoi valori sono dati dai quozienti tra i valori (1) ed i corrispondenti valori (2) e sono:

$p_1 = 0^s.0665 \pm 0.000100$	tra il	I	ed il	II filo
$p_2 = 0 .0664 \pm 0.000098$	»	II	»	III »
$p_3 = 0 .0669 \pm 0.000070$	»	III	»	IV »
$p_4 = 0 .0665 \pm 0.000070$	»	IV	»	V »
$p_5 = 0 .0664 \pm 0.000091$	»	V	»	VI »
$p_6 = 0 .0668 \pm 0.000098$	»	VI	»	VII »

Prendendo per passo p della vite la media aritmetica di questi sei valori si ha

$$p = 0^s.0666 \pm 0^s.00003$$

e cioè per un'intiera rivoluzione della vite si ha:

$$P_0 = 3^s.9950 \pm 0^s,0021$$

ove $\pm 0^s.0021$ è l'errore probabile che risulta dalle osservazioni eseguite.

2. - *Passo della vite della declinazione.*

Ho eseguito la misura di tale passo facendo uso della mira meridiana, posta a circa un km. e mezzo dall'osservatorio. In ciascuna osservazione ho fatto compiere alla vite della declinazione 20 giri intieri riportando poi il filo mobile da essa comandato sullo stesso punto della mira in cui trovavasi prima di far girare la vite; ho letto quindi l'arco descritto nei quattro microscopi micrometrici annessi al cerchio meridiano.

La seguente tabella dà le letture ai quattro microscopi (corrette dell'errore del run) e la loro media per ciascuna osservazione (trascurando il numero dei primi che è di 16′ per tutte).

Tabella II.

N. d'ordine	Data dell'osservazione	Lettura al I Microscopio	Lettura al II Microscopio	Lettura al III Microscopio	Lettura al IV Microscopio	Media delle letture
	1928					
1	15 Febbraio	26″.1	24″.6	27″.8	27″.4	26″.50
2	» »	32 .0	29 .9	24 .7	33 .9	30 .12
3	» »	27 .6	27 .9	26 .0	26 .3	26 .95
4	20 »	32 .3	27 .6	27 .5	26 .3	28 .20
5	» »	34 .0	26 .1	26 .5	27 .7	28 .60
6	» »	32 .5	28 .3	31 .2	26 .3	29 .60
7	» »	31 .1	30 .4	28 .9	27 .0	29 .35
8	21 »	34 .6	33 .9	29 .5	32 .0	32 .50
9	» »	31 .3	29 .0	26 .6	31 .0	29 .50
10	» »	31 .4	22 .4	26 .0	28 .6	27 .10
11	» »	31 .8	30 .6	27 .1	29 .2	29 .70
12	» »	31 .5	32 .2	26 .1	30 .3	30 .02
13	» »	31 .2	32 .9	31 .7	30 .4	31 .54
14	» »	32 .6	30 .5	31 .0	32 .3	31 .60
15	» »	34 .4	29 .4	33 .9	28 .3	31 .50
16	» »	32 .2	30 .5	31 .0	27 .2	30 .22
17	» »	26 .3	28 .2	30 .9	25 .4	27 .70
18	24 »	26 .1	32 .0	24 .4	21 .1	25 .90
19	» »	31 .8	28 .4	33 .5	31 .7	31 .35
20	» »	28 .4	29 .1	29 .5	25 .4	28 .10
21	10 Aprile	30 .9	30 .6	33 .5	28 .5	30 .90
22	» »	29 .1	29 .5	30 .3	26 .7	28 .90
23	17 »	32 .7	33 .7	31 .0	30 .6	32 .00
24	» »	25 .8	29 .5	24 .3	26 .0	26 .40
25	» »	28 .4	30 .1	21 .5	28 .7	27 .20

La media dei venticinque valori dell'ultima colonna è: 16' 29''.258 che divisa per 20 dà l'arco P_o, corrispondente ad una intiera rivoluzione della vite e cioè $P_o = 49''.4629$ mentre l'arco p_o corrispondente ad una divisione sessagesimale della testa della vite risulta $p_o = 0''.8243$.

Poichè l'immagine della vite non si forma nel piano focale dello strumento, mentre le immagini degli oggetti celesti si formano in tal piano, il valore P del passo in questo piano è distinto da P_o e dato dalla formola $P = P_o\left(1 + \frac{f}{\Delta}\right)$ ove f è la distanza focale e Δ la distanza della mira dall'obbiettivo. Essendo nel nostro caso $f = 1.3215$ metri e preso $\Delta = 1525$ metri si ha, eseguendo i calcoli:

$$P = 49''.5054 \pm 0''.0189$$
$$p = 0''.8251 \pm 0''.00031 .$$

Geofisica. — *Una applicazione alle ricerche geofisiche della teoria di T. Levi-Civita relativa alla "influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternata parallela allo schermo"* [1]. Nota di A. Rostagni, presentata [2] dal Corrisp. A. Pochettino.

Fra i metodi d'investigazione del sottosuolo attraverso le sue proprietà elettriche, e precisamente fra quelli che prendono a fondamento l'osservazione del campo elettromagnetico di una corrente variabile distribuita nel sottosuolo stesso, si distingue abitualmente col nome di *metodo di Sundberg* quello nel quale si genera la corrente, senza far uso di elettrodi interrati, per induzione di un circuito interamente isolato [3]. Il metodo si dichiara particolarmente adatto a localizzare giacimenti, anche profondi, di notevole conduttività: in particolare, di acqua salata, e, attraverso a questi, secondo le indicazioni geologiche, del petrolio.

A quanto risulta dalle poche e succinte pubblicazioni in merito [4], la parte essenziale del circuito primario consiste in un filo rettilineo molto lungo (1600 m.) isolato e steso sul suolo; in vicinanza di esso si effettua il rilievo del campo magnetico per mezzo di avvolgimenti a induzione. Il circuito si chiude a distanza grande dal luogo di misura (di solito in un rettangolo, di cui il secondo lato misura almeno 800 m.). La presenza di

(1) « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », serie 5ª, vol. XI, 1902, pp. 163, 191, 228.
(2) Nella seduta del 17 giugno 1928.
(3) Cfr. W. Heine, *Elektrische Bodenforschung*, Berlino 1928, pp. 168 e sgg.
(4) V. per la bibliografia il lavoro di Hummel citato più avanti.

uno strato conduttivo nel sottosuolo dà luogo, per via delle correnti indotte che vi hanno origine, ad un campo magnetico secondario, che dipende in intensità ed in fase dalla profondità e dalla conduttività dello strato.

L'andamento della intensità e della fase alla superficie del suolo, in funzione della distanza dalla corrente primaria, è indicato, nelle pubblicazioni citate, per diverse profondità dello strato, da alcuni diagrammi, ricavati sperimentalmente, in parte, su modelli di laboratorio, e in parte pure da effettivi rilievi di campagna.

Uno schema teorico del fenomeno tenta di ricavare J. N. Hummel in un recente lavoro [1], idealizzando la posizione considerata in quella di un conduttore rettilineo indefinito parallelo ad una lastra piana dotata di conduttività infinita. Il campo magnetico secondario, nel semispazio contenente la corrente primaria, risulta allora equivalente al campo di una corrente fittizia, simmetrica di quella rispetto alla lastra, dotata della stessa intensità, ma sfasata di mezzo periodo.

L'A. però non è in grado di assegnare un criterio che consenta di giudicare *a priori*, caso per caso, dell'applicabilità della rappresentazione. Non addita per qual via il passaggio della conduttività ad un valore finito modificherà i risultati [2]; nè come, in particolare, avrà origine allora quella variabilità della fase del campo secondario in funzione della distanza dalla corrente, quale si presenta appunto nei casi reali.

La teoria di T. Levi-Civita, alla quale io mi voglio invece riferire, non consentirà per lo più, vedremo, nei casi pratici che a noi interessano, una approssimazione quantitativa molto maggiore che non la trattazione semplice di Hummel; ma fissa almeno ogni volta il limite di questa approssimazione; e introduce assai più a fondo nella considerazione dei fattori fisici che determinano il problema, offrendo un modello che concettualmente è ben più soddisfacente.

Occorre soltanto rifarsi ai risultati generali, chè le conseguenze ultime furono ricavate dall'A. soltanto per quella regione, situata dalla parte opposta della corrente rispetto alla lastra, dove si deve esercitare quell'effetto di schermo al quale allora si volgeva l'attenzione.

Si consideri dunque un conduttore rettilineo indefinito alla superficie del suolo, percorso da una corrente di intensità

$$i = I_0 \sin \omega t \qquad \omega = 2\pi n .$$

Sepolta a profondità d in un suolo perfettamente isolante si trovi una lastra orizzontale indefinita di spessore trascurabile rispetto a d. La resistenza di

(1) J. N. Hummel, *Physikalische Grundlagen einer neuen geoelektrischen Aufschlussmethoden.* «Zs. f. Geoph.», 4, 59, 1928.

(2) Egli avanza soltanto, a questo proposito, delle ipotesi affatto arbitrarie.

un cm.² della lastra sia R : cioè sia $R = \frac{\rho}{s}$ se ρ è la resistenza specifica in U. E. M. e s lo spessore.

Assumiamo un sistema cartesiano ortogonale coll'origine sulla lastra, l'asse z verticale verso l'alto, l'asse x parallelo al filo; per modo che le equazioni del filo siano $y = 0$, $z = d$. Poniamo [1]

$$\Delta^2 = y^2 + (z - d)^2 \qquad \nabla^2 = y^2 + (z + d)^2 \qquad \text{per } z > 0$$

$$q = \frac{4\pi^2 n}{R} .$$

Le componenti secondo y e secondo z del campo magnetico risultante si ottengono allora come le parti reali delle espressioni [2]

$$M^* = -2 I_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{d}{dz}\left[\log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla}\right] + \frac{i}{q} \frac{d^2}{dz^2} \log \frac{1}{\nabla} + R_1'' \right\}$$

$$N^* = 2 I_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{d}{dy}\left[\log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla}\right] + \frac{i}{q} \frac{d^2}{dz\,dy} \log \frac{1}{\nabla} + R_1' \right\}$$

dove R_1' e R_1'' sono quantità complesse (resti di serie di funzioni di variabile complessa arrestate al primo termine, calcolabili secondo la formola di Lagrange) [3], delle quali sappiamo che il modulo non può superare

$$\frac{2}{q^2 (z + d)^3} .$$

Potremo scrivere dunque approssimativamente per il campo alla superficie del suolo ($z = d$), eseguite le derivazioni e separate le parti reali

$$M = -\frac{4 I_0 d}{4d^2 + y^2} \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{2dq} \frac{4d^2 - y^2}{4d^2 + y^2} \cos \omega t \right\}$$

$$N = -\frac{8 I_0 d^2}{4d^2 + y^2} \left\{ \frac{1}{y} \sin \omega t - \frac{1}{dq} \frac{y}{4d^2 + y^2} \cos \omega t \right\}$$

con un errore assoluto per ciascuna componente inferiore a

$$\frac{I_0}{2 q^2 d^3}$$

(1) Δ e ∇ rappresentano le distanze del punto in esame rispettivamente dalla linea primaria e dalla sua immagine rispetto alla lastra.

(2) V. lav. cit., in particolare p. 230.

(3) Il primo termine di entrambe le espressioni (chiuso fra parentesi quadre) è esatto a meno di una quantità molto piccola. Il coefficiente $B = A^2 R n$ il cui ordine di grandezza determina l'entità dell'errore relativo è, pure per valori estremi che a noi possano interessare $R = 10^{10}$ $n = 10^5$, dell'ordine di 10^{-6}. V. lav. cit., p. 196.

che si riflette in una incertezza relativa, p. es., nei due termini in quadratura di fase della componente M, per $y = 0$, inferiore rispettivamente a

$$\frac{1}{2\,d^2\,q^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{dq}$$

Analogamente si calcolerebbero i limiti degli errori relativi per la componente N e per gli altri valori di y. Ma io limiterò la considerazione alla componente M, che preferibilmente si usa in pratica misurare, perchè sul piano $z = d$ essa risulta del solo campo secondario, essendo notoriamente nulla la componente del campo primario nel piano della corrente.

Condizione dunque perchè l'approssimazione sia buona è che il prodotto dq sia notevolmente maggiore dell'unità; ma essa sarà in ogni caso assai migliore per il termine in opposizione di fase colla corrente primaria che non per quello in quadratura. Quest'ultimo è d'altronde, per $dq > 1$, sempre minore dell'altro, perchè il fattore $\frac{4\,d^2 - y^2}{4\,d^2 + y^2}$ è compreso fra -1 e $+1$ per qualunque valore di y; tanto migliore anzi sarà l'approssimazione in generale quanto più piccolo sarà questo termine rispetto all'altro; risultato che si può enunciare in questa forma: le formole ricavate sono tanto più approssimate quanto più la fase del campo secondario è vicina all'opposizione rispetto a quella della corrente primaria. Si può finalmente notare che l'approssimazione nella espressione dell'ampiezza è pure essa dell'ordine di $\frac{1}{2\,d^2\,q^2}$: e quindi assai migliore di quella relativa alla fase che è dell'ordine di $\frac{1}{dq}$.

Ora, per fissare le idee sugli ordini di grandezza, consideriamo un esempio numerico. Sia uno strato d'acqua salata per cui $R = 0{,}1\ \Omega = 10^8$ U. E. M., possibile in natura, in quanto corrisponde, p. es., a un deposito di resistività $10\,\Omega$ cm. e spessore 1 m., oppure di restività $20\,\Omega$ cm. e spessore 2 m., e così via. Allora q vale circa $4.10^{-7} n$. Per una profondità di 100 m. $= 10^4$ cm. e una frequenza $n = 1000$ per $\cdot s^{-1}$ si ha

$$dq = 4 \qquad \frac{1}{2\,d^2\,q^2} = \frac{1}{32} \approx 0{,}03 \qquad \frac{1}{dq} = 0{,}25\,.$$

Nel caso considerato la nostra formola esprime l'ampiezza di M con una approssimazione superiore al 3 °/₀ e la fase con un'approssimazione superiore al 25 °/₀.

Trascurando un termine dell'ordine di $\frac{1}{4\,d^2\,q^2}$ rispetto all'unità si ha per l'ampiezza

$$M_0 = \frac{4\,I_0\,d}{4\,d^2 + y^2}$$

donde si ricava facilmente la profondità d, e con buona approssimazione. Indicando poi con φ l'angolo di fase fra la corrente primaria e il campo secondario si ha

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2dq}\,\frac{4d^2 - y^2}{4d^2 + y^2}$$

donde nota d si ricava q e quindi R: ma con scarsa approssimazione. Non solo; ma, essendo $R = \frac{\rho}{s}$ non ne risulta ancora determinato ρ senza speciali induzioni su s.

Le considerazioni svolte a me pare possano servire di orientamento nella applicazione del « metodo di Sundberg », quando le condizioni si avvicinino abbastanza a quelle assunte nello schema; in particolare, quando la distanza dei lati di ritorno della corrente inducente dal punto di misura sia abbastanza grande rispetto alla profondità di non portare perturbazione (ove non se ne voglia tener conto separatamente nel calcolo), e quando la conduttività degli strati superiori del suolo non sia tale da esercitare una azione di schermo efficace e dannosa sul campo elettromagnetico.

Fisica. — *Sopra la meccanica ondulatoria di un atomo alcalino nel campo elettrico.* Nota II di F. Rasetti, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

In una Nota [2] precedente abbiamo svolto la teoria della perturbazione dovuta a un campo elettrico esterno sopra un atomo di un metallo alcalino, spingendoci fino alla seconda approssimazione. Ora vogliamo vedere come questo calcolo si possa svolgere effettivamente per casi particolari, in modo da determinare numericamente la variazione di energia dell'atomo nel campo, e quindi l'effetto Stark e la costante dielettrica.

Prendiamo come caso concreto il litio, nel quale i termini che entrano in considerazione hanno un quanto totale più piccolo che negli altri alcalini, e pertanto si prestano più facilmente al calcolo.

Gli autovalori saranno dati dalla 1 (3). Se poniamo $A = 0.242$ otteniamo con molta esattezza i termini S, come mostra la seguente tabella:

(1) Nella seduta del 6 maggio 1928.

(2) F. Rasetti, questi « Rendiconti », fasc. n. 10, vol. VII, serie 6ª (1928), p. 839. I riferimenti alle formole contenute in questa Nota sono indicati con un 1 seguito dal numero tra paretesi.

	Calcolato	Osservato
2 S	0.3964	0.3961
3 S	0.1493	0.1483
4 S	0.0776	0.0773
5 S	0.0475	0.0473
6 S	0.0320	0.0319

Analogamente per la serie P, ponendo A = 0.12

	Calcolato	Osservato
2 P	0.2601	0.2606
3 P	0.1143	0.1145
4 P	0.0639	0.0638
5 P	0.0407	0.0407
6 P	0.0282	0.0282

Le autofunzioni si otterranno da 1 (4) e 1 (2), introducendovi questi valori della costante A. Se normalizziamo in modo che sia

$$\int_{\tau} \psi^2 \, d\tau = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi^2 r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = 1$$

e poniamo

$$\omega_{kl} = 2\sqrt{-\frac{8\pi^2 m E_{kl}}{h^2}} \quad ; \quad \alpha = \sqrt{1 - 4A} \quad ; \quad \beta = \sqrt{9 - 4A} \quad ; \quad \gamma = \sqrt{25 - 4A}$$

troviamo, per le prime autofunzioni ψ_{klm}, le espressioni:

$$(1\,S) \qquad \psi_{01} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_{01}^{\frac{\alpha+2}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\alpha+2)}} r^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{\omega_{01}}{2} r}$$

$$(2\,S) \qquad \psi_{02} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha+3}} \frac{\omega_{02}^{\frac{\alpha+2}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\alpha+2)}} r^{\frac{\alpha-1}{2}} \left(1 - \frac{\omega_{02} r}{\alpha+1}\right) e^{-\frac{\omega_{02}}{2} r}$$

$$(2\,P) \qquad \psi_{11m} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\omega_{11}^{\frac{\beta+2}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\beta+2)}} r^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\frac{\omega_{11}}{2} r} \times \begin{cases} \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \cos\varphi \end{cases}$$

$$(3\,S) \qquad \psi_{03} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\alpha+2}}{\sqrt{2\alpha+10}} \frac{\omega_{03}^{\frac{\alpha+2}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\alpha+2)}} r^{\frac{\alpha-1}{2}} \left(1 - \frac{2\omega_{03} r}{\alpha+1} + \frac{\omega_{03}^2 r^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right) e^{-\frac{\omega_{03}}{2} r}$$

$$(3\,P) \qquad \psi_{12m} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\beta+1}{\sqrt{\beta+3}} \frac{\omega_{12}^{\frac{\beta+2}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\beta+2)}} r^{\frac{\beta-1}{2}} \left(1 - \frac{\omega_{12} r}{\beta+1}\right) e^{-\frac{\omega_{12}}{2} r} \times \begin{cases} \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \cos\varphi \end{cases}$$

$$(3\,D)\quad \psi_{21m} = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{\pi}} \frac{\omega_{21}^{\frac{\gamma+2}{2}}}{\sqrt{\Gamma(\gamma+2)}} r^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-\frac{\omega_{21}}{2}r} \times \begin{cases} \sin^2\vartheta \sin 2\varphi \\ 2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(3\cos^2\vartheta - 1) \\ 2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\cos 2\varphi\,. \end{cases}$$

Abbiamo indicato tra parentesi la nomenclatura ordinaria del termine con i valori indicati di k e di l.

Dobbiamo ora calcolare la perturbazione che gli autovalori e le autofunzioni subiscono per la presenza del campo esterno, che aggiunge alla energia un termine

$$FV = -eFx = -eFr\cos\vartheta.$$

Cominciamo a calcolare la perturbazione dello stato fondamentale, 2S. L'autovalore corrispondente E_{02} è semplice. Le sole V_{ks} diverse da zero saranno quelle corrispondenti a combinazioni con gli stati P (principio di selezione del quanto azimutale). Avremo dunque, conformemente alla 1 (12)

$$\eta_{02} = e^2 F^2 \sum_{s}^{\infty} \frac{\left[\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r\cos\vartheta\cdot\psi_{02}\psi_{1s}\, r^2\sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta\right]^2}{E_{02} - E_{1s}}.$$

Gli integrali che figurano nei successivi termini di questa serie vanno rapidamente complicandosi; ma d'altra parte, si può vedere che un valore abbastanza approssimato si ha prendendo soltanto il primo termine ($s = 1$); ciò che corrisponde al fatto ben negli alcalini l'intensità della prima riga della serie principale è assai più grande di quella di tutte le altre sommate insieme (compreso anche lo spettro continuo oltre il limite della serie; il che ci autorizza a non tener conto degli autovalori positivi continui e delle relative autofunzioni).

Introducendo le espressioni effettive trovate per ψ_{02} e ψ_{11}, risulta

$$\eta_{02} = -1.4\cdot 10^{-23} F^2.$$

Per E_{11} (stato 2P) la cosa è un poco più complicata, avendosi una degenerazione di ordine tre. Ma è facile vedere che i termini fuori della diagonale principale nella matrice di perturbazione H_{ks} sono già nulli. I rimanenti, conformemente a 1 (13) sono dati da

$$e^2 \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{E_{11} - E_{0i}} \left[\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r\cos\vartheta\,\psi_{11m}(r,\vartheta,\varphi)\,\psi_{0i}(r)\, r^2\sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta\right]^2 +$$

$$+ e^2 \sum_{1}^{\infty}\sum_{-2}^{+2}{}_{m'} \frac{1}{E_{11} - E_{2i}} \left[\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r\cos\vartheta\,\psi_{11m}(r,\vartheta,\varphi)\,\psi_{2im'}(r,\vartheta,\varphi)\, r^2\sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta\right]^2$$

dove $m = 0, +1$.

La prima serie dà termini non nulli soltanto per $m = 0$; conserviamo solo il primo, che, a meno del segno, è η_{02} già calcolato, e il secondo, contenente ψ_{03}.

La seconda serie dà termini non nulli soltanto quando $m = m'$. Anche qui conserviamo il primo, che è triplo, corrispondentemente a $m = m' = 0, \pm 1$. I due integrali con $m = m' = \pm 1$ sono uguali, quello con $m = m' = 0$ è diverso; ciò significa che la degenerazione non è ancora completamente tolta dal campo esterno.

Eseguendo il calcolo numerico con queste semplificazioni, si trovano per i due valori

$$m = 0 \qquad \eta_{11} = -0.7 \cdot 10^{-23} F^2$$

$$m = \pm 1 \qquad \eta'_{11} = -0.4 \cdot 10^{-23} F^2 .$$

Infine, per la riga 2 S-2 P, λ 6708, risulta una scissione in due componenti una parallela ($\Delta m = 0$) e una ortogonale ($\Delta m = \pm 1$), spostate dalla posizione iniziale (in numeri d'onda) di

$$\Delta\nu_p = \frac{1}{hc}(\eta_{11} - \eta_{02}) = 5 \cdot 10^{-8} F^2$$

$$\Delta\nu_o = \frac{1}{hc}(\eta'_{11} - \eta_{02}) = 3.5 \cdot 10^{-8} F^2 .$$

Mancano dati sperimentali per verificare questo risultato. In ogni modo, si può osservare che l'ordine di grandezza degli spostamenti è quello trovato da Ladenburg [1] sulle righe D del sodio in inversione.

Mostriamo per ultimo come, dalle formule da noi ottenute, si possa calcolare immediatamente la costante dielettrica del vapore di litio. Nello stato fondamentale, l'autofunzione perturbata dal campo esterno (in prima approssimazione) sarà, conformemente a 1 (7) e 1 (10):

$$\psi^*_{02} = \psi_{02} - eF \sum_1^\infty{}_i \frac{\int_\tau x\psi_{02}\psi_{1i}\,d\tau}{E_{02} - E_{1i}} \psi_{1i}$$

e la densità elettrica in prima approssimazione:

$$e\psi^{*2}_{02} = e\psi^2_{02} - 2e^2 F \sum_1^\infty{}_i \frac{\int_\tau x\psi_{02}\psi_{1i}\,d\tau}{E_{02} - E_{1i}} \psi_{02}\psi_{1i} .$$

Di qui si deduce il momento elettrico

$$\mu = e\int_\tau x\psi^{*2}_{02}\,d\tau = -2e^2 F \sum_1^\infty{}_i \frac{\left[\int_\tau x\psi_{02}\psi_{1i}\,d\tau\right]^2}{E_{02} - E_{1i}} = -\frac{2\eta_{02}}{F}$$

(1) R. Ladenburg, «Z. S. f. Phys.», 28; 51, 1924.

come si sarebbe potuto scrivere senz'altro per la relazione generale fra momento e energia; e infine la polarizzabilità

$$P = \mu/F = -2\eta_{02}/F^2$$

e la costante dielettrica

$$\varepsilon = 1 + 4\pi NP = 1 + 3.5 \cdot 10^{-23} N$$

dove N rappresenta la densità degli atomi.

Anche qui mancano dati sperimentali precisi; della costante dielettrica dei vapori dei metalli alcalini si sa soltanto l'ordine di grandezza, che coincide con quello trovato.

Fisica. — *Sulla larghezza di alcune righe dello spettro del* Hg [1]. Nota di A. CARRELLI, presentata [2] dal Socio M. CANTONE.

In questa Nota si espongono i primi risultati di uno studio sulla larghezza di alcune righe delle serie spettrali del Hg. Tale grandezza, definita come di consueto quale valore della differenza $\Delta\lambda$ fra i valori di λ corrispondenti alla metà dell'ordinata massima nella curva di distribuzione dell'energia della riga considerata, può essere un importante elemento di differenziazione delle righe delle varie serie. La larghezza infatti è notevolmente influenzata da varie cause. È noto un allargamento dovuto all'effetto di smorzamento (natürlicher Breite), quello dovuto ad effetto Dòppler, quello dovuto ad un'azione di risuonanza dei vari atomi ed infine allargamento dovuto ad effetto Stark interatomico o effetto di pressione. In questo lavoro, nelle condizioni sperimentali attuate v'è ragione di credere che l'azione principale dell'allargamento è dovuto all'effetto Stark interatomico e lo scopo della ricerca è appunto d'individuare il diverso comportamento delle varie righe per risalire al diverso comportamento delle varie orbite rispetto alle perturbazioni dipendenti dai campi elettrici interatomici.

Per la determinazione della larghezza si è fatto ricorso al metodo dell'interferometro di Fabry e Buisson a specchi spostabili, adoperato dagli stessi AA. per il medesimo scopo. L'apparecchio adoperato era della Casa Hilgher. Si ottenevano frange circolari iridescenti le quali venivano proiettate sulla fenditura di uno spettroscopio Hilger per lo spettro visibile a visione diretta; in modo che nel campo di questo si osservavano le righe spettrali delle sorgenti ed ognuna di queste era solcata da linee scure rappresentanti le sezioni degli anelli interferenziali oscuri mediante la fenditura

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Napoli.
(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

che si trovava nel piano focale della lente di proiezione ed allineata secondo un diametro. La visibilità di queste frange, data dalla relazione

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

è funzione sia della larghezza $\Delta\lambda$ della riga, sia della distanza X dei due specchi secondo la equazione seguente (1)

$$\left(\log_e \frac{2}{V}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \cdot 2X.$$

Conosciuto quindi il valore della visibilità V per la quale praticamente scompare l'effetto di contrasto delle righe nere e luminose per l'occhio o per la lastra fotografica, si spostano gli specchi fino ad una distanza X per la quale la visibilità ha raggiunto tale valore, e quindi può ricavarsi $\Delta\lambda$ dalla relazione scritta. Il valore di V per cui praticamente le frange scompaiono non è noto in maniera precisa, ma si concorda nel ritenerlo uguale a 0.025; d'altra parte nelle misure che seguono si è tenuto conto principalmente del valore relativo della larghezza delle varie righe, quindi le incertezze che possono presentarsi nell'assegnare il valore minimo a V, tenuto anche conto del modo come compare V nella relazione scritta, si fanno risentire in misura molto attenuata sul valore assoluto della larghezza che nelle misure da noi riportate non ha grande importanza avendo di mira il diverso comportamento delle varie righe. In tali condizioni la larghezza sarà data dall'equazione:

$$\Delta\lambda = 0.666 \frac{\lambda^2}{2X}.$$

Si sono quindi determinate le X caratteristiche di undici righe dello spettro visibile del *Hg*. La sorgente era costituita da una lampada di quarzo tipo Hereuss attraversata da una corrente di 3 A. Si proiettava sulla fenditura la parte più brillante dell'arco e le misure sono quindi relative alla zona dell'arco caratterizzata dalla maggiore densità di corrente. In base a numerose misure si è ottenuta la seguente tabella nella quale sono riportate le lunghezze d'onda, le orbite di partenza e di arrivo, e i valori medi delle distanze X ottenute come media di varie misure (2).

(1) Lord Rayleigh, « Phil. Mag. », t. 29, p. 224.

(2) Nella tabella si è seguíta la notazione di Wentzel invece di quella di Paschen.

Orbite	Lunghezze d'onda	X in cm.
$2^3S_1 - 2^3P_0$	4046	0.38
$2^3S_1 - 2^3P_1$	4358	0.40
$2^3S_1 - 2^3P_2$	5460	0.80
$2^3S_1 - 5^1P_1$	6072	0.30
$2^1S_0 - 6^1P_1$	6234	0.35
$2^3P_2 - 2^1S_0$	4078	0.37
$2^1P_1 - 3^1S_0$	4916	0.47
$2^1P_1 - 3^1D_2$	5790	0.65
$2^1P_1 - 3^3D_1$	5769	0.68
$2^1P_1 - 4^1D_1$	4347	0.21
$2^1P_1 - 4^3D_1$	4339	0.21

Dall'esame delle righe analizzate possiamo quindi esaminare l'effetto di allargamento in funzione dei vari valori del numero quantico principale n, del numero quantico azimutale k, e del numero quantico interno j. Per ciò che riguarda il numero quantico principale n in base alla teoria dell'effetto Stark [1] può prevedersi in generale che l'aumento di esso porta ad un aumento della larghezza delle righe, come del resto è accertato in modo indubbio nel caso dell'H. Aumentando il numero n e quindi la dimensione delle orbite si fa più cospicua l'azione perturbatrice dei campi esterni, il che porta ad una più grande variazione dell'energia dell'orbita dal valore teorico, e quindi un allargamento della riga.

La variazione di k è di grande importanza per l'effetto Stark delle orbite non idrogenoidi. In effetti solo per l'idrogeno si ha un'azione del primo grado del campo elettrico; nel caso in cui l'orbita non è più idrogenoide l'effetto Stark è quadratico e si riduce soltanto ad uno spostamento della riga. Tale spostamento dipende da n e dal valore di k. Può dirsi che l'effetto Stark per tali orbite dipende dal valore di k e principalmente dal valore del difetto quantico (quanten-defekt) definito dalla relazione

$$\delta = n - n^*$$

dove n è il numero quantico vero e n^* il numero quantico effettivo. Mancano invece ricerche particolari sull'azione che ha su tale effetto il numero quantico interno j.

(1) Becker, «Zeit. für Phys.», Bd. 9, p. 332 (1922); Thomas, «Zeit. für Phys.», Bd. 34, p. 586 (1925).

Ora, dal materiale sperimentale raccolto, si ricava che all'incirca la larghezza delle righe varia da un minimo di 0.013 Å a un massimo di 0.05 Å. Come causa della larghezza delle righe intervengono le variazioni ΔW delle orbite di partenza e di arrivo, conviene quindi riferirsi per le considerazioni teoriche ai $\Delta\nu$ di ogni singola riga, e si può assumere di conseguenza come misura relativa dei vari $\Delta\nu$ direttamente le quantità inverse alle X misurate. Le righe che appaiono più nette sono quelle caratterizzate da $2^3S_1 - 2^3P_2$ e $2^1P_1 - 3^3D_1$; ma una grande variazione si nota per varie righe del tripletto per cui due delle tre di questo sono più larghe di righe relative ai salti 2P — 3D, e cioè righe caratterizzate da variazioni $7_1 - 7_2$ sono più influenzate di quelle individuate da $7_2 - 6_3$. Dei tre livelli $^3P_0$, $^3P_1$, e $^3P_2$ risulta meno sensibile il livello $^3P_2$ quello cioè di più elevato numero quantico j e di minore energia. Per decidere se questo risultato è generale, bisognerà analizzare altri tripletti dello stesso tipo (tripletti normali) e inoltre quelli anomali (verkehrte-multiplett). Non si nota una grande differenza fra tripletti e singoletti ($2^1P_1 - 3^1D_2$, X = 0.65) ($2^1P_1 - 3^3D_1$, X = 0.68) e ($2^1S_0 - 2^3P_1$, X = 0.37) ($2^3S_1 - 2^3P_1$, X = 0.40) ma almeno per gli stati 2S e 3D può dirsi che i tripletti sono un poco più sottili dei singoletti. Risulta inoltre, anche tenuto conto della differenza esistente fra i due tipi di livelli i singoletti e i tripletti, dall'esame delle righe 4916 e 5769 che lo stato 3S è più influenzato dello stato 3D. Ma ciò non deve interpretarsi come un'eccezione al risultato già riportato che gli stati S sono meno influenzabili degli stati D perchè in molti i due stati 3S e 3D corrispondono alle orbite 8_1 e 6_3 e l'effetto Stark è molto più influenzato dal numero n che dal numero k (1).

È interessante notare come passando dall'orbita 6_3 alla 7_3 (stati 3D e 4D) si ha una variazione di larghezza notevole (X varia da 6.8 a 2.1 m.m.) il che sta a rappresentare il carattere quasi idrogenoide di questi livelli. Consideriamo invece le orbite 6_2, 7_2, 8_2, 9_2, ecc.; di queste, in base alle righe studiate, noi possiamo avere qualche informazione solo relativamente alle 6_2, 9_2, 10_2 (date da 2P, 5P e 6P); passando da 6_2 a 9_2 anche prendendo in esame il livello 2^3P_0 che è il più sottile si va da X = 0.80 a X = 0.30 e cioè si nota una variazione di larghezza al crescere di n molto più piccola di quella notata per i livelli D e ciò per il carattere nettamente non idrogenoide del livello P.

Ma è di grande importanza l'osservare il comportamento delle due righe 6072 e 6232. Abbiamo già stabilito che 2^3S_0 è più sottile di 2^1S_0 quindi dai valori di X sicuramente risulta che 5^1P_1 è più influenzata di 6^1P_1, mentre per la variazione di n bisognerebbe aspettarsi un comportamento

(1) Per i metalli alcalini si ha in effetto una variazione di W proporzionale alla sesta potenza del numero n, mentre nella stessa relazione k non compare che a secondo grado.

opposto. La spiegazione di tale fatto può aversi qualora si consideri che gli stati m^1P_1 del *Hg* formano serie di livelli anomala; essa cioè è una di quelle che appartengono alla categoria delle orbite penetranti parzialmente negli stati interni dell'atomo. Le orbite mP sono di quelle per le quali per valori bassi di n l'orbita è tutta esterna e a partire da un certo livello in poi l'orbita penetra in uno degli strati già formati. Ne risulta adunque un certo gruppo di orbite per le quali si ha questa penetrazione negli strati inferiori, il che porta di conseguenza che il difetto quantistico al variare di n presenta un andamento anomalo come risulta dal seguente specchio:

n	2	3	4	5	6	7	8
Δ	0.091,	0.033,	0.129,	*0.479*,	*0.899*,	0.979,	0.997.

Le orbite a cui si riferiscono le misure fatte sono appunto quelle per le quali $n = 5$ e 6 e per l'aumentato valore di Δ da 5P a 6P si ha come risultato che la larghezza della $2^3S_0 - 5^1P_1$ è maggiore della $2^3S_0 - 6^1P_1$. In tutto il materiale raccolto rimane soltanto un punto oscuro: la maggiore larghezza della $2^3P_2 - 2^1S_0$ rispetto alla $2^1P_1 - 3^1S_0$. Questo fatto potrebbe spiegarsi ammettendo un allargamento del livello 2^3P_2 rispetto al livello 2^1P_1, quantunque pei livelli D e S i tripletti si sono mostrati più sottili dei singoletti. Tale allargamento potrebbe mascherare l'allargamento del livello 3S rispetto al livello 2S. Da qui deriva che la linea 2536 dovrebbe essere più larga della linea 1849.

Concludendo: dall'esame della larghezza di undici righe del *Hg* è stato ricavato quale andamento presenta la larghezza in funzione del numero j e del numero k, specie relativamente alla serie anomala mP.

Fisica. — *Sul nuovo fenomeno di diffusione.* Nota di A. Carrelli, presentata dal Socio M. Cantone.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla separazione con l'etere del torio dall'uranio* [1]. Nota di P. Misciattelli, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Molto si è discusso sopra la separazione con etere dei nitrati di uranio e torio (o del suo isotopo uranio X). Nella letteratura si trovano opinioni disparate sull'argomento, e mentre alcuni consigliano la seperazione con etere altri la sconsigliano come del tutto incerta.

Questa disparità di risultati noi riteniamo debba attribuirsi alle diverse condizioni in cui si sono messi i varii sperimentatori e all'influenza che esercita l'acqua contenuta nell'etere o presente nei sali sotto forma di acqua di cristallizzazione.

Per chiarire la questione abbiamo eseguito le ricerche esposte in questa Nota.

Nel 1900 [3] Sir William Crookes trovò che agitando con etere il nitrato di uranio si ottiene una soluzione che lasciata a sè si separa in due strati. Il nitrato di uranio che si riottiene dalla soluzione eterea non presenta più la sua attività β, ma questa si ritrova invece nello strato acquoso. Questo fatto, variamente interpretato sulle prime, portò alla scoperta dell'uranio X.

Più tardi F. Soddy e Rutherford e Gries [4] ritornarono sull'argomento confermando i risultati di Sir William Crookes.

Nel 1908, accertata l'isotopia dell'uranio X e del torio, Boltwood [5] impiegò il metodo all'etere per la separazione dell'uranio in molti minerali contenenti uranio e torio. Ad esso ricorsero pure Soddy e Pirret in Inghilterra [6] e M.lle Gledisch in Francia [7], con risultati però non concordanti. Mentre, infatti, i primi due ritennero l'estrazione con etere pressocchè inutile, ottenendosi gli stessi risultati sia che la si impiegasse o no, M.lle Gledisch affermò di non aver mai osservato che il nitrato di torio si disciogliesse nell'etere quando il residuo era ben secco e l'etere puro ed anidro.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) W. Crookes, « Chemical News » 1900, *81*, p. 253; Id. « Proc. Royal Society », LXVI, p. 409.

(4) F. Soddy, « Trans. Chem. Soc. » I, XXXI, p. 460 (1902); Rutherford e Gkies., « Phil. Mag. », 1902.

(5) Boltwood, « Am. Journal Of. Sc. » XXV, p. 269, 1908.

(6) Soddy and Pirret, « Phil. Mag. » XX, p. 345, 1910.

(7) Gledisch, « Le Radium » VIII, p. 256, 1911.

Nel 1913 Alexander Fleck [1] è tornato sull'argomento stabilendo la proporzione in cui uranio e torio si disciolgono nell'etere, sia quando i loro sali sono anidri, sia quando contengono acqua. Egli così ha trovato che la separazione è completa quando solo piccole quantità di torio sono presenti; e precisamente esso non passerebbe affatto nel liquido etereo quando la sua proporzione è inferiore al 10 %.

La miscela che Fleck ha adoperato per l'estrazione era fatta con un volume di acqua e dieci di etere. Queste condizioni si riproducono nella separazione dell'uranio X, inquantochè allora si ha relativamente grande quantità di etere rispetto all'acqua, e un eccesso di uranio rispetto all'elemento 92 presente. In queste condizioni quest'ultimo non dovrebbe essere disciolto dall'etere, e difatti l'uranio X non si discioglie. Se invece nitrato di torio e di uranio sono presenti in parti uguali si può avere, sempre secondo il Fleck, anche il torio nello strato etereo. Cosicchè per tre successive estrazioni egli ebbe frazioni in cui vi era attività β di 10.94, 6.81 e 2.50 divisioni per minuto, e la concentrazione dell'uranio X estratto dall'etere era rappresentata da 129.7 divisioni per minuto per gr. di ossido di torio, mentre quella dell'uranio X che rimaneva indisciolta era di 126.9 divisioni per minuto per gr. di ossido di torio.

Per modo che resta ancora da stabilire in che condizioni i risultati del Fleck sono riproducibili e rimane da definire la causa delle apparenti contraddizioni tra i diversi autori. A questo scopo ho creduto opportuno misurare la solubilità in etere dei sali $UO_2(NO_3)_2$ e $Th(NO_3)_4$ a diverse temperature.

Queste ricerche mi hanno permesso, come si vedrà, di chiarire entro quali limiti l'etere può essere adoperato per effettuare la separazione.

Le solubilità sono state determinate agitando le soluzioni in presenza dei sali in una grossa provetta immersa in un Dewar con ghiaccio fondente, o in un termostato mantenuto alle temperature studiate.

Per determinare la composizione delle soluzioni sature si prelevava il liquido pipettandolo e versandolo in un pesafiltri che veniva rapidamente pesato. Il corpo di fondo si estraeva con un cucchiaio (nel quale erano stati praticati numerosi piccoli fori per far gocciolare il liquido), e si versava in un pesafiltri dove veniva pesato.

La soluzione pesata veniva aggiunta di acqua e posta in un apparecchio per distillare l'etere. L'acqua si aggiungeva per impedire la ben nota trasformazione dell'etere ad acido mesossalico per azione del nitrato di uranio che si trasforma in nitrato uranoso, reazione che può portare ad esplosione [2]. Questa operazione veniva fatta fino a distillazione completa dell'etere.

(1) A. Fleck, «Journal Chemical Society», 103, I, p. 384, 1913.
(2) Vedi F. Soddy, *Chemistry of Radio Elements*.

Alla soluzione posta in un beker si aggiungevano poi poche goccie di NH_3 fino a debole precipitato che veniva ridisciolto per aggiunta di HNO_3. Alla soluzione così ottenuta, debolmente acida e ben fredda, si aggiungeva a goccia a goccia acido ossalico bollente avendo cura di non metterne troppo, un eccesso potendo nuocere alla precipitazione quantitativa dell'uranio. Dopo 24 ore l'ossalato di torio veniva raccolto su di un filtro, seccato in stufa, calcinato e pesato in crogiolo di platino fino a peso costante.

Il filtrato veniva riscaldato all'ebollizione e precipitato con NH_3. L'ura-

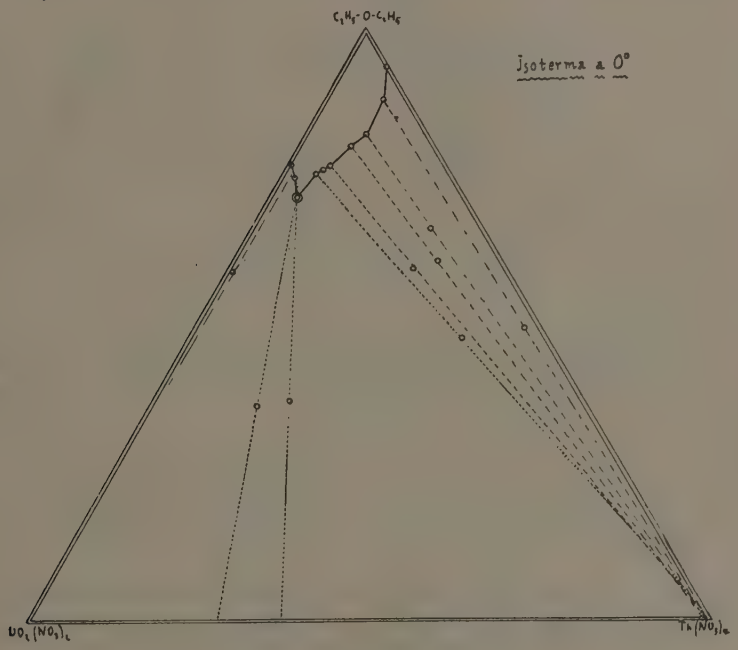


Fig. 1.

nato di ammonio dopo digestione veniva raccolto su un filtro, seccato, calcinato, e pesato fino a peso costante come ossido di urano nero (U_3O_8).

Il filtrato veniva portato a secco per assicurarsi della precipitazione completa dell'uranio. Se vi era qualche residuo dato da quantità piccolissime di uranio che non era precipitato, veniva calcinato ed aggiunto al primo.

I risultati ottenuti per le solubilità a 0° sono esposti nella tabella seguente e riprodotti nella fig. 1.

Comp.ne della soluzione			Comp.ne del corpo di fondo		
$UO_2(NO_3)_2$	$Th(NO_3)_4$	Etere	$UO_2(NO_3)_2$	$Th(NO_3)_4$	Etere
22 %	0 %	78 %	—	—	—
22.5	1.02	76.48	40.1 %	0.52 %	59.38 %
24	3.5	72.57	48.3	15.6	36.1
24	3.43	72.50	43	20	37
19.2	4.5	76.30	12	40	48
18	5	77	—	—	—
16.5	5.6	77,90	13	27	60
12.2	7	81	9	30	61
8.2	8.3	82.5	7	26	67
3	8	89	1.8	48.5	39
0	5.8	94.2	—	—	—

Come si vede, l'aggiunta di piccole quantità di torio aumenta la solubilità dell'uranio. La soluzione satura dei due sali contiene 24 % di uranio e 3.4 % di torio.

Per vedere come la composizione della soluzione satura dei due sali varia con la temperatura si è eseguita una serie di misure che è qui sotto riportata.

Temp.	Comp.ne della soluzione			Comp.ne della soluzione		
	$UO_2(NO_3)_2$	$Th(NO_3)_4$	Etere	$UO_2(NO_3)_2$	$Th(NO_3)_4$	Etere
0°	24 %	3.43 %	72.57 %	48.3 %	15.6 %	36.1 %
16	17.7	1.7	80.60	28.2	20.4	51.4
19	10.5	0.4	89.10	39.2	15	46.80
20	8.78	—	91.22	15.5	26	58.50
22	8	—	92	13.2	23	63.80
25	7.37	—	92.63	12.2	30	57.80

I risultati sono riassunti nel diagramma della fig. 2.

Come si vede dalla tabella [e dalla figura] alla temperatura di 20° la soluzione satura di nitrato di uranile non è più capace di sciogliere nitrato di torio ed il punto che la rappresenta viene a trovarsi sul lato del triangolo.

Si è creduto opportuno studiare l'isotema a questa temperatura, e si sono avuti i risultati riportati nella tabella e riprodotti nella fig. 3.

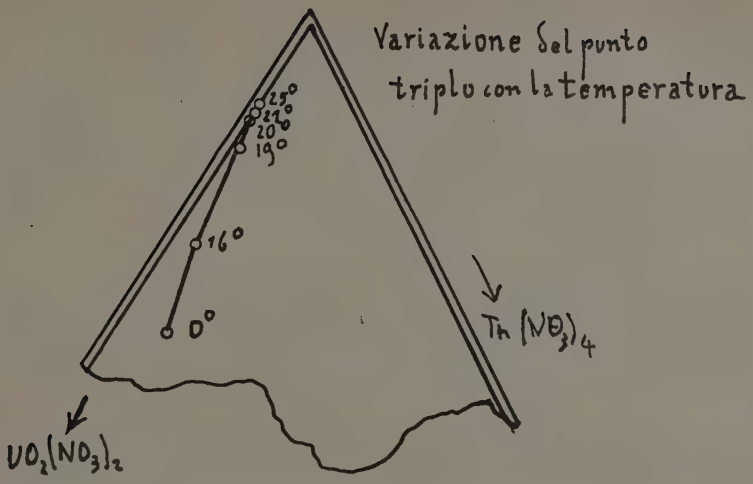

Variazione del punto
triplo con la temperatura
25°
22°
20°
19°
16°
0°
Th (NO3)4
UO2(NO3)2

Fig. 2.

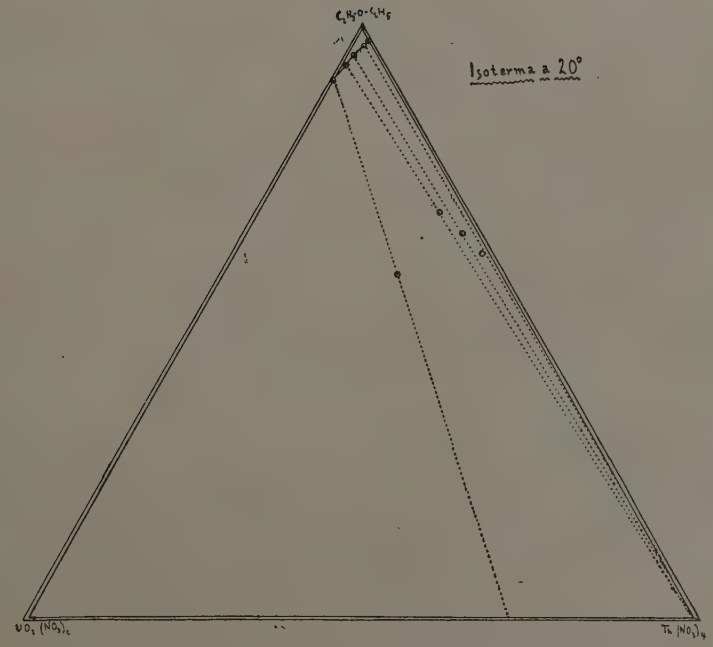

Isoterma a 20°

Fig. 3.

Comp.ne della soluzione			Comp.ne del corpo di fondo		
$UO_2(NO_3)_2$	$Th(NO_3)_4$	Etere	$UO_2(NO_3)_2$	$Th(NO_3)_4$	Etere
8.78 %	—	91.22 %	15.5 %	26 %	58.50 %
5.5	0.5	94	4.1	27	68.90
3.1	1	95.9	2.1	32.2	65.70
—	1.4	98.6	—	—	—
—	1.6	98.4	—	—	—

Da quanto precede si vede che alla temperatura di 20°, quando si ha a che fare con etere anidro e con sali anidri (seccati in stufa a 120°), una separazione completa del nitrato di urianio dal nitrato di torio può essere fatta qualora si operi in modo che la soluzione eterea diventi satura di sale di uranio a quella temperatura.

L'aumento della solubilità del torio col diminuire della temperatura potrebbe forse attribuirsi alla formazione di complessi, e per l'accertamento di questi sono in corso ricerche sugli spettri di assorbimento.

Chimica. — *Spinelli del cobalto trivalente: cobaltito cobaltoso e cobaltito di zinco* [1]. Nota di G. Natta e M. Strada, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Sono indicati col nome generico di spinelli, come è noto, i composti tra ossidi di metalli bivalenti ed ossidi di metalli trivalenti, che rispondono alla formula generale $Me^{++}O\ Me_2^{+++}O_3$, e che cristallizzano nel sistema cubico nella classe esacisottaedrica, come lo spinello propriamente detto $MgAl_2O_4 = MgO \cdot Al_2O_3$.

Si conoscono spinelli di numerosi metalli bivalenti, magnesio, zinco, ferro (ferroso), nichelio, manganese (manganoso), cadmio, di diversi metalli trivalenti: alluminio, cromo (cromico), ferro (ferrico).

Non tutti i possibili composti della formula $Me^{++}O\ Me_2^{+++}O_3$ possono però ritenersi spinelli, in quanto la possibilità di cristallizzare nel sistema cubico è subordinata a certe relazioni che debbono sussistere tra i diametri degli ioni metallici. È per questa ragione che non si conoscono spinelli di metalli alcalino terrosi i cui ioni bivalenti hanno un diametro atomico superiore ai 2.10 Å, a differenza degli ioni manganese, ferro, nichelio, zinco,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

magnesio, cadmio bivalenti, che posseggono tutti diametri ionici inferiori e compresi tra 1.50 e 2.10 Å.

Si hanno anche spinelli pei quali tanto l'ione bivalente che quello trivalente provengono dallo stesso elemento: la magnetite ne dà un esempio. Uno di noi ha anche dimostrato [1] che l'ossido salino di cobalto Co_3O_4 è isomorfo con la magnetite e cristallizza come questa nello stesso reticolo degli spinelli, a differenza dell'ossido salino di manganese, che, pur avendo un reticolo che presenta molte analogie con quelli degli spinelli, cristallizza nel sistema tetragonale.

Tra i composti del cobalto bivalente, corrispondenti alla formula $CoMe_2O_4$, noi riteniamo molto probabile, date le dimensioni dell'ione Co^{++}, che qualcuno (come il ferrito e l'alluminato cobaltosi) cristallizzino pure nella classe degli spinelli, non se ne ha però nessun accenno nella letteratura. La nostra supposizione si basa sulle dimensioni dell'ione cobalto bivalente (intermedie a quelle degli ioni Fe^{++} e Mg^{++}).

Siccome d'altro lato le dimensioni del cobalto trivalente non possono essere molto diverse da quelle del ferro trivalente (come si può dedurre dall'esame delle celle elementari del Fe_3O_4 e del Co_3O_4, e come si può prevedere considerando che la contrazione del raggio atomico per la cessione di un'ulteriore elettrone valenza è all'incirca uguale per tutti gli ioni di egual carica) è probabile, data l'esistenza di spinelli ferrici, che anche gli eventuali composti dell'ossido cobaltico con degli ossidi di ioni bivalenti, quali lo zinco ed il magnesio, abbiano pure la struttura degli spinelli. La instabilità dell'ossido cobaltico, che allo stato puro si decompone già a temperatura di poco superiore a 250°, come abbiamo dimostrato in una precedente Nota [2], farebbe però ritenere difficile od impossibile la preparazione di spinelli del cobalto trivalente, se non ne rendesse possibile l'esistenza la grande stabilità che posseggono in genere tutti gli spinelli.

Noi abbiamo ottenuto il composto $ZnO \cdot Co_2O_3$ evaporando una soluzione contenente due molecole di nitrato cobaltoso per ognuna di nitrato di zinco e calcinando il residuo sino ad 800°.

In questo modo l'ossido cobaltico, che si forma come prima fase instabile nella decomposizione a bassa temperatura del nitrato, si combina, appena formato, con lo zinco per dare lo spinello stabile, ed allora il cobalto trivalente non viene più ridotto, nemmeno per calcinazione a temperature molto alte.

Il meccanismo della formazione del cobaltito di zinco è lo stesso che porta, nella decomposizione pirogenica del nitrato puro, alla formazione del cobaltito cobaltoso, avendo noi dimostrato che nella decomposizione del nitrato non si ottiene mai, neppure a bassa temperatura, dell'ossido cobaltico puro, ma sempre dell'ossido salino.

(1) G. Natta e Schmid, «Rend. R. Acc. Lincei», IV, 6 (1926), 145.
(2) G. Natta e M. Strada, «Gazz. Chim. Ital.», 48 (1928).

Lo spinello di zinco appare come una massa dura, compatta, specialmente se scaldata oltre i 1000°. di colore verde cupo, quasi nero.

Per stabilire la sua costituzione e dimostrare che non si tratta di una miscela meccanica o di una soluzione solida di ossido di zinco e di ossido salino di cobalto, abbiamo determinato analiticamente l'ossigeno attivo con il metodo di Bunsen per i perossidi e nella soluzione ottenuta abbiamo separato il cobalto come cobaltinitritopotassico, lo zinco come fosfato, determinandoli poi l'uno come cobalto metallico, l'altro come pirofosfato.

Il rapporto tra il cobalto e lo zinco non ha particolare importanza in quanto dipende solo dalle quantità di nitrati usati nella preparazione del composto; quello che invece ha interesse è il rapporto tra ossigeno attivo e cobalto che permette di stabilire la valenza di quest'ultimo.

In base all'analisi eseguite sui prodotti provenienti da diverse preparazioni si è sempre trovato che il cobalto è tutto presente come cobalto trivalente. Nella seguente tabella sono riportati i risultati dell'analisi di un prodotto calcinato ad 800°. L'ossigeno non attivo è stato calcolato in base alla percentuale trovata di zinco e di cobalto.

Tabella I.

	% trovati	% teorici
Co	47.15	47.696
Zn	25.70	26.435
Ossigeno attivo	6.39	6.467
Ossigeno non attivo . . .	19.29	19.402
Totale . . .	98.53	100.000

Viene così dimostrato che il prodotto considerato corrisponde alla formula $Zn\,Co_2O_4$, e che non è una miscela o soluzione solida di ZnO e Co_3O_4; che non sia una miscela di ZnO e Co_2O_3 lo esclude la instabilità del Co_2O_3 alla temperatura a cui è stato ottenuto. Per dimostrare poi che non è una soluzione solida (*a priori* poco probabile) di ZnO in Co_2O_3, casualmente corrispondente a quella composizione, abbiamo analizzato il prodotto ottenuto per calcinazione a più bassa temperatura di una miscela di una molecola di nitrato di zinco con quattro molecole di nitrato di cobalto. L'ossigeno attivo risultava notevolmente inferiore a quello che risulterebbe se tutto il cobalto fosse presente nella forma trivalente e circa uguale a quello che si calcola per una miscela di $Zn\,Co_2O_4$ e di Co_3O_4. Vedremo in seguito la conferma röntgenografica della costituzione del cobaltito di zinco.

L'aver stabilito che il composto risponde alla formula $Zn\,Co_2O_4$ non basta per poter affermare che questo sia uno spinello.

Il prodotto da noi ottenuto non presenta cristalli singoli sufficientemente sviluppati da poter essere esaminati cogli ordinari mezzi della cristallografia. Lo abbiamo perciò esaminato coi raggi X col metodo delle polveri.

I fotogrammi ottenuti colla radiazione di un anticatodo di nichelio di un tubo Phylips ad elettroni, ad anticatodi intercambiabili, presentano quasi tutte le linee dei fotogrammi del Co_3O_4 puro, in posizione praticamente invariata, ma mostrano qualche differenza nella intensità delle linee corrispondenti. Si osserva ad esempio che la faccia (0 0 4), produce una riflessione più debole nello spinello di zinco, più intense le (2 4 6), (8 2 2), (6 6 0).

Per dimostrare anche röntgenograficamente che il prodotto esaminato non era una miscela di Co_3O_4 e ZnO abbiamo per contro-prova fotografato con lo stesso anticatodo una miscela meccanica di quantità equivalenti di questi. Il fotagramma così ottenuto presenta le linee del ZnO e del Co_3O_4 perfettamente distinguibili.

In tabella I^a sono rappresentati schematicamente i fotogrammi del ZnO, del Co_3O_4, del $Zn\,Co_2O_4$ e della miscela meccanica $ZnO + Co_3O_4$; non è stata esaminata la miscela meccanica $ZnO + Co_2O_3$ perchè l'ossido cobaltico, che presenterebbe inoltre linee totalmente diverse, non poteva, come già si è detto, essere presente allo stato incombinato nel prodotto ottenuto ad alta temperatura.

Nella tabella II sono paragonati i fotogrammi del Co_3O_4 e del $Zn\,Co_2O_4$; entrambi sono cubici e posseggono un lato della cella elementare identico, entro una approssimazione di 0,005 Å, ed uguale a 8,06 Å. Risulta quindi per il Co_3O_4 un lato della cella elementare leggermente superiore a quello (8,02) pubblicato nella precedente Nota sull'ossido salino di cobalto. La differenza è dovuta al fatto che si è in questo caso usata una camera fotografica diversa e di maggior precisione; si deve ammetter quindi come più esatto il valore dato ora.

Come volume della cella elementare si calcola per il Co_3O_4 $253.61.10^{-24}$ cmc. e come densità 6.11. Per il $Zn\,Co_2O_4$ risulta $d = 6.27$.

Già dalla analogia delle celle elementari del Co_3O_4 e del $Zn\,Co_2O_4$ si deve ammettere che questi due composti siano isomorfi, come appare anche logico dalla analogia tra gli ioni Co^{++} e Zn^{++}; infatti l'ione cobaltoso secondo Goldschmidt [1] ha un raggio atomico di 0,82 Å, quello di zinco di 0,83 Å. Sebbene noi riteniamo [2] che il raggio atomico dello zinco bivalente sia alquanto inferiore al valore supposto da Goldschmidt, ciò non toglie che le analogie tra le dimensioni di questi due ioni siano grandissime.

(1) Goldschmidt, « Verteilungsgesetze d. Elemente ». VII, Norsk. Vidensk. Ak. Oslo. (1926).

(2) G. Natta, « Gazz. Chim. Ital. », 48 (1928).

TABELLA II.

$Zn Co_2O_4$						Co_3O_4				
$h_1h_2h_3$	Sen $\theta/_2$	d	a	Intensità		Sen $\theta/_2$	d	a	Intensità	
				oss.ta	calc.ta				oss.ta	calc.ta
202	0.2924	2.834	8.02	m	213	0.2924	2.834	8.02	m	170
113	0.3420	2.420	8.025	ff	576	0.3420	2.420	8.025	ff	500
004	0.4115	2.012	8.04	m	345	0.4115	2.012	8.04	mf	378
224	0.5043	1.645	8.04	m	245	0.5043	1.645	8.04	m	196
151	0.5336	1.551	8.06	f	378	0.5336	1.551	8.06	f	323
440	0.5821	1.422	8.05	fff	1825	0.5820	1.421	8.045	fff	1725
351	0.6087	1.360	8.05	dd	47	0.6087	1.360	8.05	dd	43
260	0.6495	1.276	8.06	d	196	0.6495	1.275	8.06	d	150
353	0.6720	1.216	8.06	m	285	0.6720	1.216	8.06	m	256
246	0 7716	1.073	8.05	mf	321	0.7716	1.073	8.05	m	256
713 553	0.7906	1.46	8.05	ff	749	0.7906	1.046	8.05	ff	657
800	0.8216	1.006	8.06	mf	645	0.8216	1.006	8 06	mf	610
822 660	0.8737	0.948	8.06	md	195	0.8737	0.948	8.06	d	144
555 751	0.8901	0.930	8.06	f	518	0.8901	0.930	8.06	f	458
840	0.9180	0.903	8.06	f	620	0.9180	0.903	8.06	ff	680

Per confermare la struttura del $Zn Co_2O_4$ abbiamo calcolato l'intensità teorica delle linee dei fotogrammi mediante la formula semplificata:

$$I = \sim \frac{n}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} S^2$$

dove n è il numero dei piani cooperanti alla riflessione della faccia $(h_1 h_2 h_3)$ ed S è il fattore di struttura:

$$S = \sum_1^u N_s e^{-2\pi i (hx_s + ky_s + lz_s)}$$

dove N_s è il numero di elettroni non nucleari dell'ione aventi le coordinate $x_s y_s z_s$, la sommatoria venendo estesa a tutti gli atomi contenuti

nella cella. Si sono anche ricalcolate colle stesse formule le intensità delle linee del Co_3O_4.

Si è supposto in tale calcolo delle intensità una struttura del tipo degli spinelli e si è assunto il parametro u, che definisce la posizione dell'atomo di ossigeno, uguale a 1/8.

La posizione degli atomi nella cella elementare risulta allora definita dalle coordinate:

Zn^{++} (0 0 0), (1/2 1/2 0), (0 1/2 1/2), (1/2 0 1/2)
(1/4 1/4 1/4), (3/4 3/4 1/4), (1/4 3/4 3/4), (3/4 1/4 3/4)

Co^{+++} (3/8 3/8 5/8), (1/8 1/8 5/8), (3/8 1/8 7/8), (1/8 3/8 7/8)
(7/8 7/8 5/8), (5/8 5/8 5/8), (7/8 5/8 7/8), (5/8 7/8 7/8)
(3/8 7/8 1/8), (1/8 5/8 1/8), (3/8 5/8 3/8), (1/8 7/8 3/8)
(7/8 3/8 1/8), (5/8 1/8 1/8), (7/8 1/8 3/8), (5/8 3/8 3/8)

O^{--} (3/8 3/8 1/8), (1/8 1/8 1/8), (3/8 1/8 3/8), (1/8 3/8 3/8)
(7/8 7/8 1/8), (5/8 5/8 1/8), (7/8 5/8 3/8), (5/8 7/8 3/8)
(3/8 7/8 5/8), (1/8 5/8 5/8), (3/8 5/8 7/8), (1/8 7/8 7/8)
(7/8 3/8 5/8), (5/8 1/8 5/8), (7/8 1/8 7/8), (5/8 3/8 7/8)
(1/8 1/8 7/8), (3/8 3/8 7/8), (3/8 1/8 5/8), (1/8 3/8 5/8)
(5/8 5/8 7/8), (7/8 7/8 7/8), (7/8 5/8 5/8), (5/8 7/8 5/8)
(1/8 5/8 3/8), (3/8 7/8 3/8), (3/8 5/8 1/8), (1/8 7/8 1/8)
(5/8 1/8 3/8), (7/8 3/8 3/8), (7/8 1/8 1/8), (5/8 3/8 1/8)

I valori che così si calcolano per l'intensità sono abbastanza concordanti con quelli sperimentali e giustificano le leggere differenze di intensità nei due composti delle linee citate.

Dall'esame della cella elementare, osservando la distanza che intercede tra i centri dell'ione bivalente e dell'ossigeno si calcolano per i raggi ionici di questi dei valori un po' inferiori a quelli che si calcolano dai reticoli degli ossidi semplici. Si avrebbe una migliore utilizzazione dello spazio reticolare, specialmente per il Co_3O_4, assumendo u leggermente diverso da 1/8.

Non si altererebbe così la simmetria cubica dello spinello e soltanto varierebbero leggermente le intensità delle linee dei fotogrammi, forse accordando meglio con quelli sperimentali. Il calcolo delle intensità per confermare quest'ipotesi, supponendo dei valori del parametro u diversi, per quanto molto vicini ad 1/8, risulterebbe eccessivamente laborioso, senza presentare uno speciale interesse ed è perciò stato tralasciato.

Stiamo ora esaminando altri spinelli del cobalto, sui quali riferiremo in altra Nota. La preparazione del composto Ni Co_2O_4, con metodo analogo a quello impiegato per il Zn Co_2O_4, ha dato però risultati negativi. I fo-

togrammi presentano tanto le linee del Co_3O_4 quanto quelle del NiO, indicando che il prodotto è una miscela di questi. L'analisi ha fornito quantità di ossigeno attivo corrispondenti a quelle che si calcolerebbero per una miscela equimolecolare di Co_3O_4 e NiO.

Riassunto. - È stato preparato il cobaltito di zinco, $Zn\ Co_2O_4$, per calcinazione di una miscela dei nitrati di zinco e di cobalto ed è stato esaminato coi raggi X col metodo delle polveri e confrontato col cobaltito cobaltoso Co_3O_4.

Il Co_3O_4 ed il $Zn\ Co_2O_4$ risultano isomorfi, cristallizzano entrambi nel sistema cubico, con un reticolo del tipo degli spinelli, hanno celle elementari di dimensioni identiche con lato di 8.06 Å ± 0.005, ed hanno densità calcolate rispettivamente di 6.11 e 6.27.

Chimica. — *Calore di formazione dei cloruri doppî di rame e di potassio* [1]. Nota di P. Agostini, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

I cloruri doppi $CuCl_2 \cdot 2KCl$ e $CuCl_2 \cdot KCl$, all'atto in cui vengono disciolti in acqua, si dissociano nei due sali che li compongono. Per determinare il loro calore di formazione si può perciò misurare il calore di soluzione e sottrarre da questo i calori di soluzione dei cloruri di potassio e di rame.

Bouzat e Chauvenet [3] hanno determinato recentemente a questo modo il calore di formazione di $CuCl_2 \cdot 2KCl$.

Essi hanno preparato il sale facendo evaporare soluzioni acquose contenenti KCl e $CuCl_2$ nei rapporti stechiometrici richiesti ed hanno così ottenuto il composto: $K_2CuCl_4 \cdot 2H_2O$. Da questo, per moderato riscaldamento in corrente di acido cloridrico, hanno avuto il sale anidro.

Per il calore di soluzione essi hanno trovato il valore di — 1.85 Cal. dal quale hanno dedotto un calore di formazione di + 3.95 Cal. [4].

In quel che segue sono riportati i risultati da me ottenuti per il calore di formazione dei due cloruri doppi di rame e potassio.

Il calorimetro impiegato in queste misure era costituito da un vaso di Dewar della capacità di 2300 cc. che era stato collocato dentro a una

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) «C. R.», *177*, 1293 (1923).

(4) Per calore di soluzione di KCl, Bouzat e Chauvenet hanno assunto: — 4.45 Cal. e per quello di $CuCl_2$: + 11.00 Cal. (Valori di Thomsen («Termochem. Untersuch.», *3*, 186); Sabatier («Bull. Soc. Chim.», *1*, 90, 1889); Berthelot, («Ann. Chim. Phys.», *29*, 301, 1883).

campana di vetro più grande. Nell'intercapedine tra i due recipienti era posta dell'acqua. La campana, a sua volta, era ricoperta da uno strato di feltro e racchiusa, infine, in una cassetta di legno. Il coperchio, formato da un disco di feltro dello spessore di 2 cm. circa, aveva 5 fori attraverso i quali passavano: il termometro differenziale, l'agitatore, due bacchette di vetro che servivano a sostenere le fiale contenenti la sostanza di cui si voleva misurare il calore di soluzione, e un agitatore a mano per l'acqua contenuta nell'intercapedine tra il Dewar e la campana. L'agitatore del recipiente calorimetrico era costituito da una bacchetta di vetro alla cui estremità erano saldate quattro palette di vetro disposte in croce: esso era azionato da un piccolo motore elettrico.

L'equivalente in acqua fu determinato misurando i calori di soluzione dei cloruri di potassio e di sodio.

Le fiale contenenti la sostanza da sperimentare, dopo essere state saldate alla lampada, venivano fissate con un pezzetto di gomma alle rispettive bacchette e queste infilate negli appositi fori del coperchio. Dopo aver messo l'agitatore nel recipiente, si adattava il coperchio al calorimetro e s'introduceva il termometro differenziale attraverso il foro ad esso riserbato; quindi veniva messo in moto l'agitatore. Le letture del termometro venivano fatte nell'intervallo di ogni mezzo minuto. Nel calcolo si tenne sempre conto del termine correttivo di Regnault e Pfaundler per le perdite di calore per irradiazione.

Per il sale $CuCl_2 \cdot 2KCl$, ho ripetuto le misure già eseguite da Bouzat e Chauvenet, con un prodotto che aveva questa composizione:

	Cu	K	Cl
trovato per cento	22.29	27.90	49.81
calcolato per K_2CuCl_4	22.41	27.58	50.01

ed ho trovato i seguenti valori (due determinazioni concordanti):

K_2CuCl_4 gr.	H_2O cc.	Effetto termico	Correzione per la irradiazione	Q
47.26	1800	— 0°.137	+ 0.0007	— 1.63 Cal.

I valori corrispondenti per il cloruro di potassio e per quello di rame vennero determinati sperimentalmente usando lo stesso calorimetro e gli stessi rapporti di diluizione. Si ebbe: per il primo — 4.314 Cal. e pel secondo + 11.08 Cal.

Da questi dati si calcola:

$$K_2CuCl_4 = 2KCl + CuCl_2 — 4.09 \text{ Cal.}$$

Il mio valore differisce solo di — 0.14 Cal. da quello di Bouzat e Chauvenet. Lo scarto è piccolo; tuttavia ritengo il mio valore più esatto perchè è difficile ottenere il sale a un grado sufficiente di purezza ed inoltre esso assorbe molto facilmente umidità dall'atmosfera. Io mi sono messo al riparo da entrambe le cause di errore, ripetendo più volte la preparazione fino ad avere un sale di purezza sufficiente ed eseguendo le misure calorimetriche con la maggior rapidità possibile onde impedire al sale di alterarsi.

L'altro composto $CuCl_2 \cdot KCl$ si ottiene abbastanza facilmente ed è stabile. Si sciolgono i cloruri di potassio e di rame in rapporti equimolecolari in acido cloridrico concentrato, si raffredda la soluzione e vi si fa gorgogliare una corrente di acido cloridrico. Si separa così prontamente il $KCuCl_3$ cristallizzato in aghi color rosso–granato. Questi possono essere ottenuti ben secchi riscaldandoli a 130–140° nel vuoto in presenza di anidride fosforica.

All'analisi il sale ha dato i seguenti risultati:

	Cu	K	Cl
trovato per cento	30.25	18.94	50.61
calcolato per $KCuCl_3$	30.40	18.72	50.88

Per il calore di dissoluzione ho avuto i valori seguenti:

$KCuCl_3$ gr.	H_2O cc.	Effetto termico	Correzione per la irradiazione	Q
34.84	1800	+ 0°.21	+ 0.002	+ 2.252 Cal.
34.84	1800	0°.192	0.009	2.13 »
34.84	1800	0°.198	0.007	2.192 »

Il valore medio dei calori di dissoluzione sopra riportati è + 2.181 Cal. e da esso si calcola:

$$KCuCl_3 = KCl + CuCl_2 - 4.59 \text{ Cal.}$$

Il calore di addizione di una molecola di KCl a una di $CuCl_2$ è perciò di + 4.59 Cal.

Chimica. — *Calori di formazione e di idratazione dei carbonati doppî di cobalto e potassio e di rame e sodio*[1]. Nota di F. De Carli, presentata[2] dal Socio N. Parravano.

Per stabilire queste grandezze sono ricorso alla misura del calore di soluzione del sale doppio in acido cloridrico. Infatti dalla equazione:

$$K_2CO_3 \cdot CoCO_3 sol + 4HCl\,aq = 2KCl\,aq + CoCl_2\,aq + 2CO_2 + 2H_2O + Q$$

si ha $C + 4Q_1 = 2Q_2 + Q_3 + 2Q_4 + 2Q_5 + Q$

da cui $$C = (2Q_2 + Q_3 + 2Q_4 + 2Q_5 + Q) - 4Q_1$$

C rappresenta la somma dei calori di formazione dei carbonati di potassio e di cobalto e del calore di addizione di una mol. di K_2CO_3 a una di $CoCO_3$, e questo si può perciò calcolare se si conoscono i valori dei primi due.

Il calore di formazione del carbonato di potassio si conosce; quello del carbonato di cobalto no, e per stabilirlo ho misurato il calore di precipitazione della reazione[3]:

$$CoSO_4\,aq + Na_2CO_3\,aq = CoCO_3\,prec. + Na_2SO_4\,aq + Q\ .$$

Conoscendo, come si conoscono, i calori di formazione di $CoSO_4\,aq$, $Na_2CO_3\,aq$, $Na_2SO_4\,aq$ a partire dagli elementi, si ricava senz'altro quello di $CoCO_3\,prec.$ pure dagli elementi.

Naturalmente occorre che nelle condizioni in cui si effettua la precipitazione prenda origine solo sale di cobalto neutro, e che non si formino sali basici.

Ora effettivamente, all'atto in cui si mescolano le due soluzioni la reazione che si verifica per prima è quella di formazione del sale neutro, e solo in secondo tempo il sale neutro subisce decomposizione con formazione di sale basico.

È perciò possibile misurare il calore di precipitazione del sale neutro prima che la formazione di quello basico si inizi in misura apprezzabile.

Allo stesso modo Berthelot, mescolando soluzioni di solfato di rame e di carbonato di sodio, notò un istantaneo assorbimento di calore dovuto

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) Le esperienze sono state eseguite con lo stesso apparecchio e con le stesse modalità descritte da Agostini. (Vedi questi «Rendiconti», [6], VII, 1928).

alla precipitazione di $CuCO_3$, e quindi, a breve distanza, osservò un secondo effetto termico negativo molto più debole e più lento del precedente dovuto alla decomposizione del sale neutro. E infatti durante il primo periodo della misura egli non notò alcuno sviluppo gassoso, mentre, durante il secondo, si svolgeva dalla soluzione anidride carbonica proveniente dalla decomposizione di $CuCO_3$ in CuO e CO_2.

Nella misura della tonalità termica della reazione tra solfato di cobalto e carbonato sodico, si sono avuti questi risultati:

gr. $CoSO_4 7H_2O$	gr. Na_2CO_3 in 1800 cc. H_2O	Variazione di temperatura	Δt	Q
9.73	6.65	— 0°.122	+ 0.0009	— 4.04
9.72	6.65	— 0°.122	+ 0.0009	— 4.04

Da questi valori, sapendo che:

$CoSO_4 aq$ (dagli elementi) = + 229.81 Cal.
$Na_2CO_3 aq$ » » = + 276.42 »
$Na_2SO_4 aq$ » » = + 328.88 »

si calcola per $CoCO_3$ precipitato:

$$Co + C + 1\,^1/_2 O_2 = CoCO_3 \text{ prec.} + 173.31 \text{ . Cal.}$$

Partendo da idrato di cobalto e $CO_2 aq$. si calcola invece per il calore di formazione:

$CoCO_3$ dagli elementi . . . . . 173.31 Cal.
Somma di $Co(OH)_2$ e $CO_2 aq$ dagli elementi 163.31 »

$CoCO_3$ da $Co(OH)_2$ e $CO_2 aq$ . . . . . + 10.00 Cal.

* * *

Calore di formazione e di idratazione del carbonato doppio di cobalto e potassio.

Il sale, disidratato ed analizzato venne disciolto in soluzione acquosa di HCl al 2 % e precisamente una grammimolecola di $K_2Co_3 \cdot CoCO_3$ venne disciolta in 2775 cc. di soluzione cloridrica.

Si ottennero risultati seguenti (due determinazioni concordanti).

gr. carbonato	cc. HCl aq. al 2 %	Variazione di temperatura	Δt	Q
10.00	1800	+ 0.362	+ 0.013	+ 17.75

Si hanno così tutti i valori necessari per calcolare il calore di formazione del carbonato doppio. Dobbiamo però notare ancora che nella reazione si formano due molecole di CO_2 le quali, in parte, restano disciolte nell'acqua.

Ho misurato perciò il calore di formazione dell'anidride carbonica che prende origine dalla reazione tra K_2CO_3 e HCl al 2 % facendo compiere questa nelle stesse condizioni di diluizione nelle quali avevo misurato la tonalità della reazione di dissoluzione del sale doppio.

Ho così trovato che nelle condizioni sperimentali in cui operavo il calore di formazione di una grammimolecola di CO_2 è di + 101.69 Cal. a partire da carbonio amorfo.

Considerando la CO_2 che si forma tutta disciolta si sarebbe invece avuto come calore di formazione + 103.04 Cal.

Ho utilizzato il risultato sperimentale da me ottenuto per eseguire il calcolo:

$$K_2CO_3 \cdot CoCO_3 + 4HCl\,aq = 2KCl\,aq + CoCl_2 aq + 2CO_2 + 2H_2O + 17.75 \text{ Cal.}$$
$$X + 157.24 = 200.2 + 94.82 + 203.38 + 137.76 + 17.75 \text{ Cal.}$$

da cui

$$X = [(200.2 + 94.82 + 203.38 + 137.76) - 157.24] - 17.75$$
$$X = 460.17 .$$

460.17 rappresenta la somma dei calori di formazione di K_2CO_3 e $CoCO_3$ a partire dagli elementi, e del calore di addizione delle due molecole per la formazione del sale doppio.

Sottraendo da esso i calori di formazione di K_2CO_3 sol., + 281.1 Cal., e di $CoCO_3$ prec., + 173.31 Cal., si ha per il calore di addizione di $CoCO_3$ a K_2CO_3 + 5.76 Cal.

Il carbonato doppio di potassio e cobalto cristallizza con quattro molecole di acqua. Sciogliendo il sale idrato in acido cloridrico, nelle stesse condizioni di diluizione dell'esperienza precedente, si può ricavare il calore di idratazione:

gr. carbonato	cc. HCl aq. al 2 %	Variazione di temperatura	Δt	Q
10.00	1800	0.104	0.002	6.42
10.00	1800	0.088	0.009	6.34
				Media 6.38 Cal.

Si ricava pertanto per il calore di idratazione: + 11.37 cal.

* *

Calore di formazione
e di idratazione del carbonato doppio di rame e sodio.

Si è seguito in tutto il metodo descritto per il sale di cobalto.

Per il calore di formazione di $CuCO_3$ prec. si conosce un dato di Berthelot [1], ma si è ripetuta la misura e si sono avuti i seguenti risultati:

gr. $CuSO_4 \cdot 5H_2O$	Peso Na_2CO_3 in 1800 cc. H_2O	Variazione di temperatura	Δt	Q
8.79	3.73	— 0.037	+ 0 0008	— 1.977

Con questo dato si calcola per il calore di formazione di $CuCO_3$ prec. a partire dagli elementi: + 143.06 Cal., con una differenza di solo + 0.26 Cal. rispetto al dato di Berthelot.

Per la reazione tra carbonato doppio ed acido cloridrico si è avuto

$$Na_2CO_3 \cdot CuCO_3 + 4HCl\,aq = 2NaCl\,aq + CuCl_2\,aq + 2CO_2 + 2H_2O + 14.745$$

da cui $X + 157.24 = 193.32 + 162.71 + 203.38 + 136.76 + 14.745$

e per X si calcola:

$$X = 438.93 - 14.74 = 424.19$$

Sottraendo da 424.19 i calori di formazione di: Na_2CO_3 sol. e di $CuCO_3$ prec. si ha per il calore di addizione: + 10.33 Cal.

Con il sale idrato, $Na_2CO_3 \cdot CuCO_3 \cdot 3H_2O$ la tonalità della reazione con HCl al 2 % è stata: + 5.449 Cal. Di qui si calcola un calore d'idratazione di 9.296 Cal.

(1) Berthelot, *Termochimie*, II, 324 (1897).

Chimica. — *Derivati della d. l. asparagina* [1]. Nota di S. Berlingozzi, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

In una serie di ricerche già pubblicate [3] sulle relazioni fra costituzione chimica e potere rotatorio, ho avuto occasione di preparare parecchi derivati acilici della l. asparagina corrispondenti alla formula generale

$$H_2N\cdot CO—CH_2—\underset{\displaystyle NH—CO\cdot R}{\overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}—COOH$$

La loro facile proficua preparazione, e la possibilità di ottenerli ad un alto grado di purezza mi hanno indotto a utilizzarli per altro genere di esperienze. È noto che per evaporazione di soluzioni equimolecolari delle due asparagine enantiomorfe non si ottiene il composto racemico, bensì un conglomerato in cui sono meccanicamente separabili i cristalli delle due forme attive [4].

Lo stesso fatto si ripete in tutti i procedimenti sintetici dai quali si dovrebbe aspettare la d. l. asparagina; così che, ove non si voglia escludere la possibilità di realizzare tale composto, se ne deve ritenere il campo di esistenza più o meno lontano dalle ordinarie condizioni sperimentali.

Se ora si considerano in tale ordine d'idee le acil-asparagine sopracitate, appare indubbiamente interessante provare se per queste sostanze sia o no possibile l'ottenimento dei composti racemici per diretta unione degli antipodi ottici. I tentativi in questo senso sono tanto più opportuni in quanto recentemente T. M. Lowry [5], attenendosi alle nuove concezioni di Lewis sulla struttura atomica e sulla valenza, ha elaborato una serie di interessanti considerazioni per interpretare il meccanismo di alcune trasformazioni nel campo della chimica organica; così per la racemizzazione e per l'inversione di Walden. Non è esclusa la possibilità di interpretare per tale via anche il comportamento anomalo delle asparagine; ma è tuttavia ne-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(3) S. Berlingozzi, «Gazz. Chim. Ital.», *57*, 815 (1927); «Atti R. Accad. Lincei; Rend. Fisici», vol. VII, fasc. 11, p. 925.

(4) Cfr. Piutti, «Gazz. Chim. Ital.», *16*, 275 (1886); *17*, 127, 186; *18*, 460; *27*, I, 147.

(5) «Bull.», IV, *35*, 815 e 905 (1924); «2°. Cons. Inst. Solvay» (ed. Gauthier-Villars, Paris, 1926, p. 135).

cessario disporre del maggior numero possibile di fatti sperimentali a cui potersi utilmente riferire. Così, allo scopo di portare in questo senso un adatto contributo, ho studiati alcuni derivati acilici delle asparagine enantiomorfe ed ho tentata la preparazione dei corrispondenti composti racemici. Nell'acilazione delle asparagine si attaccano al gruppo aminico $—NH_2$ dei radicali acidi che possono avere differente massa e diverso carattere elettronegativo; ed influire perciò variamente sulle proprietà dei composti per quello che si riferisce alla possibilità di formazione dei racemici. Seguendo questo concetto ho preparati dalle due asparagine enantiomorfe i derivati:

	massa dei radicali	k degli acidi corrispondenti
cloroacetilico	77,5	0,0155
benzoilico	105	0,0060
m. nitrobenzoilico.	150	0,0345
1. nitro-2. toluen-4. solfonilico	200	—

Le successive prove per la preparazione dei composti racemici dalla diretta unione degli antipodi hanno condotto all'ottenimento della *m. nitrobenzoil-d. l. asparagina* e della *1. nitro-2. toluen-4. solfonil-d. l. asparagina*; mentre l'esito è stato incerto per i derivati cloroacetilico e benzoilico. Per maggior chiarimento di questi due casi dubbi sarebbe stato desiderabile lo studio cristallografico; ma la quantità limitatissima dei prodotti disponibili e la conseguente difficoltà nell'effettuare la loro cristallizzazione in diverse condizioni allo scopo di ottenerne cristalli ben formati, non hanno finora permesso tale studio che potrà forse essere in seguito realizzato. È frattanto degno di nota il fatto che la formazione del racemico si è avuta pei due composti in cui il radicale acilico sostituente è dotato di massa maggiore e di più spiccato carattere negativo [1].

Sarà dunque opportuno, per indagare sull'eventuale influenza della massa e del carattere negativo, dirigere le esperienze verso composti nei quali il radicale acilico abbia piccola massa e spiccato carattere negativo: per esempio il derivato formilico. Sarà pure interessante lo studio dei derivati glicilici, ove il carattere negativo del radicale è debolissimo. Ciò mi propongo di fare non appena potrò procurarmi il materiale necessario [2].

(1) Per l'acido 1. nitro-2. toluen-4. solfonico non è conosciuto il valore di k, ma questo può ritenersi assai alto in quanto che per l'acido p. toluen-solfonico si ha $k = 2,1000$.

(2) Nel realizzare il materiale di studio si incontrano le maggiori difficoltà per ottenere una quantità anche modesta di d. asparagina, che non si trova in commercio. Il solo metodo sintetico praticamente utilizzabile è quello di Piutti (v. «Gazz. Chim. Ital.», 27, 147) fondato sull'azione dell'ammoniaca alcoolica sull'anidride maleica. In ogni modo, oltre all'impiego di materiale costoso è necessario un tempo assai lungo, specialmente per la cristallizzazione del miscuglio di d. e l. asparagina e per la diligente separazione dei cristalli della prima.

La preparazione delle acil-asparagine è stata effettuata con le solite modalità già indicate in precedenti pubblicazioni [1], nelle quali avevo già descritti i derivati dell'asparagina levogira. I corrispondenti antipodi ottici, ottenuti dall'asparagina destrogira, hanno la stessa composizione e le stesse proprietà ad eccezione del segno opposto nel potere rotatorio:

Cloroacetil-d. asparagina	$[M]_D^{20}$ =	— 9°,6
Benzoil-d. asparagina	»	— 36°,4
m. Nitrobenzoil-d. asparagina	»	— 35°,1
1. Nitro-2. toluen-4. solfonil-d. asparagina .	»	+ 85°,2

Per quanto si riferisce alla *cloracetil-asparagina* (la cui solubilità in acqua è maggiore di quella degli altri acilderivati), il tentativo di preparazione della forma racemica è stato fatto mescolando soluzioni acquose di quantità uguali dei due antipodi, alla temperatura di 20°. Non si è notata per tale temperatura alcuna variazione all'atto del miscuglio. Per lenta evaporazione del solvente si separarono aggregati di aghi prismatici, di aspetto simile a quello dei due composti rotatori, fusibili verso i 148° (i composti attivi fondevano a 150° con decom.). La soluzione acquosa è otticamente inattiva; pure inattiva è la soluzione del sale potassico. All'analisi mostra la stessa composizione degli antipodi.

Per la *benzoil-asparagina* il tentativo di preparazione del racemico è stato effettuato sciogliendo i due antipodi nella corrispondente quantità di KOH/N, mescolando le due soluzioni, ed acidificandole poi lievemente con acido cloridrico. Il prodotto separatosi viene raccolto e cristallizzato da molta acqua. Si ottiene così in aghetti minutissimi di aspetto simile a quello degli antipodi, fusibile verso i 184°, decomp. (i composti attivi fondevano a 189°, decomp.). La soluzione acquosa del sale potassico è inattiva. Lo stesso prodotto mostra all'analisi composizione identica a quella degli antipodi.

In modo simile si opera con le m. nitrobenzoil-asparagine e con le 1. nitro-2. toluen-4. solfonil-asparagine.

m. Nitrobenzoil-d. l. asparagina. Cristallizzata dall'acqua si presenta in tavolette prismatiche trasparenti, di aspetto omogeneo, fusibili nettamente a 191°, decomp., e cioè a temperatura assai superiore a quella a cui fondono gli antipodi (176°). All'analisi mostra la stessa composizione. La soluzione del sale potassico è otticamente inattiva. Tutte queste proprietà portano alla conclusione che il prodotto ottenuto corrisponde al composto racemico.

1 Nitro-2. toluen-4. solfonil-d. l. asparagina. I due antipodi ottici, cristallizzati dall'acqua si presentano in aghetti lunghi e sottili, bianchi, fu-

(1) Cfr. S. Berlingozzi, loc. cit.

sibili a 174°, decomp. Il racemico cristallizza in prismetti trasparenti, che fondono a temperatura assai più alta, e cioè nettamente a 190°, decomp. Anche questo prodotto mostra composizione identica a quella degli antipodi; e la soluzione del suo sale potassico è otticamente inattiva. Si tratta dunque del composto racemico.

Mi auguro di poter continuare le esperienze in tale campo.

Chimica-fisica. — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* - II. *Analisi termica del sistema* $LiCl-CdCl_2$ *anidri* [1]. Nota di A. Ferrari e A. Baroni presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Come abbiamo detto nella Nota precedente [3] la grandissima somiglianza rilevata dall'esame röngtenografico fra le celle dei cloruri di litio e di magnesio poteva far pecsare che la ragione per cui questi cloruri, malgrado la valenza diversa fossero miscibili allo stato solido in ogni rapporto, derivasse dalla somiglianza della loro struttura cristallina. Abbiamo in conseguenza studiato il comportamento del sistema cloruro di litio-cloruro di cobalto anidri, perche quest'ultimo cloruro presenta una cella elementare che è ancora quasi identica a quella del cloruro di litio; pur non essendovi fra i due le somiglianze chimiche ben note, che litio e magnesio presentano in relazione alla loro posizione nel sistema periodico.

Precedenti lavori röngtenografici di uno di noi [4] mostrano che oltre il cloruro di magnesio e quello di cobalto, ha una cella elementare quasi identica a quella del cloruro di litio, il cloruro di nichelio e forme assai vicine i cloruri ferroso, di manganese e di cadmio. Infatti dando una rappresentazione esagonale al reticolo del cloruro di litio, questo avrebbe un rapporto assiale 2.45 mentre quelli dei cloruri bivalenti predetti sono identici o assai vicini:

cloruro di magnesio	2.45
cloruro di cobalto	2.45
cloruro di nichelio	2.45
cloruro ferroso	2.40
cloruro manganoso	2.33
cloruro di cadmio	2.25

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 1° Giugno 1928.

(3) Questi «Rendiconti» (6ª) VII (1928) 848.

(4) Questi «Rendiconti» (6ª) II (1925) 457; IV (1926) 10; VI (1927) 57.

Abbiamo esteso lo studio a tutte le coppie che questi cloruri formano con quello di litio. I sistemi con i cloruri di nichelio e ferroso sono ancora in corso di studio; essi presentano difficoltà sperimentali notevoli per l'alto punto di fusione del cloruro di nichelio e per la facile ossidabilità del cloruro ferroso. Il sistema cloruro di litio–cloruro di manganese è stato studiato da C. Sandonnini e Scarpa [1] che concludono per una miscibilità completa dei due componenti allo stato solido. Non ci risulta che lo studio del sistema cloruro di litio-cloruro di cadmio sia stato pubblicato e per questo abbiamo fatto oggetto di ricerca il predetto sistema. Lo studio è stato condotto con gli stessi dispositivi e con gli stessi accorgimenti descritti nella Nota I per il sistema cloruro di litio–cloruro di cobalto. I dati sperimentali sono riassunti nella tabella I e rappresentati graficamente nella fig. 1.

Tutte le miscele fuse furono analizzate dopo fusione determinando litio e cadmio e da ciò i valori frazionari della prima colonna.

Tabella I.

Molecole % di $CdCl_2$	Inizio di cristallizzazione	Molecole % di $CdCl_2$	Inizio di cristallizzazione
0	**603°**	61.1	511°
8.5	593°	64.0	502°
15.0	578°	66.2	494°
19.5	564°	69.8	500°
25.8	555°	73.2	507°
34.8	535°	75.2	**516°**
43.0	514°	75.9	512°
45.5	505°	77.3	501°
48.5	502°	81.0	494°
52.0	506°	84.8	497°
56.0	518°	86.2	513°
59.0	521°	88.5	532°
60.2	**522°**	92.3	551°
		100.0	**560°**

Dai risultati precedenti concludiamo che cloruro di litio e cloruro di cadmio danno allo stato solido i composti $3CdCl_2 \cdot 4LiCl$ e $3CdCl_2 \cdot 2LiCl$

(1) «Rendic. Lincei» (5ª) XXII (1916) 163.

ai quali corrispondono i punti di fusione 522° e 516°. Tra i due cloruri puri e le due precedenti combinazioni non si osserva nessun eutectico, per cui si dovrebbe ritenere che sono completamente miscibili allo stato solido.

Il composto $3CdCl_2 \cdot 2LiCl$ è già stato ritrovato perchè citato da Liebisch e Korreng [1]; ad esso è assegnato un punto di fusione di 519°, poco diverso da quello da noi ottenuto. Non ci fu possibile però trovare nella letteratura lo studio termico completo del sistema in questione.

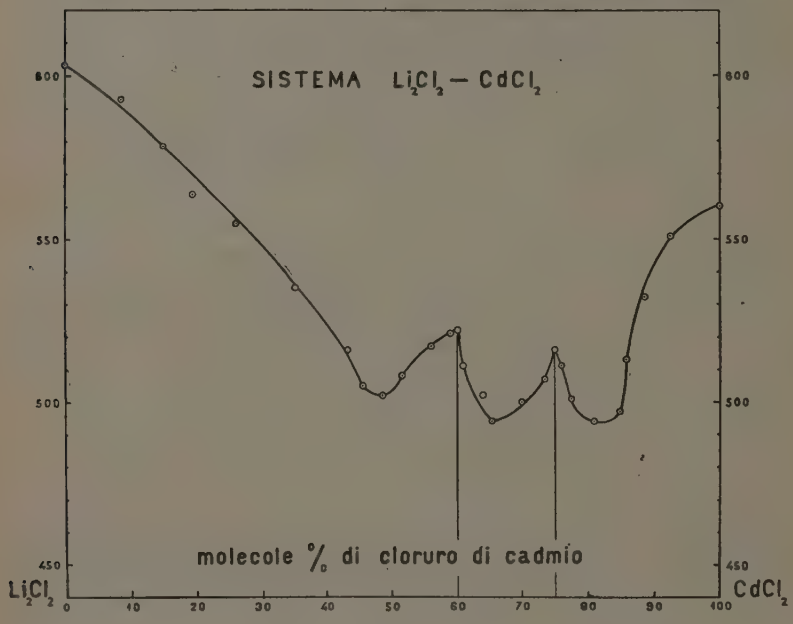


Fig. 1.

Anche nellla solidificazione delle miscele di cloruro di litio e di cloruro di cadmio, come già per quelle del sistema LiCl — $CoCl_2$, l'intervallo di cristallizzazione è praticamente nullo.

Agli effetti della questione postaci, ossia l'influenza della forma cristallina sulla solubilità allo stato solido, il sistema considerato mal si presta per l'esistenza di due composti che vengono ad interrompere la continuità della curva. Risultati più interessanti sotto questo punto di vista vedremo nelle note successive considerando i sistemi binari formati dai cloruri biva-

(1) «Ber. Berl. Akad.» (1914), I 205.

.enti menzionati al principio del presente lavoro e nei quali non si osserva formazione di composti.

Riassumendo:

Lo studio termico del sistema $LiCl — CdCl_2$ ci ha permesso di identificare il composto $3CdCl_2 \cdot 4LiCl$ (p. f. 522°) e confermare quello $3CdCl_2 \cdot 2LiCl$ (p. f. 516°). Tra questi composti e i cloruri puri esiste una miscibilità completa allo stato solido.

Chimica fisiologica. — *La cultura fisiologica.* Nota di N. A. Barbieri, presentata [1] dal Socio E. Paternò.

La cultura fisiologica consiste nell'aumentare e migliorare i prodotti con l'alimentazione completa delle piante. Questa alimentazione comprende: *a*) l'alimentazione minerale salina; *b*) l'alimentazione organica.

Le culture. – Le culture si dividono in minerali ed organiche, secondo che si cerca d'incorporare nel suolo o delle sostanze minerali o dei detriti organici comunque ottenuti o preparati, in modo che le piante possano trasformare il mondo organico morto in mondo vegetale vivente.

Cultura minerale. – Questa cultura comprende: *a*) la cultura minerale diffusa; *b*) la cultura minerale localizzata.

a) *Cultura minerale diffusa.* Questa cultura consiste nello spargere ad alta dose e in superficie per tutte le categorie di piante dei concimi minerali, cioè delle sostanze minerali che le piante non posseggono (perfosfati, scorie, cloruro e solfato ammonico, nitrati, cianamide, sali bruti di potassio, ecc.).

b) *Cultura minerale localizzata.* Tale cultura consiste nell'uso dei fertilizzanti fisiologici cioè dei sali (cloruri, solfati neutri, fosfati alcalini, solfati, fosfati calcarei, fosfati magnesiaci) che esistono preformati nelle piante. I detti sali si somministrano ai semi e piantine in modo diretto completo e localizzato costituendo così un vero alimento minerale salino dei vegetali.

Cultura minerale diffusa.

Storia. – Gli umisti credevano che le sostanze organiche fossero solamente indispensabili alla vita delle piante. Con Liebig (1841) comincia il periodo della cultura minerale cioè l'uso ad alta dose per ogni metro quadro di terreno di sostanze minerali che egli riteneva solo necessarie alla vita

(1) Nella seduta del 1° giugno 1928.

delle piante. La cultura minerale possiede una dottrina propria basata sopra il principio della restituzione.

Principio. – Restituire alle terre quello che le raccolte asportano dal suolo.

Dottrina. – Il principio della restituzione è basata sopra i risultati analitici delle ceneri di 10 o 20 grammi di un tessuto vegetale. Nelle ceneri si dosano prima gli acidi, poi le basi, e con un calcolo approssimativo si ricostituisce il sale. Nelle analisi delle terre si dosano ugualmente gli acidi e le basi e con il calcolo si ricostituisce il sale. Constatato che le piante e le terre possedevano una identica serie di acidi e di basi, si stabilì il principio della restituzione. Conviene cioè reintegrare la composizione ponderale del suolo agricolo restituendo allo stesso quel quantitativo minerale acido e quel quantitativo minerale basico che le raccolte hanno asportato dalle terre. Si ritenne che nella serie degli acidi il più importante fosse l'acido fosforico, come, nella serie delle basi, la potassa. L'azoto veniva sempre dosato a parte. Nacquero così tre categorie di concimi minerali chimici che sono: 1° i concimi fosfatici; 2° i concimi potassici; 3° i concimi azotaiti.

1° *I concimi fosfatici.* – I concimi fosfatici comprendono il perfostato, le scorie, i fosfati naturali di ogni provenienza (fosforiti, coproliti, ecc.).

Critica. Le piante posseggono parecchi fosfati oltre il fosfato tricalcico [1]. Una somministrazione esclusiva di perfosfato non può compensare il mancato uso dei fosfati alcalini e magnesiaci. Il fosfato monocalcico (perfosfato) per passare alla forma tricalcica, se possibile, dovrebbe utilizzare i carbonati calcarei del suolo, ma siccome il perfosfato contiene almeno l'8 % di acido solforico libero, il carbonato di calcio si unisce all'acido solforico per formare il gesso, in modo che poche probabilità restano al fosfato monocalcico per trasformarsi in tricalcico.

Le terre quindi con l'uso continuato del perfosfato sono decalcificate, inoltre esse divengono compatte e di lavorazione difficile per l'accumulo successivo di elevate quantità di gesso di cui una parte, 40 al 60 %, si trova nel perfosfato impiegato, l'altra parte per la formazione di gesso ottenuta dalla reazione dell'acido solforico libero del perfosfato sul carbonato di calcio del terreno. Nè si può ritenere che il perfosfato renda più rigida la paglia del grano, perchè la paglia (le cui ceneri contengono il 75 % di silice) trovasi quasi sprovvista di calcio. Infine la dose eccessiva di perfosfato sparsa in copertura da 5 a 10 q.li l'ettaro (scuola di Grignon) non è in armonia col fosfato tricalcico contenuto in una raccolta di grano per esempio di 20 q.li l'ettaro. Tale raccolta possiede solamente una combinazione di 6 a 7 chili di acido fosforico col calcio. Se il perfosfato è utile per fosfato monocalcico che contiene, non si comprende perchè si debba somministrare mischiato col gesso, così, se il fosfato bicalcico è utile non si

(1) Barbieri, *Analyse immédiate du blé*, «Comptes Rendus», to. 159, p. 431, 1914.

comprende perchè si debba somministrare unito con 35 o 45 % di calce come si riscontra nelle scorie.

Le fosforiti usate anche allo stato di polvere impalpabile sono inassimilabili perchè costituite da sali doppi (cloro fosfato di calcio fluoro fosfato di calcio) con magnesio silice, ecc. Le fosforiti unite con il cloruro di sodio sono nocive ai raccolti. Breve: i concimi fosfatici o sono senza azione o agiscono per il loro contenuto calcare, cioè, il perfosfato per il gesso (40 a 60 %), le scorie per la calce (35 a 45 %).

I concimi fosfatici provocano in primo tempo una mobilizzazione elevata delle riserve umiche; consumate queste riserve, il perfosfato e le scorie divengono nocivi.

2° *I concimi potassici.* - Questi concimi comprendono: *a*) il carbonato di potassio; *b*) le potasse americane; *c*) i sali bruti delle miniere d'Alsazia; *d*) i sali bruti delle miniere di Strasfurt e il salino potassico.

Critica. – Il carbonato di potassio e le potasse americane costituite da carbonato di potassio, come il salino potassico, sono nocivi alle piante.

I sali bruti delle miniere d'Alsazia contengono il 30 % di cloruro di potassio, il 60 % di cloruro di sodio e delle impurità. L'effetto utile del cloruro di potassio viene neutralizzato dall'effetto nocivo del cloruro di sodio. I sali bruti delle miniere di Strasfurt contengono in generale il solfato neutro di potossio unito con sali di magnesio, i quali diminuiscono l'efficacia del solfato di potassio. Esistono molti lavori, gli uni, che consigliano i sali potassici d'Alsazia e gli altri quelli di Strasfurt. Si dovrà impiegare il cloruro o il solfato neutro di potassio o tutti e due uniti insieme secondo che le piante conterranno o l'uno o l'altro di questi sali, oppure entrambi.

3° *I concimi azotati.* - Nelle piante l'azoto si distingue sotto tre forme: l'una, minerale distinta in combinazione nitrica o ammoniacale; l'altra, semi-organica (cianamide); la terza, organica.

Critica. – Si suppone che l'azoto minerale si trasformi nelle piante in azoto organico, però vi sono piuttosto prove che dimostrano che l'azoto minerale si fissa nelle piante senza trasformarsi. I nitrati sono sali solubilissimi come il cloruro e il solfato ammonico ed è probabile che abbiano un'azione come veicoli momentanei d'assorbimento di alcune sostanze minerali (silice nel grano) o di sostanze umiche. Le leguminose fra tutte le piante sono quelle che posseggono una quantità più elevata di azoto (legumina). Dagli esperimenti di parecchi anni, risulta che i nitrati non esercitano alcuna azione sulle leguminose e perciò non concorrono alla formazione dell'azoto organico. Inoltre conviene osservare che le piante vivono in una atmosfera che contiene cica l'80 % d'azoto. Se si eliminano le piante che formano gli alcaloidi e i glucosidi azotati, in generale i principii elaborati dalle piante sono quasi tutti dei corpi ternari (grassi, zuccheri, gomme, celluloide, fecula, resine, essenze, amido, lignina, acidi organici, come l'acido citrico, malico, ossalico, ecc.).

I nitrati diminuiscono il quantitativo dei semi e producono uno sviluppo fogliaceo accentuato. Le barbabietole da zucchero coltivate coi nitrati ripiantate per ottenere i semi producono piante ricche di foglie ma poverissime di semi. È probabile che la perdita dei semi osservata nelle Marche, nella Romagna, nell'Emilia, nella cultura delle erbe da foraggio sia in rapporto con l'uso elevato dei nitrati e dei perfosfati.

L'azoto si deve somministrare alle piante allo stato organico, cioè allo stato fisso rappresentato dai residui organici di ogni specie che si debbono incorporare nel terreno in tempo opportuno.

Cultura minerale localizzata o alimentazione salina.

Principio. – Coltivare le piante con i sali minerali che le piante posseggono, usati in modo diretto, completo e localizzato.

Dottrina. – Le piante non sono costituite da acidi e da basi ma da combinazioni definite degli acidi con le basi cioè dai sali che esistono preformati nei vegetali. Tali sali si dividono in solubili (cloruro, solfato neutro, fosfati alcalini) e in sali insolubili (fosfati calcarei e magnesiaci). Il miscuglio di sali solubili ed insolubili nelle proporzioni contenute nella pianta alla raccolta costituisce il fertilizzante fisiologico per questa pianta. Le piante posseggono una proporzione diversa di sali solubili ed insolubili e per questa ragione si dividono: 1° in piante paritarie; 2° in piante a sali solubili; 3° in piante a sali insolubili secondo che la percentuale dei sali solubili è uguale, inferiore o superiore a quella dei sali insolubili.

Ogni pianta possiede dal punto di vista pratico: *a*) il proprio fertilizzante calcolato sulla composizione ponderale dei propri sali; *b*) la tecnica dell'uso localizzato con la mano o con le macchine; *c*) la propria dose all'ettaro; *d*) l'epoca dell'impiego semplice o ripetuto.

La dose all'ettaro è in rapporto con la totalità dei sali fisiologici contenuti in quella parte della raccolta che si desidera, p. es., granella (cereali), radici (barbabietole), tuberi (patate), steli (lino, canapa), foglie (tabacco) e così di seguito.

Una raccolta di grano calcolata a venti quintali l'ettaro possiede (granella) 36 kg. di sali fisiologici. Basterà quindi mischiare da 36 a 50 kg. di sali fisiologici al quantitativo di grano che si semina in un ettaro per avere una raccolta più elevata e di migliore qualità di quella fornita, a parità di condizioni, da un altro ettaro che abbia ricevuto in copertura da 500 a 600 kg. di concimi attuali (superfosfato, nitrati, sali impuri di potassio). Praticamente un vagone di 10 tonnellate di concimi ordinari basta per 15 dici o venti ettari di una cultura a grano, mentre un vagone di 10 tonnellate di fertilizzanti fisiologici basta per circa 300 ettari.

I sali fisiologici solubili posti a lato ai semi formano con l'umidità del suolo, delle soluzioni saline che permettono l'assorbimento immediato delle

sostanze umiche necessarie allo sviluppo della pianta. E siccome le soluzioni saline si estendono attorno al seme, così si osserva che le piante presentano un apparato radicale molto sviluppato. Nella prima fase vegetativa i fertilizzanti fisiologici aumentano lo sviluppo sotterraneo delle piante. I semi conservano per un tempo più o meno lungo le proprie riserve. Non vi è perdita dei sali solubili perchè mentre questi per l'umidità del suolo sono spinti verso la profondità del terreno, le radici, avide di nutrimento, si sforzano a raggiungerli per impadronirsene. I sali insolubili passano nell'ultima fase vegetativa per concorrere alla formazione dei semi. La cultura minerale localizzata costituisce *un vero e proprio alimento salino delle piante e deve considerarsi come un complemento della nutrizione organica.*

La cultura organica.

Gli agricoltori di tutti i tempi e in tutti i paesi hanno constatato che per aumentare i raccolti era necessario di incorporare nel suolo i detriti organici di ogni sorta. Tale pratica secolare si riassume (come io credo) nell'aforisma *organicum ex organico*. Però Liebig ritenne: *a*) che l'*humus* non rappresentava un alimento organico per le piante, ma esercitava solamente un'azione fisica sul suolo; *b*) che la fertilità del suolo dipendeva dalla ricchezza in sostanze minerali utili alla vegetazione; *c*) che le ceneri solo delle piante erano utili per la vegetazione.

Moltissimi osservatori hanno cercato di provare che dei semi posti in alcune soluzioni saline potevano sviluppare piante adulte. Io ho ripetuto tali esperienze senza alcun risultato. Del resto nessun osservatore ha visto che le piante nate in soluzioni saline potevano formare semi germinabili. Nessun osservatore ha mai descritto che semi nati da piante coltivate in liquidi nutritizi, posti, dopo la germinazione, nelle soluzioni saline abbiano sviluppato nuove piante.

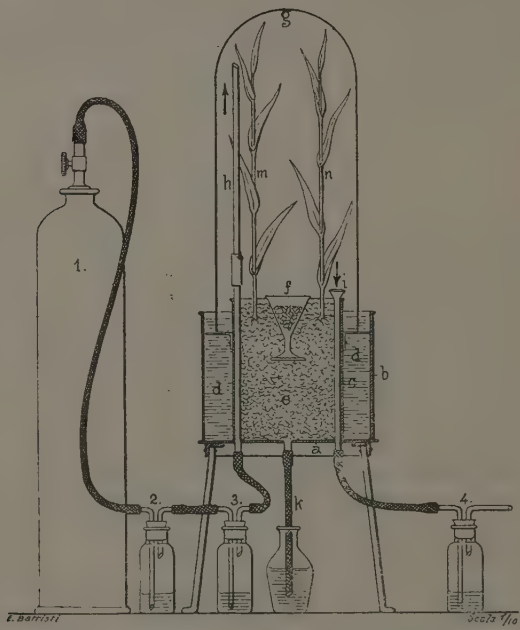
Riesce molto difficile definire esattamente in che cosa consista il mondo organico e in che cosa consista il mondo minerale.

Si può ritenere che un principio che trovasi in un un essere vivente, ma che non si riscontri nel mondo esterno, sia di natura organico. Per esempio, i corpi grassi che si trovano negli organismi animali e vegetali sono costituiti da C. H. O. Ma l'H. e l'O. comunque combinati con C. sono sempre d'origine esterna cioè minerale. I corpi quaternari composti di C. H. O. N. non si trovano nel mondo esterno, però l'H., l'O., l'A., comunque combinati con C. si trovano nel mondo esterno.

Io da parecchi anni cerco di dimostrare che il carbonio dei corpi ternari e dei corpi quaternari (Carbonio plastico = Cp.) è diverso da carbonio (C) dei carbonati minerali di ogni provenienza.

In una prima serie di esperienze (« Bulletin de la Société Chimique de France », 4ᵉ série, t. 25, p. 658, 1919) io ho dimostrato che dei semi di

grano posti sopra del cotone imbevuto di acqua di calce, in un'atmosfera del tutto sprovvista di anidride carbonica, potevano germinare e formare delle foglie completamente provviste di clorofilla. La vita delle piantine durò quanto le riserve dei semi lo permettevano, cioè dai 60 ai 70 giorni. In una seconda serie di esperienze io ho cercato di far vivere delle piantine di mais (*zea mais*) in piena terra e in un'atmosfera priva di anidride carbonica.



Apparecchio per dimostrare la nascita e lo sviluppo delle piante con formazione di clorofilla in una atmosfera sprovvista di anidride carbonica.

a. Piano dell'apparecchio; *b*. cilindro esterno; *c*. cilindro interno; *d*. acqua di calce; *e*. terra fertile; *f*. bicchiere con potassa; *g*. campana di vetro; *h*. tubo per l'entrata dell'O; *i*. tubo per l'uscita dell'O; *k*. tubo di scolo; *m*.-*n*. piante di mais.

1. – Tubo di O.; 2-4. – barbottori con potassa; 3. – barbottore con acqua di barite.

Ho impiegato per tale esperienza un apparecchio speciale (vedi disegno). Sopra un piatto di ferro zincato di 40 cm² erano saldati due cilindri ugualmente di ferro zincato ma di altezza e diametri differenti. Il cilindro esterno era alto 30 cm. e largo 30 cm. Il cilindro interno era alto 33 cm. e largo 26 cm. Rimaneva quindi fra i due cilindri uno pazio di 4 cm. che si poteva riempire con acqua di calce.

All'altezza di 25 cm. dalla base si trovavano tre linguette di ferro zincato disposte ad una distanza di 10 cm. l'una dall'altra e che collegavano fra loro i due cilindri. Tali linguette servivano di sopporto ad una campana di vetro alta 75 cm. Il cilindro interno possedeva due tubi di rame opposti l'uno all'altro, ciascuno del diametro di un cm. I due tubi erano lunghi 37 cm. di cui 4 cm. sporgevano fuori della base dell'apparecchio, costituendo così due tubi esterni, l'uno A e l'altro B. Il tubo A serviva per il passaggio continuo di giorno e di notte dell'O.

L'O. entrava nell'apparecchio bolla a bolla dopo aver attraversato prima una soluzione concentrata di potassa e dopo una soluzione di acqua di barite che serviva da indicatore, cioè per mostrare che l'O. era esente di CO_2. Il cilindro interno *c* era riempito di terra fertile *e*, nel centro sprofondato nella terra si trovava un bicchiere a calice *f* riempito per metà di potassa. Un tubo di vetro *h* era attaccato al tubo A e giungeva fin quasi alla cupola della campana di vetro. L'O. era eliminato per il tubo *i* la cui estremità situata fuori dell'apparecchio era in rapporto con un tubo barbottone riempito di potassa 4.

Due semi di mais germinati, che pesavano prima della germinazione 57 cgr., furono situati a 3 cm. di profondità nella terra. Dopo 7 od 8 giorni cominciarono le piantine a nascere e seguitarono a crescere con foglie larghe e verdi fino a raggiungere al 60° giorno l'altezza della campana di vetro e a ricurvarsi. Quest'apparecchio con le relative piante venne esposto in Roma all'Istituto Internazionale di Agricoltura dal 26 maggio al 1° giugno 1927 in occasione del XIII Congresso Internazionale di Agricoltura.

Al 60° giorno le piante vennero tagliate a fior di terra. Esse pesavano nell'insieme, senza le radici, 50 gr. Vennero seccate alla stufa ad un peso costante. Il residuo secco era di *nove grammi e trentadue centigrammi.*

Se dai 9.32 gr. si tolgono i 57 cgr., peso dei semi, si ha un residuo di gr. 8.75. Quindi i due semi di mais, escluse le radici, hanno ciascuno formato *quattro grammi e mezzo* circa di parte organica, dedotta dalle riserve umiche della terra fertile contenuta nell'apparecchio.

Una cassetta di vegetazione con due piantine dello stesso granturco nate da due semi che pesavano nell'insieme 58 cgr. al 60° giorno hanno dato due piante che pesavano 52 gr. con un residuo secco di 9 gr. e 25 cgr.

Ne segue: 1° Che ogni germinazione, nascita e formazione di clorofilla può farsi nelle piante senza l'intervento dell'anidride carbonica dell'aria; 2° Che le piante non possono sdoppiare l'anidride carbonica dell'aria e fissarne il carbonio; 3° Che vi è una differenza profonda fra il carbonio dell'anidride carbonica dell'aria e quello dei carbonati minerali e il carbonio dei tessuti viventi o carbonio plastico (Cp.).

Chimica organica. — *Alcuni derivati solfonici di composti non saturi* [1]. Nota di A. Quilico e E. Fleischner, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Per l'introduzione del gruppo solfonico nei composti non saturi, non sono noti dei metodi diretti di applicazione generale, e il numero dei derivati conosciuti è molto scarso. È noto che l'acido solforico concentrato reagisce con l'etilene e i suoi omologhi alifatici, per dare degli acidi alchilsolforici, mentre per i suoi derivati aromatici, agisce nella maggior parte dei casi da polimerizzante, come si verifica per lo stirolo [3], per l'anetolo [4], per l'isosafrolo [5] e molti altri derivati allilici e propenilici. In qualche caso, si ottengono in un secondo tempo i derivati solfonici dei prodotti di polimerizzazione.

Migliori risultati non si ottengono con altri reattivi: ad es., i bisolfiti alcalini in soluzione acquosa, senza azione sullo stirolo a 100°, lo polimerizzano a 120° con formazione di piccole quantità di β-feniletilsolfonati alcalini [6].

Energica azione polimerizzante hanno pure l'acido clorosolfonico e l'anidride solforica.

Uno di noi ebbe altra volta occasione di osservare [7], che l'acido aminosolfonico, $NH_2 \cdot SO_3H$, si dimostra un eccellente agente di solfonazione per l'anetolo, che trasforma con un rendimento di circa l'80 % del teorico nel sale di ammonio di un acido solfonico non saturo, a molecola semplice, contenente questo gruppo nella catena laterale. In questo lavoro era anche accennato il probabile meccanismo della reazione, che nel caso dell'anetolo si può formulare:

$$CH_3OC_6H_4-CH=CH-CH_3 \xrightarrow[HO-SO_2-NH_2]{+} \left[CH_3OC_6H_4-\underset{HO}{\underset{|}{CH}}-\underset{SO_3NH_2}{\underset{|}{CH}}-CH_3\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow CH_3OC_6H_4-CH=\underset{SO_3NH_4}{\underset{|}{C}}-CH_3$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.
(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.
(3) Berthelot, « Bl. », 2, p. 296 (1866).
(4) Cahours, « A. », 41, p. 63 (1842).
(5) G. M. Robinson, « J. Chem. Soc. », 107, p. 267 (1915).
(6) v. Miller, « A. », 189, p. 340 (1877).
(7) A. Quilico, « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, vol. VII, I sem., p. 141 (1928).

Per stabilire se questa reazione fosse suscettibile di estensione ad altri derivati non saturi, abbiamo preso in esame altri eteri fenolici propenilici, come l'isosafrolo e l'isoapiolo, i corrispondenti isomeri allilici, safrolo e apiolo, e un idrocarburo etilenico, lo stirolo. Abbiamo così potuto constatare che la reazione è applicabile con discreti rendimenti ai derivati propenilici ed allo stirolo, mentre non ha luogo con i derivati allilici, che rimangono inalterati o resinificano parzialmente.

Questo, come l'attitudine a fornire dei picrati, la facilità di reagire con i diazocomposti [1], è un altro esempio della influenza della coniugazione sull'attività del doppio legame della catena laterale.

I derivati solfonici così ottenuti sono abbastanza stabili, dànno cloruri ed ammidi facilmente cristallizzabili, e contengono ancora il doppio legame della catena laterale: scolorano infatti anche a freddo la soluzione di permanganato, e gli acidi liberi riducono a caldo la soluzione ammoniacale di nitrato d'argento.

L'ossidazione con permanganato alcalino permette di stabilire che il gruppo solfonico si trova nella catena laterale; si ottengono infatti quantitativamente dai derivati dello stirolo, dell'isosafrolo e dell'isoapiolo, rispettivamente acido benzoico, piperonilico, apiolico, accanto ad acido solforico, e per i due ultimi, ad acido acetico.

Il gruppo solfonico è unito all'atomo di carbonio della catena laterale, come abbiamo potuto dimostrare per gli acidi stirol e anetolsolfonici, trasformandoli nei corrispondenti derivati carbossilici per fusione con formiato di sodio.

Abbiamo così ottenuto dal primo l'acido cinnamico, dal secondo un acido p. f. 154° che abbiamo identificato con l'acido α-metil-p. metossicinnamico di Perkin [2]:

$$CH_3OC_6H_4—CH=C(CH_3)COOH.$$

Ciò permette di attribuire ai derivati ottenuti la costituzione:

$C_6H_5—CH=CH—SO_3H$ (I)

$CH_3OC_6H_4—CH=C(CH_3)SO_3H$ (II)

$CH_2O_2:C_6H_3—CH=C(CH_3)SO_3H$ (III)

$(CH_3O)_2CH_2O_2:C_6H—CH=C(CH_3)SO_3H$ (IV)

Il primo di questi composti è particolarmente interessante per la sua costituzione analoga a quella dell'acido cinnamico, ed è probabile che anche per questi acidi si verifichino i ben noti fenomeni di isomeria.

(1) A. Quilico e M. Freri, «Gazz. Chim. It.», vol. 58, p. 380 (1928).
(2) W. Perkin, «Soc.», *31*, p. 411 (1877).

La reazione tra l'acido aminosolfonico e i composti non saturi, mette bene in evidenza anche per la solfonazione, quanto dimostrò il Wieland per la nitrazione [1] e cioè come non esista nessuna differenza *qualitativa* tra i doppî legami del nucleo benzenico e quelli oleffinici delle catene laterali; la differenza si ha solo nel grado di attività. Il benzene, con il suo sistema di valenze parziali in equilibrio, non viene solfonato dall'acido amminosolfonico; introducendo un gruppo ossialchilico (caso dell'anisolo e degli altri eteri fenolici), si ha l'attivazione dei doppî legami coniugati e l'addizione ha luogo in 1 : 4 con formazione del derivato solfonato in para [2]. Se introduciamo nell'anisolo una catena propenilica in para (caso dell'anetolo e degli altri eteri propenilici), o nel benzene un residuo vinilico (stirolo), il doppio legame della catena laterale diviene il più attivo e su di esso ha luogo l'addizione e la solfonazione.

Chiariremo ulteriormente questa reazione esaminando il comportamento dell'etilene.

Parte sperimentale.

Acido stirolsolfonico (β–fenilvinilsolfonico) $C_6H_5 — CH = CH — SO_3H$. — Si riscaldano a bagno d'olio in un palloncino, alla temperatura di ebollizione dello stirolo, gr. 10 (1 : 10 di gr. mol.) di stirolo di fresco distillato, con gr. 8 (teorico 9.7), di acido amminosolfonico accuratamente seccato e polverizzato. L'acido, dapprima polverulento, si rapprende in una massa soffice, aumentando considerevolmente di volume; si agita frequentemente la massa per evitare la formazione di grumi duri che impediscono il procedere della reazione. Dopo un'ora di riscaldamento a 150°, tutto il contenuto del pallone è divenuto solido: si lava con benzolo e con etere per eliminare lo stirolo inalterato, si scioglie in poca acqua il sale ammonico, si neutralizza con ammoniaca la soluzione, si estraggono con etere le piccole quantità di resine formatesi, e si concentra a bagno maria. Per raffreddamento si ottiene una pasta cristallina di sale ammonico. Resa gr. 12 di sale grezzo seccato all'aria su piastra porosa (teorico gr. 16.5 c. a.).

Il sale si purifica per ripetute cristallizzazioni dall'acqua: si ottiene così in scagliette bianche, molto solubili in acqua, abbastanza facilmente in alcool. Per riscaldamento carbonizza a 265°–270°.

Analisi:

gr. 0.1612	trovato NH_4	8.84 %
	calcolato per $C_6H_5C_2H_2SO_3NH_4$	8.96 %

(1) H. Wieland e E. Sakellarios, « Ber. », *53*, p. 201 (1920); « Ber. », *52*, p. 898 (1919).

(2) A. Quilico, « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, vol. VI, II sem., p. 512 (1927).

Il sale di sodio, $C_6H_5-C_2H_2-SO_3Na$, cristallizza in larghe scaglie madreperlacee, facilmente solubili in acqua.

Analisi del sale secco:

gr. 0.1188	gr. 0.0408 di Na_2SO_4	trovato Na	11.12 %
		calcolato per $C_8H_2SO_3Na$	11.15 %

Il sale di bario, dà scagliette bianche poco solubili in acqua fredda, abbastanza facilmente in acqua bollente.

Analisi del sale seccato a 120°:

gr. 0.1593	gr. 0.0738 $BaSO_4$	trovato Ba	27.26 %
		calcolato per $(C_8H_7SO_3)_2Ba$	27.27 %

Dal sale di bario, con la quantità calcolata di H_2SO_4 diluito si ottiene l'acido libero sotto forma di un liquido sciropposo, che per permanenza in essiccatore su P_2O_5 separa scagliette igroscopiche p. f. 55°-65° che carbonizzano sopra i 130°.

Il cloruro $C_6H_5-CH=CH-SO_2Cl$, si ottiene con resa quantitativa, mescolando a temperatura ordinaria il sale sodico ben secco con un leggero eccesso di PCl_5. Si completa la reazione con un breve riscaldamento a bagno maria, poi si versa in acqua ghiacciata. Il prodotto grezzo si ricristallizza dal benzolo. Scaglie madreperlacee di leggero odore gradevole p. f. 85°.

Analisi:

gr. 0.1295	AgCl gr. 0.1070	trovato Cl	20.40 %
		calcolato per $C_8H_7O_2SCl$	20.80 %

L'ammide corrispondente, $C_6H_5-CH=CH-SO_2NH_2$, ottenuta per ebollizione del cloruro con ammoniaca alcoolica, cristallizza in tavolette scintillanti, poco solubili in alcool anche a caldo, abbastanza in acqua bollente, dalla quale si ricristallizza. P. f. 140°.

Microanalisi:

gr. 0.00690	N corr. cm_3 0.4606	20° / 747 mm.	trovato	7.64 %
			calcolato per $C_8H_9O_2NS$	7.65 %

I sali e i derivati dell'acido stirolsolfonico mostrano una notevole analogia con i corrispondenti composti cinnamici, ciò che si può spiegare con la simile costituzione.

Ossidazione permanganica. — Si discioglie 1 gr. di sale sodico puro in 30 cm_3 di H_2O si alcalinizza con qualche goccia di NaOH e si riscalda all'ebollizione; si aggiunge a piccole porzioni una soluzione di $KMnO_4$

all'1 % fino a persistente colorazione rosea, si filtra dal biossido di manganese, si concentra a bagno maria: per acidificazione con HCl si ha un abbondante precipitato cristallino di acido benzoico, che ricristallizzato dall'H_2O bollente fonde a 120°. Alla stessa temperatura fonde la miscela con acido benzoico puro. Le acque madri dànno intensa reazione di acido solforico. Agli stessi risultati si giunge anche operando a freddo.

Fusione con formiato sodico. — Si riscalda cautamente a fiamma diretta in un crogiolino di nichel il sale sodico con il doppio del suo peso di formiato sodico secco, agitando continuamente fino a fusione completa della miscela. Si discioglie in poca acqua, si filtra e si acidifica con HCl; si forma subito un abbondante precipitato bianco, mentre si svolge SO_2. L'acido separato, ricristallizzato dall'acqua bollente fonde a 130°, ed alla stessa temperatura fonde la miscela con acido cinnamico; l'acido riduce anche a freddo il $KMnO_4$, dando intenso odore di aldeide benzoica.

Acido anetolsolfonico (β–fenil-parametossi–α–metilvinilsolfonico), $CH_3OC_6H_4-CH=C(CH_3)SO_3H$. — La preparazione e le proprietà di questo acido sono già state descritte in un'altro lavoro [1]; abbiamo confermata la costituzione data, trasformandolo nel corrispondente derivato carbossilico per fusione con formiato sodico.

Si riscalda fino a fusione la miscela di formiato e di sale sodico o meglio ammonico, protraendo il riscaldamento per un quarto d'ora. Si discioglie in acqua, si filtra e si acidifica con HCl: si ottiene un precipitato cristallino bianco grigio, non molto abbondante, che si ricristallizza dall'acqua e poi dall'alcool. Si ottiene così in tavolette p. f. 154°. L'acido riduce a freddo il $KMnO_4$ dando aldeide anisica e acido anisico. Le sue proprietà concordano con quelle dell'acido metil–p-metossicinnamico di Perkin, $CH_3OC_6H_4-CH=C(CH_3)COOH$, per il quale sono dati nella letteratura i punti di fusione 154° [2] e 157° [3].

Acido isosafrolsolfonico (β–fenil-3,4-metilendiossi-α–metilvinilsolfonico), $CH_2O_2 : C_6H_3-CH=C(CH_3)SO_3H$. — Da 16 gr. di isosafrolo (1/10 di gr. mol.) e 5 gr. di acido amminosolfonico (c. a 1/20 di gr. mol.), operando nelle condizioni specificate per lo stirolo si ottengono circa 8 gr. di sale ammonico secco. Il sale è facilmente solubile in acqua dalla quale si può ricristallizzare. Forma così scagliette bianche che carbonizzano verso i 240°.

Analisi del sale seccato a 120°:

gr. 0.1422	trovato NH_4	6.97 %
	calcolato per $CH_2O_2C_6H_3C_3H_4SO_3NH_4$	6.88 %

(1) A. Quilico, loc. cit.
(2) W. Perkin, «Soc.», *31*, p. 411.
(3) Wallach e Evans, «A.», *357*, p. 76.

Il sale di sodio, $CH_2O_2C_6H_3C_3H_4SO_3Na$, forma minuti cristalli bianchi, meno solubili in acqua del sale ammonico.

Analisi del sale seccato a 120°:

gr. 0.0590	gr. 0.0158 Na_2SO_4	trovato Na	8.61 %
	calcolato per $CH_2O_2C_6H_3C_3H_4SO_3Na$		8.77 %

Il sale di bario si ottiene in lunghi aghi appiattiti, contenenti acqua di cristallizzazione, che sfioriscono rapidamente all'aria. È poco solubile in acqua fredda, facilmente all'ebollizione.

Analisi del sale anidro:

gr. 0.1493	gr. 0.0556 $BaSO_4$	trovato Ba	21.92 %
	calcolato per $(CH_2O_2C_6H_3C_3H_4SO_3)_2Ba$		22.17 %

L'acido libero, $CH_2O_2C_6H_3-CH=C(CH_3)SO_3H$, si ottiene dal sale di bario con la quantità calcolata di H_2SO_4; svaporando la soluzione acquosa, si ottiene uno sciroppo che per raffreddamento si rapprende in scaglie madreperlacee. Il prodotto purificato per ricristallizzazione da etere acetico e seccato su P_2O_5 fonde a 81°-82°. Riscaldato oltre il suo punto di fusione si decompone con intensa colorazione violacea. Riduce a caldo il nitrato d'argento ammoniacale e il $KMnO_4$ anche a freddo.

Il cloruro, $CH_2O_2C_6H_3-CH=C(CH_3)SO_2Cl$, cristallizza dal benzolo in lamine incolore p. f. 86°.

Analisi:

gr. 0.0901	gr. 0.0487 AgCl	trovato Cl	13.37 %
	calcolato per $CH_2O_2C_6H_3C_3H_4SO_2Cl$		13.61 %

L'ammide, $CH_2O_2C_6H_3C_3H_4SO_2NH_2$, cristallizza dall'alcool in aghi appiattiti p. f. 180°.

Microanalisi:

gr. 0.00908	N corr. cm_3 0.482 (18° / 746 mm.)	trovato N	6.11 %
		calcolato per $C_{10}H_{11}O_4SN$	5.81 %

Ossidazione permanganica. — Si sciolgono 0.8 gr. di sale sodico in 30 cm_3 di H_2O, si alcalinizza con NaOH e si aggiunge, all'ebollizione, una soluzione di $KMnO_4$ fino a colorazione rosea. Si avverte durante l'operazione l'odore gradevole del piperonalio. Per filtrazione, acidificazione ed estrazione con etere si ottengono 0.2 gr. di acido piperonilico, che ricristallizzato dall'alcool fonde a 227°.

Nelle acque madri si trova acido acetico e acido solforico.

Acido isoapiolsolfonico (β-fenil-3,4-metilendiossi-2,5-dimetossi-α-vinilsolfonico) $CH_2O_2:(CH_3O)_2C_6H-CH=C(CH_3)SO_3H$. — Si aggiun-

gono 2 gr. di acido amminosolfonico finemente polverizzato a 6 gr. di isoapiolo, riscaldato a fiamma diretta in un palloncino, agitando continuamente. Il liquido, dapprima perfettamente fluido, inspessisce verso la fine dell'operazione, e per raffreddamento si rapprende in una massa cristallina dura di sale d'ammonio. Si eseguisce la purificazione nel modo più volte indicato, e per concentrazione si ottiene un liquido sciropposo nel quale si provoca la cristallizzazione per aggiunta di alcool. Resa gr. 3 di sale di ammonio. Scagliette madreperlacee solubilissime in acqua. Il sale di sodio è leggermente meno solubile. Dal sale di sodio secco e PCl_5 a temperatura ordinaria, si ottiene il cloruro corrispondente, sotto forma di un olio incoloro, facilmente solubile in benzolo; da questo con NH_3 alcoolica si ha l'ammide, che cristallizza dall'alcool in minute scagliette p. f. 179°-180°.

Microanalisi:

gr. 0.00552 N corr. cm³ 0.230 $\left\{\begin{matrix}20° \\ 746 \text{ mm.}\end{matrix}\right.$ trovato N . 4.76 %

calcolato per $C_{12}H_{14}O_6NS$ 4.67 %

L'ossidazione con permanganato alcalino, condotta nel modo più volte indicato, conduce ad acido acetico, acido solforico, e ad un acido poco solubile in acqua, p. f. 174° (ricristallizzato dall'acqua e dall'alcool), che abbiamo identificato con l'acido apiolico di Ciamician e Silber[1].

Farmacologia. — *Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica.* – II. *Calcio e farmaci convulsivanti* [2]. Nota di L. Scremin, presentata [3] dal Socio L. Sabbatani.

Nella Nota precedente, ho studiato come un aumento di ione K nel sangue modifichi la risposta del sistema nervoso ai farmaci convulsivanti che producono convulsioni di tipo stricnico per aumento della eccitabilità reflessa [4]. In questa riferirò i risultati di esperienze fatte aumentando nel sangue la concentrazione di ione Ca e iniettando contemporaneamente dei farmaci convulsivanti.

L'animale adoperato e la tecnica son gli stessi delle esperienze precedenti: si iniettavano nella vena auricolare di conigli di medio peso soluzioni miste di $CaCl_2$ e di sostanze convulsivanti delle quali era stato già accuratamente stabilita la dose minima attiva per quella via. La quale ha i

(1) « Ber. », 21, p. 1624 (1888).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Farmacologia di Padova.

(3) Nella seduta del 1° giugno 1928.

(4) « Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei, Classe di Sc. fisiche, matem. e naturali », vol. V, Serie 6ª, 1° sem. 1927, pp. 1011–1016.

vantaggi già segnalati in un lavoro precedente [2] a proposito dell'azione combinata delle sostanze convulsivanti, che rende sicura l'introduzione in circolo della dose intera adoperata e la contemporaneità dell'azione con il minimo possibile di quelle variazioni di stato chimico del sale iniettato che in un secondo momento abbassano la concentrazione del ione Ca per le reazioni con i fosfati e i bicarbonati del sangue. Furono adoperate: stricnina, nicotina, tebaina, cocaina, narcotina, idrastina, laudanina, sotto forma di sali (cloridrato, meno per la stricnina di cui fu adoperato il nitrato), esetone, caffeina, piramidone, idrochinone; tutti farmaci che danno convulsioni immediate, molto differenti e per costituzione chimica e per sede di azione. Si iniettava di ognuno di essi una dose sicuramente convulsivante, e cioè di poco superiore a quella minima già stabilita (in modo tuttavia che la lieve eccedenza di dose fosse proporzionale alla dose minima dei singoli farmaci), insieme a dosi crescenti di $CaCl_2$ in soluzione più o meno concentrata secondo i casi. Tenendo così fissa la dose di ogni sostanza, è facile trovare per ognuna di esse la dose minima di $CaCl_2$ che ne impedisce l'effetto convulsivante.

Tabella I.

Sostanze convulsivanti	Grammi equivalenti × 10^8 per kg. di coniglio			Rapporto $e = \frac{d}{c}$
	di sostanza convulsivante		di $CaCl_2$ che impedisce l'accesso convulsivante	
	minima attiva	adoperata		
a	*b*	*c*	*d*	*e*
Stricnina . . .	47	51	1270	25.300
Nicotina . . .	670	722	> 163000	> 225
Tebaina	1200	1340	4000	2.980
Cocaina	1700	2160	> 344000	> 159
Narcotina . . .	5000	5890	25000	4.240
Esetone	5600	6100	4000	0.650
Idrastina . . .	6000	6400	75000	11.700
Laudanina . . .	23000	24500	4320	0.176
Caffeina . . .	36000	39100	5300	0.135
Piramidone . .	40000	43000	1000	0.023
Idrochinone . .	70000	72700	150000	2.060
—	—	—	[300000] (1)	—

(1) Dose media alla quale si può avere la morte per $CaCl_2$ per iniezione endovenosa ad alta velocità. Cfr. Cazzola, « Archivio di Fisiologia », vol. XI, 1913, p. 90.

(1) « Archivio di Scienze Biologiche », vol XII, 1928, pp. 262-276.

Questi valori sono segnati nella Tab. I, col. *d*, dove le sostanze sono disposte in ordine decrescente dell'attività loro; nella col. *c* sono segnate le dosi adoperate in una serie sperimentale per un singolo farmaco (valori moltiplicati per 10^8); nella col. *e* è segnato il rapporto: $e = \frac{d}{c}$ fra le dosi minime di $CaCl_2$ necessarie a toglier l'accesso e la dose di farmaco adoperato, cioè la dose di sale di calcio in grammi equivalenti per kg. necessaria a togliere l'effetto di un grammo equivalente di sostanza convulsivante. Si osservi che in tutti i casi nei quali l'accesso è stato impedito, le dosi di Ca adoperate erano lontane dalla minima letale, che dai dati di Cazzola, a velocità di iniezione e massima concentrazione da me adoperata, si calcola in media di gr. equivalenti 0.003 per kg. (1).

Esaminando i dati della col. *e* si rileva che il calcio impedisce l'accesso convulsivo a dosi molto diverse: le sostanze risentono molto variamente della sua azione; sensibilissimo è il piramidone, assai poco la cocaina e la nicotina, anche arrivando a dosi molto alte che non ho creduto opportuno superare per non andare incontro a fatti tossici da Ca sul cuore e sul centro respiratorio.

È noto che il ione calcio ha una azione depressiva sul sistema nervoso, sulla corteccia e sul midollo; varie condizioni normali e fatti morbosi sono stati messi in rapporto con la variazione di concentrazione del Ca nell'organismo. Fra le più recenti indagini ricordiamo quelle di Glaser (2) dimostranti come nel sonno ipnotico diminuisca la concentrazione di Ca nel sangue circolante, cosa che Cloetta e Thomann dimostrarono per il sonno da somnifen, per l'anestesia da etere e da alcool (3). Recentemente Demole ha poi osservato che iniezioni di piccole dosi di $CaCl_2$ nel mesencefalo (infundibolo) dei gatti, determina sonno più o meno profondo e interpreta la diminuzione di calcio nel sangue durante il sonno ammettendo che la concentrazione di calcio aumenti in corrispondenza di quella zona del mesencefalo dove appunto sarebbero i cosidetti centri del sonno che più opportunamente si dovrebbero dire centri della veglia (4).

Quanto al midollo spinale, è noto, dalle esperienze di Sabbatani, che per il primo lo applicò direttamente, che il calcio può dare paresi e paraplegia completa di moto e di senso a dosi piccole, che mai per iniezione endovenosa riescirebbero a dare alcun disturbo (5). Fu poi confermato da

(1) « Archivio di Fisiologia », vol. XI, 1913, p. 90. Le mie iniezioni erano fatte in media in 20″–25″.

(2) « Klinische Wochensch. », 1924, n. 33, p. 1492.

(3) « Archiv. f. experim. Pathol. u. Pharmakologie », 103 Bd., 1924, p. 260 sgg.

(4) Ibid., 120 Bd., 1927, p. 229 sgg.

(5) « Memorie della Accademia Reale delle Scienze di Torino », Serie II, to. LI, 1901, pp. 281 sgg.

Gerlach sui conigli neonati che il calcio oltre un determinato valore di concentrazione aumenta il tempo di latenza dei reflessi e porta infine alla paralisi [1], e Weed ha visto, irrigando lo spazio durale dei gatti con soluzioni fisiologiche prive di calcio, apparire fenomeni convulsivi negli animali che non morivano durante o immediatamente dopo le irrigazioni [2].

Posta questa attività moderatrice del calcio sul sistema nervoso, era naturale si dovesse ricercare se il calcio aumenta la soglia di eccitabilità ai farmaci convulsivanti, ma a questo proposito sono scarse le ricerche. Zanda fin dal 1902 sperimentò l'azione combinata del calcio e stricnina, sia introducendo nello speco vertebrale dei cani i due farmaci, sia introducendo l'uno di essi nello speco e iniettando l'altro sottocute: concluse che sulle sezioni di midollo dove il calcio ha agito paralizzando, la stricnina è priva di azione, ma che nell'animale già in preda a tetano stricnico, dosi anche molto alte di calcio per iniezione endovenosa riescono inefficaci [3]. Più tardi Yagi, studiando nelle rane l'azione del calcio sulla stricnina, caffeina, picrotossina, fenolo, trovò che il calcio impedisce gli accessi tetanici dovuti alle prime ed è senza effetto sul fenolo e sulla picrotossina [4], ma per le condizioni sperimentali in cui si poneva, l'interpretazione dei dati ai quali è giunto è difficile [5].

Finalmente nel 1914, Januschke e Masslow, per ricercare se i sali di Ca impediscono sui conigli e cavie l'insorgere di convulsioni da cocaina, canfora, picrotossina, stricnina, introducevano prima o cloruro o lattato per iniezione sottocutanea o endovenosa (o per bocca) a varie riprese, in 2-4 ore (o in 3-4 giorni) e successivamente a distanza di parecchi minuti, somministravano i convulsivanti per lo più per via endovenosa. Concludevano che il Ca anche in alte dosi non impedisce l'azione dei convulsivanti, qualunque sia la sede loro di azione [6]. Per spiegarci la differenza tra questi risultati e quelli ai quali io sono pervenuto, basta pensare alle differenti condizioni sperimentali. Come fu dimostrato già varie volte (Heubner e Rona, Hetényi, Dadlez [7]), il contenuto del sangue in calcio, dopo iniezioni anche di grandi dosi di calcio, in poco tempo ritorna alla norma; di più, dopo molti minuti dall'iniezione il calcio iniettato come sale molto dissociato ed attivo, passa a forma meno dissociata ed attiva, come si accennò

(1) « Biochem. Zeitschr. », 1914, Bd. 61, pp. 136-137.

(2) « The Journal of Pharmacology a. exper. Therapeutics »; vol. XIII, 1919; p. 317 sgg.

(3) « Archivio di Farmacologia e Terapeutica », vol. X, 1902, fasc. 3-4.

(4) « Archives Intern. de Parmacodynamie et de Thérapie », vol. XXII, 1912, p. 259 sg.

(5) Ancor più riesce difficile interpretare quantitativamente le esperienze di *Pic, Bonnamour e Raymond*, fatte egualmente sulle rane con Ca Cl_2 e stricnina. Cfr. « C. R. Soc. Biologie », v. 85, 1921, p. 96 sg.

(6) « Zeitschrift d. Ges. experim. Medizin », III Bd. p. 149 sgg., 1914.

(7) Dadlez, « Biochem. Zeitschr. », 171 Bd. p. 146, 1926.

su parlando delle ragioni per le quali nelle mie esperienze il sale di calcio e i convulsivanti erano iniettati contemporaneamente. Solo così si può giungere a risultati sicuri e confrontabili.

Nelle mie esperienze il rapporto *e* è inferiore all'unità in quattro casi: piramidone, caffeina, laudanina, esetone; dell'ordine dell'unità in tre casi: idrochinone, narcotina, tebaina; dell'ordine delle decine in due casi: idrastina e stricnina; dell'ordine delle centinaia in due casi ancora: nicotina e cocaina. L'azione inibitrice del calcio sulle varie sostanze, non può dipendere, per quanto sappiamo, da una reazione chimica che è esclusa dal valore di *e* così grandemente variabile.

Per spiegarci perchè a togliere l'azione dei singoli farmaci in dosi equipollenti riguardo all'effetto farmacologico, occorrano dosi tanto diverse di calcio, si possono prospettare diverse ipotesi. Si può pensare che esista un rapporto fra la dose minima convulsivante di un farmaco e la quantità di calcio necessaria a impedire le convulsioni, ma la lettura dei risultati nell'ordine stesso con cui sono disposti (ordine di attività decrescente dei farmaci convulsivanti) basta a persuaderci che un rapporto simile non esiste: l'esetone e la narcotina che hanno pressochè eguale attività farmacologica richiedono dosi di calcio assai diverse perchè venga impedito l'effetto; le convulsioni da nicotina che si ottengono con dose otto volte più piccola della narcotina, non sono impedite da una dose di $CaCl_2$ 53 volte più grande.

Si può ancora supporre che varii la dose del calcio col variare della sede di azione dei singoli convulsivanti o che a parità di sede di azione esista un rapporto fra dose di calcio e struttura chimica del convulsivante. Ma queste ipotesi non si conciliano col fatto che le convulsioni da stricnina e caffeina dovute le une e le altre ad aumento della eccitabilità delle corna posteriori sono impedite da dosi di calcio assai diverse; che, d'altra parte, per impedire quelle da esetone, che agisce sulla corteccia [1] occorre una dose di calcio di poco superiore a quella necessaria per la stricnina.

Resta dunque da pensare che anche per le sostanze che agiscono sugli stessi elementi anatomici e determinano le stesse sindromi, i meccanismi di azione sieno diversi e che su questi il calcio possa agire da inibitore a concentrazioni diverse. Dire a quali variazioni chimiche e chimico-fisiche nelle cellule nervose siano subordinate le variazioni funzionali di cui si parla è certamente prematuro: ci troviamo in un ordine di idee analogo a quello espresso da Bremer [2] dal punto di vista fisiologico intorno al meccanismo di azione della stricnina: non quello che ci è noto sul funzionamento del

(1) Alle dosi adoperate. Cfr. Schoen, « Arch. exp. Path. u. Pharmak ». 1926, Bd. 113, pp. 259-267.

(2) « Archives Internationales de Physiologie », 1925, vol. XXV, p. 131.

sistema nervoso può servire a dare una interpretazione razionale del determinismo della sindrome stricnica, ma piuttosto l'analisi dell'azione dell'alcaloide potrà essere un mezzo per arrivare a illuminare la fisiologia del sistema nervoso. Così qui i dati sperimentali ottenuti indicano varii modi di reazione farmacologica fra farmaco, cioè, e protoplasma nervoso, ancorchè la materialità della sintomatologia esteriore sia in fondo la stessa.

Riguardo all'effetto (convulsioni), i farmaci di cui si parla sono equipollenti, ma riguardo alla natura dell'intimo processo farmacologico non c'è equipollenza. Se ci fosse la stessa dose di calcio dovrebbe impedire l'effetto (accesso convulsivo) per tutti.

Mineralogia. — *La proclonte del Monte Rosso di Verra (gruppo del Monte Rosa).* Nota di T. Carpanese, presentata dal Corrisp. G. Boeris.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Frequenza delle mitosi nel cuore embrionale di pollo a vari stadi di sviluppo e nelle colture "in vitro" dello stesso materiale* [1]. Nota di O. M. Olivo ed E. Slavich, presentata [2] dal Socio G. Levi.

I fenomeni di accrescimento sono sempre molto complessi perchè associati per lo più ai fenomeni di differenziazione istologica; inoltre se la base morfologica principale dell'accrescimento è la moltiplicazione cellulare con essa possono cooperare altri fattori, quale l'aumento in volume delle singole cellule, la produzione di sostanze intercellulari, ecc. Anche in questo campo di ricerche si sentì la necessità di integrare il metodo di indagine descrittiva col metodo sperimentale, non soltanto per l'accrescimento globale di un organismo (modificando i vari fattori che lo determinano) ma anche e specialmente per quello che potremmo dire il fenomeno elementare di accrescimento dei singoli tessuti e cellule. Ed anche qui il metodo delle colture *in vitro*, secondo la tecnica di Burrows e Carrel, si presentò di una utilità grandissima. Basti ricordare uno dei risultati più importanti ottenuti in questo campo dallo stesso Carrel, la dimostrazione cioè dell'importanza che hanno i liquidi circolanti sull'accrescimento dei tessuti: dimostrò che il siero di animali vecchi esercita un'azione inibente l'accrescimento delle

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto anatomico della R. Università di Torino.
(2) Nella seduta del 1° giugno 1928.

colture; l'energia di accrescimento delle stesse è inversamente proporzionale all'età dell'animale da cui fu prelevato il siero.

A noi è parso utile iniziare lo studio comparato dell'accrescimento del tessuto cardiaco *in vivo* e *in vitro* da un lato per precisare le modalità di accrescimento da un punto di vista puramente descrittivo in tutti e due i casi, dall'altro canto per analizzare, modificando opportunamente le condizioni sperimentali, i singoli fattori che intervengono nel fenomeno e la loro varia importanza. Carrel studiò l'accrescimento delle colture basandosi sul loro aumento in superficie, che è proporzionale all'accrescimento delle cellule. Questo dato però non ci poteva servire per confronto con l'accrescimento col tessuto normale, come pure non si poteva ricorrere al metodo delle pesate o al calcolo del volume delle colture perchè misure soggette a troppe cause d'errore in questo materiale. Il metodo quantitativo più esatto per l'accrescimento tanto nel tessuto normale che in quello coltivato *in vitro*, ci sembrò quello di stabilire sulle sezioni microtomiche il coefficiente mitotico (rapporto tra numero di cellule in mitosi e numero di cellule in riposo, Champy). Per il cuore in via normale di sviluppo, dal confronto dei seguenti dati: modificazione del coefficiente mitotico, aumento ponderale dell'organo, e densità dei nuclei nei vari stadi, si potrà stabilire: 1° quale correlazione esista tra coefficiente mitotico e accrescimento; 2° in quale momento e in quale misura intervenga l'accrescimento del cuore per ipertrofia dei singoli elementi; 3° se ci sia, e a partire dal qual momento e in qual misura, moltiplicazione di nuclei per divisione diretta.

Abbiamo fissato di due in due giorni il cuore di embrione di pollo a partire dal secondo giorno di incubazione sino al decimo giorno dopo la nascita. I cuori colorati *in toto* col carminio venivano tagliati in fette di 8 μ di spessore. Ogni tante sezioni si sceglieva un campo microscopico determinato, e alla camera lucida si disegnavano tutti i nuclei in riposo e tutte le mitosi (si consideravano in mitosi le cellule dal momento della scomparsa della membrana nucleare sino alla ricostituzione dei due nuclei figli). Dalla somma totale dei dati delle varie sezioni di ogni cuore si calcolava il coefficiente mitotico medio. Rappresentando graficamente i valori su un sistema di coordinate si ottenne la curva che rappresenta il variare del coefficiente mitotico dell'accrescimento col progredire dello sviluppo. Analogamente i frammenti di cuori di varia età, coltivati *in vitro* (plasma e succo embrionale), trapiantati ogni due giorni in un nuovo mezzo di coltura, venivano fissati a intervalli regolari di 6 in 6 ore, colorati *in toto* e tagliati in serie al microtomo. Si faceva anche qui il conteggio dei nuclei in riposo e delle mitosi in un campo microscopico di ogni seconda sezione, e si determinava così per le colture il coefficiente mitotico di 6 in 6 ore. Nelle colture ci siamo limitati per il momento a stabilire la percentuale di mitosi nell'espianto, nella parte cioè della coltura ancora riconoscibile come tessuto, e non fra le cellule migrate, dove si hanno certamente valori di-

versi. Ricerche di G. Levi e W. ed M. Lewis hanno dimostrato che la durata della mitosi nelle colture è indipendente dal mezzo nutritivo della coltura come pure dall'origine dei tessuti coltivati; la durata della mitosi oscilla sempre, a una data temperatura, entro gli stess ilimiti tanto per cellule di materiale prelevato da embrioni di 3 giorni che di 15 giorni di incubazione, e siano esse coltivate in plasma puro o diluito con succo embrionale o reso ipotonico con aggiunta di acqua distillata. È legittimo ammettere che lo stesso valga per le mitosi dei tessuti in accrescimento durante lo sviluppo normale nell'uovo. Perciò il coefficiente mitotico che noi abbiamo calcolato per i vari stadi di sviluppo del cuore embrionale e i vari momenti di vita di una coltura è proporzionale alla velocità di accrescimento, se per il momento non teniamo conto del possibile aumento di volume dei singoli elementi (ipertrofia) e all'eventuale presenza di divisioni dirette dei nuclei.

Abbiamo avuto i seguenti risultati per il cuore durante il suo normale sviluppo:

Cuore di giorni di incubazione	Num. nuclei in riposo	Num. mitosi	Coefficiente mitotico
2	5501	124	22.54 ‰
3	9236	196	21.22
5	26316	445	16.91
7	12752	192	15.05
9	18364	152	8.29
11	15663	157	10 02
15	13529	59	4.36
19	15946	45	2.82
21	12436	15	1.21
10 giorni dopo la nascita		0	0

La figura 1 è la rappresentazione grafica di questi valori.

La velocità di accrescimento diminuisce gradualmente con abbastanza regolarità da un massimo all'inizio dello sviluppo sino a zero al 10° giorno dopo la schiusa.

Nelle colture di cuore del 7° giorno di incubazioni si sono avuti i seguenti valori:

Ore di coltura	Num. nuclei in riposo	Num. mitosi	Coefficiente mitotico
	Primo trapianto		
6	6993	41	5.86 ‰
12	8354	45	5.38
18	5001	41	8.20
24	5571	77	13.82
30	5934	43	7.25
36	4387	31	7.07
42	3609	28	7.76
48	5560	32	5.74
	Secondo trapianto		
6	6871	52	7.57
12	6514	57	8.75
18	10151	32	3.15
24	7083	43	6.07
30	3603	31	8.33
36	3853	30	7.78
42	5756	43	7.46
48	10114	34	3.36
	Terzo trapianto		
6	3208	15	4.67
12	2738	14	5.11
18	4187	17	4.06
24	4934	20	4.05
30	2312	8	3.46
36	4036	7	1.73
42	2841	17	5.98
48	3234	12	3.71

Nella figura 2 si ha la rappresentazione grafica del modificarsi del coefficiente mitotico che anche qui è proporzionale al modificarsi della velocità di accrescimento durante le 48 ore dei tre successivi trapianti, confron-

tato col decrescere della velocità di accrescimento nel cuore normale fra il 7° e 9° giorno (linea A).

Quello che si può dedurre da questi dati è:

1° La velocità media di accrescimento a partire già dalle prime ore di coltura si abbassa rispetto alla velocità posseduta dal tessuto nella sua sede normale e ne resta sempre inferiore a questo valore.

2° Nei successivi trapianti la velocità media si fa sempre più bassa rispetto alla media dei trapianti precedenti (il livello dei poligoni B, C, D, è sempre più basso).

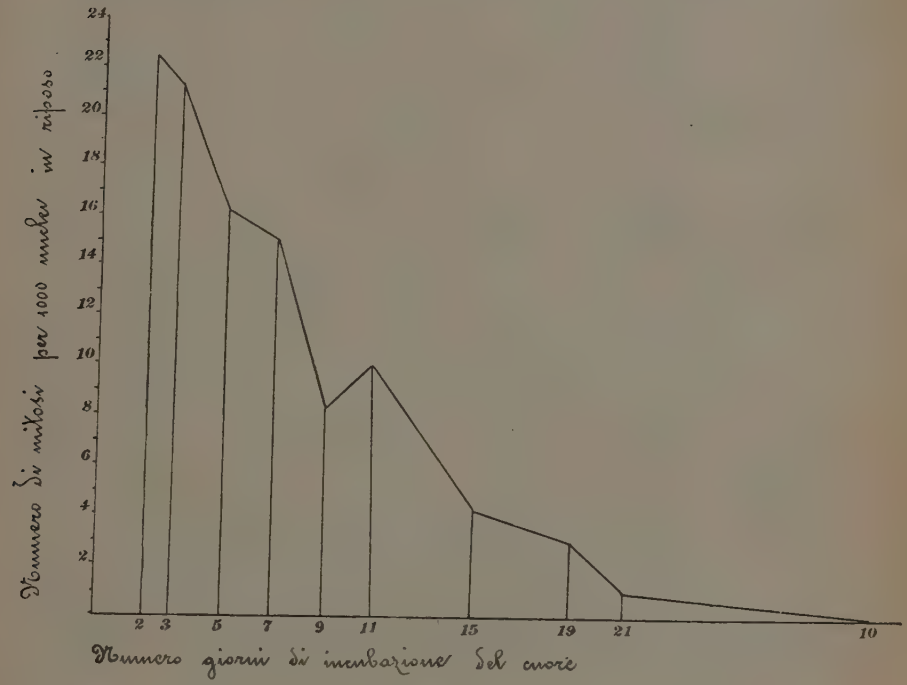


Fig. 1.

Rappresentazione grafica dei coefficienti mitotici dell'accrescimento del cuore embrionale di pollo.

3° Le inegualianze nella velocità di accrescimento, notevoli al primo trapianto (linea B), si fanno meno marcate nel secondo trapianto (linea C) e tendono a una velocità già molto uniforme al terzo trapianto (curva D). La crescente uniformità nella velocità di accrescimento dei successivi trapianti è certamente in rapporto con la maggior uniformità degli espianti specialmente per quanto si riferisce al loro spessore. Al primo trapianto lo spessore degli espianti è, per ragioni tecniche, difficilmente eguale, ed esso

influisce sulla respirazione e sul ricambio delle sue parti interne; gli espianti diventano in seguito tutti egualmente sottili in merito alla migrazione attiva dei loro elementi periferici.

L'area dei poligoni sovrapposti alle linee delle ascisse nella figura 2 è proporzionale all'accrescimento effettivo avutosi rispettivamente nel cuore normale degli espianti coltivati *in vitro*. I valori di queste aree, misurati col planimetro polare, risultano per i poligoni dei valori osservati nelle 48 ore dei singoli trapianti, questi: primo trapianto 32.6 cm.², per il cuore corri-

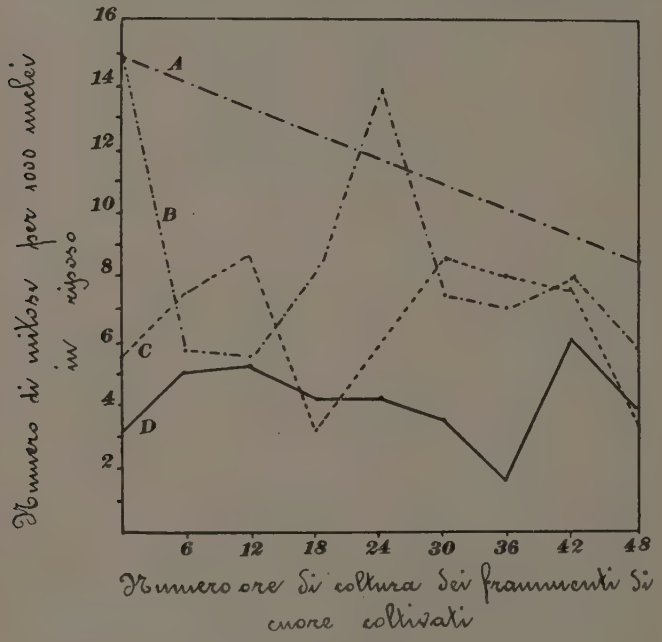


Fig. 2.

Rappresentazione grafica dei coefficienti mitotici nelle colture di cuore al 7° giorno di incubazione.

A) Discesa del coefficiente mitotico del cuore normale tra il 7° e 9° giorno di incubazione (dalla figura 1). – B) Coefficiente mitotico delle colture al primo trapianto. – C) Coefficiente mitotico delle colture al secondo trapianto. – D) Coefficiente mitotico delle colture al terzo trapianto.

spondente fra il 7° e il 9° giorno di incubazione 46.9 cm.²; secondo trapianto di 27.0 cm.², per il cuore normale tra il 9° e 11° giorno di incubazione 36.1 cm.²; terzo trapianto 16.2 cm.², nel cuore normale tra l'11° e 13° giorno 34.4 cm.². Quindi nel cuore durante il suo normale sviluppo l'accrescimento per mitosi si riduce tra il 7° e 9°, il 9° e 11° e l'11° e 13° giorno nelle proporzioni da 469 a 361 a 344; l'accrescimento degli espianti

del cuore di 7 giorni di incubazione coltivato *in vitro* si riduce invece da 326 a 270 a 162 ogni 2 giorni di successiva coltura.

Da questi dati risulta quindi che l'accrescimento del tessuto cardiaco coltivato *in vitro* si abbassa nel nuovo ambiente progressivamente, come si abbassa nel tessuto normale, e che l'accrescimento effettivo è nei primi 6 giorni di coltura inferiore al tessuto normale, inoltre la diminuzione di accrescimento si verifica più rapidamente che non nel tessuto normale. Per il cuore al 3° giorno di sviluppo si osserva pure in coltura una rapida diminuzione della velocità di accrescimento, ma per il cuore di questa età e quello di 15 giorni ci riserbiamo di riferire quando avremo dati più completi.

Fin d'ora però ci sembra che da queste osservazioni risulti un fatto di un certo interesse, cioè che il tessuto cardiaco, il quale durante il suo normale accrescimento nell'organismo, presenta una graduale diminuzione della sua potenzialità di accrescimento, presenta lo stesso fenomeno anche se coltivato *in vitro*, cioè in un ambiente mantenuto costantemente uniforme, lontano dall'azione degli umori circolanti nell'embrione, che certamente variano di composizione col progredire dello sviluppo. Va rilevato che le condizioni di vita dell'espianto, nel secondo e terzo trapianto diventano, per ragioni tecniche sempre migliori, e sarebbe perciò da aspettarsi che la velocità del loro accrescimento non continuasse ad abbassarsi così sensibilmente al secondo e terzo trapianto. Questa relativa indipendenza della diminuzione nella velocità di accrescimento dalle condizioni esterne sta a dimostrare che il fatto stesso è dipendente in grado predominante da fattori insiti alla costituzione stessa degli elementi del tessuto. La tendenza a rallentare l'accrescimento nei nostri esperimenti non è ovviata dalla conservazione di sempre eguali condizioni d'ambiente (temperatura, succhi nutritivi, quantità di ossigeno, ecc. sempre eguali).

Fin d'ora possiamo dire che il coefficiente mitotico per le cellule della coltura che costituiscono la zona di migrazione deve essere più alto. Secondo Levi, la durata della mitosi nelle colture *in vitro* oscilla fra 18 e 40 minuti. Se prendiamo come costante la durata minima di 18 minuti (che è quella che per coefficiente mitotico costante corrisponderebbe all'accrescimento più rapido), l'incremento [1] per 1000 quale ci è indicato dai nostri coefficienti mitotici al momento dell'osservazione si ripeterà ogni 18 minuti; quindi in 48 ore 160 volte. Nel cuore di 7 giorni al terzo trapianto abbiamo un coefficiente mitotico medio del 4 °/₀₀, quindi in 48 ore, nell'espianto avremo avuto un incremento complessivo di 160 volte 4 °/₀₀ eguale a 640 °/₀₀, il tessuto dovrebbe essere cresciuto quindi di circa 2 3 il suo valore iniziale (dal calcolo dell'interesse composto l'incremento risulterebbe

(1) Il coefficiente mitotico ci dà il numero di cellule in mitosi su 1000 in riposo, ed esprime perciò l'incremento numerico che si effettua al momento in cui fu fissato il tessuto.

un po' superiore, cioè di 894 °/₀₀). Noi sappiamo che le colture possono venir divise in due subcolture ogni 48 ore, indefinitamente, per cui la massa totale delle cellule si è effettivamente almeno raddoppiata, e l'incremento complessivo deve essere di almeno 1000 °/₀₀ ogni 48 ore.

Questo comportamento si avvera soltanto dopo un certo numero di trapianti. Nei primi giorni della coltivazione si constata direttamente, in armonia con i dati riferiti sul coefficiente mitotico, che gli espianti delle colture si riducono rapidamente di volume, qualora si dividano a ogni trapianto, anche in quei casi in cui il loro ridursi non è dovuto alla perdita di elementi che migrano nel plasma, come uno di noi (Olivo) ha constatato per gli abbozzi cardiaci di embrioni del primo giorno di incubazione. In questi casi la migrazione di elementi sdifferenziati è scarsissima o manca completamente, e ciò non per tanto l'accrescimento dell'espianto non è tale da consentire a ogni trapianto la sua divisione in due nuove colture.

Le ulteriori ricerche che intendiamo eseguire ci diranno se, come supponiamo, questa scarsa attività proliferativa degli elementi dell'espianto sia in rapporto con l'ancora parziale conservazione dei caratteri istologici e fisiologici del tessuto contrattile (in queste condizioni gli espianti al terzo trapianto possono ancora contrarsi ritmicamente). È noto che le cellule che migrano hanno perduto in modo assai più radicale i loro caratteri specifici, forse per questa ragione esse riacquistano un potere proliferativo maggiore che permette il raddoppiamento del numero di cellule della coltura ogni 48 ore. Data l'analogia di comportamento degli espianti col cuore normale per quanto riguarda la progressiva diminuzione del loro coefficiente mitotico si può chiedere quando gli espianti raggiungeranno il valore zero, come il cuore del pulcino di 10 giorni dopo la nascita. Fin da ora possiamo prevedere che ciò non si verificherà mai, perchè molto prima (già al quinto–sesto trapianto, cioè dopo 10-12 giorni) tutto l'espianto si è dissociato in elementi migranti e non si trova più traccia dell'originario tessuto cardiaco. In queste colture costituite esclusivamente da cellule completamente sdifferenziate, dovremo constatare, come è prevedibile, un aumento complessivo del coefficiente mitotico tale, da esser sufficiente a raddoppiare il numero delle cellule in 48 ore.

N. P.

INDICE DEL VOLUME VII, SERIE VI. — RENDICONTI

1928

INDICE PER AUTORI

A

Abetti G. — « Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1927 ». 445.

Agostini P. — « Calore di formazione dei cloruri doppi di rame e di potassio ». 933, 1030.

Id. — Vedi de Carli F.

Amaldi E. — Vedi Segrè E.

Angeli A. — « Sopra i diazocomposti ». 699.

Id. e Poggi R. — « Sopra la mobilità di alcuni atomi di alogeno ». 966.

Andrissi G. — « Sull'assorbimento della luce stellare nell'atmosfera di Roma ». 61, 355.

Armellini G. — « Variazioni del diametro del sole dal 1901 al 1911, secondo le osservazioni del R. Osservatorio del Campidoglio ». 959.

Ascoli G. — « Sull'equazione di Laplace dello spazio iperbolico ». 309.

B

Baglioni S. — Vedi Galamini N. A.

Banchi G. — « Distillazione nel vapore dei liquidi diversi dall'acqua. – I. Distillazione dell'acido borico nel vapore degli acidi del Roscoe ». 579.

Barbieri G. A. — « Contributo alla conoscenza dei cobalti-carbonati ». 747.

Barbieri N. A. — « La tabacina o il principio tossico del tabacco ». 764.

Id. — « La cultura fisiologica ». 933, 1043.

Id. — « Stazione astronomica-geodetica eseguita sul Monte Colma di Mombarone nell'agosto 1927 ». 907.

Baroni A. — Vedi Ferrari A.

Barsali E. — « Contribuzione allo studio della radioscopia nei vegetali ». 595, 681.

Baruzzi M. — « Ancora sugli andamenti periodici della temperatura media diurna a Modena ». 736.

Bemporad A. — « Sul catalogo astrografico di Catania ». 695.

Id. — Osservazioni eseguite durante l'eclisse solare del 29 giugno 1927 nel R. Osservatorio di Capodimonte ». 706, 798.

Benazzi M. — « Sulla esistenza di particolari cellule interstiziali nel connettivo dell'utero di topo ». 259.

Benedetti E. — « Alcuni esperimenti di amplificazione e rivelazione delle correnti bioelettriche mediante l'impiego delle valvole termoioniche ». 423.

Berlingozzi S. — « Costituzione chimica e potere rotatorio ». 925.

Id. — « Derivati della d. l. asparagina ». 932, 1037.

Bernstein V. — « Complementi alla Nota "Sopra l'interpolazione a mezzo di funzioni olomorfe in un semipiano" ». 979.

Berwald L. — « Una forma normale invariante della seconda variazione ». 228, 301.

Bianchi L. — « Sulla estinzione atmosferica a Roma ». 441.

Id. — Presenta la Memoria di *G. Lansone*: « Sul problema della risoluzione apiristica delle congruenze di grado qualunque rispetto ad un modulo primo e la risoluzione apiristica delle congruenze di quarto grado ». 956.

Bilancini R. — « Sul regime anemologico del Golfo di Spezia ». 238.

Boggio T. — « Identità di Bianchi e omografia di gravitazione ». 715.

Id. — « L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo ». 715.

Id. — « Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo ». 715, 811.

Id. — « Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci ». 994.

Bortolotti E. — « Coordinate locali nella geometria proiettivo differenziale di una superficie: gli elementi unità ». 329.

Bossolasco M. — « La plasticità nei fenomeni di orogenesi ». 66.

Bozza G. — « I fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione ». 933.

Brasi E. — Vedi Scagliarini G.

Brunelli G. — « Ricerche anatomo-fisiologiche sul significato del pancreas intraepatico nei Teleostei ». 83.

Id. — « Il cancro e le impurità delle razze ». 858, 952.

Id. e Fasella G. — « Su di un rarissimo Cetaceo spiaggiato nel litorale di Nettuno ». 85.

Id. e Rizzo L. — « Ghiandola esocrina, ovario impari ed ermafrodismo della "Perca fluviatilis" L. ». 865.

Brunetti R. — « Policroismo e orientazione degli joni nei cristalli di terre rare ». 238.

Bucciante L. — « La durata del periodo cinetico ed intercinetico in embrioni di pollo incubati a varia temperatura ». 933.

Burani G. — « Sulle quadriche dello spazio Riemanniano a tre dimensioni ». 316.

Burgatti P. — « Proprietà delle omografie assiali di un S_n euclideo con applicazione alle formole di Frenet ». 706, 791.

C

Cabras A. — « Sulla teoria balistica della luce ». 389.

Caccioppoli R. — « Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili ». 817, 901.

Id. — « Sulla definizione dell'area di una superficie ». 906.

Calapso R. — « Riduzione della deformazione proiettiva di una superficie R alla trasformazione C^m delle superficie isoterme ». 617.

Cambi L. — Presenta la Memoria di *G. Bozza*: « I fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione ». 956.

Canavari M. — Presenta il suo « Manuale di Geologia tecnica ». 956.

Cannata C. — « Contributo alla teoria balistica delle Stelle variabili ». 234, 337.

Carobbi G. — « Ricerche chimiche sull'olivina di Linosa (Isole Pelagie) ». 654.

Carrelli A. — « Sulla relatività a cinque dimensioni ». 566.

Id. — « Sulla larghezza di alcune righe dello spettro del Hg ». 921, 1014.

Id. — « Sul nuovo fenomeno di diffusione ». 1018.

Castelnuovo G. — Vedi Levi-Civita T.

Id. — Vedi Severi F.

Id. (relatore) e Loria G. — Relazione sulla Memoria di *L. Poletti*: « La serie dei numeri primi appartenenti alle forme quadratiche $n^2 + n + 1$ e $n^2 + n - 1$ ». 596.

Castiglioni B. — « Sulla circolazione dell'Adriatico meridionale ». 854.

Cattaneo D. — « Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. - IV. Modificazioni della struttura ultramicroscopica nel processo di cateratta ». 432, 512.

Cavinato A. — « Nuove ricerche sulle trasformazioni della scolecite ». 586, 670.

Celeri A. — Vedi Levi G. R.

Cesàro G. — « Sur la courbe de Viviani ». 363, 599.

Cherubino S. — « Le matrici caratteristiche delle simmetrie sulle varietà abeliane reali ». 199.

Id. — « Le sostituzioni pseudo-normalizzanti e la normalizzazione nella teoria generale delle varietà abeliane reali ». 380, 459.

Cisotti U. — « Ancora su di una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski ». 17.

Id. — « Sul rotore dei tensori ». 109, 169.

Id. — « Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee ». 269.

Id. — « Una interpretazione espressiva delle condizioni di Saint-Venant sulle deformazioni infinitesime ». 364.

Id. — « A proposito di due recenti Note di M. Pascal ». 801.

Id. e Finzi B. — « Osservazioni sulla Nota di P. Straneo: "Intorno al teorema di Kutta-Joukowski" ». 538.

Clerici E. — « Un interessante affioramento di lava a Petronella in Agro Romano ». 769.

Colonnetti G. — « Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche e alle sue applicazioni tecniche ». 715, 817, 907.

Colucci A. — « Sul parametro differenziale secondo generelizzato ». 479.

Comel M. — « Variazione del *p*H delle soluzioni equilibratrici per azione del potere regolatore dei tessuti ». 772.

Id. — « Sul potere equilibratore reciproco di due soluzioni regolatrici di fosfati », 778, 947.

Corbino O. M. — « Sul funzionamento del triodo avente la placca e la griglia rilegate agli avvolgimenti di un trasformatore ». 706.

Id. — Presenta e riassume due Note di *Fermi E.* e *Rasetti F.* 786.

Cotronei G. — « Fattori della morfogenesi nei tempi successivi dello sviluppo ». 419.

Crocco G. A. — « Sul peso delle strutture aeronautiche ». 184, 273.

Id. — « Sulla resistenza e sulla rigidezza a torsione delle ali degli aeroplani ». 543.

Crocco G. A. — « Sulla rigidezza a torsione delle ali degli aeroplani ». 611.

Crudeli U. — « Sulle condizioni del Saint-Venant relative alle deformazioni dei mezzi naturali. (Estratto da una lettera al prof. Cisotti) ». 906.

D

Dal Piaz G. B. — « La digitazione gneissica di Val Inferno (Gran Paradiso) e le sue relazioni con la massa frontale del ricoprimento quinto ». 150.

Id. — « Sulla geologia del gruppo della Grivola ». 355, 414.

D'Ancona U. — « Notizie preliminari sugli stadi larvali di Murenoidi raccolti dal prof. Luigi Sanzo nel Mar Rosso e nel Golfo di Aden durante la crociera della R. N. "Ammiraglio Magnaghi" 1923-1924 ». 427.

Id. — « Sulla possibilità di ordinare sistematicamente le specie larvali dei Murenoidi ». 432, 516.

de Carli F. — « Colori di formazione e di idratazione dei carbonati doppi di cobalto e potassio e di rame e sodio », 932, 1033.

Id. e Agostini P. — « Il carbonato doppio di rame e sodio ». 921.

De Caro L. — « L'energia di crescenza della sterigmatocistiscugra ». 951.

Dei C. — « La fase della corrente di saturazione termoionica in un circuito a tensione pulsante ». 576, 644.

Id. — « Sui circuiti con valvola termoionica in saturazione derivata su un condensatore ». 730.

De Lollis A. — « Modificazioni del sangue, dell'apparato emolinfatico e dei reni nei conigli trattati con trasfusione di sangue omogeneo ». 432, 520.

de Lorenzi E. — Vedi Olivo O. M.

Delsarte J. — « Sur la composition de seconde espèce ». 980.

De Mira Fernandes A. — « Sur l'écart géodésique, la courbure riemannienne et la courbure associée de Bianchi ». 482.

De Mira Fernandes A. — « Transports isoclines et dimentions associées ». 980.

Di Legge A. — Commemora il Socio *Cerulli V.* 262.

D'Ovidio E. — Comunica la morte del Corrisp. *Brugnatelli L.* 785.

Dubourdieu J. « Quelques applications de la théorie des coordonnées géodésiques le long d'une courbe ». 707.

E

Emanuelli P. — « Gli eclissi di sole totali non-centrali ». 907.

F

Fantappiè L. — « I funzionali lineari delle funzioni di due variabili complesse ». 216, 384, 710.

Fasella G. — Vedi Brunelli G.

Fermi E. — « Sulla teoria del sistema periodico ». 66.

Id. — « Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. – Applicazione alla teoria del sistema periodico degli elementi ». 342.

Id. — « Calcolo della correzione di Rydberg per i termini *s* ». 726.

Fernandes L. — « Ricerche sui solfosali. – IV. I molibdovanadotioacquati ». 414, 496.

Id. — Vedi Rolla L.

Ferrari A. — Vedi Zambonini F.

Id. e Baroni A. — « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. – I. Analisi termica del sistema LiCl—$CoCl_2$ anidri ». 764, 848.

Id. e Id. — « II. Analisi termica del sistema LiCl—$CdCl_2$ ». 764, 932, 1040.

Ferrari C. — « La piastra piana e la legge di Kutta-Joukowski ». 487, 715, 821.

Finzi B. — Vedi Cisotti U.

Fleischner E. — Vedi Quilico A.

Fontana C. G. — Vedi Levi G. R.

Franchi S. — « La serie dei terreni dal Priaboniano al Norico nei dintorni di Albenga ». 26.

Id. — « Un eccezionale filone di porfirite augitica nelle dolomie triasiche dell'Alta Valle della Neva (Alpi Liguri) ». 192.

Id. — « La più giusta denominazione e la cartografia del Massiccio Cristallino sul quale è, in parte, fondata la città di Savona ». 372, 453.

Francini E. — « Fenomeni di aposporia somatica, di aposporia goniale e di embrionia avventizia in "Ochna multiflora" ». 92.

Freda E. — « Sulla propagazione di correnti elettriche stazionarie in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme ». 716, 830.

Freri M. — Vedi Natta G.

Fubini G. — « Una nuova generazione delle quadriche di Darboux ». 14.

G

Galamini A. — « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Ulteriori osservazioni su ratti alimentati con dieta insufficiente aproteinica, acarboidrosica, iperlipinica. Importanza dell'emuntorio intestinale, nella resistenza al digiuno ». 251.

Id. — « Valore alimentare della patata nei ratti albini ». 589, 684.

Id. — « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione sul ricambio azotato di ratti albini alimentati con dieta insufficiente subproteinica, sublipinica, ipercarboidrosica ». 432, 526.

Garbasso A. (Vicepresidente). — Annunzia che l'Accademia commemorerà in una speciale seduta a Classi riunite il Socio onorario *Diaz A.*, maresciallo d'Italia. 433.

Id. — Annunzia la morte dei Soci Stranieri *Lorentz E.*, *Marchand F.*, e *de Groth P.* e del Socio Nazionale *Abetti A.* 433.

Gentile G. — « Sulla teoria dei satelliti di Rutherford ». 346.

Id. — « Sui termini accentati del Calcio ». 735, 910.

Geppert H. — « Sulle onde progressive di tipo permanente nelle vasche circolari ». 823, 988.

Id. — « Sugli invarianti adialitici di un generico sistema differenziale ». 994.

Giorgi G. — « Sulle funzioni delle matrici ». 178.

Id. — « Sulla sufficienza delle equazioni differenziali della fisica matematica ». 543.

Id. — « Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici ». 706.

Id. — « Fattori e indici nei gruppi lineari e nei gruppi normali d'operazioni ». 543, 871.

Id. e Porcu Tortrini E. — « Sui moti di deformazione dello spazio, rappresentati col calcolo delle matrici ». 877.

Gorini C. — « Cultura ascendente e dissociazione microbica ». 689.

Grill E. — « La Datolite di Toggiano ». 251.

Gugino E. — « Sul problema dell'equilibrio elastico dei corpi girevoli a contorno cilindrico ». 633.

Id. — « Sul profilo dei corpi ruotanti la cui deformazione non resta turbata quando si decompongano in tronchi mediante piani normali all'asse ». 823, 980.

H

Herlitzka A. — « Massa sanguigna, globuli rossi ed emoglobina in individui acclimatati in montagna ed al piano ». 979.

Herrera L. A. — « Cellule albuminiche artificiali ». 32.

Id. — « Ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina ». 544.

Id. — « Figure cellulari nella riolite ». 807.

Hlavatý V. — « Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito ». 47.

K

Kanitani Joyo. — « Une interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif de l'hypersurface ». 906.

Id. — « Sur une forme quadratique intrinsèque par rapport à l'hypersurface dans l'espace projectif à plusieurs dimensions ». 906,

Krall G. — « Limiti superiori del cimento dinamico ». 223.

Id. — « Limiti del cimento dinamico nei sistemi dissipativi ». 556.

L

Laboccetta L. — « Espressione analitica delle grandezze fisiche discontinue o funzioni di variabili discontinue e diagrammi che ad esse corrispondono ». 552.

Lientati G. — « Ricerche sulla istogenesi delle isole del Langerhans ». 952.

Levi G. R. e Celeri A. — « Sul piombo piroforico ». 350.

Id. e Fontana C. G. — « Sul solfuro di zinco precipitato ». 413, 502.

Levi-Civita T. — Presenta in omaggio il suo volume « Fondamenti di meccanica relativistica ». 956.

Id. (relatore) e Castelnuovo G. — Relazione sulla Memoria di *Cabras P. A.*: « Sulla teoria balistica della luce ». 785.

Lombardi L. — Presenta un suo volume. 785.

Id. — « Misura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico ». 877, 962.

Loria G. — Vedi Castelnuovo G.

Lo Surdo A. (Segretario aggiunto). — Presenta i libri giunti in dono, segnalandone alcuni. 262.

Id. — Presenta un plico suggellato del dott. *Guido Cremonese*. 262.

Id. — Legge gli elenchi dei concorrenti a vari premi scaduti il 31 dicembre 1927. 263.

Id. — « Sulle caratteristiche dei triodi a tensioni di griglia saturanti ». 279.

Id. — « Tensione anodica e temperatura del filamento nelle valvole termoioniche ». 880.

Lusin N. e Sierpinski W. — « Sur un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait ». 214.

M

McConnel A. J. — « Il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito finito ». 208.

Id. — « Il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito finito: caso di uno spazio Riemanniano ». 306.

Id. — « Il principio dell'azione stazionaria e stabilità in un campo statico gravitazionale ». 638.

Maggini M. — « Sulla lunghezza d'onda effettiva degli astri e su di un metodo per determinarla mediante l'Interferometro ». 56.

Majorana Q. — « Su di un fenomeno fotoelettrico constatabile con gli audion ». 706, 801.

Id. — « Altre constatazioni concernenti il fenomeno fotoelettrico degli audion ». 877.

Malquori G. — « I sistemi: $Cd(NO_3)_2$ — HNO_3 — H_2O; $Zn(NO_3)_2$ — HNO_3 — H_2O; $Mg(NO_3)_2$ — HNO_3 — H_2O a 20° ». 146.

Id. — « Dissociazione termica del nitrato di cadmio ». 249.

Id. — « I sistemi: $Pb(NO_3)_2$ — $LiNO_3$ — H_2O e $Pb(NO_3)_2$ — $CsNO_3$ — H_2O a 25° ». 495.

Id. — « Il sistema KCl — HCl — H_2O fra 0° e 80° ». 738.

Id. — « Il sistema $AlCl_3$ — HCl — H_2O fra 0° e 80° ». 740.

Id. — « Il sistema $AlCl_3$ — HCl — H_2O fra 0° e 8° ». 745.

Id. — « Il sistema KNO_3 — HNO_3 — H_2O fra 25° e 60° ». 753, 844.

Id. — « Il sistema KNO_3 — $Al(NO_3)$ — H_2O a 0°, 40° e 60° ». 753, 846.

Id. — Vedi Parravano N.

Marchiafava E. — Presenta in omaggio due suoi studi. 596.

Martelli A. — Presenta il volume: « La trazione elettrica sulle Ferrovie Italiane ». 262.

Martino G. — « Diverso contenuto in "fosfogeno" di muscoli striati a contrazione rapida e a contrazione torpida ». 79.

Martinozzi L. — « Su un nuovo modello di igrometro a compensazione ». 237, 389.

Masciotti L. — « Ricerca del passo della vite micrometrica del meridiano Ertel del R. Osservatorio del Campidoglio ». 830, 1002.

Masotti A. — « Sulla equivalenza dei tensori ». 228, 296.

Id. — « Sul concetto di tensore costante in varietà qualunque ». 328, 457.

Mattirolo O. — Presenta a nome dell'autore *Luigi Messedaglia* « Il mais e la vita rurale italiana ». 956.

Mazza F. P. — « Ancora sulla dispersione rotatoria degli aspartati alchilici ». 148.

Millosevich F. — Dichiara che in una prossima seduta commemorerà il Socio *Artini E.* 596.

Id. — Commemora il Socio *de Groth P.* 596.

Id. (relatore) e D'Achiardi G. — Relazione della Memoria di *Grill E.*: « La datolite di Toggiano ». 434.

Minetti S. — « Ancora sulle condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere e di un certo ordine anche in senso precisato ». 36, 215, 292.

Id. — « Sulla crescenza delle funzioni intere di genere finito ». 215.

Misciattelli P. — « Analisi di una piromorfite radioattiva di Gennammari (Sardegna) ». 929.

Id. — « Sulla separazione con l'etere del torio dall'uranio ». 933, 1019.

Monterosso B. — « Osservazioni sulla biologia sessuale degli "Scitodoidi" ». 87, 155.

Id. — « Studi cirripedologici. - II. Anabiosi nei Ctamalini ». 939.

Montoro V. — Vedi Parravano N.

Mouskhelichvili N. — « Sur le problème fondamental d'Hydrodynamique à deux dimensions ». 823, 995.

N

Nalli P. — « Equazione integrale di terza specie ed applicazioni alle equazioni differenziali ». 52, 120, 333.

Nalli P. — « Sopra le coordinate geodetiche ». 195.

Id. — « Sul parallelismo di Levi-Civita e sopra certe possibili estensioni ». 228, 380.

Nasini R. — Presenta in omaggio un opuscolo del dott. *Ostrogovich A.* 596.

Natta G. e Freri M. — « Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento ». 406.

Id. e Strada M. — « Spinelli di cobalto trivalente: cobaltito cobaltoso e cobaltito di zinco ». 932, 1024.

O

Oddone E. — « Per la spiegazione delle onde sismiche superficiali ». 910.

Olivo O. M. e de Lorenzi E. — « Sulla durata dell' intercinesi nelle cellule coltivate " in vitro " ». 936.

Id. e Slavich E. — « Frequenza delle mitosi nel cuore embrionale di pollo a vari stadi di sviluppo e nelle colture " in vitro " dello stesso materiale ». 944, 1061.

P

Pace E. — « Glicoli biterziari ed alcuni loro derivati eterociclici ». 757.

Pagliarulo M. L. — « Considerazioni sopra uno studio critico del dottore F. P. Mazza ». 577.

Palatini A. — « Sulle varietà " V " che contengono un campo vettoriale costante ». 899.

Id. — « Sui tensori costanti associati a varietà binarie e ternarie ». 905.

Palazzo L. — Fa omaggio di un suo opuscolo dal titolo « Magnetometria applicata alle indagini di giacimenti minerari nel sottosuolo ». 97.

Palozzi G. — « Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve piane in un punto di plesso ». 52, 115.

Id. — « Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve sghembe ». 321.

Panichi U. — « Diabasi e rocce filoniane melanocrate della Sardegna ». 71.

Parravano N. (Segretario). — Presenta i libri giunti in dono, segnalandone alcuni. 97, 434, 596, 785, 956.

Id. — Presenta e riassume il contenuto della sua Nota in collaborazione con *Malquori G.*: « La demolizione termica dell'allumina Bayer ». 786.

Id. e Malquori G. — « Ricerche sopra i solfuri di molibdeno. – I. Le tensioni di zolfo del trisolfuro di molibdeno ». 19.

Id. — « II. Equilibrio di riduzione del bisolfuro di molibdeno a mezzo dell'idrogeno ». 23, 109.

Id. — « Equilibrio di riduzione del bisolfuro di tungsteno a mezzo dell' idrogeno ». 189.

Id. e Id. — « La riduzione del solfuro di argento a mezzo del carbone ». 367.

Id. e Id. — « La demolizione termica dell'allumina Bayer ». 706, 970.

Id. e Montoro V. — « L'allumina Blanc ». 343, 885.

Pascal M. — « Sul profilo laminare rettilineo ». 548.

Pasquini P. — « Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. – II. Sul differenziamento polare delle uova di " Arbacia punctulata " Grey, centrifugate subito dopo la fecondazione ». 423, 590.

Pastorello S. — « Sulla stabilità del sesquiossido di rodio e del biossido di iridio ». 754.

Pastori M. — « Sul significato geometrico della derivazione intrinseca ». 389, 474.

Paternò E. — Comunica la morte del Socio *Artini E.* e del Corrispondente *Segrè C.*. 596.

Id. — Assicura l'adesione dell' Accademia alla cerimonia che si terrà all'Università di Torino per ricordare il Corrispondente *Segrè C.* 597.

Id. — Presenta un plico suggellato del prof. *Panichi U.* 597.

Pennacchietti M. — « Sul significato della degenerazione della zona reticolare del surrene del neonato umano ». 779.

Perroncito A. — « Sull'estirpazione del fegato (due nuovi metodi) ». 896.

Parroncito A. — Presenta il volume contenente le « Ricerche eseguite negli anni 1926-1927 ». 956.

Persico E. — « Velocità molecolari, stati d'eccitazione e probabilità di transizione in un gas degenere ». 66, 137, 235.

Id. — « La risonanza ottica secondo la meccanica ondulatoria ». 921.

Perucca E. — « Polarimetria e fotometria fotoelettrica ». 733.

Petri L. — « Osservazioni sopra lo " Scleroderma ambiguum " Petri e le sue affinità sistematiche ». 380.

Petri L. — « Sopra le radiazioni mitogenetiche del Gurwitsch ». 891.

Pierantoni U. — « I corpuscoli del tuorlo e la loro cultura " in ager " ». 195.

Pierucci M. — « Influenza della carica elettrica sulla conduttività di una pellicola metallica ». 244, 400.

Pincherle S. — Riferisce sul Congresso Internazionale dei Matematici. 786.

Pistolesi E. — « A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski ». 53.

Piutti P. — « Sugli spettri d'assorbimento di alcuni coloranti indigoidi ». 251.

Poggi R. — Vedi Angeli A.

Porcu-Tortrini E. — « Calcolo delle funzioni qualunque di matrici di secondo ordine ». 206.

Id. — Vedi Giorgi G.

Principi P. — « I terreni miocenici tra la valle del Senio e quella del Sillaro ». 579.

Q

Quagliariello G. — « Azione del freddo sui grassi del latte ». 75.

Quilico A. — « Azione dell'acido amminosolfonico sui composti non saturi ». 66, 141.

Id. e Fleischner E. — « Alcuni derivati solforici di composti non saturi ». 932, 1050.

R

Raffaele F. — Commemora il Socio Straniero *Henneguy F.* 433.

Raimondi E. — « Complementi relativi al calcolo dell'azione dinamica di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita ». 131.

Rasetti F. — « Sopra l'allargamento delle righe spettrali ». 561.

Id. — « Sopra la meccanica ondulatoria di un atomo alcalino nel campo elettrico ». 735, 839, 1010.

Id. — « Sopra il calcolo dei termini M per mezzo del potenziale statistico dell'atomo ». 735, 915.

Restaino S. — Vedi Zambonini F.

Ricca V. — Vedi Tieri L.

Rivera V. — « Azione di forti dosi di raggi γ sopra il " B. tumefaciens " Smith et Towsend ». 867.

Rizzo L. — Vedi Brunelli G.

Rodolico F. — « Ricerche sui solfosali. - V. Composti di addizione con l'urotropina ». 579, 660.

Rolla L. e Fernandes L. — « Sul frazionamento delle miscele neodimosamariche ». 370.

Ronchi V. — « Sulle interferenze nelle propagazioni corpuscolari ». 491.

Rosenblatt A. — « Sopra la Nota del prof. Pistolesi: " A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski " ». 555.

Rossi B. — « Studio del campo elettrico nei mezzi omogenei anisotropi ». 715.

Id. — Vedi Todesco G.

Rostagni A. — « A proposito di un'influenza dei raggi X sulla cristallizzazione del bismuto ». 649.

Id. — « Un'applicazione alle ricerche geofisiche della teoria di T. Levi-Civita relativa alla " influenza di uno schermo conduttore sul campo elettro-magnetico di una corrente alternata parallela allo schermo " ». 1006.

Russo A. — « Il diverso corredo cromosomico delle cellule dei Metazoi in rapporto al sesso e la differenza di categoria degli " Individui misti " e dei " Gameti puri " in " Chriptochilum echini " Mps ». 292, 372.

S

Sabbatani L. — « Ricerche farmacologiche col permanganato di sodio per iniezioni endovenose ». 113.

Id. — Presenta il volume XXII delle « Ricerche sperimentali fatte nel 1927–28 ». 956.

Sansone G. — « Sul problema della risoluzione apiristica delle congruenze di grado qualunque rispetto ad un modulo primo e la risoluzione apiristica delle congruenze di quarto grado ». 905.

Santori G. — « L'influenza delle irradiazioni parziali delle ossa sul sistema stromatico dell'apparato emo-linfo-poietico ». 595.

Id. — « L'influenza delle irradiazioni parziali delle ossa sul sistema stromatico del midollo osseo e del restante apparato emolinfatico ». 676.

Savelli R. — « I " Semi giganti " ed un caso di " poliendospermia " per effetto di impollinazione estranea su " Nicotiana rustica " ». 88.

Id. — « Umificazione di membrane cellulari in " Beta vulgaris " L. ». 673.

Sbrana F. — « Sui moti piani di un fluido incomprimibile, nei quali le linee di corrente sono isotachie ». 561, 641.

Scagliarini G. e Brasi E. — « Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche ». 411, 509.

Scorza G. — « Maggiore determinazione della relazione intercedente fra il rango e il tipo di un gruppo ». 173.

Scorza-Dragoni G. — « Sulla quasicontinuità delle funzioni composte ». 326.

Scremin L. — « Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica. – II. Calcio e farmaci convulsivanti ». 951, 1056.

Segrè E. e Amaldi E. — « Sulla dispersione anomala del Mercurio e del Litio ». 919.

Settimj L. — « Sulla composizione chimica di alcuni latticini italiani ». 432, 586.

Severi F. — « Sugl'integrali algebrici semplici e doppi ». 4, 9, 14, 101, 161.

Severi F. — Commemora il Corrisp. *Bagnera G.* 785.

Severi F. (relatore) e Castelnuovo G. — Relazione sulla Memoria del dott. *Segre B.*: « Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari dipendenti ». 97.

Sierpinski W. — Vedi Lusin N.

Signorini S. — « Sul teorema di Kutta-Joukowski ». 708, 823.

Id. — « Espressione asintotica di una formula del Levi-Civita ». 907.

Siracusano N. — « Nuovi contributi allo spettro del bromo nella scarica senza elettrodi ». 735, 835.

Slavich E. — Vedi Olivo O. M.

Somigliana C. — « Sulla definizione della gravità normale ». 184.

Id. — « Sulla gravità normale e la formola di Helmert ». 531.

Id. — Annuncia che l'Università di Torino ricorderà con una lapide il Corrispondente *Segrè C.* 597.

Id. — Presenta il volume VI delle « Opere di Alessandro Volta ». 956.

Spagnol G. — « Fattori chimici che determinano la fissazione dei colloidi ». 667.

Id. — « Esperienze sulla fissazione di colloidi provocata dal cloroformio ». 952.

Specchia O. — « Un metodo interferenziale per la misura della suscettività magnetica dei liquidi ». 406, 574.

Spirito A. — « Osservazioni sul trapianto della vescicola ottica primaria in " Rana esculenta " sull'influenza dei diversi stadi embrionali nel successivo differenziamento ». 781.

Stefanelli A. — « Sulla esistenza di reti nervose diffuse con significato espansionale nei rettili ». 945.

Stella A. — Presenta una tavola di sezioni geologiche in Val d'Aosta ed un suo opuscolo dal titolo: « La Valle d'Aosta e i Geologhi ». 262.

Id. (relatore) e Millosevich F. — Relazione sulla Memoria del dott. *Lincio G.*: « Ricerche litologiche e mineralogiche sul gruppo del Grand Gimont ». 262.

Strada M. — Vedi Natta G.

Straneo P. — « Intorno al teorema di Kutta-Joukowski ». 229.

T

Tieri L. e Ricca V. — « Sulla emissione elettronica in un tubo a vuoto ». 720.

Tirelli M. — « Modificazioni del condrioma e del lacunoma nelle cellule intestinali di " Gambusia holbrooki " durante le diverse fasi dell'attività funzionale e durante il digiuno ». 255.

Todesco G. — « Su di un nuovo metodo per l'osservazione di piccolissime birifrangenze ». 394.

Id. e Rossi B. — « Contributo allo studio dei contatti imperfetti metallici ». 568.

Tonelli L. — « Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata ». 272, 357.

Tortorici P. — « Intorno ad una classe di funzionali continui ». 384, 466.

V

Vinassa de Regny P. — « L'inerzia geochimica degli elementi delle triadi ». 23.

Id. — « Elettronili simmetrici e molecole monoatomiche ». 806, 880.

Id. — « Elettronili simmetrici e molecole pluriatomiche ». 806, 975.

Vitali G. — « Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato ». 626.

Vranceanu G. — « Sullo scostamento geodetico nelle varietà analonome ». 134.

Id. — « Sopra le soluzioni periodiche a periodi grandissimi nella Meccanica ». 389, 630.

W

Wataghin G. — « Sopra gli integrali generali di alcune equazioni differenziali di fisica matematica ». 66, 124.

Y

Young R. C. — « Sur les valeurs de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ d'une function $f(x)$ à point de non-intégrabilité par rapport à $g(x)$ unique ». 43.

Z

Zambonini F. e Ferrari A. — « Ricerche sul clorofosfato di piombo (piromorfite) ». 192.

Id. e Id. — « Ricerche sul fosfato e sul clorofosfato di piombo (piromorfite) ». 283.

Id. e Restaino S. — « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - IX. Solfati di cerio (ceroso) e rubidio ». 372, 449.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — « Equazione integrale di terza specie ed applicazioni alle equazioni differenziali ». Nalli P. 52, 120, 333.

Aerodinamica. — « Sul profilo laminare rettilineo ». Pascal M. 548.

Astrofisica. — « Contributo alla teoria balistica delle Stelle variabili ». Cannata C. 234, 337.

— « Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1927 ». Abetti G. 445.

Astronomia. — « Sulla lunghezza d'onda effettiva degli astri e su di un metodo per determinarla mediante l'Interferometro ». Maggini M. 56.

— « Sul catalogo astrografico di Catania », Bemporad A. 695.

— « Osservazioni eseguite durante l'eclisse solare del 29 giugno 1927 nel R. Osservatorio di Capodimonte ». Id. 706, 798.

— « Variazioni del diametro del sole dal 1901 al 1911, secondo le osservazioni del R. Osservatorio del Campidoglio ». Armellini G. 959.

— « Ricerca del passo della vite micrometrica del meridiano Ertel del R. Osservatorio del Campidoglio ». Masciotti L. 830, 1002.

— « Gli eclissi di sole totali-non-centrali ». Emanuelli P. 907.

Astronomia fisica. — « Sull'assorbimento della luce stellare nella atmosfera di Roma ». Andrissi G. 61, 355.

— « Sulla estinzione atmosferica a Roma ». Bianchi E. 441.

B

Batteriologia. — « Cultura ascendente e dissociazione microbica ». Gorini C. 689.

Biologia. — « Osservazioni sulla biologia sessuale degli " Scitodoidi " ». Monterosso B. 87, 155.

— « Studi cirripedologici. – II. Anabiosi nei Ctamalini ». Id. 939.

— « Modificazioni del condrioma e del lacunoma nelle cellule intestinali di " Gambusia holbrooki " durante le diverse fasi dell'attività funzionale e durante il digiuno ». Tirelli M. 255.

— « Il diverso corredo cromosomico delle cellule dei Metazoi in rapporto al sesso e la differenza di categoria degli " Individui misti " e dei " Gameti puri " in " Criptochilum echini " Mps ». Russo A. 292, 372.

— « Fattori della morfogenesi nei tempi successivi dello sviluppo ». Cotronei G. 419.

— « Alcuni esperimenti di amplificazione e rivelazione delle correnti bioelettriche mediante l'impiego delle valvole termoioniche ». Benedetti E. 423.

— « Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. – IV. Modificazioni della struttura ultramicroscopica nel processo di cateratta ». Cattaneo D. 432, 512.

— « Notizie preliminari sugli stadi larvali di Murenoidi raccolti dal prof. Luigi Sanzo nel Mar Rosso e nel Golfo di

Aden durante la crociera della R. N. "Ammiraglio Magnaghi" 1923-24». D'Ancona U. 427.

Biologia. — «Sulla possibilità di ordinare sistematicamente le specie larvali dei Murenoidi». Id. 432, 516.

— «Modificazioni del sangue, dell'apparato emolinfatico e dei reni nei conigli trattati con trasfusione di sangue omogeneo». De Lollis A. 432, 520.

— «Ricerche sull'imitazione delle forme organiche coll'albumina». Herrera A. L. 544.

— «Figure cellulari nella riolite». Id. 807.

— «La influenza delle irradiazioni parziali delle ossa sul sistema stromatico dell'apparato emo-linfo-poietico». Santori G. 595.

— «L'influenza delle irradiazioni parziali delle ossa sul sistema stromatico del midollo osseo e del restante apparato emolinfatico». Id. 676.

— «Variazione del *p*H delle soluzioni equilibratrici per azione del potere regolatore dei tessuti». Comel M. 772.

— «Il cancro e le impurità delle razze». Brunelli G. 858, 952.

— «Ghiandola esocrina, ovario impari ed ermafroditismo della "Perca fluviatilis" L.». Id. e Rizzo L. 865.

— «La durata del periodo cinetico ed intercinetico in embrioni di pollo incubati a varia temperatura». Bucciante L. 933.

— «Sulla durata dell'intercinesi nelle cellule coltivate "in vitro"». Olivo O. M. e de Lorenzi E. 936.

— «Frequenza delle mitosi nel cuore embrionale di pollo a vari stadi di sviluppo e nelle colture "in vitro" dello stesso materiale». Id. e Slavich E. 944, 1061.

Biologia vegetale. — «Contribuzione allo studio della radioscopia nei vegetali». Barsali E. 595, 681.

Botanica. — «I "Semi giganti" ed un caso di "poliendospermia" per effetto di impollinazione estranea su "Nicotiana rustica"». Savelli R. 88.

Botanica. — «Umificazione di membrane cellulari in "Beta vulgaris L."». Id. 673.

— «Osservazioni sopra lo "Scleroderma ambiguum" Petri e le sue affinità sistematiche». Petri L. 380.

Bullettino bibliografico. — 99, 265, 439, 598, 787, 957.

C

Calcolo funzionale. — «I funzionali lineari delle funzioni di due variabili complesse». Fantappiè L. 216, 384, 710.

Chimica. — «Cellule albuminiche artificiali». Herrera L. A. 32.

— «Ricerche sopra i solfuri di molibdeno. – I. Le tensioni di zolfo del trisolfuro di molibdeno». Parravano N. e Malquori G. 19.

— «Ricerche sopra i solfuri di molibdeno. – II. Equilibrio di riduzione del bisolfuro di molibdeno a mezzo dell'idrogeno». Id. e Id. 23, 109.

— «Equilibrio di riduzione del bisolfuro di tungsteno a mezzo dell'idrogeno». Id. e Id. 189.

— «La riduzione del solfuro di argento a mezzo del carbone». Id. e Id. 367.

— «La demolizione termica dell'allumina Bayer». Id. Id. 706, 970.

— «L'allumina Blanc». Id. e Montoro V. 343, 885.

— «I sistemi: $Cd(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$; $ZN(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$; $Mg(NO_3)_2 - HNO_3 - H_2O$ a 20°». Malquori G. 146.

— «Dissociazione termica del nitrato di cadmio». Id. 249.

— «Il sistema $KCl - HCl - H_2O$ fra 0° e 80°». Id. 738.

— «Il sistema $AlCl_3 - HCl - H_2O$ fra 0° e 80°». Id. 740.

— «Il sistema $AlCl_3 - KCl - H_2O$ fra 0° e 80°». Id. 745.

— «Il sistema $KNO_3 - HNO_3 - H_2O$ fra 25° e 60°». Id. 753, 844.

— «Il sistema $KNO_3 - Al(NO_3) - H_2O$ a 0°, 40° e 60°». Id. 753, 846.

Chimica. — « I sistemi: $Pb(NO_3)_2$ — — $LiNO_3$ — H_2O e $Pb(NO_3)_2$ — $CsNO_3$ — H_2O a 25° ». Id. 495.

— « Azione dell'acido amminosolfonico sui composti non saturi ». Quilico A. 66, 141.

— « Ancora sulla dispersione rotatoria degli aspartati alchilici ». Mazza F. P. 148.

— « Sugli spettri d'assorbimento di alcuni coloranti indigoidi ». Piutti P. 251.

— « Ricerche sul fosfato e sul clorofosfato di piombo (piromorfite) ». Zambonini F. e Ferrari A. 192, 283.

— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - IX. Solfati di cerio (ceroso) e rubidio ». Id. e Restaino S. 372, 449.

— « Sul piombo piroforico ». Levi G. R. e Celeri A. 350.

— « Sul solfuro di zinco precipitato ». Id. e Fontana C. G. 413, 502.

— « Sul frazionamento delle miscele neodimosamariche ». Rolla L. e Fernandes L. 370.

— « Analisi coi raggi X e struttura cristallina delle leghe cadmio-argento ». Natta G. e Freri M. 406.

— « Spinelli del cobalto trivalente: cobaltito cobaltoso e cobaltito di zinco ». Id. e Strada M. 932, 1024.

— « Ricerche sui solfosali. - IV. I molibdovanadotioacquati ». Fernandes L. 414, 496.

— « Composti di addizione fra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche ». Scagliarini G. e Brasi E. 411, 509.

— « Considerazioni sopra uno studio critico del dottore F. P. Mazza ». Pagliarulo M. L. 577.

— « Distillazione nel vapore dei liquidi diversi dall'acqua. – I. Distillazione dell'acido borico nel vapore degli acidi del Roscoe ». Banchi G. 579.

— « Ricerche chimiche sull'olivina di Linosa (Isole Pelagie) ». Carobbi G. 654.

— « Ricerche sui solfosali. – V. Composti di addizione con l'urotropina ». Rodolico F. 579, 660.

Chimica. — « Sopra i diazocomposti ». Angeli A. 699.

— « Sopra la mobilità di alcuni atomi di alogeno ». Id. e Poggi R. 966.

— « Contributo alla conoscenza dei cobalti carbonati ». Barbieri G. A. 747.

— « Sulla stabilità del sesquiossido di rodio e del biossido di iridio ». Pastorello S. 754.

— « Glicoli biterziari ed alcuni loro derivati eterociclici ». Pace E. 757.

— « Il carbonato doppio di rame e sodio ». de Carli F. e Agostini P. 921.

— « Calori di formazione e di idratazione dei carbonati doppi di cobalto e potassio e di rame e sodio ». de Carli F. 932, 1033.

— « Calore di formazione dei cloruri doppi di rame e di potassio ». Agostini P. 933, 1030.

— « Costituzione chimica e potere rotatorio ». Berlingozzi S. 925.

— « Derivati della d. l. asparagina ». Id. 932, 1037.

— « Analisi di una piromorfite radioattiva di Gennammari (Sardegna) ». Misciattelli P. 929.

— « Sulla separazione con l'etere del torio dall'uranio ». Id. 933, 1019.

— « I fenomeni della caduta in massa e della sedimentazione ». Bozza G. 933.

Chimica fisica. — « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. – I. Analisi termica del sistema LiCl — $CoCl_2$ anidri ». Ferrari A. e Baroni A. 764, 848.

— « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. - II. Analisi termica del sistema di LiCl — $CdCl_2$ ». Id. e Id. 764, 932, 1040.

— « Elettronili simmetrici e molecole ». Vinassa de Regny P. 806, 880.

— « Elettronili simmetrici e molecole pluriatomiche ». Id. 975.

Chimica-fisica fisiologica. — « Azione del freddo sui grassi del latte ». Quagliariello G. 75.

Chimica fisiologica. — « Diverso contenuto in "fosfogeno" di muscoli striati a contrazione rapida e a contrazione torpida ». Martino G. 79.
— « Sulla composizione chimica di alcuni latticini italiani ». Settimj L. 432, 586.
— « La tabacina o il principio tossico del tabacco ». Barbieri N. A. 764.
— « La cultura fisiologica ». Id. 933, 1043.
Chimica organica. — « Alcuni derivati solforici di composti non saturi ». Quilico A. e Fleischner E. 932, 1050.
Commissioni (relazioni di). — 97, 262, 434, 596, 785.
Comunicazioni varie. — 597, 786.
Concorsi a premio. — 263, 435.

E

Elettrotecnica. — « Misura delle dissipazioni locali di energia entro una parte circoscritta del circuito magnetico ». Lombardi L. 877, 962.
Embriologia vegetale. — « Fenomeni di aposporia somatica, di aposporia goniale e di embronia avventizia in "Ochna multiflora" ». Francini E. 92.
Embriologia sperimentale. — « Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. – II. Sul differenziamento polare delle uova di "Arbacia punctulata" Grey, centrifugate subito dopo la fecondazione ». Pasquini P. 423, 590.
— « Osservazioni sul trapianto della vescicola ottica primaria in Rana esculenta sull'influenza dei diversi stadî embrionali nel successivo differenziamento ». Spirito A. 781.

F

Farmacologia. — « Ricerche farmocologiche col permanganato di sodio per iniezioni endovenose ». Sabbatani L. 113.
— « Fattori chimici che determinano la fissazione dei colloidi ». Spagnol G. 667.
— « Vaziazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica. – II. Calcio e farmaci convulsivanti ». Scremin L. 951, 1056.
Fisica. — « Velocità molecolari, stati d'eccitazione e probabilità di transizione in un gas degenere ». Persico E. 66, 137, 235.
— « La risonanza ottica secondo la meccanica omdulatoria ». Id. 921.
— « Sulla teoria del sistema periodico ». Fermi E. 66.
— « Policroismo e orientazione degli joni nei cristalli di terre rare ». Brunetti R. 238.
— « Sulle caratteristiche dei triodi a tensioni di griglia saturanti ». Lo Surdo A. 279.
— « Tensione anodica e temperatura del filamento nelle valvole termoioniche ». Id. 880.
— « Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. Applicazione alla teoria del sistema periodico degli elementi ». Id. 342.
— « Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo: Calcolo della correzione di Rydberg per i termini *s* ». Id. 726.
— « Sulla teoria dei satelliti di Rutherford ». Gentile G. 346.
— « Sui termini accentati del Calcio ». Id. 735, 910.
— « Su un nuovo modello di igrometro a compensazione ». Martinozzi L. 237, 389.
— « Su di un nuovo metodo per l'osservazione di piccolissime birifrangenze ». Todesco G. 394.
— « Contributo allo studio dei contatti imperfetti metallici ». Id. e Rossi B. 568.
— « Influenza della carica elettrica sulla conduttività di una pellicola metallica ». Pierucci M. 244, 400.
— « Sulle interferenze nelle propagazioni corpuscolari ». Ronchi V. 491.
— « Sopra l'allargamento delle righe spettrali ». Rasetti F. 561.
— « Sopra la meccanica ondulatoria di un atomo alcalino nel campo elettrico ». Id. 735, 839, 1010.

Fisica. — « Sopra il calcolo dei termini M per mezzo del potenziale statistico del l'atomo ». Id. 735, 915.
— « Sulla relatività a cinque dimensioni ». Carrelli A. 566.
— « Sulla larghezza di alcune righe dello spettro del Hg ». Id. 921, 1014.
— « Sul nuovo fenomeno di diffusione ». Id. 1018.
— « Un metodo interferenziale per la misura della suscettività magnetica dei liquidi ». Specchia O. 406, 574.
— « La fase della corrente di saturazione termoionica in un circuito a tensione pulsante ». Dei C. 576, 644.
— « Sui circuiti con valvola termoionica in saturazione derivata su un condensatore ». Id. 730.
— « A proposito di una influenza dei raggi X sulla cristallizzazione del bismuto ». Rostagni A. 649.
— « Sul funzionamento del triodo avente la placca e la griglia rilegate agli avvolgimenti di un trasformatore ». Corbino O. M. 706.
— « Sulla emissione elettronica in un tubo a vuoto ». Tieri L. e Ricca V. 720.
— « Polarimetria e fotometria elettrica ». Perucca E. 733.
— « Su di un fenomeno fotoelettrico constatabile con gli audion ». Majorana Q. 706, 801.
— « Altre constatazioni concernenti il fenomeno fotoelettrico degli audion ». Id. 877.
— « Nuovi contributi allo spettro del bromo nella scarica senza elettrodi ». Siracusano N. 735, 835.
— « Sulla dispersione anomala del Mercurio e del Litio ». Segrè E. e Amaldi E. 919.

Fisica matematica. — « Sopra gli integrali generali di alcune equazioni differenziali di fisica matematica ». Wataghin G. 66, 124.
— « Sulla propagazione di correnti elettriche stazionarie in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme ». Freda E. 716, 830.

Fisiologia. — « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Ulteriori osservazioni su ratti alimentati con dieta insufficiente aproteinica, acarboidrosica, iperlipinica. Importanza dell'emuntorio intestinale, nella resistenza al digiuno ». Galamini A. 251.
— « Azione sul ricambio azotato di ratti albini alimentati con dieta insufficiente subproteinica, sublipinica, ipercarboidrosica ». Id. 432, 526.
— « Valore alimentare della patata nei ratti albini ». Id. 589, 684.
— « Sul potere equilibratore reciproco di due soluzioni regolatrici di fosfati ». Comel M. 778, 947.
— « L'energia di crescenza della sterigmatocistiscugra ». De Caro L. 951.
— « Massa sanguigna, globuli rossi ed emoglobina in individui acclimatati in montagna ed al piano ». Herlitzka A. 979.
— « Esperienze sulla fissazione di colloidi provocata dal cloroformio ». Spagnol A. 952.

Fisiologia vegetale. — « Sopra le radiazioni mitogenetiche del Gurwitsch ». Petri L. 891.

G

Geodesia. — « Stazione astronomico-geodetica eseguita sul Monte Colma di Mombarone nell'agosto 1927 ». Barbieri U. 907.

Geochimica. — « L'inerzia geochimica degli elementi delle triadi ». Vinassa P. de Regny. 23.

Geofisica. — « La plasticità nei fenomeni di orogenesi ». Bossolasco M. 66.
— « Sulla definizione della gravità normale ». Somigliana C. 184.
— « Sulla gravità normale e la formola di Helmert ». Id. 531.
— « Per la spiegazione delle onde sismiche superficiali ». Oddone E. 910.
— « Una applicazione alle ricerche geofisiche della teoria di T. Levi-Civita relativa alla " influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico

di una corrente alternata parallela allo schermo ». Rostagni A. 1006.

Geologia. — « La serie dei terreni dal Priaboniano al Norico nei dintorni di Albenga »: Franchi S. 26.

— « Un eccezionale filone di porfirite augitica nelle dolomie triasiche dell'alta valle della Neva (Alpi Liguri). Id. 192.

— « La più giusta denominazione e la cartografia del Massiccio Cristallino sul quale è, in parte fondata la città di Savona ». Id. 372, 453.

— « La digitazione gneissica di Val Inferno (Gran Paradiso) e le sue relazioni con la massa frontale del ricoprimento quinto ». Dal Piaz G. B. 150.

— « Sulla geologia del gruppo della Grivola ». Id. 355, 414.

— « I terreni miocenici tra la valle del Senio e quella del Sillaro ». Principi P. 579.

— « Un interessante affioramento di lava a Petronella in Agro Romano ». Clerici E. 769.

Geometria. — « Una nuova generazione delle quadriche di Darboux ». Fubini G. 14.

— « Coordinate locali nella geometria proiettivo differenziale di una superficie: gli elementi unità ». Bortolotti E. 329.

— « Sur la courbe de Viviani ». Cesàro G. 363, 599.

— « Une interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif de l'hypersurface ». Kanitani Joyo. 906.

— « Sur une forme quadratique intrinsèque par rapport à l'hypersurface dans l'espace projectif à plusieurs dimensions ». Id. 906.

I

Idromeccanica. — « Ancora su di una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski ». Cisotti U. 17.

— « Osservazioni sulla nota di P. Straneo: "Intorno al teorema di Kutta-Joukowski" ». Id. e Finzi B., 538.

Idromeccanica. — « Complementi relativi al calcolo dell'azione dinamica di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita ». Raimondi E. 131.

— « Intorno al teorema di Kutta e Joukowski ». Straneo P. 229.

— « Sopra la Nota del prof. Pistolesi: "A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski" ». Rosenblatt A. 555.

— « Sui moti piani di un fluido incomprimibile, nei quali le linee di corrente sono isotachie ». Sbrana F. 561, 641.

— « Sul teorema di Kutta-Joukowshi ». Signorini S. 798, 823.

— « Sur le problème fondamental d'Hydrodynamique à deux dimensions ». Mouskhelichvili N. 823, 995.

Istogenesi. — « Sul significato della degenerazione della zona reticolare de surrene del neonato umano ». Pennacchietti M. 779.

— « Ricerche sulla istogenesi delle isole del Langerhans ». Lentati G. 952.

Istologia. — « Sulla esistenza di particolari cellule interstiziali nel connettivo dell'utero di topo ». Benazzi M. 259.

M

Matematica. — « Sugl'integrali algebrici semplici e doppi ». Severi F. 4, 9, 14, 101, 161.

— « Ancora sulle condizioni necessarie e sufficienti perchè una funzione intera sia di un certo genere e di un certo ordine anche in senso precisato ». Minetti S. 36, 215, 292.

— « Sulla crescenza delle funzioni intere di genere finito ». Id. 215.

— « Sur les valeurs de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ d'une function $f(x)$ à point de non-intégrabilité par rapport à $g(x)$ unique ». Young C. R. 43.

— « Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito ». V. Hlavatý 47.

Matematica. — « Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve piane in un punto di plesso ». Palozzi G. 52, 115.
— « Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve sghembe ». Id. 321.
— « Sul rotore dei tensori ». Cisotti U. 109, 169.
— « Sul concetto di tensore costante in varietà euclidee ». Id. 269.
— « Maggiore determinazione della relazione intercedente fra il rango e il tipo di un gruppo ». Scorza G. 173.
— « Sulle funzioni delle matrici ». Giorgi G. 178.
— « Sulla sufficienza delle equazioni differenziali della Fisica matematica ». Id. 543.
— « Fattori e indici nei gruppi lineari e nei gruppi normali d'operazioni ». Id. 543, 871.
— « Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici ». Id. 706.
— « Sui moti di deformazione dello spazio, rappresentati col calcolo delle matrici ». Id., e Porcu-Tortrini E. 877.
— « Sopra le coordinate geodetiche ». Nalli P. 195.
— « Sul parallelismo di Levi-Civita e sopra possibili estensioni ». Id. 228, 380.
— « Le matrici caratteristiche delle simmetrie sulle varietà abeliane reali ». Cherubino S. 199.
— « Le sostituzioni pseudo-normalizzanti e la normalizzazione nella teoria generale delle varietà abeliane reali ». Id. 380, 459.
— « Calcolo delle funzioni qualunque di matrici di second'ordine ». Porcu-Tortrini E. 206.
— « Sur un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait ». Lusin N. e Sierpinski W. 214.
— « Sulla equivalenza dei tensori ». Masotti A. 228, 296.
— « Sul concetto di tensore costante in varietà qualunque ». Id. 328, 457.
— « Una forma normale invariante della seconda variazione ». Berwald L. 228, 301.

Matematica. — « Il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito finito ». McConnel A. J. 208.
— « Il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito finito: caso di uno spazio Riemanniano ». Id. 306.
— « Sull'equazione di Laplace dello spazio iperbolico ». Ascoli G. 309.
— « Sulle quadriche dello spazio Riemanniano a tre dimensioni ». Burani G. 316.
— « Sulla quasicontinuità delle funzioni composte ». Scorza-Dragoni G. 326.
— « Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata ». Tonelli L. 272, 357.
— « Intorno ad una classe di funzionali continui ». Tortorici P. 384, 466.
— « Sul significato geometrico della derivazione intrinseca ». Pastori M. 339, 474.
— Sul parametro differenziale secondo generalizzato ». Colucci A. 479.
— « Sur l'écart géodésique, la courbure riemannienne et la courbure associée de Bianchi ». de Mira Fernandes A. 482.
— « Transports isoclines et dimentions associées ». Id. 980.
— « Espressione analitica delle grandezze fisiche discontinue o funzioni di variabili discontinue e diagrammi che ad esse corrispondono ». Laboccetta L. 552.
— « Riduzione della deformazione proiettiva di una superficie R alla trasformazione C^m delle superficie isoterme ». Calapso R. 617.
— « Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato ». Vitali G. 626.
— « Sopra le soluzioni periodiche a periodi grandissimi nella Meccanica ». Vranceanu G. 389, 630.
— « Quelques applications de la théorie des coordonnées géodésiques le long d'une courbe ». Dubourdeu J. 707.
— « Proprietà delle omografie assiali di un S_n euclideo con applicazione alle formole di Frenet ». Burgatti P. 706, 791.

Matematica. — « Omografie e differenziali relativi ad uno spazio curvo ». Boggio T. 715, 811.
— « Sulle varietà V_n che contengono un campo vettoriale costante ». Palatini A. 899.
— « Sui tensori costanti associati a varietà binarie e ternarie ». Id. 905.
— « Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili ». Caccioppoli R. 817, 901.
— « Sulla definizione dell'area di una superficie ». Id. 906.
— « Sul problema della risoluzione apiristica delle congruenze di grado qualunque rispetto ad un modulo primo e la risoluzione apiristica delle congruenze di quarto grado ». Sansone G. 905.
— « Complementi alla Nota " Sopra l'interpolazione a mezzo di funzioni olomorfe in un semipiano " ». Bernstein V. 979.
Meccanica. — « A proposito di una supposta eccezione al teorema di Kutta-Joukowski ». Pistolesi E. 53.
— « Sullo scostamento geodetico nelle varietà analonome ». Vranceanu G. 134.
— « Limiti superiori del cimento dinamico ». Krall G. 223.
— « Limiti del cimento dinamico nei sistemi dissipativi ». Id. 556.
— « Sul peso delle strutture aeronautiche ». Crocco G. A. 184, 273.
— « Sulla resistenza e sulla rigidezza a torsione delle ali degli aeroplani ». Id. 543.
— « Sulla rigidezza a torsione delle ali degli aeroplani ». Id. 611.
— « Sulla teoria balistica della luce ». Cabras A. 389.
— « Una interpretazione espressiva delle condizioni di Saint-Venant sulle deformazioni infinitesime ». Cisotti U. 364.
— « A proposito di due recenti Note di M. Pascal ». Id. 801.
— « La lastra piana e la legge di Kutta-Joukowski ». Ferrari C. 487, 715, 821.
— « Sul problema dell'equilibrio elastico dei corpi girevoli a contorno cilindrico ». Gugino E. 633.
Meccanica. — « Sul profilo dei corpi ruotanti la cui deformazione non resta turbata quando si decompongano in tronchi mediante piani normali all'asse ». Id. 823, 980.
— « Omografia e differenziali relativi ad uno spazio curvo ». Boggio T. 715.
— « Identità di Bianchi e omografia di gravitazione ». Id. 715.
— « L'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo ». Id. 715.
— « Spazi curvi a tre dimensioni ed omografia di Ricci ». Id. 994.
— « Il principio dell'azione stazionaria e stabilità in un campo statico gravitazionale ». McConnel A. J. 638.
— « Studio del campo elettrico nei mezzi omogenei anisotropi ». Rossi B. 715.
— « Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche e alle sue applicazioni tecniche ». Colonnetti G. 715, 817, 907
— « Sulle condizioni del Saint-Venant relative alla deformazione dei mezzi naturali. (Estratto da una lettera al professore Cisotti) ». Crudeli U. 906.
— « Espressione asintotica di una formula del Levi-Civita ». Signorini A. 907.
— « Sulle onde progressive di tipo permanente nelle vasche circolari ». Geppert H. 823, 988.
— « Sugli invarianti adialitici di un generico sistema differenziale ». Id. 994.
— « Sur la composition de seconde espèce ». Delsarte J. 980.
Meteorologia. — « Sul regime anemologico del Golfo della Spezia ». Bilancini R. 238.
— « Ancora sugli andamenti periodici della temperatura media diurna a Modena ». Baruzzi M. 736.
Mineralogia. — « La Datolite di Toggiano ». Grill E. 251.
— « Nuove ricerche sulle trasformazioni della scolecite ». Cavinato A. 586, 670.

N

Necrologie. — Commemorazione del Socio Cerulli V. 262.

Necrologie. — Annunzio della morte dei Soci Stranieri Lorentz E., Marchand F. e de Groth P. e del Socio Nazionale Abetti A. 433.
— Annunzio della commemorazione del Socio onorario Diaz A., maresciallo d'Italia. 433.
— Commemorazione del Socio Straniero Henneguy F. 433.
— Annunzio della commemorazione del Socio Artini E. 596.
— Commemorazione del Socio de Groth P. 596.
— Annunzio della morte del Socio E. Artini e del Corrisp. Segrè C. 596, 597.
— Commemorazione del Corrisp. Bagnera G. 785.
— Annunzio della morte del Corrisp. Brugnatelli L. 785.

P

Patologia. — « Sull'estirpazione del fegato (due nuovi metodi) ». Perroncito A. 896.
Patologia vegetale. — « Azione di forti dosi di raggi γ sopra il " B. Tumefaciens " Smith et Towsend ». Rivera V. 867.
Petrografia. — « Diabasi e rocce filoniane melanocrate della Sardegna ». Panichi U. 71.

T

Talassografia. — « Sulla circolazione dell'Adriatico meridionale ». Castiglioni B. 854.

Z

Zoologia. — « Ricerche anatomo-fisiologiche sul significato del pancreas intraepatico nei Teleostei ». Brunelli G. 83.
— « Su di un rarissimo Cetaceo spiaggiato nel litorale di Nettuno ». Id. e Fasella G. 85.
— « I corpuscoli del tuorlo e la loro cultura *in ager* ». Pierantoni U. 195.
— « Sulla esistenza di reti nervose diffuse con significato espansionale nei rettili ». Stefanelli A. 945.

3 8198 304 935 917
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO